Matematická analýza

L. Pick a J. Spurný

7. února 2011

Obsah

1 Matematická analýza 1a **7**
1.1 Výroky, důkazové techniky a množiny . . . 7
1.1.1 Výroková a predikátová logika . . . 7
1.1.2 Základní typy důkazů . . . 9
1.1.3 Množiny a množinové operace . . . 9
1.1.4 Zobrazení a funkce . . . 11
1.2 Reálná a komplexní čísla . . . 13
1.2.1 Reálná čísla . . . 13
1.2.2 Komplexní čísla . . . 15
1.3 Mohutnosti množin . . . 15
1.4 Limity posloupností reálných čísel . . . 16
1.4.1 Úvod . . . 16
1.4.2 Vlastní limita posloupnosti . . . 17
1.4.3 Nevlastní limita posloupnosti . . . 18
1.4.4 Monotónní posloupnosti a hlubší věty o posloupnostech . . . 20
1.5 Řady reálných čísel . . . 21
1.5.1 Úvod . . . 21
1.5.2 Kritéria konvergence řad . . . 23
1.6 Reálné funkce jedné reálné proměnné . . . 25
1.6.1 Základní definice . . . 25
1.6.2 Věty o limitách. . . . 27
1.6.3 Funkce spojité na intervalu . . . 29
1.6.4 Derivace reálné funkce . . . 30
1.6.5 Elementární funkce . . . 34
1.6.6 Konvexní a konkávní funkce, inflexní body . . . 36
1.6.7 Průběh funkce . . . 37

2 Proseminář z kalkulu 1a **39**
2.1 Téma 1: Metody důkazů, nerovnosti, zobrazení, logika . . . 39
2.2 Téma 2: Vlastnosti reálných čísel, mohutnost množin . . . 40
2.3 Téma 3: Infimum a limita posloupnosti . . . 41
2.4 Téma 4: Číselné řady s nezápornými členy . . . 43
2.5 Téma 5: Limita funkce . . . 45
2.6 Téma 6: Derivace . . . 47
2.7 Téma 7: Věty o střední hodnotě a L'Hospitalovo pravidlo . . . 48
2.8 Téma 8: Elementární funkce . . . 49
2.9 Téma 9: Základní vlastnosti polynomů . . . 50
2.10 Téma 10: Konvexita, průběh funkce . . . 52

3 Matematická analýza 1a - cvičení **53**
3.1 Téma 1: Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce . . . 53
3.2 Téma 2: Výroky, kvantifikátory, zobrazení, supremum a infimum . . . 54
3.3 Téma 3: Limita posloupnosti reálných čísel . . . 55
3.4 Téma 4: Vyšetřování konvergence číselných řad . . . 58
3.5 Téma 5: Limita funkce . . . 59
3.6 Téma 6: Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě . . . 63

3.7 Průběh funkce 67

4 Matematická analýza 1b **69**
4.1 Taylorovy polynomy a řady 69
4.1.1 Polynomy 69
4.1.2 Taylorovy polynomy a věty o zbytku 69
4.1.3 Symbol malé o 70
4.1.4 Taylorovy řady 71
4.2 Číselné řady II. 71
4.2.1 Neabsolutně konvergentní řady 71
4.2.2 Přerovnání řad 72
4.2.3 Součin řad 72
4.2.4 Zobecněné řady 73
4.3 Mocninné řady 74
4.4 Primitivní funkce 76
4.4.1 Základní vlastnosti 76
4.4.2 Integrace racionálních funkcí 77
4.4.3 Některé substituce 78
4.5 Riemannův integrál 78
4.5.1 Definice a základní vlastnosti 78
4.5.2 Existence Riemannova integrálu 80
4.5.3 Vlastnosti Riemannova integrálu 80
4.6 Newtonův integrál 81
4.6.1 Definice a základní vlastnosti 81
4.6.2 Existence $(N)\int$ a vztah k $(R)\int$ 82
4.6.3 Konvergence Newtonova integrálu 83
4.6.4 Věty o střední hodnotě 83
4.6.5 Aplikace určitého integrálu 83
4.7 Metrické prostory 85
4.7.1 Definice a základní vlastnosti 85
4.7.2 Kompaktní množiny 88
4.7.3 Zajímavost: charakterizace riemannovsky integrovatelných funkcí 89
4.7.4 Spojitá zobrazení 89

5 Proseminář z kalkulu 1b **91**
5.1 Téma 1: Taylorův polynom 91
5.2 Téma 2: Číselné řady s reálnými členy 92
5.3 Dobrovolná vsuvka: Kummerovo kritérium konvergence řad a jeho důsledky 93
5.4 Téma 3: Mocninné řady 94
5.5 Pro zajímavost: Nekonečné součiny 95
5.6 Téma 4: Primitivní funkce 95
5.7 Téma 5: Určitý integrál 97
5.8 Téma 6: Newtonův integrál 98
5.9 Téma 7: Limitní přechody v Riemannově integrálu 99
5.10 Téma 8: Aplikace určitého integrálu 100
5.11 Téma 9: Věty o střední hodnotě 100
5.12 Téma 10: Integrální kritérium konvergence řad 101
5.13 Téma 11: Integrální tvar zbytku Taylorova polynomu 101
5.14 Téma 12: Metrické prostory 101

6 Matematická analýza 1b - cvičení **103**
6.1 Téma 1: Taylorův polynom 103
6.2 Téma 2: Číselné řady s reálnými členy 104
6.3 Téma 3: Mocninné řady 105
6.4 Téma 4: Primitivní funkce 106
6.5 Téma 6: Určitý integrál 109
6.6 Téma 7: Aplikace určitého integrálu 110
6.7 Téma 8: Konvergence Newtonova integrálu 112

6.8 Téma 9: Integrální kritérium konvergence řad 112

Kapitola 1

Matematická analýza 1a

1.1 Výroky, důkazové techniky a množiny

1.1.1 Výroková a predikátová logika

Definice 1.1.1. *Logika* je věda o formální správnosti výroků. *Výrok* je dobře zformulované tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je pravdivé nebo není.

Příklady.

- Obloha je modrá. (Je výrok.)
- Nový Bydžov je hlavní město Kanady. (Je výrok.)
- Ahoj! (Není výrok.)
- Kéž by už byl konec hodiny! (Není výrok.)
- 2^π je iracionální číslo. (Neví se, ale je to výrok.)

Definice 1.1.2. Definujeme následující *logické spojky a operace*:

- *konjunkce* $A \& B$: platí oba výroky A i B zároveň;
- *disjunkce* $A \vee B$: platí alespoň jeden z výroků A a B;
- *implikace* $A \implies B$: platí-li výrok A, pak také platí výrok B (říkáme, že A je *postačující podmínka* pro B a B je *nutná podmínka* pro A);
- *ekvivalence* $A \iff B$: výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B (říkáme, že A je *nutná a postačující podmínka* pro B);
- *negace* $\neg A$: výrok A neplatí.

Poznámky.

(1) Logická spojka *nebo* (disjunkce) není *vylučující*, tj. disjunkce zůstává v platnosti i když platí oba výroky A a B.

(2) Je-li premisa implikace A nepravdivá, pak implikace platí vždy bez ohledu na platnost důsledku B (jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne cokoli).

Definice 1.1.3. *Výroková funkce* $V(x_1, \dots, x_n)$ (též *výroková forma* nebo *predikát*) je výraz, z něhož vznikne výrok poté, co do něj dosadíme prvky z daných množin $A_1, \dots, A_n$ za proměnné $x_1, \dots, x_n$.

Příklad. Výroková funkce $V(x)$: $x < 3$. Pak platí $V(2)$, ale neplatí $V(5)$.

Definice 1.1.4. *Kvantifikátory:*

- velký (též všeobecný), značíme $\forall$, čteme "pro každé";
- malý (též existenční), značíme $\exists$, čteme "existuje".

Příklad. Obecný zápis

$$\forall\, x \in M \quad \exists\, y \in N \quad \forall\, a, b \in I : \quad V(x, y, a, b)$$

čteme "pro každé $x \in M$ existuje $y \in N$ takové, že pro každé $a, b \in I$ platí výrok $V(x, y, a, b)$"

Úmluva 1.1.5. Zápis $\forall x \in M : V(x)$ znamená $\forall x \in M \implies V(x)$ a zápis $\exists x \in M : V(x)$ znamená $\neg(\forall x \in M : \neg V(x))$.

Poznámka. Výrok

- $\forall x \in M,\ A(x)\colon B(x)$ znamená $\forall x \in M\colon A(x) \implies B(x)$;
- $\exists x \in M,\ A(x)\colon B(x)$ znamená $\exists x \in M\colon A(x)\&B(x)$;
- $\forall x \in M\ \forall y \in N\colon V(x,y)$ znamená $\forall x \in M\ (\forall y \in N\colon V(x,y))$;
- $\forall x \in M\ \exists y \in N\colon V(x,y)$ znamená $\forall x \in M\ (\exists y \in N\colon V(x,y))$.

Poznámka 1.1.6. Kvantifikátory stejného typu lze libovolně přehazovat, například

$$\forall x\ \forall y\colon V(x,y) \iff \forall y\ \forall x\colon V(x,y) \iff \forall x,y\colon V(x,y).$$

Na druhé straně ale kvantifikátory různého typu není možno volně přehazovat, aniž by se změnil smysl výroku. Výrok

$$\exists x\ \forall y : \quad V(x,y)$$

sice implikuje výrok

$$\forall y\ \exists\ x\colon V(x,y),$$

ale opačná implikace obecně neplatí. Například výrok

$$\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

platí, ale

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

nikoli.

Poznámka. Platí:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M\colon V(x)) &\iff \exists x \in M\colon \neg V(x);\\ \neg(\exists x \in M\colon V(x)) &\iff \forall x \in M\colon \neg V(x);\\ \neg(\forall x \in M, A(x)\colon B(x)) &\iff \exists x \in M\colon A(x)\&\neg B(x). \end{aligned}$$

Cvičení. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y. Zkoumejte platnost výroků

$$\begin{aligned} &\forall x \in M\ \exists y \in M\colon W(x,y);\\ &\forall y \in M\ \exists x \in M\colon W(x,y);\\ &\exists x \in M\ \forall y \in M\colon W(x,y);\\ &\exists y \in M\ \forall x \in M\colon W(x,y). \end{aligned}$$

Příklad. Platí

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (z > y \implies z > x)) \iff (\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon (z > y\ \&\ z \leq x))\,.$$

——————konec přednášky 1:29.9. Luboš Pick——————————————-

Definice 1.1.7. Zápis

$$\exists!\ x \in M\colon V(x)$$

čteme "existuje právě jedno $x \in M$, pro které platí výrok $V(x)$". Příklad:

$$\forall x \geq 0\ \exists!\ y \geq 0\colon y^2 = x.$$

Problém 1.1.8. Znegujte výrok: Každý si rád dá jedno pivo, ale ne vždy a ne v každé hospodě.

1.1.2 Základní typy důkazů

- **Důkaz přímo:** Při důkazu výroku $\forall x \in M\colon V(x)$ postupujeme takto:

  1. krok: zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné.

  2. krok: postupnými dedukcemi vyvozujeme $V(x)$;

  zatímco při důkazu výroku $\exists\, x \in M\colon V(x)$ máme dvě možnosti:

  buď najdeme nějaké $x_0 \in M$, pro které platí $V(x)$

  nebo takové $x_0 \in M$ nenajdeme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat.

- **Důkaz nepřímo:** Místo $\forall x \in M\colon V(x)$ dokážeme $\neg V(x) \Rightarrow x \notin M$. Podobně místo $A \Rightarrow B$ dokážeme $\neg B \Rightarrow \neg A$.

- **Důkaz sporem:** Chceme dokázat $a \implies b$. Předpokládáme $a\&\neg b$ a najdeme výrok v tak, že $(a\&\neg b) \implies (v\&\neg v)$.

- **Důkaz rozborem případů.**

——————konec přednášky 1:30.9. Jiří Spurný————————————-

- **Důkaz matematickou indukcí:** Při důkazu tvrzení $\forall n \in \mathbb{N}\colon V(n)$ dokážeme nejprve $V(1)$ a potom $\forall n \in \mathbb{N}\colon [V(n) \Rightarrow V(n+1)]$.

Příklady. • Dokažte přímo, nepřímo a sporem následující tvrzení: je-li $n \in \mathbb{N}$ a n^2 je liché, pak také n je liché.

- Dokažte indukcí, že každé $n \in \mathbb{N}$ lze zapsat buď ve tvaru $2k$ nebo va tvaru $2k-1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

- Dokažte sporem, že neexistuje žádné racionální číslo x, splňující $x^2 = 2$.

Příklady. • Existují dvě iracionální čísla x, y taková, že $x^y \in \mathbb{Q}$.

- Existují dvě osoby v této posluchárně, které mají narozeniny ve stejném týdnu.

- Existují dvě ženy v Praze, které mají stejný počet vlasů.

Problém 1.1.9. Ukažte, že počet všech podmnožin množiny $\{1, \dots, n\}$ je 2^n.

1.1.3 Množiny a množinové operace

Pracujeme v tzv. Zermelo-Frankelově teorii množin dané systémem axiomů. Detaily této teorie sahají hluboko za rámec této přednášky a nebudou zde uvedeny. S objekty teorie množin pracujeme intuitivním (naivním) způsobem.

Značení 1.1.10. Budeme používat standardní množinové operace a standardní značení: jsou-li A a B dvě množiny, pak značíme

- $A \subset B$ nebo $A \subseteq B$ znamená, že množina A je *podmnožinou* množiny B, tj. $[x \in A \Rightarrow x \in B]$);

- $A = B$ (A *rovná se* B), pokud mají stejné prvky;

- *prázdnou množinou* nazveme množinu neobsahující žádný prvek a značíme ji $\emptyset$;

- $A \cap B = \{x;\ x \in A \ \&\ x \in B\}$ je *průnik* množin A a B, obecněji, $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; \forall i \in I\colon x \in A_i\}$;

- $A \cup B = \{x;\ x \in A \ \vee\ x \in B\}$ je *sjednocení* množin A a B, obecněji, $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; \exists i \in I\colon x \in A_i\}$;

- jestliže $A \cap B = \emptyset$, řeknem že jsou *disjunktní*;

- $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$ je *rozdíl* A a B;

- je-li $V(x)$ výroková forma a A množina, pak $B = \{x \in A\colon V(x)\}$ značí množinu těch prvků x z A splňujících $V(x)$.

Věta 1.1.11 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť I, X, A_i pro $i \in I$ jsou množiny. Pak*

$$X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i) \quad a \quad X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)$$

Definice 1.1.12. Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n];\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\colon a_i \in A_i\},$$

  tedy množinu uspořádaných n-tic $[a_1, \dots, a_n]$.

- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Obecně značíme buď aRb nebo $[a, b] \in R$ a hovoříme o *relaci mezi A a B* nebo také o *relaci z A do B*.

Příklad. Nerovnost mezi reálnými čísly " $\leq$" tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Tuto relaci lze také graficky znázornit pomocí horního trojúhelníku ve čtverci $[0, 1]^2$.

Poznámka. Jakákoli výroková funkce $V(x, y)$ na $A \times B$ vytváří binární relaci $M = \{[x, y] \subset A \times B,\ V(x, y)\}$ a naopak.

Definice 1.1.13. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $M \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $M^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem $[x, y] \in M^{-1} \iff [y, x] \in M$ nazýváme *inverzní relací* k relaci M.

Příklad. Inverzní relací k relaci $\leq$ na $[0, 1]^2$ je relace $\geq$.

Definice 1.1.14. Nechť A je množina a nechť $M \subset A \times A$ je binární relace. Řekneme, že M je

- *reflexivní*, jestliže $\forall x \in M\colon [x, x] \in M$,
- *symetrická*, jestliže $[x, y] \in M \Rightarrow [y, x] \in M$,
- *transitivní*, jestliže $([x, y] \in M \& [y, z] \in M) \Rightarrow [x, z] \in M$,
- *antisymetrická*, jestliže $[x, y] \in M \Rightarrow [y, x] \notin M$,
- *slabě antisymetrická*, jestliže $([x, y] \in M \& [y, x] \in M) \Rightarrow x = y$.

——————konec přednášky 2:1.10. Luboš Pick——————————————-

Definice 1.1.15. Nechť A je množina a nechť $M \subset A \times A$ je binární relace. Řekneme, že M je

- *ekvivalence*, jestliže je reflexivní, symetrická a transitivní;
- *částečné uspořádání* (někdy jen *uspořádání*), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a transitivní;
- *lineární uspořádání*, jestliže je to částečné uspořádání a splňuje, že pro každé dva prvky $x, y \in A$ nastává buď $[x, y] \in M$ nebo $[y, x] \in M$.

Příklady. • Nechť A je libovolná neprázdná množina. Pak relace *rovnost* $(=)$ je ekvivalence na $A \times A$.

- Nechť $p \in \mathbb{N}$. Pak relace *kongruence modulo p*, definovaná předpisem

$$m \equiv n \pmod p \quad \iff \quad |m - n| \text{ je dělitelné číslem } p,$$

  je ekvivalence na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- Relace menší nebo rovno než $(\leq)$ je lineární uspořádání na $\mathbb{R}$.
- Nechť A je množina všech funkcí z intervalu $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$ a nechť $\leq$ je relace definovaná předpisem

$$f \leq g \iff \forall x \in [0, 1]:\ f(x) \leq g(x).$$

  pak $\leq$ tvoří na množině $A \times A$ částečné uspořádání, které není lineární.

- Je-li X množina a 2^X značí množinu všech jejích podmnožin, pak relace

$$R = \{[A,B] \in 2^X \times 2^X; A \subset B\}$$

je částečné uspořádání na 2^X, které obecně není lineární.

——————konec přednášky 2:1.10. Jiří Spurný——————————————-

Problém 1.1.16. Rozhodněte o platnosti věty:
Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné a nechť platí podmínka

$$\forall \beta > 0\ \exists x \in A\ \forall y \in B \colon |x-y| > \beta.$$

Pak B není omezená.

1.1.4 Zobrazení a funkce

Definice 1.1.17. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B \colon ([x,y_1] \in F\ \&\ [x,y_2] \in F \implies y_1 = y_2).$$

Množinu

$$\{x \in A; \exists y \in B \colon [x,y] \in F\}$$

nazýváme *definičním oborem* zobrazení (funkce) F a značíme $D(F)$ (nebo $\mathrm{Dom}(F)$). Množinu

$$\{y \in B; \exists x \in A \colon [x,y] \in F\}$$

nazýváme *oborem hodnot* a značíme $H(F)$ (nebo $\mathrm{Rng}(F)$).

Poznámka. Zobrazení není totéž co předpis, neboť různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Například zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované pomocí předpisů

$$f(x) := \sqrt{x^2 + 2x + 1}, \qquad g(x) := |x+1|, \quad x \in \mathbb{R},$$

splňují $f = g$.

Definice 1.1.18. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pak *grafem zobrazení* f nazýváme množinu

$$G_f := \{z \in A \times B;\ \exists\, x \in A :\ [x, f(x)] = z\} = \{[x, f(x)];\ x \in A\}.$$

Poznámky.
- Graf zobrazení $f : A \to B$ je binární relací na $A \times B$.
- Mezi grafem a zobrazením rozlišujeme, ačkoli se vzájemně jednoznačně určují. V jiných matematických oborech než v analýze se občas tyto pojmy ztotožňují.
- Výrok $f(x) = y$ znamená totéž jako výrok $[x,y] \in G_f$.
- Binární relace $M \subset A \times B$ je grafem nějakého zobrazení právě tehdy, jestliže pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x,y] \in M$.

Cvičení. Nechť $A = [0,1]$, $B = [0,2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{[x,y] \in A \times B;\ x^2 + y^2 = 1\right\}; \\ M_2 &:= \{[x,y] \in A \times B;\ y - x = 0\}; \\ M_3 &:= \left\{[x,y] \in A \times B;\ x^2 + (y-1)^2 = 1\right\}. \end{aligned}$$

Definice 1.1.19. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu

  $$f(M) := \{y \in B;\ \exists\, x \in M :\ f(x) = y\}$$

  nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f.

- Nechť P je libovolná množina. Pak množinu
$$f^{-1}(P) := \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$
nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f.

Definice 1.1.20. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté* (*injektivní*), jestliže
$$\forall x, y \in A\colon [f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y].$$

(2) Řekneme, že f je *na* (*surjektivní*), jestliže
$$\forall y \in B\ \exists\ x \in A\colon f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a na.

Poznámka. Abychom mohli říci, zda nějaké zobrazení je na, musí být přesně zadána koncová množina B (takže (2) a (3) můžeme chápat jako vlastnosti zobrazení f a množiny B).

Definice 1.1.21.

