

1. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

- (1) Necht' $X = C([-π, π])$ a $Y = L_∞([-π, π])$ uvažované jako prostory nad \mathbb{R} . Uvažujme pro $k \in \mathbb{Z}$ předpis

$$\varphi_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\sin t)^k dt.$$

- (5 bodů) Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $\varphi_k \in X^*$. Spočítejte v těchto případech normu φ_k a zjistěte, zda se jí nabývá (normu stačí vyjádřit v integrálním tvaru).

- (3 body) Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $\varphi_k \in Y^*$. Spočítejte v těchto případech normu φ_k a zjistěte, zda se jí nabývá (normu stačí vyjádřit v integrálním tvaru).

- (2 body) Pro ta $k \in \mathbb{Z}$, kdy je $\varphi_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý funkcionál, spočítejte adjungovaný operátor $(\varphi_k)^*$ uvažovaný v rámci standardních dualit.

- (2) Necht' $X = \ell_2(\mathbb{N})$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} . Uvažujme předpis

$$T((x_n)_{n=1}^\infty) = \left(x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \frac{1}{6}x_6, \frac{1}{7}x_7, \dots \right).$$

- (1 bod) Ukažte, že X má nekonečnou dimenzi.

- (2 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X .

- (2 body) Zjistěte, zda je T kompaktní.

- (4 body) Nalezněte bodové spektrum T .

- (1 bod) Nalezněte spektrum T .