Vlastnosti pravděpodobnosti, geometrická pravděpodobnost

1. Přátelé Igor a Dano si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že se jim podaří setkat se?

2. Na úsečce délky l jsou náhodně umístěny body, které tuto úsečku rozdělí na tři části. S jakou pravděpodobností je možné z takto vzniklých tří úseček sestrojit trojúhelník?

3. Uvažujme kružnici a zvolme náhodně tětivu této kružnice. Jaká je pravděpodobnost, že délka této tětivy bude větší než délka strany rovnostranného trojuhelníka vepsaného do této kružnice?

4. Pravděpodobnost, že ve vlaku není místo k sezení, je 0.2 a pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě, je 0.3. Pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě nebo v něm není místo k sezení, je 0.4.

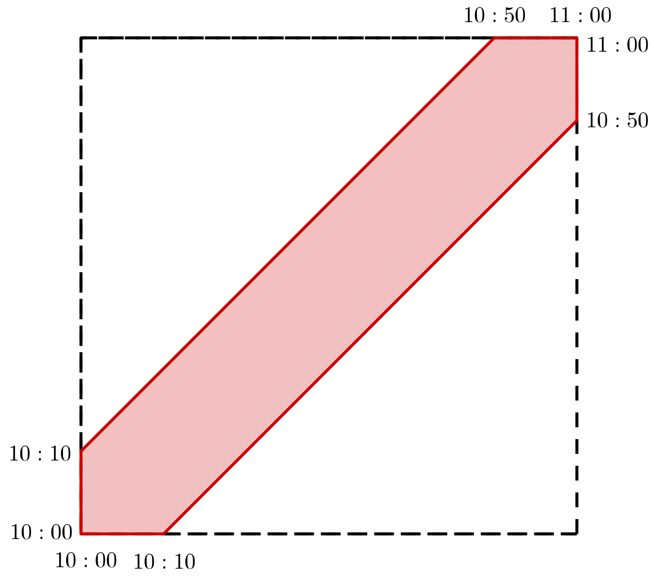
   (a) S jakou pravděpodobností vlak přijede na čas, ale nebudete si v něm moci sednout?

   (b) S jakou pravděpodobností vlak přijede včas a ještě si v něm můžete sednout?

Řešení

1. Každou možnou dvojici časů příchodů lze popsat pomocí bodu $[x, y] \in [10, 11]^2$ (první souřadnice popisuje čas příchodu Igora a druhá čas příchodu Dana). Dano s Igorem se potkají, je-li $|x - y| \leq \frac{1}{6}$ (viz obrázek 1, oblast vyznačená červeně). Tedy $|\Omega| = 1^2 = 1$ ... velikost čtverce $[10, 11]^2$, $|A| = \frac{2}{6} \cdot 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$ a

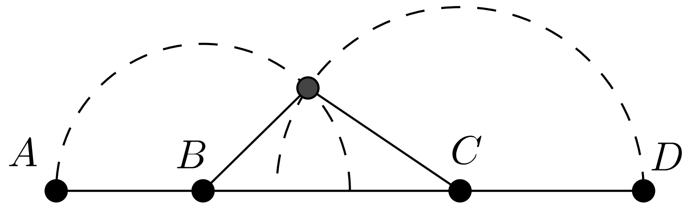
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}.$$

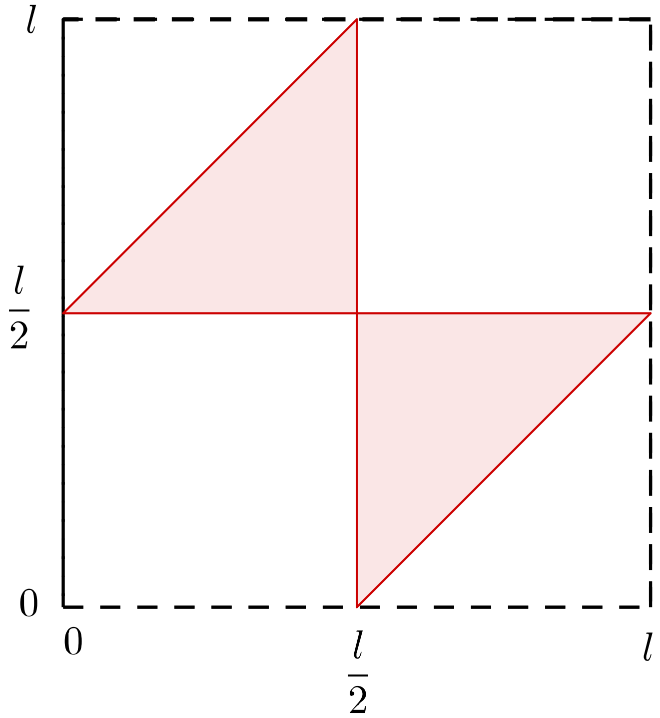


Obrázek 1:
Čtverec vyznačuje množinu všech jevů, které mohou nastat, červeně vyznačená oblast označuje množinu takových dvojic časů příchodů Dana s Igorem, že se oba na smluveném místě potkají.