- Nechť A a B jsou dvě množiny, nechť $f : A \to B$ je zobrazení a nechť $C \subset A$. Pak zobrazení $g : C \to B$, definované předpisem
$$g(x) = f(x), \quad x \in C,$$
nazýváme *restrikcí* (*zúžením* nebo *parcializací*) zobrazení f na množinu C.

- Nechť A, B, C jsou tři množiny a nechť $f : A \to B$, $g : B \to C$ jsou dvě zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f : A \to C$, definované předpisem
$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in A,$$
nazýváme *složeným zobrazením* (*složením zobrazení f a g*), přičemž g nazýváme *vnějším* zobrazením a f nazýváme *vnitřním* zobrazením.

Poznámka. Skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní (cvičení).

Definice 1.1.22. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je prosté. Pak zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$, definované předpisem
$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x), \quad x \in A,\ y \in f(A),$$
nazýváme *inverzním zobrazením* k zobrazení f.

Poznámky.

- K neprostému zobrazení nelze definovat inverzní zobrazení (lze definovat inverzní binární relaci, ta ale nebude zobrazením). Příkladem je funkce $y = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in [0, \infty)$.

- Ve smyslu binárních relací platí $G_f^{-1} = G_{f^{-1}}$.

——————konec přednášky 3:6.10.2009 Luboš Pick——————————————-

Příklady.

- Inverzním zobrazením k zobrazení $f : x \mapsto \log x$, $x \in (0, \infty)$, je zobrazení $f^{-1} : y \mapsto \exp y$, $y \in \mathbb{R}$.

- Zobrazení $f : x \mapsto \sin x$, není prosté na množině $\mathbb{R}$ a tedy nelze definovat zobrazení k němu inverzní. Lze však toto zobrazení zúžit na množinu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tato restrikce již prostá je a lze definovat inverzní zobrazení $f^{-1} : y \mapsto \arcsin y$, $y \in [-1, 1]$.

Příklad. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pak

- f je prosté právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ nejvýše jedno řešení;

- f je na právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ alespoň jedno řešení;

- f je bijekce právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ právě jedno řešení.

Problém 1.1.23. Necht $f : A \to C$ a $g : A \to B$ splňují $g(A) = B$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci zobrazení $h : B \to C$ splňující $f = h \circ g$.

1.2 Reálná a komplexní čísla

1.2.1 Reálná čísla

Intuitivně budeme zacházet s množinami $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Axiomaticky si zavedeme $\mathbb{R}$.

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace *sčítání* a *násobení*, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace *uspořádání* ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

III. Axiom suprema

I. *Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah*

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativita sčítání*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x + y = y + x$ (*komutativita sčítání*),
- $\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu *nulový prvek*),
- $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R}: \ x + z = 0$ (z je tzv. *opačné číslo* k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (*asociativita násobení*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = y \cdot x$ (*komutativita násobení*),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu *jednotkový prvek*),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (*distributivita*).

II. *Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení*

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \&\ y \leq z) \implies x \leq z$ (*tranzitivita*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \&\ y \leq x) \implies x = y$ (*slabá antisymetrie*),
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ x \leq x$ (*reflexivita*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \implies x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (0 \leq x \ \&\ 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y$.

Značení 1.2.1.
- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. *ostrá nerovnost*).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat *kladnými* (resp. *zápornými*).
- Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat *nezápornými* (resp. *nekladnými*).

Definice 1.2.2.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zdola*, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá *dolní závorou* množiny M.
- Analogicky definujeme pojmy *množina omezená shora* a *horní závora*.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Definice 1.2.3. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M: x \leq s$,
- $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s\, \exists x \in M: x > s'$,

nazýváme *supremem* množiny M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\sup M$.

Definice 1.2.4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *největší prvek* (*maximum*) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme *nejmenší prvek* (*minimum*) M.

Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

III. *Axiom suprema*

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 1.2.5 (Existence a jednoznačnost $\mathbb{R}$)**.** *Existuje čtveřice* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice* $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ *splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce* $\varphi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ *taková, že pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \implies \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

——————konec přednášky 3:7.10.2009 Jiří Spurný——————————————-

Definice 1.2.6. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $i \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \geq i$,
- $\forall i' \in \mathbb{R},\ i' > i\ \exists x \in M: \ x < i'$,

nazýváme *infimem* množiny M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\inf M$.

Definice 1.2.7. Nechť $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Pak *otevřeným intervalem* (a, b) nazýváme množinu

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}.$$

Obdobně definujeme *uzavřený interval* $[a, b]$ a *polouzavřené intervaly* $[a, b)$ a $(a, b]$ předpisem

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ pro $-\infty < a < b < \infty$,
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ pro $-\infty < a < b \leq \infty$,
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ pro $-\infty \leq a < b < \infty$.

Ve všech případech nazýváme bod a *počátečním bodem* a bod b *koncovým bodem* intervalu.

Poznámky.
- V definici intervalu vždy předpokládáme, že počáteční bod je ostře menší než koncový bod. Takže množinu $[a, a] = \{a\}$ nepovažujeme za interval. Literatura není v tomto bodě jednotná, v některých pramenech se tato množina považuje za interval, který se někdy označuje termínem *degenerovaný*.
- Počáteční nebo koncový bod nemusí být prvkem intervalu. Může být prvkem intervalu tehdy, jestliže to není jedno z nekonečen.

Věta 1.2.8 (Existence infima)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny* M.

Věta 1.2.9 (Existence celé části)**.** *Pro každé* $r \in \mathbb{R}$ *existuje právě jedno číslo* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k + 1$.

Věta 1.2.10 (Archimédova vlastnost $\mathbb{R}$)**.** *Ke každému* $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *splňující* $x < n$.

——————–konec přednášky 4:8.10.2009 Luboš Pick——————————————————-

Věta 1.2.11 (Hustota $\mathbb{Q}$)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Pak existuje* $q \in \mathbb{Q}$ *takové, že* $a < q < b$.

Věta 1.2.12 (Existence n-té odmocniny)**.** *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, *existuje právě jedno* $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Definice 1.2.13. Pro reálné číslo $x \in \mathbb{R}$ definujeme *absolutní hodnotu*

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Poznámka. Absolutní hodnota splňuje takzvanou *trojúhelníkovou nerovnost*:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\colon |x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Problém 1.2.14. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je omezená a neprázdná. Pak platí

$$\sup A - \inf A = \sup\{x - y; x, y \in A\}.$$

——————–konec přednášky 4:8.10. Jiří Spurný——————————————————-

1.2.2 Komplexní čísla

Definice 1.2.15. *Množinu komplexních čísel* $\mathbb{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace *sčítání* a *násobení* takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbb{C}$.

- Prvek a nazýváme *reálnou částí* x, prvek b nazýváme *imaginární částí* x.
- *Absolutní hodnotou* komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$.
- *Komplexně sdruženým číslem* k x rozumíme číslo $\overline{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Poznámka. Absolutní hodnota splňuje takzvanou *trojúhelníkovou nerovnost*:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{C}\colon |x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Problém 1.2.16. Nechť $A_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou množiny. Pak platí

$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \notin A_n\} \text{ je konečná}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \in A_n\} \text{ není konečná}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1.3 Mohutnosti množin

Definice 1.3.1.

- Říkáme, že množiny A, B *mají stejnou mohutnost*, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A *má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny* B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.

Definice 1.3.2. Nechť X je množina, množinu $2^X = \exp X = \{A; A \subset X\}$ nazýváme *potenční množinou množiny X* (nebo *potencí množiny X*).

Věta 1.3.3 (Cantor–Bernstein)**.** *Nechť A, B jsou množiny takové, že A má mohutnost menší nebo rovnu než B a B má mohutnost menší nebo rovnu než A. Pak mají stejnou mohutnost.*

Věta 1.3.4 (Cantor)**.** *Nechť X je množina. Pak neexistuje zobrazení $\varphi : X \to \exp X$, které je na.*

Definice 1.3.5. Řekneme, že množina X je *nekonečná*, jestliže má stejnou mohutnost jak nějaká její vlastní podmnožina. V opačném případě říkáme, že X je *konečná*. Řekneme, že množina X je *spočetná*, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se zove *nespočetná*.

Příklady. Tato fakta nebudou na přednášce dokazována:

- Je-li A neprázdná množina, je A konečná právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že A má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$.
- Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou spočetné. Jakákoli nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ je také spočetná.
- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.
- Množiny $\mathbb{R}$, $(0, 1)$, $\exp \mathbb{N}$ jsou nespočetné. Navíc mají všechny tyto tři množiny stejnou mohutnost.

Problém 1.3.6. Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté;
- Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté;
- Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté;
- Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

————————konec přednášky 5:13.10. Luboš Pick————————————————-

1.4 Limity posloupností reálných čísel

1.4.1 Úvod

Definice 1.4.1. *Posloupností reálných čísel* nazýváme jakékoli zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Posloupnost obvykle značíme symbolem $\{a_n\}$, případně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pro každé konkrétní $n \in \mathbb{N}$ nazýváme reálné číslo a_n *n-tým členem* posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklady.
- $a_n = \frac{n}{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;
- *Fibonacciho posloupnost* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ je dána rekurentním předpisem
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 : a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$
- *Look and say sequence:* $1, 11, 21, 1211, 111221, \dots$

Definice 1.4.2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Říkáme, že $\{a_n\}$ je *omezená*, jestliže je množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená v $\mathbb{R}$. Říkáme, že $\{a_n\}$ je *neklesající*, jestliže
$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq a_{n+1}.$$

Analogicky definujeme posloupnost *zdola omezenou, shora omezenou, nerostoucí, klesající, rostoucí* a *monotónní.*

1.4.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 1.4.3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \; n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Poznámka. Pro posloupnost $\{a_n\}$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) $\lim a_n = A$,

(ii) $\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, \; n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon$,

(iii) $\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \; n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| \leq \varepsilon$,

(iv) $\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \; n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon$,

(v) $\forall \, \varepsilon > 0: \quad \{n \in \mathbb{N}; \; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ je konečná.

Následující tvrzení ukazuje důležitý a užitečný fakt, že v definici limity můžeme $|a_n - A| < \varepsilon$ nahradit například $|a_n - A| < 2\varepsilon$ nebo $|a_n - A| < K\varepsilon$, kde K je nějaká konstanta.

Tvrzení 1.4.4. *Nechť $K > 0$, nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, nechť $A \in \mathbb{R}$ a platí*

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \; n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < K\varepsilon.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

——————konec přednášky 5:15.10.2009 Jiří Spurný——————————————-

Definice 1.4.5. Jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* nebo že *konverguje* (*je konvergentní*). V opačném případě říkáme, že posloupnost *diverguje*.

Poznámka. Není-li posloupnost definována pro konečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, při vyšetřování limity ji dodefinujeme jakkoliv a zkoumáme existenci limity pro tuto novou posloupnost.

Příklady. (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
——————konec přednášky 6:15.10 Luboš Pick——————————————-

(4) vlastní limita $\{(-1)^n\}$ a $\{2^n\}$ neexistuje.

Věta 1.4.6 (O jednoznačnosti limity posloupnosti)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 1.4.7 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)**.** *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice 1.4.8. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ neboli, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Věta 1.4.9 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.*

Věta 1.4.10 (Aritmetika limit)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Cvičení. • Dokažte, že platí implikace $\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

- Platí opačná implikace?
- Platí opačná implikace ve speciálním případě, kdy $A = 0$?

Věta 1.4.11 (O limitě a uspořádání). *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.*

(a) *Jestliže $A < B$, potom*

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : \ a_n < b_n.$$

(b) *Jestliže*

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : \ a_n \geq b_n,$$

pak $A \geq B$.

Poznámka. Z nerovnosti

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : \ a_n > b_n$$

obecně neplyne $A > B$. Příkladem jsou posloupnosti $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\} = 0, 0, 0, \ldots$, pro které platí $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ a_n > b_n$, ale $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta 1.4.12 (O dvou policajtech). *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující*

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ a_n \leq c_n \leq \ b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak

$$\lim c_n = A.$$

——————konec přednášky 6: 21.10 Jiří Spurný——————————————-

——————konec přednášky 7: 15.10. Luboš Pick——————————————-

Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Věta 1.4.13 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti). *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

1.4.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 1.4.14. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* $+\infty$, jestliže

$$\forall\, K \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} : \quad a_n \geq K.$$

Obdobně řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* $-\infty$, jestliže

$$\forall\, K \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} : \quad a_n \leq K.$$

Jestliže má posloupnost limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že má *nevlastní limitu.*

Příklady.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} -(n+1)n = -\infty.$$

Poznámka. Všechny možné situace jsou znázorněny na následujícím diagramu:

$$\text{limita posloupnosti}\quad\begin{cases}\text{neexistuje}\\ \text{existuje} & \begin{cases}\text{vlastní}\\ \text{nevlastní} & \begin{cases}+\infty\\ -\infty\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Definice 1.4.15. Množinu

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

nazýváme *rozšířenou reálnou osou.*

Na množině $\mathbb{R}^*$ je definováno uspořádání předpisem

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : \qquad -\infty < a < +\infty,$$

absolutní hodnota předpisem

$$|\pm\infty| = +\infty$$

a operace $+$ a $\cdot$ předpisy

$$\begin{aligned}
&\forall\, a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\} : && -\infty + a = -\infty,\\
&\forall\, a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} : && \infty + a = \infty,\\
&\forall\, a \in \mathbb{R}^*,\ a > 0 : && a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,\\
&\forall\, a \in \mathbb{R}^*,\ a < 0 : && a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty,\\
&\forall\, a \in \mathbb{R} : && \frac{a}{\pm\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Následující výrazy nejsou definovány:

$$-\infty + \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty)\,, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\text{cokoli}}{0}.$$

Nyní se budeme zabývat platností vět v této kapitole v případě, že připustíme nevlastní limity.

Poznámka 1.4.16. Věty 1.4.6, 1.4.9, 1.4.11 a 1.4.12 platí v nezměněné podobě, jestliže připustíme nevlastní limity. Věta 1.4.7 zřejmě neplatí, neboť je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pak posloupnost $\{a_n\}$ není omezená. Větu 1.4.10 pro rozšířenou reálnou osu uvedeme zvlášť.

Věta 1.4.17 (Aritmetika limit pro nevlastní limity)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in R^*$. Pak platí:*

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován;*

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je výraz $A \cdot B$ definován;*

(c) *je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.*

Příklady. Předpoklad definovanosti výrazů na pravé straně ve Větě 1.4.17 nelze vynechat, jak ilustrují následující příklady.

- Nechť $K \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo, nechť $a_n = n$ a $b_n = n + K$. Pak

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = K.$$

  To ale není možno vyvodit z Věty 1.4.17, neboť $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \infty - \infty$, což není definovaný pojem.

- Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ neexistuje ani nevlastní.

Rozšířená reálná osa nám umožní rozšířit pojem suprema a infima pro neomezené množiny a také pro prázdnou množinu.

Definice 1.4.18.
- Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je shora neomezená. Pak klademe $\sup A := +\infty$.
- Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je zdola neomezená. Pak klademe $\inf A := -\infty$.

- Nechť $A = \emptyset$. Pak klademe $\sup A := -\infty$ a $\inf A := +\infty$.

Poznámka. Prázdná množina je jediná množina, jejíž supremum je menší než infimum.

Věta 1.4.19 (O limitě podílu kladné a mizející posloupnost)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, a nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Nechť*

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}: \quad b_n > 0.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

1.4.4 Monotónní posloupnosti a hlubší věty o posloupnostech

Věta 1.4.20 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Poznámka. Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí) a navíc shora (zdola) omezená, pak má vlastní limitu. Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí) a navíc shora (zdola) neomezená, pak má limitu $+\infty$ ($-\infty$).

——————konec přednášky 8: 20.10. Luboš Pick——————-

Definice 1.4.21. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Poznámka.
- Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak posloupnost $b_n = \sup\{a_k; k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, je zřejmě nerostoucí a podobně posloupnost $c_n = \inf\{a_k; k \geq n\}$ je neklesající. Z Věty 1.4.20 tedy vyplývá, že obě mají limitu. Navíc
$$c_n \leq a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Tedy $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.
- Rovnost $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ platí i pro obecné posloupnosti.
- Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak $\{a_n\}$ je shora neomezená.

Poznámka. Limes superior a limes inferior jsou dobře definované hodnoty a platí

$$\limsup a_n \in \mathbb{R}^*, \qquad \liminf a_n \in \mathbb{R}^*.$$

Na rozdíl od limity, která nemusí existovat, tyto dvě hodnoty existují pro libovolnou posloupnost reálných čísel.

Cvičení. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\limsup a_n = 1$ a $\liminf a_n = -1$.

Věta 1.4.22 (O vztahu limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom*

$$\lim a_n = A$$

právě tehdy, když

$$\limsup a_n = \liminf a_n = A.$$

——————konec přednášky 7: 22.10. Jiří Spurný——————-

Poznámka 1.4.23. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Potom

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le \limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n,$$

pokud mají výrazy smysl.

Definice 1.4.24. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 1.4.25 (O vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$, $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (maximum a minimum se uvažuje v $\mathbb{R}^*$).*

Cvičení.
- Je-li $\lim a_n = A$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.
- Pro $a_n = (-1)^n$ je $H(\{a_n\}) = \{-1, 1\}$.
- Pro $a_n = \sin n$ je $H(\{a_n\}) = [-1, 1]$ (možná bude na prosemináři).

Věta 1.4.26 (Bolzanova–Weierstrassova)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

——————konec přednášky 9: 22.10. Luboš Pick———————————————-

Věta 1.4.27 (Bolzanova–Cauchyova podmínka)**.** *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, tj.*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0,\ m \ge n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Problémy 1.4.28.
- Rozhodněte o platnosti tvrzení: Je-li $\{a_n\}$ konvergentní, pak existuje $\max\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ nebo $\min\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.
- Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel konvergující k 0. Dokažte, že existuje vybraná klesající podposloupnost.
- Nechť dvě ze tří posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{a_n + b_n\}$ konvergují. Ukažte, že i zbývající konverguje.
- Sestrojte posloupnost kladných čísel $\{a_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$ a posloupnost $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ není monotónní pro každé $k \in \mathbb{N}$.
- Nechť $\lim a_n = a$, $a \in \mathbb{R}^*$ a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je prosté. Ukažte, že $\lim a_{f(n)} = a$.
- Sestrojte konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ tak, že pro každé $\varepsilon \in (0, \infty)$ existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_k - a_{k-1}| > \varepsilon$.
- Najděte kladná čísla $a_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{n,k} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.5 Řady reálných čísel

1.5.1 Úvod

Definice 1.5.1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

nazýváme *m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* nazýváme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Tuto limitu (tj. součet řady) budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Jestliže existuje $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní (tj. jestliže má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konečný součet), pak říkáme, že řada *konverguje*, neboli *je konvergentní*. Jestliže limita neexistuje nebo existuje, ale je nevlastní, pak říkáme, že řada *diverguje*, neboli *je divergentní*.

Cvičení 1.5.2.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverguje, neboť posloupnost částečných součtů splňuje

$$s_1 = -1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -1, \quad \dots,$$

a tedy $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a jejím součtem je číslo $\frac{\pi^2}{6}$.
- Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme *harmonickou řadou*. Harmonická řada diverguje, neboť pro každé $m \in \mathbb{N}$ jest $s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$, a tedy

$$s_{2m} - s_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \geq m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{N},$$

takže posloupnost částečných součtů harmonické řady nesplňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tedy podle Věty 1.4.27 nemá vlastní limitu.

Poznámka. Konvergence řady nezávisí na konečně mnoha členech. Přesněji, následující podmínky jsou ekvivalentní pro řadu $\sum a_n$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje;

(iii) pro každé $k \in \mathbb{N}$ řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 1.5.3 (Nutná podmínka konvergence). *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

——————konec přednášky 8: 29.10. Jiří Spurný——————————————-

Poznámka. Nutná podmínka z Věty 1.5.3 sama o sobě není postačující pro konvergenci řady. Protipříkladem je harmonická řada, případně další řady jako například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

a podobně. Tyto řady sice divergují, ale limita obecného členu a_n je ve všech případech rovna nule.

Věta 1.5.4 (Linearita množiny konvergentních řad). (a) *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n \quad \textit{konverguje.}$$

Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují. Pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámka 1.5.5. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak je buď konvergentní nebo má součet $+\infty$. To plyne ihned z toho, že pro řadu s nezápornými členy je posloupnost částečných součtů neklesající.

Věta 1.5.6 (Srovnávací kritérium pro konvergenci řad). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom*

(a) *$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*

(b) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.*

Věta 1.5.7 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*.$$

(a) Jestliže $K \in (0, \infty)$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{konverguje.}$$

(b) Jestliže $K = 0$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje.}$$

(c) Jestliže $K = \infty$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{konverguje.}$$

——————konec přednášky 10: 27.10. Luboš Pick——————————————-

Definice 1.5.8. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.* Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nekonverguje, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně.*

Příklad 1.5.9.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje absolutně.

