

4. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(A) Necht' $X = L_4([0, 1])$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} . Uvažujme předpisy

$$T_1(f) = \int_0^1 (f(t))^2 dt,$$

$$T_2(f) = \int_0^1 f(t^2) dt.$$

(1 bod) Zjistěte, zda T_1 definuje prvek X^* .

(2.5 bodu) Zjistěte, zda T_2 definuje prvek X^* .

(2.5 bodu) Spočítejte normu T_2 , pokud se jedná o prvek X^* .

(4 body) Ukažte, že pokud Z je reflexivní Banachův prostor a $f \in Z^*$, pak f nabývá své normy.
(Návod: Uvažujte Důsledek 100 Hahn-Banachovy věty.)

(B) Necht' $X = L_{10}([0, 2\pi])$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} . Uvažujme funkci

$$g(x) = \max\{\sin x, 0\}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

a předpis

$$Tf(x) = g(x)f(x) \quad x \in [0, 2\pi].$$

(1 bodu) Ukažte, že X má nekonečnou dimenzi.

(2 bodu) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X .

(2.5 bodu) Nalezněte bodové spektrum T .

(3.5 bodu) Nalezněte spektrum T .

(1 bod) Zjistěte, zda je T kompaktní.