2. Úsečku AD rozdělme dvěma body B a C na tři části a označme x délku úsečky AB a y délku úsečky AC. Pak aby bylo možné z takto vzniklých úseček sestrojit trpjúhelník, tak musí být $\min\{x, y\} < \frac{l}{2}$, $|y - x| < \frac{l}{2}$ a $l - \max\{x, y\} < \frac{l}{2}$. Tedy prostor všech možných jevů je popsán čtvercem $[0, l]^2$ a oblast příznivých jevů nerovnostmi nahoře (na obrázku 2 znázorněna červeně). Proto $|\Omega| = l^2$, $|A| = \left(\frac{l}{2}\right)^2$, a tedy

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$



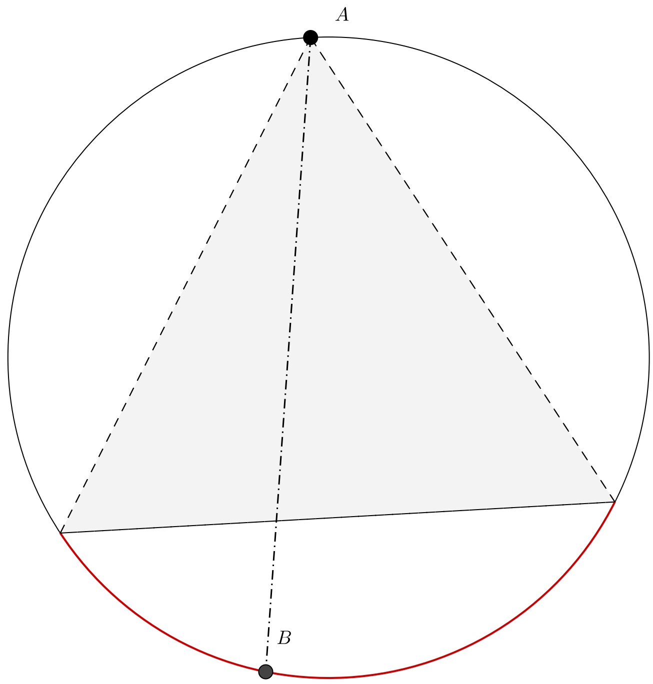


Obrázek 2:
Čtverec vyznačuje množinu všech jevů, které mohou nastat, červeně vyznačená oblast označuje množinu takových dvojic časů příchodů Dana s Igorem, že se oba na smluveném místě potkají.

3. Uvažujme kružnici o poloměru $R > 0$.

   I. Využijeme toho, že každá tětiva je jednoznačně určena dvojicí bodů na kružnici. Zvolíme-li první náhodně, pak druhý musí ležet v nejvzdálenější třetině kružnice (viz obrázek 3, oblast vyznačená červeně). Tedy Ω je reprezentováno celou kružnicí a oblast příznivých jevů jednou třetinou kružnice. Pak $|\Omega| = 2\pi R$, $|A| = \frac{2\pi R}{3}$ a

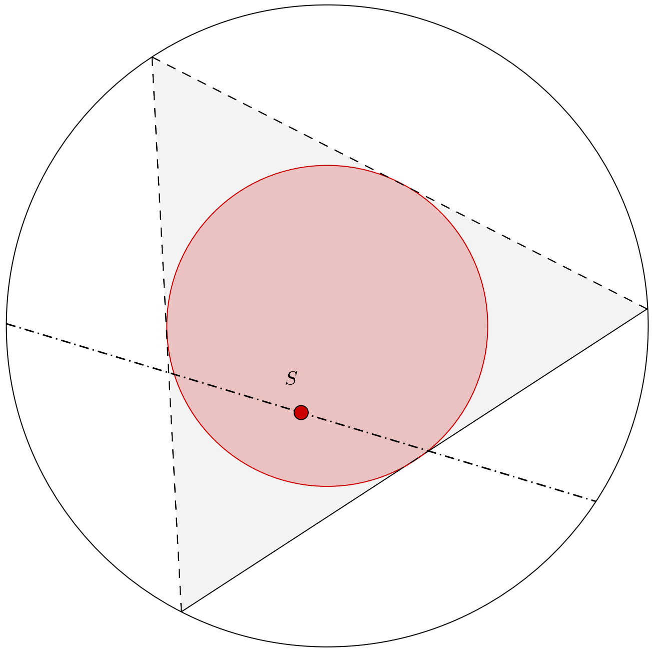
$$P(A) = \frac{1}{3}.$$



Obrázek 3:
První náhodně zvolený konec tětivy označíme A, pak oblast příznivých jevů ja označena červeně. Bod B je druhý náhodně zvolený konec tětivy (ta je vyznačena čerchovanou čarou). Rovnostranný trojúhelník vepsaný kružnici je vyznačen čárkovaně.