Věta 1.5.10 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro řady)**.** *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0 : \quad \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Věta 1.5.11 (Vztah absolutní konvergence a konvergence)**.** *Absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Problém 1.5.12. Dokažte, že $\sum a_n$ je absolutně konvergentní právě tehdy, když je řada $\sum a_n b_n$ absolutně konvergentní pro každou omezenou posloupnost $\{b_n\}$.

1.5.2 Kritéria konvergence řad

Věta 1.5.13 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada.*

(a) *Jestliže platí*

$$\exists\, q \in (0, 1) \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně;*

(b) *jestliže* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně;*

(c) *jestliže* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně;*

(d) *jestliže* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, pak* $\{a_n\}$ *nekonverguje k* 0*, a proto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje;*

(e) *jestliže* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, pak* $\{a_n\}$ *nekonverguje k* 0*, a tedy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Poznámka. Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pak o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout. Příkladem je harmonická řada a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; první z nich diverguje a druhá konverguje, avšak obě splňují $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Věta 1.5.14 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada.*

(a) *Jestliže platí*

$$\exists\ q \in (0,1) \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně;*

(b) *jestliže* $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně;*

(c) *jestliže* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně;*

(d) *jestliže* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$*, pak* $\{a_n\}$ *nekonverguje k* 0*, a tedy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

——————konec přednášky 9: 4.11. Jiří Spurný——————————————-

Poznámky.
- Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout (protipříklady jako v poznámce po Větě 1.5.13).
- Je-li pouze $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak o konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout; příkladem je řada

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots,$$

která konverguje, ale $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Věta 1.5.15 (Cauchyovo kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Nechť*

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_0 : \quad a_{n+1} \leq a_n.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \textit{konverguje.}$$

Věta 1.5.16 (Konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$)**.** (a) *Řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$*.*

(b) *Řada*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$*.*

Poznámka. Obecnou mocninu a logaritmus definujeme později.

Věta 1.5.17 (Raabeovo kritérium)**.** . *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

(b) *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Poznámka. Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$, pak o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout (protipříklady jako v poznámce po Větě 1.5.13).

——————konec přednášky 11: 29.10. Luboš Pick——————————————-

Věta 1.5.18 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ *konverguje právě když* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*.*

Problém 1.5.19. Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada kladných čísel. Najděte posloupnost $\{b_n\}$ kladných čísel tak, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ a $\sum b_n$ konverguje.

1.6 Reálné funkce jedné reálné proměnné

1.6.1 Základní definice

Definice 1.6.1. *Reálnou funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je

rostoucí	jestliže	$\forall\, x, y \in M,\ x > y :$	$f(x) > f(y)$,
klesající	jestliže	$\forall\, x, y \in M,\ x > y :$	$f(x) < f(y)$,
nerostoucí	jestliže	$\forall\, x, y \in M,\ x > y :$	$f(x) \le f(y)$,
neklesající	jestliže	$\forall\, x, y \in M,\ x > y :$	$f(x) \ge f(y)$.

- Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je

sudá	jestliže	$\forall\, x \in M :$	$-x \in M \ \&\ f(x) = f(-x)$,
lichá	jestliže	$\forall\, x \in M :$	$-x \in M \ \&\ f(x) = -f(-x)$,
periodická s periodou $p > 0$	jestliže	$\forall\, x \in M :$	$x - p \in M,\ x + p \in M\ \&$ $f(x) = f(x+p) = f(x-p)$.

————————konec přednášky 10: 5.11. Jiří Spurný————————————-

- Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je

shora omezená	jestliže	$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M :$	$f(x) \le K$,
zdola omezená	jestliže	$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M :$	$f(x) \ge K$,
omezená	jestliže	$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M :$	$\lvert f(x)\rvert \le K$.

Definice 1.6.2. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$. Pak definujeme

prstencové (redukované) okolí bodu a	$\mathcal{P}^{\delta}(a) := (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$,
prstencové (redukované) okolí bodu $+\infty$	$\mathcal{P}^{\delta}(\infty) := (\frac{1}{\delta}, +\infty)$,
prstencové (redukované) okolí bodu $-\infty$	$\mathcal{P}^{\delta}(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\delta})$,
pravé prstencové (redukované) okolí bodu a	$\mathcal{P}^{\delta}_{+}(a) := (a, a + \delta)$,
levé prstencové (redukované) okolí bodu a	$\mathcal{P}^{\delta}_{-}(a) := (a - \delta, a)$,
okolí bodu a	$\mathcal{U}^{\delta}(a) := (a - \delta, a + \delta)$,
okolí bodu $+\infty$	$\mathcal{U}^{\delta}(+\infty) := \mathcal{P}^{\delta}(+\infty)$,
okolí bodu $-\infty$	$\mathcal{U}^{\delta}(-\infty) := \mathcal{P}^{\delta}(-\infty)$,
pravé okolí bodu a	$\mathcal{U}^{\delta}_{+}(a) := [a, a + \delta)$,
levé okolí bodu a	$\mathcal{U}^{\delta}_{+}(a) := (a - \delta, a]$.

Poznámka. Každé okolí bodu $+\infty$ je automaticky levé a prstencové. Obdobně, každé okolí bodu $-\infty$ je automaticky pravé a prstencové.

Definice 1.6.3. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^{\delta}(a) : \quad f(x) \in \mathcal{U}^{\varepsilon}(A).$$

V takovém případě píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Poznámky.
- Z definice limity implicitně vyplývá, že f musí být definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu a.

- Reformulace $\lim_{x\to a} f(x) = A$ je ekvivalentní s výrokem

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta\colon\ f(\mathcal{P}^\delta(a)) \subset \mathcal{U}^\varepsilon(A).$$

- Bod a nemusí být prvkem M, ale nějaké jeho prstencové okolí musí být podmnožinou M. Například je-li funkce f definovaná na $(0,1) \cup (1,2)$, pak má smysl definovat její limitu v bodě $a = 1 \notin M$.

- Bod a může také být roven ∞ nebo $-\infty$; v takovém případě je nezbytné, aby byla funkce f definovaná na nějakém okolí tohoto bodu.

- V bodě a může a nemusí být funkce f definovaná. Je-li v něm definovaná, pak hodnota limity v tomto bodě na této konkrétní hodnotě nezáleží.

- Mohou nastat tyto situace: Všechny možné situace jsou znázorněny na následujícím diagramu:

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} \quad \begin{cases} \text{vlastní } A \in \mathbb{R} \\ \text{nevlastní } A = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

  Limita může být definována buď ve vlastním bodě $a \in \mathbb{R}$ nebo v nevlastním bodě $(a = \pm\infty)$.

- Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}:\ f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

  Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $A = \infty$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, K \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}:\ f(x) > K.$$

Definice 1.6.4. Nechť $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{\infty\}$. Řekneme, že f má v bodě a *limitu zprava* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}_+^\delta(a): \quad f(x) \in \mathcal{U}^\varepsilon(A).$$

V takovém případě píšeme

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A.$$

Analogicky definujeme limitu zleva.

Poznámka. Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a+} f(x) = A \quad \& \quad \lim_{x\to a-} f(x) = A.$$

Příklady.

- Nechť $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ jest $\lim_{x\to a} f(x) = a$.

- Nechť f je konstantní funkce na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$, tj.

$$\exists\, \delta > 0 \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) = c.$$

  Pak $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

- Nechť funkce sgn je definována předpisem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pokud } x < 0, \\ 0 & \text{pokud } x = 0, \\ 1 & \text{pokud } x > 0. \end{cases}$$

  Pak $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje neboť $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ a $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

——————konec přednášky 12: 3.11. Luboš Pick——————

- *Dirichletova funkce* je definovaná předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pokud } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  Tato funkce nemá v žádném bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu (ani jednostrannou).

- *Riemannova funkce* je definovaná předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pokud } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ nesoudělná}, \\ 0 & \text{pokud } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  Tato funkce má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu rovnou 0.

- Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

  (Důkaz bude později.)

Definice 1.6.5. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě a*, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Poznámka. Funkce f je spojitá v bodě a právě když platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}^{\delta}(a) : \quad f(x) \in \mathcal{U}^{\varepsilon}(f(a)).$$

Povšimněte si důležitého rozdílu oproti definici limity: okolí bodu a není prstencové. Promyslete si tento fakt.

Definice 1.6.6. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je *spojitá zprava v bodě a*, jestliže

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Obdobně řekneme, že f je *spojitá zleva v bodě a*, jestliže

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a).$$

1.6.2 Věty o limitách.

Věta 1.6.7 (Heineova)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:*

(i)

$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \neq a$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.*

——————konec přednášky 11: 11.11 Jiří Spurný————————————————-

Důsledek 1.6.8 (Heineova věta pro spojitost)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém okolí bodu a. Pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Poznámka. Předcházející věty 1.6.7 a 1.6.8 platí i pro jednostranné limity.

Příklad.

$$\lim_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x} \qquad \text{neexistuje.}$$

Věta 1.6.9 (O jednoznačnosti limity funkce)**.** *Každá funkce má v kterémkoli bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta 1.6.10 (O vztahu limity a omezenosti funkce)**.** *Nechť funkce f má v bodě a vlastní limitu. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f je na $\mathcal{P}^\delta(a)$ omezená.*

Věta 1.6.11 (O aritmetice limit)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak*

(a) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován;*

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován;*

(c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.*

Důsledek 1.6.12. *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.*

——————konec přednášky 13: 5.11. Luboš Pick——————————————-

Poznámka. Věta 1.6.11 a Důsledek 1.6.12 platí i v jednostranných variantách.

Definice 1.6.13. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Potom funkci

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem stupně n*.

Příklad. Funkce $f(x) = x$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Odtud a z předcházejícího důsledku plyne, že každý polynom je spojitý na celém $\mathbb{R}$.

Věta 1.6.14 (O limitě a uspořádání)**.** (a) *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) > g(x).$$

(b) *Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Pak

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

(c) *(dva policajti pro funkce) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

(d) *(jeden policajt pro funkce) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) \leq g(x).$$

Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Příklad. $\lim_{x\to 0} x \cdot D(x) = 0$.

Věta 1.6.15 (O limitě složené funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují*

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) *f je spojitá v A;*

(P2) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x \to a} f(g(x)) = B$.

Poznámka. Předcházející věty mají i své jednostranné varianty.

——————konec přednášky 12: 12.11. Jiří Spurný——————————————-

Věta 1.6.16 (O limitě monotónní funkce)**.** *Nechť f je monotónní na intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$. Potom existují* $\lim_{x \to a+} f(x)$ *i* $\lim_{x \to b-} f(x)$.

Problém 1.6.17. Nechť $y \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{R}$ existují funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{x \to y} f(x) + g(x) = a, \quad \lim_{x \to y} f(x)g(x) = b.$$

1.6.3 Funkce spojité na intervalu

Definice 1.6.18. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval libovolného typu. Nechť $a \in I$. Řekneme, že a je *vnitřním bodem* intervalu I, jestliže není krajním bodem intervalu. Množinu všech vnitřních bodů intervalu I značíme $\operatorname{Int} I$.

Poznámka. Je-li I otevřený interval, pak je automaticky každý jeho bod vnitřním bodem.

Definice 1.6.19. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce. Řekneme, že f je *spojitá na intervalu I*, jestliže je spojitá zprava v každém bodě z I, který není koncovým bodem I a spojitá zleva v každém bodě z I, který není počátečním bodem I.

Věta 1.6.20 (Skládání spojitých funkcí)**.** *Nechť I, J jsou intervaly, $f : I \to J$ a $g : J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá.*

Věta 1.6.21 (Borelova pokrývací)**.** *Nechť $[a, b]$ je uzavřený interval a $\{U_i; i \in I\}$ je systém otevřených intervalů splňující $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Pak existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že $[a, b] \subset \bigcup_{J \subset I} U_i$.*

Věta 1.6.22 (Darbouxova)**.** *Nechť f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$. Nechť $f(a) < f(b)$ a nechť $y \in (f(a), f(b))$. Pak existuje bod $x \in (a, b)$, splňující $f(x) = y$. Analogické tvrzení platí v případě, kdy $f(b) < f(a)$.*

Věta 1.6.23 (Spojitý obraz intervalu)**.** *Nechť I je interval libovolného typu a nechť f je spojitá funkce na I. Potom $f(I)$ je opět interval nebo jednobodová množina.*

Definice 1.6.24. Mějme funkci $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, a bod $a \in M$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě a svého

maxima na M,	jestliže	$\forall\, x \in M : f(x) \leq f(a)$,
minima na M,	jestliže	$\forall\, x \in M : f(x) \geq f(a)$,
ostrého maxima na M,	jestliže	$\forall\, x \in M,\ x \neq a : f(x) < f(a)$,
ostrého minima na M,	jestliže	$\forall\, x \in M,\ x \neq a : f(x) > f(a)$.

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého *lokálního maxima na M*, *lokálního minima na M*, *ostrého lokálního maxima na M*, respektive *ostrého lokálního minima na M*), jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že f nabývá na $M \cap \mathcal{U}^\delta(a)$ svého maxima, minima, ostrého maxima, respektive ostrého minima. Jestliže funkce nabývá v bodě a svého lokálního minima nebo maxima, pak říkáme, že zde nabývá *lokálního extrému.*

——————konec přednášky 13: 18.11. Jiří Spurný——————————————-

Věta 1.6.25 (Vztah spojitosti a omezenosti)**.** *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu omezená.*

——————konec přednášky 14: 12.11. Luboš Pick——————————————-

Věta 1.6.26 (Vztah spojitosti a nabývání extrémů)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima i minima.*

Věta 1.6.27 (O spojitosti inverzní funkce)**.** *Nechť f je spojitá rostoucí (respektive klesající) funkce na intervalu I. Potom inverzní funkce f^{-1} je také spojitá a rostoucí (respektive klesající) na $f(I)$.*

Problémy 1.6.28.

- Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je prostá a $f([0, 1]) = [0, 1]$. Je funkce f spojitá alespoň v jednom bodě $x \in [0, 1]$?
- Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje spojitá $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f^{-1}(y)$ je n-prvková pro každé $y \in \mathbb{R}$.

1.6.4 Derivace reálné funkce

Definice 1.6.29. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Obdobně definujeme *derivaci zprava* a *derivaci zleva* funkce f v bodě a předpisy

$$f'_+(a) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) := \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky.

- Všechny možné situace jsou znázorněny na následujícím diagramu:

$$f'(a) \quad \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} & \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

- Platí

$$f'(a) = A \in \mathbb{R}^* \qquad \Leftrightarrow \qquad f'_+(a) = f'_-(a) = A.$$

- Pro výpočet derivace můžeme použít alternativní vzorec

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Poznámka. Má-li funkce $f : M \to \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f' : M \to \mathbb{R}$, které přiřadí $x \in M$ derivaci $f'(x)$, je rálná funkce na M.

Příklad 1.6.30.

(1) Je-li $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$, pak $f'(a) = na^{n-1}$.

(2) Je-li $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, pak $f'(0) = \infty$.

(3) Je-li $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, pak $f'(0)$ neexistuje.

Věta 1.6.31 (O vztahu derivace a spojitosti)**.** *Má-li funkce v bodě vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Věta 1.6.32 (Aritmetika derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

——————konec přednášky 14: 19.11. Jiří Spurný——————————————-

——————konec přednášky 15: 24.11. Luboš Pick——————————————-

Poznámka. Předpoklad spojitosti alespoň jedné z funkcí f, g v bodě a nelze z Věty 1.6.32(ii) vynechat, jak ukazuje následující příklad:

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$(fg)(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{4}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(fg)'(0)$ neexistuje, ale

$$f'(0)g(0) + g'(0)f(0) = (\infty) \cdot \frac{1}{2} + (-\infty) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \infty.$$

Věta 1.6.33 (O derivaci složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Poznámka. Předpoklad spojitosti funkce g v bodě x_0 nelze z Věty 1.6.33 vynechat, jak ukazuje následující příklad:

$$f(y) := |y|, \qquad g(x) := \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(fg)'(0)$ neexistuje, ale

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad g'(0) = \infty, \qquad \text{a tedy} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g'(0) = -\infty.$$

Příklady.

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x, && x \in \mathbb{R}, \\
(\cos x)' &= -\sin x, && x \in \mathbb{R}, \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \\
(\exp x)' &= \exp x, && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Věta 1.6.34 (O derivaci inverzní funkce)**.** *Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom*

(a) *je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;*

(b) *je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$ (respektive $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$).*

Příklady.

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && x \in (-1,1),\\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && x \in (-1,1),\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, && x \in \mathbb{R},\\
(\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, && x \in \mathbb{R},\\
(\log x)' &= \frac{1}{x}, && x \in (0,\infty).
\end{aligned}
$$

Věta 1.6.35 (Fermatova - nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Nechť a je bodem lokálního extrému funkce f. Pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

——————konec přednášky 15: 25.11. Jiří Spurný——————————————-

Věta 1.6.36 (Rolleova)**.** *Nechť f je funkce spojitá na nějakém intervalu I, nechť $a, b \in I$, $a < b$, a nechť pro každé $x \in (a,b)$ existuje $f'(x)$ a nechť $f(a) = f(b)$. Potom existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.*

——————konec přednášky 16: 1.12. Luboš Pick——————————————-

Věta 1.6.37 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, a nechť pro každé $x \in (a,b)$ existuje $f'(x)$. Potom existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Věta 1.6.38 (Cauchyova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť f, g jsou funkce spojité na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, nechť f má v každém bodě $x \in (a,b)$ derivaci a nechť g má v každém bodě $x \in (a,b)$ vlastní a nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Věta 1.6.39 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** (a) *(verze "$\frac{0}{0}$") Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$$

a nechť existuje

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) *(verze "$\frac{\text{cokoli}}{\infty}$") Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť*

$$\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$$

a nechť existuje

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogická tvrzení platí pro limity zleva.

——————konec přednášky 16: 26.11. Jiří Spurný——————————————-

Poznámky. • Typická limita vhodná pro použití L'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

- Pozor na nesprávné používání L'Hospitalova pravidla; vždy je nutno napřed ověřit, že platí předpoklady jedné ze dvou přípustných verzí. Například

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{3x+1}\neq\frac{2}{3}.$$

- L'Hospitalovo pravidlo neplatí obráceně, například

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+\sin x}=\infty,$$

ale

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+\cos x}\quad\text{neexistuje.}$$

- L'Hospitalovo pravidlo není vždy nejvhodnější metodou pro výpočet limity, například

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}}{1}=\lim_{x\to 0+}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

sice platí, ale výsledná limita je ještě horší než limita zadaná.

——————konec přednášky 17: 3.12. Luboš Pick——————————————-

Věta 1.6.40 (O limitě derivací)**.** *Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a a nechť $\lim_{x\to a+}f'(x)=A\in\mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a)=A$.*

Věta 1.6.41 (O vztahu derivace a monotonie)**.** *Nechť I je interval libovolného typu a nechť funkce f je spojitá na I a v každém vnitřním bodě intervalu I má derivaci.*

(a) *Je-li $f'>0$ na $\operatorname{Int} I$, pak f je rostoucí na I;*

(b) *Je-li $f'<0$ na $\operatorname{Int} I$, pak f je klesající na I;*

(c) *Je-li $f'\geq 0$ na $\operatorname{Int} I$, pak f je neklesající na I;*

(d) *Je-li $f'\leq 0$ na $\operatorname{Int} I$, pak f je nerostoucí na I.*

Důsledek 1.6.42. *Nechť I je interval, $f: I\to\mathbb{R}$ spojitá a nechť $f'(x)=0$ pro všechna $x\in\operatorname{Int} I$. Potom f je konstantní na I.*

Poznámky. • Tvrzení Věty 1.6.41 neplatí obráceně. Například funkce $f(x)=x^3$ je sice rostoucí na celém $\mathbb{R}$, ale $f'(0)=0$.

- Tvrzení Věty 1.6.41 neplatí, pokud definičním oborem funkce f není interval. Například funkce $f(x)=\operatorname{tg} x$ má na svém definičním oboru $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, kladnou derivaci, neboť $\operatorname{tg}'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$, ale není rostoucí.

Věta 1.6.43 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť I je otevřený interval a $f: I\to\mathbb{R}$ má na I vlastní derivaci. Je-li $x,y\in I$ a $c\in(f'(x),f'(y))$, pak existuje z v otevřeném intervalu s krajními body x,y takové, že $f'(z)=c$.*

Definice 1.6.44. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$-ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) := \lim_{h \to 0+} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Problémy 1.6.45.
- Sestrojte spojitou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $f'(0)$ existuje a přitom v každém okolí bodu 0 existuje bod, kde derivace f neexistuje.
- Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ a existuje $f''(0)$. Dokažte, že platí

  $$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}(f(h) + f(-h)).$$

  Plyne z existence této limity existence $f''(0)$ nebo spojitost f v 0?

