Klasická pravděpodobnost

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   (a) padnou čtyři různá čísla,
   (b) padnou pouze lichá čísla,
   (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
   (d) součet čísel bude větší než 5,
   (e) padne alespoň jedna šestka.

2. V regálu je 6 lahví normálního rumu a 4 lahví pančovaného rumu (vizuálně k nerozeznání). Náhodně vybereme z regálu 3 lahve a z každé ochutnáme. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) byl právě ve dvou námi ochutnaných lahvích metanol,
   (b) byl alespoň v jedné námi ochutnané lahvi metanol.

3. Na svazku máme 8 různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Vyzkoušený klíč vždy dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme až na pátý pokus?

4. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (s již nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b $\star$) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.

5. Do vlaku s n vagóny nastupuje r cestujících. Předpokládejme, že každý člověk si vybírá vagón zcela náhodně.
   (a) Určete, s jakou pravděpodobností bude v prvním vagóně právě $k \leq r$ cestujících.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že žádný vagón nebude prázdný?
   (c $\star$) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty, r \to \infty$ tak, že $\frac{r}{n} \to \lambda > 0$.

6. Babička rozděluje r tisícikorun do n obálek pro svých n vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).
   (a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Karel dostane právě k tisícikorun.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že každé z vnoučat dostane alespoň nějaké peníze?
   (c $\star$) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

Opakování

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$
kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)
$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Řešení

1.(a) $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4} = \frac{5}{18}$,

(b) $\frac{3^4}{6^4} = \frac{1}{16}$,

(c) možnosti, jak dostat součet šest jsou: $1+1+1+3$ a $2+2+1+1$ (až na pořadí). První součet lze dosáhnout čtyřmi způsoby, druhý šesti. Tedy $P(A) = \frac{\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{10}{6^4}$,

(d) označme $(S = k)$ jev, že součet čísel bude k a dále označme A^c jev, že součet bude pět, či méně, pak $P(A^c) = P(S=5) + P(S=4) = \frac{4}{6^4} + \frac{1}{6^4}$, tedy $P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{6^4-5}{6^4}$,

(e) označme A^c jev, že nepadne žádná šestka, pak $P(A^c) = \frac{5^4}{6^4}$, tedy $P(A) = \frac{6^4-5^4}{6^4}$.

2.(a) $\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$,

(b) $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{4}{2}+\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{\binom{6}{4}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{8}$.

3. $\frac{1}{8}$.

4.(a) Označme A_i jev, že i-tý dopis bude ve správné obálce, pak $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$ pro $i \neq j$ atd. Pak

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ...(-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$
$$= n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - ...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\frac{1}{i!}.$$

(b $\star$) Jelikož $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, pak

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i!} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = -(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}+1-1) = -(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}-1) = 1-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = 1-e^{-1}.$$

5.(a) Nejdříve vybereme k cestujících, kteří budou v prvním vagónu. To lze udělat $\binom{r}{k}$ způsoby. Ostatní cestující rozdělíme rovnoměrně náhodně do dalších vagónů. Tedy $P(A) = \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}$.

(b) Označme A_i jev, že i-tý vagón bude prázdný, pak $P(A_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^r}{n^r}$ pro $i \neq j$ ..., tedy

$$P(A^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ...(-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$
$$= n\frac{(n-1)^r}{n^r} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)^r}{n^r} + ...(-1)^{n+1}\cdot 0 = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(n-i)^r}{n^r}.$$

Tedy

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(n-i)^r}{n^r} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\binom{n}{i}\frac{(n-i)^r}{n^r}.$$

(c ⋆)

$$\begin{aligned}\lim_{n,r\to\infty,r/n\to\lambda}\frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r} &= \lim_{n,r\to\infty,r/n\to\lambda}\frac{\binom{r}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r}{(n-1)^k}\\ &= \lim_{n,r\to\infty,r/n\to\lambda}\frac{\binom{r}{k}}{(n-1)^k}\cdot\lim_{n,r\to\infty,r/n\to\lambda}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\cdot\frac{r}{n}}\\ &= e^{-\lambda}\lim_{n,r\to\infty,r/n\to\lambda}\frac{r(r-1)...(r-k+1)}{(n-1)^k k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.\end{aligned}$$

6. (a) Jednotlivá rozdělení r tisícikorun do n obálek lze popsat pomocí uzpořádané $n+r-1$-tice prvků, kde r prvků je jednoho tipu (tisícikoruny) a $n-1$ prvků druhého tipu (hranice, oddělující jednotlivé obálky), viz obrázek 1. Počet všech možností je tedy $\binom{r+n-1}{n-1}$. Počet příznivých jevů je $\binom{r+n-k-2}{n-2}$, tedy výsledná pravděpodobnost je

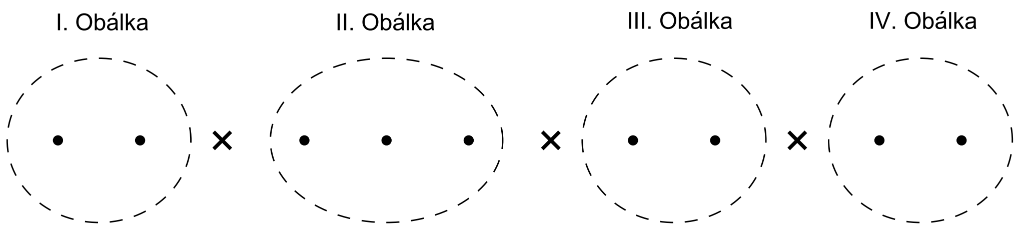
$$P(A) = \frac{\binom{r+n-k-2}{n-2}}{\binom{r+n-1}{n-1}}.$$

(b)

$$P(A) = \frac{\binom{r-1}{n-1}}{\binom{r+n-1}{n-1}}.$$

(c ⋆)

$$\begin{aligned}\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{\binom{r+n-k-2}{n-2}}{\binom{r+n-1}{n-1}} &= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{(r+n-k-2)!(n-1)!r!}{(r+n-1)!(n-2)!(r-k)!}\\ &= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{(n-1)r\cdot...(r-k+1)}{(r+n-1)\cdot...\cdot(r+n-k-1)}\\ &= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{n-1}{r+n-1}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r-i}{r+n-2-i}\\ &= \left(\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{n-1}{r+n-1}\right)\prod_{i=0}^{k-1}\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{r-i}{r+n-2-i}\\ &= \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}}.\end{aligned}$$



Obrázek 1:
Jednotlivé obálky jsou znázorněny čárkovanou čarou, tisícikoruny černým puntíkem a křížek označuje hranici mezi obálkami.