

2. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(A) Necht' $X = L_2([-1, 1])$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$ a $Y = \text{span}\{f_1, f_2\} \subset X$ uvažované jako prostory nad \mathbb{C} .

(4 body) Nalezněte nějakou ortonormální bázi prostoru Y .

(2 body) Je-li $f_3(x) = x$, spočtěte $\text{dist}(f_3, Y)$ a nalezněte $g \in Y$ splňující $\text{dist}(f_3, Y) = \|f_3 - g\|$.

(4 body) Je-li Z Banachův prostor nad \mathbb{C} a $P \in \mathcal{L}(Z)$ je projekce různá od 0 a I , pak ukažte, že $\sigma_p(P) = \sigma(P) = \{0, 1\}$.

(B) Necht' $X = L_2([0, 1])$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} . Uvažujme předpis

$$Tf(x) = \int_0^x tf(t) dt.$$

(1 bod) Ukažte, že X má nekonečnou dimenzi.

(2 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X .

(2 body) Zjistěte, zda je T kompaktní.

(4 body) Nalezněte bodové spektrum T .

(1 bod) Nalezněte spektrum T .