——————konec přednášky 17: 2.12. Jiří Spurný——————————————-

1.6.5 Elementární funkce

Věta 1.6.46 (Zavedení exponenciály)**.** *Existuje právě jedna funkce* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, splňující*

(1) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$,

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(\exp(x) - \exp(0)) = 1$.

——————konec přednášky 18: 8.12. Luboš Pick——————————————-

Definice 1.6.47. Funkci $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, jejíž existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.6.46, nazýváme *exponenciální funkcí*, případně *exponenciálou.* Číslo $\exp(1)$ označujeme symbolem e a nazýváme *Eulerovým číslem.*

Poznámka. Z důkazu Věty 1.6.46 plyne, že exponenciální funkce má následující vlastnosti:

- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in R : \quad \exp(nx) = \exp(x)^n$;
- $\exp(0) = 1$;
- $\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;
- $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$;
- exp je rostoucí a spojitá na $\mathbb{R}$.

Definice 1.6.48.
- Funkce $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Nazývá se *funkcí přirozeného logaritmu*, případně *přirozeným logaritmem* nebo *logaritmickou funkcí.*
- Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme

  $$\log_a x := \frac{\log x}{\log a}, \qquad x > 0.$$

  Funkci $\log_a$ nazýváme *logaritmem o základu a.*
- Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem

  $$a^b := \exp(b \log a).$$

- Nechť $a > 0$. Potom funkci, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí hodnotu a^x nazýváme *obecnou mocninou.*

- Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, *n-tou odmocninu* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, *n-tou odmocninu* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0,\infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0,\infty)$.

Věta 1.6.49 (Vlastnosti přirozeného logaritmu). *Funkce* log *je definovaná, spojitá a rostoucí na intervalu* $(0,\infty)$ *a splňuje*

$$\forall\ x,\ y \in (0,\infty): \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y),$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}.$$

——————konec přednášky 18: 3.12. Jiří Spurný————————————————-

——————konec přednášky 19: 10.12. Luboš Pick————————————————-

Věta 1.6.50 (Zavedení sinu, cosinu a čísla π). *Existuje právě jedna funkce* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, právě jedna funkce* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a právě jedno číslo* $\pi \in \mathbb{R}$ *tak, že*

(1) $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$ *a* $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$*;*

(2) s *je lichá,* c *je sudá;*

(3) s *roste na* $[0, \frac{\pi}{2}]$, $s(\frac{\pi}{2}) = 1$ *a* $s(0) = 0$*;*

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$.

——————konec přednášky 19: 9.12. Jiří Spurný————————————————-

Definice 1.6.51. Definujme sin a cos jako funkce s a c z Věty 1.6.50.

Poznámka. Funkce sinus a cosinus mají všechny obvyklé vlastnosti, které od těchto funkcí očekáváme.

Definice 1.6.52. Pomocí funkcí sin a cos zavedeme další funkce:

$$\begin{array}{lll} \textit{tangens} & \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, & x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \textit{kotangens} & \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, & x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme souhrnně *goniometrickými funkcemi.*

Definice 1.6.53. Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím nazýváme *cyklometrickými funkcemi.* Jde o funkce

$$\begin{array}{ll} \textit{arkussinus} & \arcsin := (\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]})^{-1}, \\ \textit{arkuskosinus} & \arccos := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}, \\ \textit{arkustangens} & \operatorname{arctg} := (\operatorname{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)})^{-1}, \\ \textit{arkuskotangens} & \operatorname{arccotg} := (\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)})^{-1}. \end{array}$$

Tedy $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$.

——————konec přednášky 20: 10.12. Luboš Pick————————————————-

Definice 1.6.54. Pomocí funkce exp definujeme tzv. *hyperbolické funkce*:

$$\begin{array}{lll} \textit{hyperbolický sinus} & \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, & x \in \mathbb{R},, \\ \textit{hyperbolický kosinus} & \cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, & x \in \mathbb{R}, \\ \textit{hyperbolický tangens} & \operatorname{tgh} x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x}, & x \in \mathbb{R}, \\ \textit{hyperbolický kotangens} & \operatorname{cotgh} x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{array}$$

Problém 1.6.55. Nechť $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ splňují $\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{n+1} = 0$. Dokažte, že polynom $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ má v $(0,1)$ alespoň jeden kořen.

1.6.6 Konvexní a konkávní funkce, inflexní body

Definice 1.6.56. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$.

- Pokud $f'(a)$ existuje vlastní, pak *tečnu ke grafu funkce f v bodě a* definujeme jako lineární funkci $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Řekneme, že f má v bodě a *inflexi* (neboli že a je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že buď

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (a-\delta, a):& \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), \\ \&\ \forall\, x \in (a, a+\delta):& \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (a-\delta, a):& \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x-a), \\ \&\ \forall\, x \in (a, a+\delta):& \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Věta 1.6.57 (Nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a) \neq 0$, pak a není inflexní bod funkce f.*

Poznámka. Samotný fakt, že $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje inflexi. Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f''(0) = 0$, nula ale není inflexním bodem f.

Věta 1.6.58 (Postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$ a nechť*

$$\forall\, x \in (a, z): \quad f''(x) > 0 \qquad a \qquad \forall\, x \in (z, b): \quad f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod funkce f.

Analogicky, je-li

$$\forall\, x \in (a, z): \quad f''(x) < 0 \qquad a \qquad \forall\, x \in (z, b): \quad f''(x) > 0,$$

je v z inflexní bod.

Příklad. Je-li

$$f(x) := \begin{cases} x^5(1 + \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale nejsou splněny předpoklady věty.

——————konec přednášky 20: 10.12. Jiří Spurný——————————————-

Definice 1.6.59. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je *konvexní* na I, jestliže

$$\forall\, x, y, \in I,\ \lambda \in (0,1): \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

f je *konkávní* na I, jestliže

$$\forall\, x, y, \in I,\ \lambda \in (0,1): \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

f je *ryze konvexní* na I, jestliže

$$\forall\, x, y, \in I,\ \lambda \in (0,1): \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

f je *ryze konkávní* na I, jestliže

$$\forall\, x, y, \in I,\ \lambda \in (0,1): \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lemma 1.6.60 (Ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť f je funkce definovaná na I. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je konvexní na I;*

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$;

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$: $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$;

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Analogické charakterizace platí pro konkavitu, ryzí konvexitu a ryzí konkavitu.

Věta 1.6.61 (O vztahu konvexity a existence jednostranných derivací). *Nechť f je funkce konvexní na intervalu I a nechť $a \in \operatorname{Int} I$. Potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. Navíc platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.*

Poznámka. Jednostranné derivace, jejichž existenci zaručuje Věta 1.6.61, se nemusí sobě rovnat (nemusí tedy existovat $f'(a)$). Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $x = 0$. V krajních bodech intervalu existují jednostranné derivace, ale ty mohou být nekonečné (např. funkce $\operatorname{sgn} x$ na intervalu $[-1, 0]$).

——————konec přednášky 21: 15.12. Luboš Pick——————————————-

Věta 1.6.62 (O vztahu konvexity a spojitosti). *Konvexní funkce na otevřeném intervalu je na tomto intervalu spojitá.*

Poznámka. Na jiném než otevřeném intervalu Věta 1.6.62 neplatí. Protipříkladem je funkce sgn, která je například na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, ale ne spojitá.

Věta 1.6.63 (O vztahu druhé derivace a konvexity/konkavity). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má f na $\operatorname{Int} I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.*

Speciálně, je-li $f'' > 0$ na $\operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Analogická tvrzení platí pro ryzí konkávitu, konvexitu a ryzí konvexitu.

Problém 1.6.64. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konkávní a zdola omezená. Dokažte, že je konstantní.

——————konec přednášky 21: 16.12. Jiří Spurný——————————————-

1.6.7 Průběh funkce

Definice 1.6.65. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ *asymptotu $ax + b$*, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 1.6.66 (O tvaru asymptoty). *Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \qquad a \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Příklady.

- Funkce e^x má v $-\infty$ asymptotu $y = 0$ a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť první limita ve Větě 1.6.66 je nevlastní.
- Funkce $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ má v bodě ∞ asymptotu $\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Funkce $\operatorname{tg} x$ nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.
- Funkce $\sin x$ nemá v bodě ∞ asymptotu, ačkoli první z obou limit ve Větě 1.6.66 existuje a je rovna nule, neexistuje však limita $\lim_{x\to\infty} (f(x) - 0 \cdot x)$.

Poznámka 1.6.67. Při vyšetřování průběhu funkce získáváme následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti;

- eventuální speciální vlastnosti, např. sudost, lichost nebo periodicita;
- definiční obor derivace, derivace a eventuální jednostranné derivace;
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální);
- obor hodnot;
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávita, inflexní body;
- asymptoty;
- graf funkce.

——————konec přednášky 22: 17.12. Luboš Pick——————————————-

Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{x^2+1})$.

——————konec přednášky 22: 17.12. Jiří Spurný——————————————-

Kapitola 2

Proseminář z kalkulu 1a

2.1 Téma 1: Metody důkazů, nerovnosti, zobrazení, logika

Příklad 2.1.1. Dokažte zobecněnou Bernoulliovu nerovnost:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -2: \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(Návod: použijte matematickou indukci s krokem $n \to n+2$.)
Ukažte na příkladě, že pro $x < -2$ a obecné $n \in \mathbb{N}$ již Bernoulliova nerovnost neplatí.

Příklad 2.1.2. Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla. Označme postupně A_n, G_n, H_n aritmetický, geometrický a harmonický průměr čísel $a_1, \ldots, a_n$, tedy

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Dokažte nerovnost

$$H_n \leq G_n \leq A_n.$$

Druhá z těchto nerovností se často označuje jako tzv. AG nerovnost.

(Návod: použijte matematickou indukci s krokem $n \to 2n$ a potom znovu se zpětným krokem $n \to n-1$ k důkazu druhé nerovnosti. První nerovnost pak dokažte použitím druhé nerovnosti na převrácené hodnoty čísel $a_1, \ldots, a_n$.)

Příklad 2.1.3. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{2}{3}.$$

Příklad 2.1.4. Dokažte nerovnost

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(Návod: použijte AG nerovnost pro čísla $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = \frac{n}{n-1}$, $a_n = 1$.)

Příklad 2.1.5. Dokažte následující Cauchyovu nerovnost: Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Příklad 2.1.6. Uvažujme zobrazení $f: X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Dokažte následující rovnosti.

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Příklad 2.1.7. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Příklad 2.1.8. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků a, b, c jsou následující výroky vždy pravdivé.

- $a \ \& \ (b \ \& \ c) \Leftrightarrow (a \ \& \ b) \ \& \ c$,
- $a \ \& \ (b \vee c) \Leftrightarrow (a \ \& \ b) \vee (a \ \& \ c)$,
- $a \vee (b \ \& \ c) \Leftrightarrow (a \vee b) \ \& \ (a \vee c)$,
- $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$,
- $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \ \& \ \neg b)$.

2.2 Téma 2: Vlastnosti reálných čísel, mohutnost množin

Příklad 2.2.1. Odvoďte z definice reálných čísel.

- $\forall x \in \mathbb{R}: \ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ -x = (-1) \cdot x$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x > 0 \ \& \ y > 0) \Rightarrow xy > 0$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x > y \Rightarrow x + z > y + z$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \geq y > z \Rightarrow x > z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \geq 0 \ \& \ y > 0) \Rightarrow x + y > 0$,
- $\forall x, y, z, u \in \mathbb{R}: \ (x \geq y \ \& \ z > u) \Rightarrow x + z > y + u$,
- $\forall x, y, z, u \in \mathbb{R}$ kladná : $(x < y \ \& \ z \leq u) \Rightarrow xz < yu$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ 0 \leq x < y \Rightarrow x^n < y^n$,
- $(-1)(-1) = 1$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (-x)(-y) = xy$,
- $-0 = 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ -(-x) = x$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (-x)y = -(xy) = x(-y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ x > 0 \iff -x < 0$,
- $0 < 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x > 0 \ \& \ y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (x < y) \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y, \quad \text{kde} \quad 2 = 1 + 1,$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (0 < x < y) \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x},$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (x \neq 0) \Rightarrow 0 < x \cdot x,$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (x < 0 < y) \Rightarrow x \cdot y < 0,$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (0 < x < 1) \Rightarrow x \cdot x < x.$

Příklad 2.2.2. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Příklad 2.2.3. Nechť množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná.

Příklad 2.2.4. Ukažte, že množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Příklad 2.2.5. Nechť množiny A, B jsou spočetné. Pak $A \times B$ je spočetná.

Příklad 2.2.6. Každá nekonečná podmnožina spočetné množiny má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

Příklad 2.2.7. Množina všech zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\{0, 1\}$ je nespočetná.

Příklad 2.2.8. (vlastnosti subvalence) Pro libovolné množiny A, B, C platí:

- $(A \preceq B \;\&\; B \preceq C) \Rightarrow A \preceq C,$
- $A \preceq A,$
- $(A \preceq B \;\&\; B \preceq A) \Rightarrow A \approx B$ (bez důkazu).

(vlastnosti ekvivalence mohutnosti množin) Pro libovolné množiny A, B, C platí:

- $A \approx A$ (reflexivita),
- $A \approx B \Rightarrow B \approx A$ (symetrie),
- $(A \approx B \;\&\; B \approx C) \Rightarrow A \approx C$ (tranzitivita).

Příklad 2.2.9. $\mathbb{R}$ je nespočetné.

Příklad 2.2.10. Transcendentních čísel je nespočetně mnoho.

Příklad 2.2.11. Nechť A je množina. Pak platí $A \prec 2^A$, kde 2^A značí *potenci* A, tj. množinu všech podmnožin množiny A.

Příklad 2.2.12. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

2.3 Téma 3: Infimum a limita posloupnosti

Příklad 2.3.1. Najděte infimum a supremum množin

$$\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}; n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Příklad 2.3.2. Je-li $q \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1), \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1, \\ \text{neexistuje}, & q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Příklad 2.3.3. Buď $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Buď $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel. Ukažte (z definice limity), že platí:
$$\lim a_n = a \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}\,.$$

Příklad 2.3.4. Ukažte „lemma o jednom strážníku v nekonečnu“: Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti reálných čísel, $a_n \leq b_n$. Potom
$$\lim a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim b_n = +\infty\,,$$
$$\lim b_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim a_n = -\infty\,.$$

Příklad 2.3.5. Zvolme $a_1 \in (0,2)$ a definujme posloupnost a_n rekurentním vztahem $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte:

- a_n je neklesající posloupnost,
- $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq 2$.
- S využitím znalosti, že každá monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost má vlastní limitu ukažte, že $\lim a_n = 2$.

Příklad 2.3.6. Definujme posloupnosti
$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ukažte:

- $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n < b_n$,
- a_n je rostoucí posloupnost, b_n je klesající posloupnost,
- a_n je omezená shora, b_n je omezená zdola,
- $\lim(b_n - a_n) = 0$.

S využitím znalosti, že každá monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost má vlastní limitu ukažte, že

- existují vlastní $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a vlastní $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ a rovnají se;
- označíme-li tuto společnou limitu $\mathcal{E}$, ukažte s využitím vlastností a_n a b_n, že $2 < \mathcal{E} < 3$.

Příklad 2.3.7. Ukažte, že pro posloupnost kladných čísel a_n platí:
$$\lim \sqrt[n]{a_n} = A < 1 \implies \lim a_n = 0\,, \qquad \lim \sqrt[n]{a_n} = B > 1 \implies \lim a_n = +\infty\,,$$
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A < 1 \implies \lim a_n = 0\,, \qquad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = B > 1 \implies \lim a_n = +\infty\,.$$
Spočtěte limity
$$\lim \frac{n^k}{a^n}\,, \quad \lim \frac{a^n}{n!}\,, \quad \lim \frac{n!}{n^n}\,,$$
kde $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Příklad 2.3.8. Ukažte, že pro posloupnost kladných čísel a_n platí:
$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$
Odvoďte z toho, že platí:
$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = A\,.$$

Ukažte na příkladu, že tuto implikaci nelze obrátit. Spočtěte s využitím této implikace $\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n \mathcal{E}^{-n}}}$.

Příklad 2.3.9. a) Dokažte *Stolzovu větu*: Nechť a_n, b_n jsou posloupnosti reálných čísel, takové, že

- b_n je rostoucí, $\lim b_n = +\infty$,
- existuje $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A \in \mathbb{R}$.

Potom existuje $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

b) Ukažte na příkladech, že Stolzovu větu nelze obrátit.

c) Ukažte, že nelze vynechat předpoklad neomezenosti posloupnosti $\{b_n\}$.

d) Spočtěte

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \lim \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Příklad 2.3.10. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a definujme $b_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. Potom platí: existuje-li $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, existuje i $\lim b_n = A$. Dokažte. Ukažte, že může existovat $\lim b_n$ a nemusí existovat $\lim a_n$.

Příklad 2.3.11. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{b_n\}$ je posloupnost obsažená v $H(\{a_n\})$ s limitou $b \in \mathbb{R}^*$. Ukažte, že $b \in H(\{a_n\})$.

Příklad 2.3.12. Buď $a \in \mathbb{R}$ iracionální číslo. Ukažte, že množinou hromadných bodů posloupnosti $\{na - [na]\}_{n=1}^{\infty}$ (kde $[x]$ značí celou část čísla x) je celý uzavřený interval $[0, 1]$.

Příklad 2.3.13. Ukažte, že množinou hromadných bodů posloupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je celý uzavřený interval $[-1, 1]$.

2.4 Téma 4: Číselné řady s nezápornými členy

Příklad 2.4.1. Seznamte se zněním (resp. osvěžte si znění) následujících (zjednodušených) kritérií konvergence číselných řad s nezápornými členy:

Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Příklad 2.4.2. Rozhodněte, zda jsou následující řady konvergentní nebo divergentní:

$$(a) \sum \frac{1}{n!}, \qquad (b) \sum \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R},\, x > 0 \text{ pevné}),$$

$$(c) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad (d) \sum \frac{3n+5}{2^n}, \qquad (e) \sum \frac{3^n}{n^3},$$

$$(f) \sum \frac{(n+7)!}{7^n\, n!}, \qquad (g) \sum \frac{n!}{n^n}, \qquad (h) \sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}.$$

Příklad 2.4.3. Seznamte se zněním (resp. osvěžte si znění) následujících (zjednodušených) kritérií konvergence číselných řad s nezápornými členy:

Věta (srovnávací kritérium). *Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$. Dále nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \le a_n \le b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$.*

(i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Věta (limitní srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim a_n/b_n \in (0,\infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 2.4.4. Rozhodněte, zda jsou následující řady konvergentní nebo divergentní.

$$(a) \sum \frac{1+\sqrt[4]{n^3}}{1+\sqrt[3]{n^5}}, \qquad (b) \sum \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}},$$

$$(c) \sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n},$$

$$(d) \sum \frac{\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n-1}}{n},$$

$$(e) \sum \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}, \qquad (f) \sum \frac{n^5}{2^n+3^n+5^n}.$$

Příklad 2.4.5. Seznamte se zněním (resp. osvěžte si znění) následujícího kritéria konvergence číselných řad s nezápornými členy (případně naznačte důkaz):

Věta (Raabeovo kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) Je-li $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) Je-li $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Příklad 2.4.6. Rozhodněte, zda jsou následující řady konvergentní nebo divergentní:

$$(a) \quad \sum \frac{1}{n^k} \quad (k \geq 2\,,\ k \in \mathbb{N})\,,$$

$$(b) \quad \sum \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})}, \qquad (c) \quad \sum \frac{4^n\,(n!)^2}{(2\,n+1)!},$$

$$(d) \quad \frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots \qquad \text{pro } a,b,d>0.$$

Příklad 2.4.7. Předpokládejme, že řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Předpokládejme, že $s_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} \text{ diverguje,} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2} \text{ konverguje.}$$

Aplikujte tento výsledek na případy (i) $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a (ii) $a_n = \log(1+\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 2.4.8. Předpokládejme, že řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Označme $\{r_n\}$ posloupnost zbytků řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, to jest $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $r_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \text{ diverguje,} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} \text{ konverguje.}$$

Příklad 2.4.9. Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Dokažte, že pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Ukažte na příkladu, že tuto implikaci není možno obrátit.

Příklad 2.4.10. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada s kladnými členy. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci kladné posloupnosti $\{b_n\}$ takové, aby obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ konvergovaly.

Příklad 2.4.11. Existuje kladná posloupnost $\{a_n\}$ taková, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ konvergují?

Příklad 2.4.12. Dokažte, že pro každou konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy existuje rostoucí posloupnost $\{c_n\}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ konverguje.

Výsledky. • Příklad 2.4.2: (a) konverguje (podílové kr.), (b) konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$ (podílové kr.), (c) konverguje (podílové kr.), (d) konverguje (podílové nebo odmocninové kr.), (e) diverguje (podílové nebo odmocninové kr.), (f) konverguje (podílové kr.), (g) konverguje (podílové kr.), (h) konverguje (podílové kr.).