II. Každá tětiva je také jednoznačně určena svým středem (až na situaci, kdy střed tětivy leží ve středu kružnice. Tento jev má ale nulovou prvděpodobnost a lze ho tedy při výpočtu zanedbat). Jelikož kružnice vepsaná k uvažovanému trojúhelníku má poloměr $\frac{R}{2}$, tak oblast příznivých jevů je popsána body uvnitř této menší kružnice (viz obrázek 4). Proto $|\Omega| = \pi R^2$, $|A| = \frac{\pi R^2}{4}$ a
$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

III. Každá tětiva je rovněž určena vzdáleností od středu a úhlem, který svírá s osou x (na obrázku uvažujeme pro jednoduchost kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic). Jelikož o délce tětivy rozhoduje pouze její vzdálenost od středu a na úhlu otočení tato délka nezávisí, lze Ω popsat pomocí bodů v intervalu $[0, R]$, oblast pžíznivých jevů intervalem $[0, \frac{R}{2}]$, a tedy
$$P(A) = \frac{1}{2}.$$



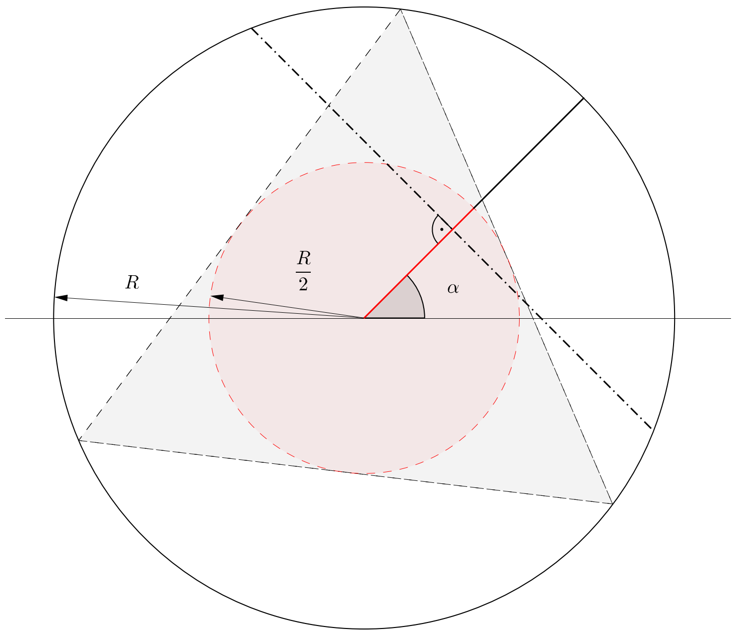
Obrázek 4:
Bod S vyznačuje střed tětivy (tětiva je vyznačena čerchovanou čarou). Oblast příznivých jevů je vyznačena červeně.

I když se na první pohled zdá, že jsou tato řešení ve vzájemném rozporu, problém je v nejednoznačnosti zadání této úlohy. Každá z uvedených variant prezentuje jednu z možností náhodných voleb tětivy, ale tyto možnosti nejsou stejné a to vede k různosti výsledků. Úloha je tedy nepřesně zadána. Proto nelze ani jednu z prezentovaných variant řešení označit za lepší či správnější, pokud předem nekonkretizujeme zadání úlohy.

4. Označme N jev, že ve vlaku není místo k sezení, a Z jev, že vlak bude mít zpoždění, pak $P(N) = 0.2, P(Z) = 0.3$ a $P(N \cup Z) = 0.4$. Tedy $P(N \cap Z) = P(N) + P(Z) - P(N \cup Z) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1$

   (a)
   $$P(A) = P(Z^c \cap N) = P(N) - P(Z \cap N) = 0.2 - 0.1 = 0.1.$$

   (b)
   $$P(A) = P((N \cup Z)^c) = 1 - 0.4 = 0.6.$$



Obrázek 5:
Značení je podobné jako u předchozích obrázků. Při konkrétní volbě úhlu α je množina středů tětiv určena úsečkou délky R. Polovina úsečky (vyznačena červeně) určuje tětivy delší než délka strany trojúhelníka vyznačeného čárkovanou čarou.