- Příklad 2.4.4: (a) diverguje (limitní srovnávací kr.), (b) diverguje (limitní srovnávací kr.), (c) diverguje (limitní srovnávací kr.), (d) konverguje (limitní srovnávací kr.), (e) konverguje (srovnávací kr., odhadněte čitatele shora), (f) konverguje (srovnávací kr., odhadněte jmenovatele zdola).
- Příklad 2.4.6: (b) konverguje (Raabeovo kr.), (c) diverguje (Raabeovo kr.), (d) konverguje pro $b > a + d$ a diverguje pro $b < a + d$ (Raabeovo kr.), diverguje pro $b = a + d$ (limitní srovnávací kr.).
- Příklad 2.4.10: konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$

2.5 Téma 5: Limita funkce

Příklad 2.5.1. Určete následující limity, pokud existují.

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right), \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\alpha}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x), \alpha \in \mathbb{R}. \qquad \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

Příklad 2.5.2. Určete následující limity, pokud existují.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x^{\beta}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 2.5.3. Spočtěte limity

$$\lim_{x\to 0} x^2((1 + 2 + \cdots + [\frac{1}{|x|}]), \quad \lim_{x\to 0_+} x([\frac{1}{x}] + [\frac{2}{x}] + \cdots + [\frac{k}{x}]).$$

Příklad 2.5.4. Určete následující limity, pokud existují.

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{tg}(x^2)}, \qquad \lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}.$$

Příklad 2.5.5. Určete následující limity, pokud existují.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \log\frac{x}{2}\right).$$

Příklad 2.5.6. Z definice spočtěte limity

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x}, \ \lim_{x\to a} x^3, \ \lim_{x\to a} \frac{x}{x^2+1}.$$

Příklad 2.5.7. Ukažte, že existuje:

(a) Funkce $g : [0,1] \to [0,1]$ taková, že $g(I) = [0,1]$ pro libovolný interval $I \subset [0,1]$. Může taková funkce být v nějakém bodě spojitá?

(b) Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(I) = \mathbb{R}$ pro libovolný interval $I \subset \mathbb{R}$.

Příklad 2.5.8. Hledejte limity a zkoumejte spojitost funkcí $D(x)\sin x$, $D(R(x))$, $\sin(R(x))$ apod.

Příklad 2.5.9. S využitím znalosti, že funkce f, monotónní na $(c - \delta, c)$, má limitu $\lim_{x\to c-} f(x)$ (a podobně pro limitu zprava), ukažte, že množina všech bodů nespojitosti monotónní funkce je nejvýše spočetná. Rozmyslete si také, že všechny nespojitosti monotónní funkce jsou neodstranitelné nespojitosti 1. druhu, tj. nespojitosti typu „skok“.

Příklad 2.5.10. Jaké dodatečné podmínky na funkce f a g je potřeba klást, aby platila věta o limitě složené funkce v různých „jednostranných“ verzích? Diskutujte například tyto možnosti:

(a) $\lim\limits_{x\to c+} g(x) = D \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to D-} f(y) = A \in \mathbb{R}$ & $\ldots \implies \lim\limits_{x\to c+} f(g(x)) = A$.

(b) $\lim\limits_{x\to c-} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y\to +\infty} f(y) = A \in \mathbb{R}$ & $\ldots \implies \lim\limits_{x\to c-} f(g(x)) = A$.

Příklad 2.5.11. Nechť existuje $\delta^* > 0$ takové, že funkce f je definována alespoň na $\mathcal{P}^{\delta^*}(c)$. Definujme limes inferior (lim inf) a limes superior (lim sup) funkce f v bodě c takto:

$$\liminf_{x\to c} f(x) := \sup_{\delta\in(0,\delta^*)} \inf \{f(x) : x \in P(c,\delta)\},$$
$$\limsup_{x\to c} f(x) := \inf_{\delta\in(0,\delta^*)} \sup \{f(x) : x \in P(c,\delta)\}.$$

(a) Ukažte, že limita $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existuje právě tehdy, když existují $\liminf\limits_{x\to c} f(x)$ a $\limsup\limits_{x\to c} f(x)$ a rovnají se.

(b) Ukažte, že platí

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \inf \{f(x) : x \in P(c,\delta)\},$$
$$\limsup_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup \{f(x) : x \in P(c,\delta)\}$$

a

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \inf \{y \in \mathbb{R}^* : \text{ existuje posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\, x_n \neq c,\, \lim x_n = c,\, y = \lim f(x_n)\},$$
$$\limsup_{x\to c} f(x) = \sup \{y \in \mathbb{R}^* : \text{ existuje posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\, x_n \neq c,\, \lim x_n = c,\, y = \lim f(x_n)\}.$$

(c) Spočtěte $\liminf_{x\to c} f(x)$ a $\liminf_{x\to c} f(x)$ pro Dirichletovu resp. Riemannovu funkci v různých bodech $c \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.5.12. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a $\{x_n\}$ omezená posloupnost v $\mathbb{R}$. Platí

$$\limsup f(x_n) = f(\limsup x_n) \quad \text{a} \quad \liminf f(x_n) = f(\liminf x_n)?$$

Co když přidáme předpoklad monotonie u funkce f?

Příklad 2.5.13. Zkoumejte spojitost funkcí

$$f(x) = [x^2]\sin(\pi x), \quad [x] + (x - [x])^{[x]}, x \in [\frac{1}{2}, \infty).$$

Příklad 2.5.14. Řekneme, že funkce f má na intervalu J Darbouxovu vlastnost, pokud pro všechna x, $y \in J$, $x < y$, a pro všechna c mezi $f(x)$ a $f(y)$ existuje $z \in (x,y)$, že $f(z) = c$. Klasická věta reálné analýzy říká, že každá spojitá funkce na uzavřeném intervalu má Darbouxovu vlastnost. Ukažte, že funkce $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ pro $x \in (0,1]$, $f(0) := 0$ je nespojitá na $[0,1]$ a přitom má Darbouxovu vlastnost.

Příklad 2.5.15. Zkonstruujte tzv. *Cantorovo diskontinuum* $\mathcal{C}$ a ukažte:

(a) Celková délka všech intervalů, které se při konstrukci Cantorova discontinua odstraní z intervalu $[0,1]$, je 1.

(b) Množina všech bodů, patřících do Cantorova diskontinua $\mathcal{C}$, je nespočetná.

(c) Nechť $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \cup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)$, kde (a_j,b_j) jsou všechny intervaly, odstraněné při konstrukci $\mathcal{C}$. Uvažujte funkci $g(x) := 2\frac{x-a_j}{b_j-a_j} - 1$, pro $x \in (a_j,b_j)$ a $g(x) := 0$, $x \in \mathcal{C}$. Ukažte, že tato funkce je nespojitá v nespočetně mnoha bodech intervalu $[0,1]$, přesto má na něm Darbouxovu vlastnost.

Příklad 2.5.16. Existuje funkce, která není spojitá v žádném bodě intervalu J a přitom má na něm Darbouxovu vlastnost?

Příklad 2.5.17. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $a > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(an) = 0$. Existuje potom $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Příklad 2.5.18. • Ukažte, že darbouxovská a monotonní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá.

- Tvoří darbouxovské funkce na $\mathbb{R}$ vektorový prostor?

Příklad 2.5.19. Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá prostá, pak je monotónní. Dokažte.

Výsledky.
- Příklad 2.5.7: (a) Uvažujte $x \in [0,1)$ s dekadickým rozvojem $x = 0.a_1a_2\dots a_k\dots$. Jsou dvě možnosti: α) Existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{2n} = 5$ pro všechna $n \geq p$; potom uvažujme nejmenší takové p a definujme $g(x) := 0.a_{2p-1}a_{2p+1}a_{2p+3}\dots$. β) Žádné p s uvedenou vlastností neexistuje; pak položme $g(x) := 0$.

  Ukážeme nyní, že
  $$g(I) = [0,1] \text{ pro libovolný interval } I \subset [0,1):$$
  K libovolnému $I \subset [0,1)$ najdeme $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a_1,\dots,a_{2q} \in \{0,1,\dots,9\}$ taková, že jak bod $0.a_1a_2\dots a_{2q}$ tak bod $0.a_1a_2\dots a_{2q}{+}10^{-2q}$ leží v I; pak libovolný bod tvaru $0.a_1a_2\dots a_{2q}a_{2q+1}a_{2q+2}\dots$ (kde a_{2q+1}, a_{2q+2}, $\dots$ jsou zcela libovolné cifry z $\{0,1,\dots,9\}$) také leží v I. Mějme nyní libovolné $y \in [0,1]$, a nechť $0.y_1y_2\dots y_n\dots$ je jeho desetinný rozvoj. Jak lze jednoduše ověřit, číslo $z := 0.a_1\dots a_{2q}00y_15y_25y_35\dots$ leží v I a přitom $g(z) = y$.

  (b) Rozšiřme nyní g na celé $\mathbb{R}$ 1-periodicky, toto rozšíření budeme stále značit g. Potom zřejmě $g(I) = [0,1]$ pro libovolný interval $I \subset \mathbb{R}$. Položme $h(x) := g(x)$ kdykoli $g(x) \in (0,1)$, a $h(x) := \frac{1}{2}$ pokud buď $g(x) = 0$ nebo $g(x) = 1$; pak $h(I) = (0,1)$ pro libovolný interval $I \subset \mathbb{R}$. Protože dále $\varphi(x) := \operatorname{tg}\pi(x - \frac{1}{2})$ zobrazuje $(0,1)$ na $\mathbb{R}$, zobrazuje funkce $f := \varphi \circ h$ každý interval $I \subset \mathbb{R}$ na celé $\mathbb{R}$.

- Příklad 2.5.9: Bez újmy na obecnosti uvažujte neklesající f. Pro každý bod nespojitosti x_0 funkce f platí, že otevřený interval $(\lim_{x\to x_0-} f(x), \lim_{x\to x_0+} f(x))$ je nedegenerovaný, tj. neprázdný. Lze tedy bodu x_0 přiřadit (libovolné) **racionální** číslo r_{x_0} z tohoto intervalu. Protože pro dva různé body nespojitosti $x_1 \neq x_2$ funkce f jsou intervaly $(\lim_{x\to x_1-} f(x), \lim_{x\to x_1+} f(x))$ a $(\lim_{x\to x_2-} f(x), \lim_{x\to x_2+} f(x))$ disjunktní (důsledek monotonie), je takovéto přiřazení prostým zobrazením z množiny bodů nespojitosti f do $\mathbb{Q}$.

- Příklad 2.5.10: (a) Buď musí existovat $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ taková, že $g(\mathcal{P}^+(c,\delta)) \subset \mathcal{P}^-(D,\varepsilon)$, nebo stačí, když existují $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ taková, že $g(\mathcal{P}^+(c,\delta)) \subset \mathcal{B}^-(D,\varepsilon)$ a f je spojitá v bodě D zleva.

  (b) Není potřeba žádná dodatečná podmínka.

- Příklad 2.5.16: Uvažte funkci z problému 1.

- Příklad 2.5.17: Uvažte $f(n\sqrt[n]{2}) := 1$ a $f(x) := 0$ pro $x \neq n\sqrt[n]{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.6 Téma 6: Derivace

Příklad 2.6.1. Zderivujte:

$$\cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x.$$

Příklad 2.6.2. Nalezněte derivace následujících funkcí v bodech, ve kterých existují:

$$x|x|,\ \sqrt{|x|},\ |x|\sin^2(\pi x),\ \arccos\frac{1}{|x|},\ \log_x(2),\ \log_x(\cos x).$$

Příklad 2.6.3. Nalezněte derivace následujících funkcí v bodech, ve kterých existují:

$$\text{(a)}\quad f(x) := \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad f(x) := \begin{cases} \operatorname{arctg} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\text{(c)}\quad f(x) := \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Příklad 2.6.4. Najděte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že:

- $f'(0) > 0$ a funkce není rostoucí na žádném okolí 0,
- $f'(0) = 0$ a funkce je rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $f'(0) > 0$, funkce není rostoucí na žádném okolí 0 a má na $\mathbb{R}$ vlastní derivaci.

Příklad 2.6.5. Spočtěte z definice (pokud existují) derivace následujících funkcí:

1. $x \sin \frac{1}{x}$ v bodě $x = 0$, $x^2 \sin \frac{1}{x}$ v bodě $x = 0$;
2. $xD(x)$ v bodě $x = 0$, $x^2 D(x)$ v bodě $x = 0$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce;

Příklad 2.6.6. 1. Víte-li, že $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, spočtěte pomocí věty o derivaci inverzní funkce $(x^{1/n})'$.

2. Na přednášce byla dokázána věta o derivaci inverzní funkce ve vnitřních bodech otevřeného intervalu. Nechť tedy nyní f je ryze monotónní na $[a, b]$ a má jednostranné derivace v a zprava (resp. v b zleva). Zformulujte a dokažte větu o (jednostranných) derivacích inverzní funkce f^{-1} v bodech $f(a)$, $f(b)$ (z příslušné strany). Spočtěte poté derivace (resp. jednostranné derivace) funkce arcsin ve všech bodech jejího definičního oboru.

Příklad 2.6.7. Nechť $f(a) > 0$ a $f'(a) \in \mathbb{R}$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a + 1/n)}{f(a)} \right)^{1/n}, \quad \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\log x - \log a}}.$$

Příklad 2.6.8. Nechť existuje $f'(a)$ a $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posloupnosti v $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ konvergující k a takové, že $x_n \neq y_n$. Platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a)?$$

A co když $x_n < a < z_n$?

Příklad 2.6.9. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci a je lichá. Pak f' je sudá. Co když je f sudá?

2.7 Téma 7: Věty o střední hodnotě a L'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.7.1. Dokažte: Je-li f spojitá na $[a, b]$, má vlastní derivaci na (a, b) a $f(a) = f(b) = 0$, pak pro každé reálné α existuje $x \in (a, b)$ takové, že

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

Příklad 2.7.2. Dokažte: Jsou-li f a g spojité na $[a, b]$, mají vlastní derivaci na (a, b) a $f(a) = f(b) = 0$, pak existuje $x \in (a, b)$ takové, že

$$g'(x)f(x) + f'(x) = 0.$$

Příklad 2.7.3. Dokažte: Je-li f spojitá na $[0, 2]$, má vlastní druhou derivaci na $(0, 2)$ a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a $f(2) = 2$, pak existuje $x \in (0, 2)$ takové, že

$$f''(x) = 0.$$

Příklad 2.7.4. Nechť f má konečnou derivaci v každém bodě (a, b). Je-li $\{f'(x); x \in (a, b)\}$ konečná, pak f je lineární funkce na (a, b).

Příklad 2.7.5. Sestrojte spojitou nekonstantní $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takovou, že $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a množina $\{x \in (a, b); f'(x) = 0\}$ je nekonečná.

Příklad 2.7.6. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou f' a $f'' \geq 2$ na $\mathbb{R}$. Nechť dále platí $f(0) = f'(0) = 0$. Ukažte, že $f(x) \geq x^2$ pro $x \in [0, \infty)$.

Příklad 2.7.7. Nechť pro $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ existuje $K > 0$, $\beta > 1$ taková, že

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\beta, \quad x, y \in (a, b).$$

Pak f je konstantní na (a, b).

Příklad 2.7.8. Pomocí L'Hospitalova pravidla určete následující limity.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}; \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right); \qquad \lim_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}.$$

Příklad 2.7.9. Spočtěte limity.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta},\ \alpha,\beta \in (0\,\infty); \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x},\ \alpha > 0; \qquad \lim_{x\to 0_+} x^\alpha |\log x|^\beta,\ \alpha,\beta > 0.$$

2.8 Téma 8: Elementární funkce

Příklad 2.8.1. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$

Příklad 2.8.2. (a) Funkce tg, cotg, arcsin, arccos, arctg, arccotg jsou na svém definičním oboru spojité,

(b)

$$\forall\, x \in [-1,1]: \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 2.8.3.
- Nalezněte vzorec pro $\arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Nalezněte vzorec pro $\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.8.4. Definujte tzv. hyperbolické funkce (hyperbolický sinus, kosinus, tangens a kotangens):

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cotgh} x := \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

a ukažte:

(a) $D(\sinh) = \mathbb{R}$, sinh je na celém definičním oboru spojitá lichá a rostoucí, zobrazuje $\mathbb{R}$ prostě na $\mathbb{R}$, a pro její derivaci platí:
$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad x \in \mathbb{R};$$

(b) $D(\cosh) = \mathbb{R}$, cosh je na celém definičním oboru spojitá a sudá, která zobrazuje $\mathbb{R}$ na $[1,+\infty)$, přičemž je klesající na $(-\infty, 1]$ a rostoucí na $[1,+\infty)$, a pro její derivaci platí:
$$(\cosh x)' = \sinh x, \qquad x \in \mathbb{R};$$

(c) $D(\operatorname{tgh}) = \mathbb{R}$, tgh je na celém definičním oboru spojitá lichá a rostoucí, zobrazuje $\mathbb{R}$ prostě na $(-1,1)$, a pro její derivaci platí:
$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

(d) $D(\operatorname{cotgh}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, cotgh je na celém definičním oboru spojitá a lichá, zobrazuje $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ prostě na $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$, přičemž je klesající na $(-\infty,0)$ a klesající na $(0,+\infty)$ (nikoli však klesající na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a pro její derivaci platí:
$$(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Příklad 2.8.5. Definujte inverzní hyperbolické (tzv. hyperbolometrické) funkce:

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsinh} &:= (\sinh)^{-1}, \\
\operatorname{argcosh} &:= \left(\cosh|_{[0,+\infty)}\right)^{-1}, \\
\operatorname{argtgh} &:= (\operatorname{tgh})^{-1}, \\
\operatorname{argcotgh} &:= (\operatorname{cotgh})^{-1},
\end{aligned}$$

a ukažte, že jsou to spojité bijekce mezi uvedenými dvojicemi množin:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\\
&\operatorname{argcosh} : [1,+\infty) \to [0,+\infty)\,,\\
&\operatorname{argtgh} : (-1,1) \to \mathbb{R}\,,\\
&\operatorname{argcotgh} : \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.
\end{aligned}$$

Studujte monotonii uvedených funkcí.

Příklad 2.8.6. Ukažte některé ze základních vztahů pro hyperbolické funkce:

$$\begin{aligned}
e^x &= \cosh x + \sinh x\\
\\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\\
\\
\sinh 2x &= 2\sinh x\cosh x\\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x\\
\\
\sinh^2 \frac{x}{2} &= \frac{\cosh x - 1}{2}\\
\cosh^2 \frac{x}{2} &= \frac{\cosh x + 1}{2}\\
\\
\sinh(x+y) &= \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y\\
\sinh(x-y) &= \sinh x\cosh y - \cosh x\sinh y\\
\cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y\\
\cosh(x-y) &= \cosh x\cosh y - \sinh x\sinh y\\
\\
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}\\
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Porovnejte tyto vztahy se vztahy pro goniometrické funkce!

Příklad 2.8.7. Ukažte, že platí:

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsinh} x &= \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,, && x\in\mathbb{R}\,,\\
\operatorname{argcosh} x &= \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,, && x\in\mathbb{R}\,,\\
\operatorname{argtgh} x &= \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\,, && x\in(-1,1)\,,\\
\operatorname{argcotgh} x &= \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\,, && x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]\,.
\end{aligned}$$

2.9 Téma 9: Základní vlastnosti polynomů

Tvrzení 2.9.1. *Polynom tvaru* (4.1), $n \geq 0$, $a_n \neq 0$, *má nejvýše* n *kořenů.*

Tvrzení 2.9.2. *Nechť* $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ *a* $Q(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0$ *jsou dva polynomy takové, že platí* $P(z) = Q(z)$ *pro* $n+1$ *různých komplexních čísel. Potom* $a_j = b_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Definice 2.9.3. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ nazveme *kořenem polynomu P násobnosti k* (říkáme také, že α je *k-násobným kořenem polynomu P*), $1 \le k \le \mathrm{st}(P)$, pokud existuje polynom Q takový, že

$$P(z) = (z-\alpha)^k Q(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{2.1}$$
$$Q(\alpha) \neq 0\,. \tag{2.2}$$

Tvrzení 2.9.4. *(i) Polynom Q z* (2.1) *má stupeň* $\mathrm{st}(P) - k$.

(ii) Každý kořen polynomu stupně $n \ge 1$ má jednoznačně určenou násobnost.

Návod: V případě, že $Q(\alpha) \neq 0$, jste hotovi, jinak aplikujte na $Q(x)$ znovu (případně opakovaně) Tvrzení 4.1.4. Jednoznačnost lze ukázat sporem: pokud by existovala $1 \le k_1 < k_2 \le n$, že $P(z) = (z-\alpha)^{k_1} Q_1(z) = (z-\alpha)^{k_2} Q_2(z)$, dostanete $Q_1(z) = (z-\alpha)^{k_2-k_1} Q_2(z)$, odkud $Q_1(\alpha) = 0$.

Tvrzení 2.9.5 (základní věta algebry)**.** *Buď P polynom tvaru* (4.1), $\mathrm{st}(P) = n \ge 1$. *Potom existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, které je kořenem polynomu P.*

Důsledek 2.9.6 (rozklad polynomu na kořenové činitele)**.** *Buď P polynom tvaru* (4.1), $\mathrm{st}(P) = n \ge 1$. *Potom existují jednoznačně (až na pořadí) určená čísla $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$ (kořeny polynomu P), a jednoznačně určená čísla $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \le k_j \le n$, $j = 1, \ldots, m$ (násobnosti kořenů α_j) taková, že*

$$P(z) = a_n (z-\alpha_1)^{k_1} \cdots (z-\alpha_m)^{k_m} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.3}$$

Navíc platí

$$k_1 + \cdots + k_m = n\,, \tag{2.4}$$

neboli platí, že polynom P stupně $n \ge 1$ má právě n komplexních kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, jaká je jeho násobnost.

Návod: Užijte základní větu algebry, získáte kořen α_1 polynomu P. Buď jeho násobnost k_1 podle Tvrzení 2.9.4, (ii); podle (2.1)–(2.2) pište $P(z) = (z-\alpha_1)^{k_1} Q_1(z)$, $Q_1(\alpha_1) \neq 0$. Je-li $\mathrm{st}\, Q_1 (= \mathrm{st}\, P - k_1) \ge 1$ lze tento proces opakovat, dokud nedostanete polynom Q_m, $\mathrm{st}\, Q_m = 0$, tedy $Q_m(z) = c_0 \neq 0$ pro vhodnou konstantu c_0. Vztah (2.4) plyne buď z konstrukce polynomů Q_j nebo z toho, že nejvyšší mocnina z vpravo v (2.3) je $z^{k_1 + \cdots + k_m}$. Porovnáním koeficientů u z^n v (4.1), (2.3) dostanete $c_0 = a_n$ (viz Tvrzení 2.9.2).

Tvrzení 2.9.7. *Buď P polynom stupně $n \ge 1$ s reálnými koeficienty, buď $1 \le k \le n$. Potom $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu P násobnosti k právě tehdy, když $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu P násobnosti k. Zde $\overline{\alpha}$ značí číslo komplexně sdružené k $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Návod: Vyjděte z (2.1) a uvažte nejprve *pouze reálná x*. Pak ovšem $P(x) = \overline{P(x)} = (x-\overline{\alpha})^k \overline{Q}(x)$, kde $\overline{Q}$ je polynom s koeficienty komplexně sdruženými k odpovídajícím koeficientům polynomu Q. Rovnost $P(x) = (x-\overline{\alpha})^k \overline{Q}(x)$ platí pro všechna reálná x, a tedy podle Tvrzení 2.9.2 i pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Odtud plyne, že $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ je kořenem P násobnosti větší nebo rovné násobnosti kořene α. Provedeme-li ale stejnou úvahu pro kořen $\overline{\alpha}$ polynomu P, vidíme, že $\alpha = \overline{\overline{\alpha}}$ je kořenem P násobnosti větší nebo rovné násobnosti kořene $\overline{\alpha}$.

S využitím předchozího výsledku lze ukázat následující variantu Tvrzení 2.9.6.

Tvrzení 2.9.8. *Buď P polynom stupně $n \ge 1$ s reálnými koeficienty. Buďte $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ právě všechny reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \le k_j \le n$, $j = 1, \ldots, m$. Buďte dále β_j, $\overline{\beta_j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, \ell$ právě všechny dvojice komplexně sdružených kořenů polynomu P, s násobnostmi λ_j, $j = 1, \ldots, \ell$. Pak platí*

$$P(z) = a_n (z-\alpha_1)^{k_1} \cdots (z-\alpha_m)^{k_m} (z^2 + \gamma_1 z + \delta_1)^{\lambda_1} \cdots (z^2 + \gamma_\ell z + \delta_\ell)^{\lambda_\ell} \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{2.5}$$

kde γ_j, δ_j jsou reálná čísla taková, že polynomy $z^2 + \gamma_j z + \delta_j$ mají právě kořeny β_j, $\overline{\beta_j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Navíc platí

$$k_1 + \cdots + k_m + 2(\lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell) = n\,. \tag{2.6}$$

2.10 Téma 10: Konvexita, průběh funkce

Příklad 2.10.1. Nechť f je konvexní funkce na otevřeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že f má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$ až na nejvýše spočetnou množinu.

Příklad 2.10.2. Nechť f je konvexní funkce na otevřeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že potom platí *Jensenova nerovnost*

$$f(ax + by) \leq af(x) + bf(y)$$

pro každé $x, y \in (a, b)$ a $a, b \geq 0$, $a + b = 1$. Zformulujte obecnou verzi tohoto tvrzení pro n sčítanců.

Příklad 2.10.3. Dokažte *Youngovu nerovnost*: pro každé $x, y > 0$ a $p.q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Příklad 2.10.4. Nechť $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^a + e^b}{2}.$$

Příklad 2.10.5. Nechť f je konvexní funkce na otevřeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že potom je buďto f monotónní na (a, b) nebo existuje bod $c \in (a, b)$ s vlastností

$$f(c) = \min\{f(x);\ x \in (a, b)\},$$

přičemž f je nerostoucí na $(a, c]$ a neklesající na $[c, b)$.

Příklad 2.10.6. Je-li f reálná funkce a $x \in \mathbb{R}$, řekneme, že f je rostoucí v bodě x pokud existuje $\delta > 0$, že $f(y) < f(x)$ pro $y \in \mathcal{P}^{\delta}_{-}(x)$ a $f(y) > f(x)$ pro $y \in \mathcal{P}^{\delta}_{+}(x)$. Dokažte následující tvrzení:

- Je-li $f'(x) > 0$, je f rostoucí v x;
- Je-li f rostoucí v každém bodě intervalu (a, b), je rostoucí na (a, b).

Příklad 2.10.7. Ukažte, že

- $\sin x \leq x$, $x \in [0, \infty)$;
- $e^x - 1 \geq x$, $x \in [0, \infty)$;
- $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, $a, b > 0$, $p \geq 1$.

Příklad 2.10.8. Rozhodněte, které z dané dvojice čísel je větší. Snažte se nalézt analytický důkaz.

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & e^{\pi} & \text{nebo} & \pi^e, \\ \text{(ii)} & 2^{\sqrt{2}} & \text{nebo} & e, \\ \text{(iii)} & \log 8 & \text{nebo} & 2. \end{array}$$

Příklad 2.10.9. Vyšetřete průběhy funkcí

$$f(x) = (x - 1)\exp\left(\frac{x}{1 + x}\right),$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{1 - x^2}\right).$$

Kapitola 3

Matematická analýza 1a - cvičení

3.1 Téma 1: Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce

Příklad 3.1.1. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Příklad 3.1.2. Nakreslete graf funkce $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

Příklad 3.1.3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$.

Příklad 3.1.4. Dokažte následující formulky:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Příklad 3.1.5. (i) Dokažte, že $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?
(iii) Dokažte pomocí vhodného protipříkladu, že neplatí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2+n+41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

(iv) Nyní dokažte, že neplatí ani výrok

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < 41: \quad n^2+n+41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

Příklad 3.1.6. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Příklad 3.1.7. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 3.1.8. Dokažte pro $a, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|, \qquad ||a|-|b|| \leq |a-b|$.

Příklad 3.1.9. (i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!
(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

Příklad 3.1.10. Řešte rovnice:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x).$$

Příklad 3.1.11. Sečtěte: $\sin x + \cdots + \sin nx$.

Příklad 3.1.12.

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

Příklad 3.1.13. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí:

$$(n+1)^n \leq n^{n+1}.$$

Výsledky.

- Cvičení 3.1.1: $(4,6\rangle$; $\langle 1,2\rangle$; $(-6,-3) \cup \Big((-1-\sqrt{13})/2, (-1+\sqrt{13})/2\Big)$
- Cvičení 3.1.4: Použijte matematickou indukci.
- Cvičení 3.2.1: Všechny výroky jsou pravdivé.
- Cvičení 3.2.2: (i) B je padouch a C je poctivec; (ii) oba jsou poctivci; (iii) oba jsou padouši; (iv) ano.
- Cvičení 3.1.5: (ii) $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$; (iii) $n = 41$; (iv) $n = 40$.

Cvičení 3.1.7: Použijeme-li Moivreovu větu nebo součtové vzorce dostaneme:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Cvičení 3.1.8: První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.

Cvičení 3.1.9: Použijte matematickou indukci.

Cvičení 3.1.10: 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$; 3. rovnice: 4/3

Cvičení 3.1.11: Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(x/2)} \qquad \text{pro } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pokud $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak je součet roven nule.

Cvičení 3.1.12: Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1}.

Cvičení 3.1.13: Použijte matematickou indukci nebo aplikujte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.

3.2 Téma 2: Výroky, kvantifikátory, zobrazení, supremum a infimum

Příklad 3.2.1. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ (z > x \implies y < z)$$
$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1);$$
$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1).$$

Příklad 3.2.2. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana): (i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec“. Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(ii) A řekne: „Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iii) A řekne: „Já jsem padouch, ale B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iv) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se zeptáte C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co odpoví C?

Příklad 3.2.3. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.

$$\begin{aligned} A &= \left\{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}; \\ B &= \left\{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}; \\ C &= \left\{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}; \\ D &= \left\{q \in \mathbb{Q};\ q < \sqrt{3}\right\}; \\ E &= \{\sin x \cos x;\ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Příklad 3.2.4. Charakterizujte zobrazení $f : M \to L$, pro která platí

- $\forall A \subset M : f^{-1}(f(A)) = A$,
- $\forall B \subset L : f(f^{-1}(B)) = B$.

Příklad 3.2.5. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$,
- $B = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
- $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$,
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Výsledky. • Cvičení 3.2.1: Všechny výroky jsou pravdivé.

- Cvičení 3.2.2: Cvičení 3.2.2: (i) B je padouch a C je poctivec;
  (ii) oba jsou poctivci;
  (iii) oba jsou padouši;
  (iv) ano.
- Cvičení 3.2.3: $\sup A = 0$, $\inf A = -1$; $\sup B = \frac{3}{2}$, $\inf B = 0$; $\sup C$ neexistuje, $\inf C = 0$; $\sup D = \sqrt{3}$, $\inf D$ neexistuje; $\sup E = \frac{1}{2}$, $\inf E = -\frac{1}{2}$.

3.3 Téma 3: Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 3.3.1. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}.$$

Příklad 3.3.2. Spočtěte limity následujících posloupností:

$$\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}, \qquad \left\{\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right\}, \qquad \left\{\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}\right\}.$$

Příklad 3.3.3. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}.$$

Příklad 3.3.4. Vypočtěte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right)$ pro $a > b > 0$.

Příklad 3.3.5. Spočtěte limity:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Příklad 3.3.6. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),\qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

Příklad 3.3.7. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Příklad 3.3.8. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right).$$

Příklad 3.3.9. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Výsledky.

- Cvičení 3.3.1: 0, 2, 2
- Cvičení 3.3.2: $-1/2$, $1/3$, $1/4$
- Cvičení 3.3.3: 1-4. 0, 4, 0, 0

  5. Víme, že pro $k\in\mathbb{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n^k}=+\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že

  $$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0:\ n^2\leq n^3\leq n^4\leq 2^n\leq 3^n\leq 4^n.$$

  Platí tedy

  $$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0:\ 4\leq\sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n}\leq 4\sqrt[n]{6}.$$

  Víme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}=1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

  $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n}=4.$$

  6. 2/3
- Cvičení 3.3.4: $1/a$
- Cvičení 3.3.5:1.-4. 0, 0, 0, 1

  5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}\\
&=\frac{(n^3+n)^{\frac13}-(n^3+1)^{\frac13}}{(n^3+2n)^{\frac13}-(n^3+n)^{\frac13}}\cdot\frac{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}\cdot\\
&\cdot\frac{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+n)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac23}+(1+\frac{2}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac13}+(1+\frac{1}{n^3})^{\frac23}}
\end{aligned}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}} = 1.$

- Cvičení 3.3.6: 1. Limita neexistuje.

  2. Spočítejme nejprve tuto limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$
  Platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$
  Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^3\sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3+\sqrt[4n]{2n}} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} -\frac{(2n+1)^3\sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3+\sqrt[4n+2]{2n+1}} = -1.$$
  To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

- Cvičení 3.3.7: Platí:
$$\begin{aligned}
(n+4)^{100}-(n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}4^j - \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}3^j\\
&= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}(4^j-3^j) = 100n^{99}+P_1(n);\\
(n+2)^{100}-n^{100} = 200n^{99}+P_2(n),&
\end{aligned}$$
  kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_1(n)}{n^{99}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{n^{99}} = 0.$$
  Dostáváme tak:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{100+\frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200+\frac{P_2(n)}{n^{99}}} = 1/2.$$

- Cvičení 3.3.8: Platí
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\\
&= \lim_{n\to+\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\cdot\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}.
\end{aligned}$$
  Víme, že platí:

  (1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ |\sin(n+1)|\le 1$,

  (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

  Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne
$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Cvičení 3.3.9: 3, 1/2

3.4 Téma 4: Vyšetřování konvergence číselných řad

Příklad 3.4.1. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}.$$

Příklad 3.4.2. Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

Příklad 3.4.3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{2^n-2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}).$$

Příklad 3.4.4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}.$$

Příklad 3.4.5. Určete pro která $z \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3 z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,!}z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}z^n.$$

Příklad 3.4.6. Určete pro která $z \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Výsledky.

- Cvičení 3.4.1: Diverguje, diverguje, konverguje, konverguje.
- Cvičení 3.4.2: Konverguje, diverguje, konverguje.
- Cvičení 3.4.3, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

  $$a_n=\frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2^{2n+1}}=0<1.$$

  Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Cvičení 3.4.3, 2):

  Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$, a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

  $$a_n=\frac{3}{2^n-2n},$$

  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{n}{2^{n-1}}}{2-\frac{n+1}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}<1.$$

  Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Cvičení 3.4.3, 3): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$, a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}\right)}{\frac{2^n}{3^n}\left(\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1,\ k \in \mathbb{N}$;

(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Cvičení 3.4.3, 4): Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

- Cvičení 3.4.4, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Cvičení 3.4.4, 2): Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1.$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Cvičení 3.4.4, 3): Zkoumaná řada je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní.

- Cvičení 3.4.5: $(-1,1)$, $\mathbb{R}$, $\langle -1/2, 1/2\rangle$, $(-3,3)$.

- Cvičení 3.4.6: $(-1,1\rangle$, $\langle -1,1)$, $\langle -1,1\rangle$.

3.5 Téma 5: Limita funkce

Příklad 3.5.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1-\sin x - \cos x}.$$

Příklad 3.5.2. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 3.5.3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0+} (e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 3.5.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to\infty} \log(1+2^x)\log\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

Příklad 3.5.5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 3.5.6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1), \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Příklad 3.5.7. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1} (1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 3.5.8. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Výsledky.

- Cvičení 3.5.1: 2, $1/2$, -1
- Cvičení 3.5.2: $-1/16$, $3/2$, $1/n$, $1/4$
- Cvičení 3.5.3: $7/3$, $-1/2$, 0
- Cvičení 3.5.4: 0, $1/e$, $2/3$, $\log 8$

- Cvičení 3.5.5:

2. Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

(iii) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$,

(iv) sin je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$,

(v) $\sqrt{}$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = 1$.

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right) = 1\cdot 1\cdot 2 = 2.$$

2. Pišme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.
\end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Použili jsme

- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$,
- sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
- arcsin je prostá funkce,
- $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x - 2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-2\sin(\pi/6+x)}{x}\right)\\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)\\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)\\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{\sin x}{x}\cdot \sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$,

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$,

(4) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$.

Z $(\star)$, (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x} = 1-\sqrt{3}.$$

- Cvičení 3.5.6:

1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\\
&= \exp\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\right)\right)\\
&= \exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

Dále platí:

– $\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z} = 1$,

– $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}$
$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$,

– funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,

– exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^\infty$ počítejme limitu funkce $f(x)=x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v ∞. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to\infty} f(n) = A$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}}\cdot\log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

– $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$,

– $\lim_{x\to\infty}\frac{\log 2}{x} = 0$,

– $\frac{\log 2}{x} \neq 0$ pro každé $x > 0$,

– větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

3. 1.

- Cvičení 3.5.7: $1/e$, $1/2$, $4/3$
- Cvičení 3.5.8: 0

3.6 Téma 6: Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě

Příklad 3.6.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right). \tag{3.1}$$

Příklad 3.6.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0+}(\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}, \qquad \lim_{x\to\pm 0}\frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \tag{3.2}$$

Příklad 3.6.3. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{pro} \quad x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Určete, zda má funkce f derivaci v bodě 0 a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 3.6.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}, \qquad \lim_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}; \ \lim_{x \to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0.$$

Příklad 3.6.5. Spočtěte limity následujících funkcí:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} x}\right)^x. \tag{3.3}$$

Příklad 3.6.6. Spočtěte derivace (i jednostranné, pokud oboustranná neexistuje) následujících funkcí:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\
&f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}; \\
&f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}; \\
&f(x) = \arccos \frac{1}{1 + x^2}; \\
&f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases} \\
&f(x) = x^{(x^x)}, \ \text{pro } x > 0; \\
&f(x) = \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.6.7. Nalezněte $A, \ B \in \mathbb{R}$, tak aby na $\mathbb{R}$ platil vztah

$$\begin{aligned}
\left(A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x\right) \left(\log\left(1 + x^2\right) - 1\right)\right)' \\
= (Ax + B)(\operatorname{arctg} x) \log(1 + x^2).
\end{aligned}$$

Příklad 3.6.8. Najděte $A \in \mathbb{R}$, aby na $(0, +\infty)$ platil vztah

$$\begin{aligned}
\left(\log\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right) + \operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)\right)' \\
= A \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.6.9. U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná):

$$\arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right), \qquad x^2 \exp(-|x - 1|), \qquad \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}.$$

Příklad 3.6.10. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$
$$f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\};$$
$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}};$$
$$f(x) = \arccos \frac{1}{1 + x^2};$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases}$$
$$f(x) = x^{(x^x)}, \text{ pro } x > 0;$$
$$f(x) = \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}.$$

Příklad 3.6.11. Pomocí L'Hospitalova pravidla určete následující limity:

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Příklad 3.6.12. Pro $a > 0$, $a \neq 1$ určete

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 3.6.13. Je možné použít L'Hospitalova pravidla pro určení následujících limit?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}; \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{2x + \sin 2x + 1}{(2x + \sin 2x)(\sin x + 3)^2}; \qquad \lim_{x \to 0} \left(2 \sin \sqrt{x} + \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}\right)^x; \qquad \lim_{x \to 0} \left(1 + x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Příklad 3.6.14. Má následující funkce derivaci v nule?

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x \log 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Příklad 3.6.15. Dokažte, že každá z následujících dvou rovnic má právě jeden kořen.

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$
$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Výsledky. • Cvičení 3.6.10:

– Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3 \rangle + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \ k \ \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3 \rangle + 2k\pi, k \ \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\,\pi, \ k \ \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \ k \ \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned}
f'_+(\pi/3+2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3+2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\\
f'_-(\pi/3+2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0,\\
f'_+(2\pi/3+2k\pi) &= 0,\\
f'_-(2\pi/3+2k\pi) &= -\sin(2\pi/3+2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\\
f'_+(4\pi/3+2k\pi) &= -\sin(4\pi/3+2k\pi) = \sqrt{3}/2,\\
f'_-(4\pi/3+2k\pi) &= 0,\\
f'_+(5\pi/3+2k\pi) &= 0,\\
f'_-(5\pi/3+2k\pi) &= -\sin(5\pi/3+2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k\ \in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

– Zřejmě $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x>0$. Vzhledem k tomu, že $1-e^{-x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$, tak pro každé $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

* $\lim_{y\to0+}\frac{e^y-1}{y}=1$,
* $\lim_{x\to0}-x^2=0$,
* $-x^2=0\Leftrightarrow x=0$,
* $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}=1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to0-}-\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0)=1,\ f'_-(0)=-1$.

– Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x\neq0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\operatorname{sgn}x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to0+}\frac{2\operatorname{sgn}x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to0-}\frac{2\operatorname{sgn}x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

– Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

– Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x\log x}\right)' = e^{x^x\log x}\left((x^x)'\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x+1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0.\end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

– Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},\\ x, & x \in \langle(2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},\\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+}\left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5,\\ f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1,\\ f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to(2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi-}\left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3,\\ f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to(2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi+} 1 = 1.\end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.

3.7 Průběh funkce

Příklad 3.7.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{x}};\\ f(x) &= \log_x e;\\ f(x) &= \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|;\\ f(x) &= (\sin x)^{\cos x};\\ f(x) &= x - \sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

Příklad 3.7.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$
$$f(x) = (\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x},$$
$$f(x) = (\log|x|)^3 - 3\log|x|,$$

Příklad 3.7.3. Vyšetřete průběhy funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x,$$
$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1},$$

Kapitola 4

Matematická analýza 1b

4.1 Taylorovy polynomy a řady

4.1.1 Polynomy

Definice 4.1.1. • Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n$. *Polynomem s komplexními koeficienty* nazveme funkci $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \,. \tag{4.1}$$

- Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ nazveme *kořenem polynomu* P, pokud $P(\alpha) = 0$.

Tvrzení 4.1.2. *Nechť $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, a $Q(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$, $b_m \neq 0$, jsou dva polynomy s reálnými koeficienty takové, že platí $P(x) = Q(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Potom $n = m$ a $a_j = b_j$, $j = 1, \dots, n$. Speciálně tedy $P(z) = Q(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.*

——————konec přednášky 23: 5.1. Luboš Pick——————————————-

Definice 4.1.3. Buď P polynom tvaru (4.1) s reálnými koeficienty, $n \geq 0$. Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme n *stupněm polynomu* P, značíme $\operatorname{st}(P)$. Každý polynom stupně 0 je tedy tvaru $P(x) = c \neq 0$. *Polynomem stupně* -1 rozumíme polynom $P(z) = 0$.

Poznámka. Z Tvrzení 4.1.2 plyne, že pojem stupně polynomu je korektně definován.

Tvrzení 4.1.4. *Nechť P je polynom s reálnými koeficienty stupně nejvýše n a $\alpha \in \mathbb{R}$ je jeho kořen. Pak existuje polynom Q s reálnými koeficienty stupně nejvýše $n-1$ tak, že $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

4.1.2 Taylorovy polynomy a věty o zbytku

Definice 4.1.5. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Poznámky. • Stupeň $T_n^{f,a}$ je nejvýše n.

- Platí $f(a) = T_n^{f,a}(a)$, $f'(a) = (T_n^{f,a})'(a)$, $\dots$, $f^{(n)}(a) = (T_n^{f,a})^{(n)}(a)$.
- Platí $T_{n-1}^{f',a} = (T_n^{f,a})'$.

Lemma 4.1.6. *Nechť Q je polynom, $\operatorname{st} Q \leq n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.*

Věta 4.1.7 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f je reálná funkce s konečnou n-tou derivací v bodě a a P je polynom stupně nejvýše n. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $P = T_n^{f,a}$;

(ii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0.$

Věta 4.1.8 (Taylorova věta o zbytku)**.** *Nechť f, φ jsou reálné funkce, $a, x \in \mathbb{R}$ a $a < x$. Předpokládejme, že*

- *f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci,*
- *φ má na (a, x) vlastní nenulovou derivaci a je spojitá na $[a, x]$.*

Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n.$$

——————konec přednášky 23: 6.1.2010 Jiří Spurný——————————————-

Poznámky.

- Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*
- Píšeme-li $x = a + h$, pak

$$T_n^{f,a}(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f^{(2)}(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}.$$

Věta 4.1.9 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť f je reálná funkce, $a, x \in \mathbb{R}$ a $a < x$. Předpokládejme, že f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci.*

Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}.$$

——————konec přednášky 24: 5.1. Luboš Pick——————————————-

Věta 4.1.10 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť f je reálná funkce, $a, x \in \mathbb{R}$ a $a < x$. Předpokládejme, že f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci.*

Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a).$$

Poznámka. Předcházející věty samozřejmě platí i v případě $x < a$.

4.1.3 Symbol malé o

Definice 4.1.11. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě a malé o od g* (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Věta 4.1.12 (Vlastnosti o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \quad a \quad f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$

pak

$$(f_1 + f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(b) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$

pak

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

(c) *Jestliže*

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R},$$

pak

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Věta 4.1.13 (Skládání funkcí a o)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$,

- $f(y) = o(g(y)),\ y \to b,$
- $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b,\ a$
- *existuje* $\delta > 0$ *tak, že* $\varphi(x) \neq b$ *pro* $x \in \mathcal{P}^\delta(a)$.

Pak $(f \circ \varphi)(x) = o((g \circ \varphi)(x)),\ x \to a.$

Poznámky.

- Symbol o lze uvažovat i v jednostranných případech a předcházející věty pak platí v příslušných jednostranných verzích.
- Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

4.1.4 Taylorovy řady

Definice 4.1.14. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě* a. Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Poznámka. V některých případech je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ konvergentní pouze pro $x = a$.

Příklady 4.1.15.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$,
- $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ a $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in (-1, 1)$.

Příklad. Je-li

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pak

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n \quad \text{pouze pro } x = 0.$$

——————konec přednášky 24: 7.1.2010 Jiří Spurný——————————————-

4.2 Číselné řady II.

4.2.1 Neabsolutně konvergentní řady

Lemma 4.2.1 (Abelova parciální sumace)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots,$ $b_n \in \mathbb{R}$. *Označme* $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ *pro* $k = 1, \ldots, n$. *Pak platí*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_n b_n.$$

——————konec přednášky 25: 12.1. Luboš Pick——————————————-

Věta 4.2.2 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená monotónní posloupnost. Nechť je splněna některá z následujících podmínek:*

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní,*

(D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezenou posloupnost částečných součtů.*

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Zde používáme fakt, že $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ má omezené částečné součty pro $|q| \leq 1$ a $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$ má omezené částečné součty pro $|q| \leq 1$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Věta 4.2.3 (Leibniz)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost splňující*

- $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq a_{n+1}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergentní.*

4.2.2 Přerovnání řad

Definice 4.2.4. Nechť $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. *Přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

Věta 4.2.5. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je její přerovnání. Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je absolutně konvergentní a má stejný součet jako* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

————————konec přednášky 25: 13.1. Jiří Spurný————————————————-

Věta 4.2.6 (Riemann)**.** *Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu z* $\mathbb{R}$. *Neboli: Nechť pro konvergentní řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. *Pak pro libovolné* $s \in \mathbb{R}$ *existuje bijekce* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.

————————konec přednášky 26: 14.1. Jiří Spurný————————————————-

————————konec přednášky 26: 14.1. Luboš Pick————————————————-

4.2.3 Součin řad

Definice 4.2.7. *Cauchyovým součinem* řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right).$$

Věta 4.2.8 (Mertens)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje a řada* $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ *konverguje. Potom*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Věta 4.2.9 (Abel)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ *jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Příklad. $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje neabsolutně, ale Cauchyův součin této řady se sebou diverguje.

4.2.4 Zobecněné řady

Definice 4.2.10. Nechť I je množina a $x_i \in \mathbb{R}$ pro každé $i \in I$. Symbol $\sum_{i\in I} x_i$ nazýváme *zobecněnou řadou.*

Číslo $x \in \mathbb{R}$ nazveme *součtem zobecněné řady* $\sum_{i\in I} x_i$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $J_0 \subset I$ tak, že

$$|x - \sum_{i\in J} x_i| < \varepsilon$$

pro každou konečnou množinu $J \subset I$ obsahující J_0.

Píšeme $x = \sum_{i\in I} x_i$ a říkáme, že *zobecněná řada* $\sum_{i\in I} x_i$ *je konvergentní.*

Poznámka. Pro reálné číslo $x \in \mathbb{R}$ značíme $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pak $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$.

Věta 4.2.11 (Vlastnosti zobecněného součtu)**.** *Nechť* $\sum_{i\in I} x_i$ *je zobecněná řada.*

(a) $\sum_{i\in I} x_i$ *má nejvýše jeden součet.*

————————*konec přednášky 1: 23.2. Luboš Pick*————————————————————-

(b) *Jsou-li* x_i *nezáporné, pak* $\sum_{i\in I} x_i$ *má součet právě tehdy, když*

$$\sup\{\sum_{i\in F} x_i; F \subset I \text{ konečná}\} < \infty.$$

Pak

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\{\sum_{i\in F} x_i; F \subset I \text{ konečná}\}.$$

————————*konec přednášky 1: 23.2. Jiří Spurný*————————————————————-

(c) *Má-li* $\sum_{i\in I} x_i$ *součet, mají součet i řady*

$$\sum_{i\in I} |x_i|, \quad \sum_{i\in I} x_i^+, \quad \sum_{i\in I} x_i^-,$$

a platí

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-, \quad \sum_{i\in I} |x_i| = \sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} x_i^-.$$

————————*konec přednášky 2: 24.2. Luboš Pick*————————————————————-

(d) *Zobecněná řada* $\sum_{i\in I} x_i$ *má součet právě tehdy, když* $\sum_{i\in I} |x_i|$ *má součet.*

(e) *Má-li* $\sum_{i\in I} x_i$ *součet a* $\pi : I \to I$ *je bijekce, má součet i* $\sum_{i\in I} x_{\pi(i)}$ *a platí*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\pi(i)}.$$

(f) *Má-li* $\sum_{i\in I} x_i$ *součet, je množina* $\{i \in I; x_i \neq 0\}$ *spočetná.*

Věta 4.2.12 (Zobecněný součet na $\mathbb{N}$)**.** (a) *Jestliže má zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *součet, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *absolutně konvergentní a* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(b) *Jestliže je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *absolutně konvergentní, pak zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *má součet a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Poznámka. Povšimněte si, že symboly $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ jsou definovány jinak, i když pro absolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

————————konec přednášky 2: 24.2. Jiří Spurný————————————————————-
————————konec přednášky 3: 2.3. Luboš Pick————————————————————-

Věta 4.2.13 (Zobecněný asociativní zákon). *Nechť B je množina, $(A_\beta)_{\beta\in B}$ je systém množin, který splňuje $A_{\beta_1}\cap A_{\beta_2}=\emptyset$, kdykoliv $\beta_1,\beta_2\in B$, $\beta_1\neq\beta_2$. Nechť $A=\bigcup_{\beta\in B}A_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha\in A}x_\alpha$ je konvergentní.*

Potom řada $\sum_{\alpha\in A_\beta}x_\alpha$ konverguje pro každé $\beta\in B$ a platí

$$\sum_{\alpha\in A}x_\alpha=\sum_{\beta\in B}\left(\sum_{\alpha\in A_\beta}x_\alpha\right).$$

Věta 4.2.14 (Součin zobecněných řad). *Nechť zobecněné řady $\sum_{\alpha\in A}x_\alpha$ a $\sum_{\beta\in B}y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i zobecněná řada $\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B}x_\alpha y_\beta$ a*

$$\left(\sum_{\alpha\in A}x_\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\beta\in B}y_\beta\right)=\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B}x_\alpha y_\beta.$$

Poznámka. Z předcházejích vět dostáváme, že Cauchyův součin absolutně konvergentních řad konverguje absolutně.

——————konec přednášky 4: 3.3. Luboš Pick——————————————-
——————konec přednášky 3: 2.3. Jiří Spurný——————————————-

4.3 Mocninné řady

Definice 4.3.1. Mocninnou řadou o středu $x_0\in\mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, kde $x\in\mathbb{R}$ a $a_k\in\mathbb{R}$ pro každé $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Věta 4.3.2 (Poloměr konvergence). *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\rho\in\mathbb{R}^*$ takový, že*

- *pro každé $x\in\mathbb{R}$, $|x-x_0|<\rho$, uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé $x\in\mathbb{R}$, $|x-x_0|>\rho$, uvedená řada diverguje.*

Prvek ρ splňuje

$$\rho=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

Definice 4.3.3. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak číslo ρ z předcházející věty nazýváme jejím *poloměrem konvergence.*

Příklady. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$.

Poznámka 4.3.4. Pro $|x-x_0|$ může nastat cokoliv, např. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$.

Věta 4.3.5 (Derivace mocninné řady). *Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ konverguje pro $|x-x_0|<R$. Definujme*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad |x-x_0|<R.$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje pro $|x-x_0|<R$ a platí

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},\qquad |x-x_0|<R.$$

Věta 4.3.6. *Nechť f je jako ve Větě 4.3.5. Potom má f derivace všech řádů pro $x\in\mathbb{R}$, $|x-x_0|<R$, a platí:*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Speciálně platí $f^{(k)}(x_0)=k!a_k$.

Příklad. • $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1,1)$,

• $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1,1)$.

Věta 4.3.7 (Jednoznačnost mocninné řady). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ jsou mocninné řady s kladnými poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pokud*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \min\{\rho_1,\rho_2\}, x_0 + \min\{\rho_1,\rho_2\}),$$

pak $a_n = b_n$ pro každé $n = 0,1,2,\dots$ a $\rho_1 = \rho_2$.

——————konec přednášky 5: 9.3. Luboš Pick——————————————-
——————konec přednášky 4: 3.3. Jiří Spurný——————————————-

Věta 4.3.8 (Vztah k Taylorovu polynomu). *Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má kladný poloměr konvergence. Pak $\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 řádu k.*

Věta 4.3.9 (Operace s mocninnými řadami). *Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pak*

(a) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$.

Věta 4.3.10 (Abel). *Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n$ konverguje v bodě $y = x_0 + R$. Pak*

$$\lim_{r\to R_-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Poznámka. Analogické tvrzení platí pro $y = x_0 - R$.

Příklad. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

Poznámka 4.3.11 (Symbol o pro posloupnosti). Jestliže $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$, píšeme $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$.

Věta 4.3.12 (Toeplitz). *Nechť $\{c_{n,k}; n,k \in \mathbb{N}\}$ jsou reálná čísla splňující:*

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,

(2) $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$,

(3) *posloupnost* $\{\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n,k}|\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená.*

Pak pro každou konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Poznámka. Věta 4.3.12 má následující obrácení. Jestliže matice $\{c_{n,k}; n,k \in \mathbb{N}\}$ zachovává limitu každé konvergentní posloupnosti, pak splňuje vlastnosti (1)-(3).

——————konec přednášky 6: 10.3. Luboš Pick——————————————-
——————konec přednášky 5: 9.3. Jiří Spurný——————————————-

Definice 4.3.13 (Cesarova a Abelova sčítací metoda). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada a $\{s_n\}$ posloupnost jejích částečných součtů. Řekneme, že $s \in \mathbb{R}^*$ je její *cesarovský součet*, pokud $s = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(s_0 + \dots + s_{n-1})$.

Řekneme, že s je její *abelovský součet*, pokud pro funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ platí $s = \lim_{x\to 1-} f(x)$.

Věta 4.3.14 (Součet řady a zobecněné sčítací metody). *Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak její součet je též její cesarovský i abelovský součet.*

Příklad. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$.

4.4 Primitivní funkce

4.4.1 Základní vlastnosti

Definice 4.4.1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámky. 1. Ne každá funkce má primitivní funkci (např. $\operatorname{sgn} x$).

2. Primitivní funkce je spojitá.

3. Hledání primitivní funkce se nazývá integrací a primitivní funkce se někdy nazývá neurčitý integrál.

Věta 4.4.2 (Rovnost až na konstantu)**.** *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Věta 4.4.3 (Existence primitivní funkce)**.** *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 4.4.4 (Linearita neurčitého integrálu)**.** *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Značení 4.4.5.

- Je-li F primitivní funkce k f na intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt jako $F = \int f$ na (a, b), $F(x) = \int f(x)$, $x \in (a, b)$, nebo $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in (a, b)$
- Je-li f funkce na (a, b), značením $\int f$ rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na (a, b).
- Je-li f reálná funkce, značením $\int f$ rozumíme množinu všech funkcí F, které jsou primitivní k f na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru f.

——————konec přednášky 7: 16.3. Luboš Pick——————————————-
——————konec přednášky 6: 10.3. Jiří Spurný——————————————-

Poznámky. 1. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f.

2. Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $A, B \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak značíme

$$\alpha A = \{\alpha a; a \in A\}, \quad A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

3. Je-li f funkce na otevřeném intervalu I, množina $\int f$ je obsažena ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^I$ všech reálných funkcí na I. Pak Větu 4.4.4 můžeme zapsat jako $\int(\alpha f + \beta g) \supset \alpha \int f + \beta \int g$ na I. Dále na I platí
   - $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   - $0 \cdot \int f \subset \int 0 \cdot f$.
   - Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int(f + g) = \int f + \int g$.
   - Je-li $\int f$ neprázdná, pak $\int f - \int f = \{c; c \in \mathbb{R}\}$.

Věta 4.4.6 (O substituci)**.** (i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Příklad. $\int \sin^4 t \cdot \cos t$, $\int \sqrt{1-x^2}$.

Věta 4.4.7 (Integrace per partes). *Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ na } I.$$

Pokud je f navíc spojitá na I, pak množiny na obou stranách rovnosti jsou neprázdné.

Příklad. $\int \log x$, $\int (\frac{1}{1+x^2})^n$, $\int e^x \sin x$, $\int \operatorname{tg} x$.

Poznámka. Ne každá "elementární" funkce má primitivní funkci vyjádřitelnou jako kombinaci elementárních, např. $\frac{\sin x}{x}$ nebo e^{-x^2}.

————————konec přednášky 8: 17.3. Luboš Pick————————————————-

4.4.2 Integrace racionálních funkcí

Definice 4.4.8. *Racionální funkcí* budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 4.4.9 (O rozkladu na parciální zlomky). *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\dots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\dots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x-x_1$, $x-x_2, \dots, x-x_k$, $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny* $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots$, $x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1$, $\dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots$, $B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots$, B_1^l, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x-x_1} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

————————konec přednášky 7: 16.3. Jiří Spurný————————————————-

Poznámka 4.4.10 (Postup při integraci racionální funkce).

1. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int P_1(x) + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$, $Q \neq 0$.
2. Provedeme rozklad na parciální zlomky.
3. Integrace parciálních zlomků:
   (a) $\int \frac{A}{(x-a)^n}$
   (b) $\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}$

Příklad. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$

4.4.3 Některé substituce

Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a,b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a,-b) = R(a,b)$, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$

Příklad. $\int \frac{1}{1+\sin^2 t}$

——————konec přednášky 9: 23.3. Luboš Pick——————————————-

Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\, dt$

$q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$, $af \neq bc$

- substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\, dt$**,** $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
  $\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a}|t-\alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$: $\sqrt{at^2+bt+c} = |t-\alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z *Eulerových substitucí*
  $\sqrt{at^2+bt+c} = \pm\sqrt{a}t + x$ nebo $\sqrt{at^2+bt+c} = tx + \sqrt{c}$

——————konec přednášky 8: 17.3. Jiří Spurný——————————————-

Příklad. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

4.5 Riemannův integrál

4.5.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 4.5.1. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme *dělením intervalu* $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme *dělícími body. Normou dělení* $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a,b]$ je *zjemněním dělení* D intervalu $[a,b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D' (značíme $D' \prec D$).

Definice 4.5.2. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

Definice 4.5.3. • Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a,b]$, $a<b$, má *Riemannův integrál od a do b*, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $(R)\int_a^b f$.

- Pokud $a>b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, v případě, že $a=b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Značení 4.5.4. Množinu všech funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a,b])$.

Poznámka. $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje

——————konec přednášky 10: 24.3. Luboš Pick——————————————-

Lemma 4.5.5 (Vlastnosti riemannovských součtů)**.** *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$.*

(i) *Nechť D, D' jsou dělení $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D)$$

(ii) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí $\underline{S}(f,D_1) \le \overline{S}(f,D_2)$.*

(iii) *Platí* $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Důsledek 4.5.6 (Odhady riemannovských součtů)**.** *Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Potom*

$$m(b-a) \le \underline{S}(f,D_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D_2) \le M(b-a),$$

kde $m=\inf\{f(x);\ x\in[a,b]\}$ a $M=\sup\{f(x);\ x\in[a,b]\}$.

——————konec přednášky 9: 23.3. Jiří Spurný——————————————-

Věta 4.5.7 (Aproximace riemannovských součtů)**.** *Nechť f je omezená na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D)<\delta$ platí:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{S}(f,D) \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon,$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Důsledek 4.5.8 (Riemannovské součty pro dělení jdoucí k 0)**.** *Nechť f je omezená na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim_{n\to\infty}\nu(D_n)=0$. Potom*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,D_n).$$

Poznámka. Tedy máme: Je-li f omezená na $[a,b]$ a existuje posloupnost dělení $\{D_n\}$ splňující

- $\nu(D_n)\to 0$,
- $\lim\overline{S}(f,D_n) = \lim\underline{S}(f,D_n)$,

pak $f\in\mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b f = \lim\overline{S}(f,D_n) = \lim\underline{S}(f,D_n)$.

Příklad. $\int_0^1 x^2$

——————konec přednášky 11: 30.3. Luboš Pick——————————————-

4.5.2 Existence Riemannova integrálu

Věta 4.5.9 (Kritérium existence Riemannova integrálu). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a,b])$, právě když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \textit{dělení } D \textit{ intervalu } [a,b] :\ \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Definice 4.5.10. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I :\ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámky.

- Stejnoměrně spojitá funkce je spojitá, ale obrácená implikace obecně neplatí.
- x^2, $\frac{1}{x}$ nejsou stejnoměrně spojité.

——————konec přednášky 10: 24.3. Jiří Spurný——————————————-

Věta 4.5.11 (Stejnoměrná spojitost na omezeném uzavřeném intervalu). *Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$. Pak f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Věta 4.5.12 (Postačující podmínka pro riemannovskou integrovatelnost). *Nechť $[a,b]$ je omezený uzavřený interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Je-li f*

(a) spojitá nebo

(b) monotónní

na $[a,b]$, pak je f riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.

4.5.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

Značení 4.5.13. Je-li f reálná funkce a $[a,b] \subset D(f)$, pak $f \in \mathcal{R}([a,b])$ znamená $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b])$.

Věta 4.5.14 (Vlastnosti Riemannova integrálu).

(a) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f \le g$. Pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*

(c) *Nechť $a < b < c$ jsou reálná čísla a $f : [a,c] \to \mathbb{R}$. Pak platí*

- *$f \in \mathcal{R}([a,c]) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$ & $f \in \mathcal{R}([b,c])$;*
- *je-li $f \in \mathcal{R}([a,c])$, pak $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

——————konec přednášky 12: 31.3. Luboš Pick——————————————-

(d) *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.*

Věta 4.5.15 (Vztah k primitivní funkci). *Nechť J je interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť c je libovolný pevně zvolený bod z J. Definujme na J funkci*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Potom platí: F je spojitá na J a $F'(x_0) = f(x_0)$ v každém bodě spojitosti $x_0 \in \operatorname{Int} J$ funkce f.

——————konec přednášky 13: 6.4. Luboš Pick——————————————-
——————konec přednášky 11: 30.3. Jiří Spurný——————————————-

Důsledek 4.5.16 (Existence primitivní funkce pomocí (R)$\int$). (i) *Jestliže je f spojitá na intervalu (a,b), pak má na (a,b) primitivní funkci.*

(ii) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ a F je funkce primitivní k f na (a,b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ a platí*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Věta 4.5.17 (Definice integrálu pomocí vybraných bodů). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce definovaná na $[a,b]$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$,

(ii) existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a,b]$, $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n$, pak

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon.$$

——————konec přednášky 14: 7.4. Luboš Pick——————————————-

Poznámka. Pokud platí jedna z podmínek ve Větě 4.5.17, pak $I = \int_a^b f$.

Poznámka. Pro omezenou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a číslo $I \in \mathbb{R}$ dostáváme, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D$ dělení $[a,b]$: $\nu(D) < \delta \implies |\overline{S}(f,D) - I| < \varepsilon\ \&\ |\underline{S}(f,D) - I| < \varepsilon$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists D_0$ dělení $[a,b]$: $D \prec D_0 \implies (|\overline{S}(f,D) - I| < \varepsilon\ \&\ |\underline{S}(f,D) - I| < \varepsilon)$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení $[a,b]$: $(t_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,\dots,n\ \ \&\ \ \nu(D) < \delta) \implies |\sum_{j=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| < \varepsilon)$.

——————konec přednášky 12: 31.3. Jiří Spurný——————————————-

4.6 Newtonův integrál

4.6.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 4.6.1. Řekneme, že *Newtonův integrál* funkce f na intervalu (a,b), $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}^*$, existuje, jestliže f má na (a,b) primitivní funkci (označme ji F), limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ existují a jejich rozdíl je definován.

Hodnotou Newtonova integrálu funkce f přes interval (a,b) pak rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = ((N)\int_a^b f) = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Píšeme $[F]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$.

Pokud $(N)\int_a^b f(t)\ dt$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je *konvergentní*. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je *divergentní*.

Značení 4.6.2. Množinu všech funkcí $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, které mají konvergentní Newtonův integrál od a do b, značíme $\mathcal{N}\big((a,b)\big)$. Pokud f je reálná funkce a $(a,b) \subset D(F)$, symbolem $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ rozumíme $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.

Poznámky. 1. $\int_a^b f$ se někdy říká určitý integrál.

2. Hodnota $(N)\int_a^b f$ nezávisí na použité primitivní funkci.

3. Pro $(N)\int_a^b f$ tedy mohou nastat následující možnosti:

$$(N)\int_a^b f \quad \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} & \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Příklady. $\int_0^1 x^\alpha$, $\int_1^\infty x^\alpha$

Věta 4.6.3 (Vlastnosti Newtonova integrálu)**.** *(a) Nechť $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

pokud je pravá strana definována. Speciálně, je-li $f, g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$, pak $f+g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ a $\alpha f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.

——————–konec přednášky 15: 13.4. Luboš Pick———————————————-

(b) Nechť $f, g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ a $f \le g$. Pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(c) Nechť $-\infty \le a < b < c \le +\infty$ a $f \in \mathcal{N}\big((a,c)\big)$. Potom $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$, $f \in \mathcal{N}\big((b,c)\big)$ a platí $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

(d) Nechť $-\infty \le a < b < c \le +\infty$, $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$, $f \in \mathcal{N}\big((b,c)\big)$ a f je spojitá v b. Potom $f \in \mathcal{N}\big((a,c)\big)$.

Věta 4.6.4 (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce F je primitivní k f na (a,b), G je primitivní ke g na (a,b). Potom*

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 4.6.5 (Substituce pro určitý integrál)**.** *Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\omega : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ splňuje $\omega((\alpha,\beta)) = (a,b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α,β). Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f\circ\omega)(t)|\omega'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

——————–konec přednášky 13: 6.4. Jiří Spurný———————————————-

4.6.2 Existence $(N)\int$ a vztah k $(R)\int$

Věta 4.6.6 (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a F je definována na jistém prstencovém okolí bodu a. Potom $\lim_{x\to a} F(x)$ existuje vlastní, právě když je splněna* Bolzano-Cauchyova podmínka*:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathcal{P}^\delta(a) : \ |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Analogické tvrzení platí pro jednostranné limity.

——————–konec přednášky 16: 14.4. Luboš Pick———————————————-

Věta 4.6.7 (Existence $(N)\int$ na omezeném (a,b))**.** *Nechť f je omezená a spojitá na omezeném intervalu (a,b). Potom $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.*

Věta 4.6.8 (Rovnost $(R)\int$ a $(N)\int$)**.** *Nechť $[a,b]$ je omezený uzavřený interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pokud $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big) \cap \mathcal{R}([a,b])$, pak $(N)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$.*

Důsledek 4.6.9 (Integrály pro spojitou funkci)**.** *Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ a $(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$.*

4.6.3 Konvergence Newtonova integrálu

Věta 4.6.10 (Srovnávací kritérium)**.** *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$. Jestliže pro funkce f a g platí $0 \leq f \leq g$ na $[a,b)$, f je spojitá na $[a,b)$ a $g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$. Potom $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.*

Věta 4.6.11 (Limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$. Jestliže pro nezáporné spojité funkce f a g na $[a,b)$ platí $\lim_{x\to b-} f(x)/g(x) = c \in (0,\infty)$, potom $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$, právě když $g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.*

——————konec přednášky 17: 20.4. Luboš Pick——————————————-

Poznámka. Pokud $c = 0$, pak $g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ implikuje $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$. Je-li $c = \infty$, pak $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ implikuje $g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.

Příklady. $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$, $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}$, $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}$

Věta 4.6.12 (Absolutní konvergence a konvergence)**.** *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pokud $|f| \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$, pak $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.*

——————konec přednášky 14: 7.4. Jiří Spurný——————————————-

Lemma 4.6.13. *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá na $[a,b]$. Potom*

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f \leq \int_a^b fg \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Věta 4.6.14 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Její primitivní funkci na (a,b) označme F. Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je monotónní a spojitá na $[a,b)$. Potom platí*

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ a g je omezená, potom $fg \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.

(D) Jestliže je F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, potom $fg \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$.

Příklady. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$, $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}$

4.6.4 Věty o střední hodnotě

Věta 4.6.15 (První věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná, $g \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$ a $fg \in \mathcal{N}\big((a,b)\big)$. Potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

——————konec přednášky 18: 21.4. Luboš Pick——————————————-
——————konec přednášky 15: 14.4. Jiří Spurný——————————————-

Věta 4.6.16 (Druhá věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní a spojitá na $[a,b]$. Potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

4.6.5 Aplikace určitého integrálu

Definice 4.6.17. *Křivkou* budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že každá složka $\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$ je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ (v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace).

Geometrickým obrazem křivky φ rozumíme množinu $<\varphi>= \varphi([a,b])$.

Příklad.
- $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0,2\pi]$,

- $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, *kde* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je spojitě diferencovatelná,*
- $\varphi(t) = [t^3, t^2]$, $t \in [-1, 1]$.

Poznámka. Různé křivky mohou mít stejný geometrický obraz, např. $\varphi_1(t) = [t, t]$ a $\varphi_2(t) = [t^2, t^2]$, $t \in [0, 1]$.

Definice 4.6.18. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. *Délkou křivky* φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^{n} \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)).$$

Poznámka. Vzdálenost dvou bodů $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ v $\mathbb{R}^n$ je definována jako $\rho(x, y) = \|x - y\|$, kde $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.

Pro *normu* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ platí

- $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 4.6.19. *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá (tj.* f_i *je spojitá,* $i = 1, \dots, n$*). Potom platí*

$$||\int_a^b f|| := ||[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n]|| \leq \int_a^b ||f||.$$

——————konec přednášky 19: 27.4. Luboš Pick——————————————-

Věta 4.6.20 (Délka křivky)**.** *Nechť* $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1')^2 + \cdots + (\varphi_n')^2} \quad (= \int_a^b ||\varphi'||).$$

——————konec přednášky 16: 14.4. Jiří Spurný——————————————-

Příklad.

- $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *spojitě diferencovatelná.*

"Věta" (Objem a povrch rotačního tělesa)**.** *Nechť* f *je spojitá a nezáporná na intervalu* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. *Označme*

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2.$$

Je-li navíc f' *spojitá na* $[a, b]$*, pak*

$$\text{Povrch pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Věta 4.6.21 (Integrální kritérium)**.** *Nechť* f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá na* $[n_0, +\infty)$*, kde* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Nechť pro posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *platí* $a_n = f(n)$ *pro* $n \geq n_0$. *Pak*

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) \text{ konverguje, právě když } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Příklad. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log n}$.

Věta 4.6.22 (Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)**.** *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Potom*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

——————konec přednášky 20: 28.4. Luboš Pick————————————————-

4.7 Metrické prostory

4.7.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 4.7.1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (P, ρ), kde P je množina, $\rho : P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x, y \in P: \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in P: \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in P: \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na P*.

Příklady 4.7.2. (1) Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(2) Obecněji, uvažujme pro $p \in (1, \infty)$ metriku $\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

——————konec přednášky 17: 20.4. Jiří Spurný————————————————-

(3) Na $\mathbb{R}$ lze uvažovat metriku $\rho(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$.

(4) Na prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ spojitých funkcí na $[a, b]$ uvažujme

$$\rho_\infty(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \quad \rho_i(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt, \quad f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

(5) Diskrétní metrika na množině.

(6) Gaussova rovina $\mathbb{C}$.

Definice 4.7.3. *Normovaným lineárním prostorem* budeme rozumět dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ (kde $\mathbb{K}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x \in X: \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(3) $\forall x, y \in X: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Funkci $\|\cdot\|$ nazýváme *normou na X*.

Tvrzení 4.7.4. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ definované předpisem $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$, je metrika na X.*

Příklady 4.7.5. (1) Je-li $p \in [1, \infty)$, prostor $\mathbb{R}^n$ můžeme uvažovat s normami

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Je-li $p = \infty$, pak máme $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Na prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ spojitých funkcí na $[a,b]$ uvažujme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_i = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t, \quad f \in \mathcal{C}([a,b]).$$

1. Uvažujme prostory c_0 a ℓ^p pro $p \in [1,\infty]$.

——————konec přednášky 21: 4.5. Luboš Pick——————————————-

Definice 4.7.6. Nechť (P,ρ) je metrický prostor.

(1) Nechť $x \in P$, $r > 0$. Množinu $U(x,r)$ definovanou předpisem

$$U(x,r) = \{y \in P; \rho(x,y) < r\}$$

nazýváme *otevřenou koulí se středem x a poloměrem r* nebo také *okolím bodu x*.

(2) Nechť $x \in P$, $r > 0$. Množinu $B(x,r)$ definovanou předpisem

$$B(x,r) = \{y \in P; \rho(x,y) \le r\}$$

nazýváme *uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r*.

(3) Nechť $M \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že $x \in P$ je *vnitřním bodem množiny M*, jestliže existuje $r > 0$ splňující $U(x,r) \subset M$.

(4) Množina $M \subset P$ se nazývá *otevřená v (P,ρ)*, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

(5) *Vnitřkem množiny M* rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{Int} M$.

Poznámky.

- Bod x je vnitřním bodem M právě tehdy, když existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \subset M$.
- Každá podmnožina M metrického prostoru P je sama metrickým prostorem, uvažujeme-li na M metriku zděděnou z P.

Věta 4.7.7 (Vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P,ρ) je metrický prostor.*

(a) *Prázdná množina a celý prostor P jsou otevřené v (P,ρ).*

(b) *Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $G_\alpha \subset P$, $\alpha \in A$, jsou otevřené v (P,ρ). Pak $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ je otevřená množina v (P,ρ).*

(c) *Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nechť množiny G_i, $i = 1,\dots,m$, jsou otevřené v (P,ρ). Pak $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v (P,ρ).*

——————konec přednášky 18: 21.4. Jiří Spurný——————————————-

Definice 4.7.8. Nechť (P,ρ) je metrický prostor.

(1) Nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny M*, pokud pro každé $r > 0$ platí $U(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $U(x,r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$.

(2) *Hranicí množiny M* rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji ∂M (nebo $H(M)$ či $\operatorname{bd}(M)$).

(3) *Uzávěrem množiny M* rozumíme množinu $M \cup \partial M$. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$.

(4) Řekneme, že množina M je *uzavřená v (P,ρ)*, jestliže obsahuje všechny své hraniční body (tj. $\partial M \subset M$, neboli $\overline{M} = M$).

Příklad. Uvažujme množiny $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$, $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}, |z| \le 1\}$, diskrétní prostor.

Věta 4.7.9 (Vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P,ρ) je metrický prostor.*

(a) *Nechť $F \subset P$. Potom F je uzavřená v (P,ρ), právě když $P \setminus F$ je otevřená v (P,ρ).*

———————*konec přednášky 22: 5.5. Luboš Pick*———————————————————-

(b) *Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené v (P,ρ).*

(c) *Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $F_\alpha \subset P$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené v (P,ρ). Pak $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v (P,ρ).*

(d) *Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nechť množiny F_i, $i = 1,\dots,m$, jsou uzavřené v (P,ρ). Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v (P,ρ).*

Poznámka 4.7.10.
- Otevřená koule je otevřená mnnožina, uzavřená koule je uzavřená množina.
- Průnik otevřených množin nemusí být otevřená množina, sjednocení uzavřených množin nemusí být uzavřená množina.
- Bod tvoří uzavřenou množinu.
- Je-li $P = (-1,1)$ s eukleidovskou metrikou, pak $U(0,1) = U(0,r) = P$ pro každé $r > 1$.

Definice 4.7.11. Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo

$$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y);\ y \in A\}.$$

Diametrem neprázdné množiny $B \subset P$ rozumíme

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\rho(x,y);\ x,y \in B\}$$

a klademe $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. Pokud $\operatorname{diam} B < \infty$, pak říkáme, že B je *omezená* množina v (P,ρ).

Poznámka. Platí $\rho(x,\emptyset) = \infty$.

Věta 4.7.12 (Vlastnosti uzávěru)**.** *Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:*

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(b) $\overline{A} = \bigcap\{F \subset P; F \supset A$ *uzavřená*$\} = \{x \in P; \rho(x,A) = 0\} = \{x \in P; \forall r > 0 : U(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$,

———————*konec přednášky 19: 27.4. Jiří Spurný*———————————————————-

(c) $\overline{A}$ *je uzavřená, tj.* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(d) *pokud* $A \subset B$, *pak* $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,

(f) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, *a tedy A je omezená, právě když $\overline{A}$ je omezená.*

——————konec přednášky 23: 11.5. Luboš Pick———————————————-

Věta 4.7.13 (Vlastnosti vnitřku)**.** *Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:*

(a) $\operatorname{Int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{Int} P = P$,

(b) $\operatorname{Int} A = \bigcup\{G \subset P; G \subset A$ *otevřená*$\} = \{x \in P; \rho(x, P \setminus A) > 0\}$,

(c) $\operatorname{Int} A$ *je otevřená, tj.* $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A)) = \operatorname{Int} A$,

(d) *pokud* $A \subset B$, *pak* $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$,

(e) $\operatorname{Int}(A \cup B) \supset \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$, $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$,

(f) $\operatorname{Int} A = P \setminus \overline{P \setminus A}$.

Poznámka. Inkluze v (e) mohou být striktní.

Definice 4.7.14. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k $y \in P$ v (P, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (P, ρ). *Konvergentní posloupností v* (P, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků P, která má limitu v (P, ρ).

Poznámka 4.7.15. Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : x_n \in U(x, \varepsilon).$$

Věta 4.7.16 (Vlastnosti konvergence)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak platí:*

(a) *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P a existují $n_0 \in \mathbb{N}$, $y \in P$ takové, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.*

(b) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(c) *Nechť $A \subset P$. Je-li $x \in P$, pak $x \in \overline{A}$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z A konvergující k x. Dále, množina A je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti prvků z A leží v A.*

(d) *Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků P, tj., $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Jestliže $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$, pak také $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$.*

Věta 4.7.17 (Konvergence v $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$)**.** *Posloupnost $\{x_k\}$ v $\mathbb{R}^n$ konverguje k $x \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $x_k(i) \to x(i)$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.*

——————konec přednášky 24: 12.5. Luboš Pick——————————————-

——————konec přednášky 20: 27.4. Jiří Spurný——————————————-

4.7.2 Kompaktní množiny

Definice 4.7.18. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků množiny K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Příklady. Konečné množiny, $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, posloupnost se svojí limitou, $B(0, 1)$ v $\mathcal{C}([0, 1])$ se supremovou a integrální metrikou.

Věta 4.7.19 (Vlastnosti kompaktních množin)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Pak*

(a) *K je uzavřená v (P, ρ),*

(b) *K je omezená v (P, ρ),*

(c) *je-li $F \subset K$ uzavřená v (P, ρ), pak je F kompaktní v (P, ρ).*

(d) *Systém kompaktních množin v P je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky.*

Věta 4.7.20 (Charakterizace kompaktních množin pomocí otevřených pokrytí)**.** *Pro metrický prostor (K, ρ) jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *K je kompaktní,*

——————konec přednášky 21: 4.5. Jiří Spurný——————————————-

(ii) *pro každé pokrytí $\{U_i; i \in I\}$ prostoru K otevřenými množinami existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$,*

(iii) *jestliže systém $\{F_i; i \in I\}$ uzavřených množin v K splňuje $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$ pro každou konečnou $J \subset I$, pak $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Věta 4.7.21 (Charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$)**.** *Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní v $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, právě když je omezená a uzavřená v $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$.*

——————konec přednášky 22: 5.5. Jiří Spurný——————————————-

4.7.3 Zajímavost: charakterizace riemannovsky integrovatelných funkcí

Věta 4.7.22. *Nechť I je omezený uzavřený interval, $f : I \to \mathbb{R}$ omezená a $D = \{x \in I; f$ nespojitá v $x\}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}(I)$,

(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spočetný systém $\{I_n; n \in \mathbb{N}\}$ intervalů v I tak, že $D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$ (zde $|J|$ značí délku intervalu J).*

4.7.4 Spojitá zobrazení

Definice 4.7.23 (Limita a spojitost zobrazení)**.** Jsou-li (P, ρ) a (Q, σ) metrické prostory a $f : P \to Q$ zobrazení, $x \in P$ a $y \in Q$, řekneme, že $\lim_{z\to x} f(z) = y$ (*f má v x limitu y*), pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(U(x, \delta) \setminus \{x\}) \subset U(f(x), \varepsilon).$$

Zobrazení f *spojité v x*, pokud $\lim_{z\to x} f(y) = f(x)$. Zobrazení f je *spojité* (*spojité na P*), pokud je spojité v každém bodě P.

Příklad. Je-li $A \subset P$ neprázdná, pak $x \mapsto \rho(x, A)$ je spojitá funkce na P.
Uvažujeme-li na $P \times P$ metriku $\sigma([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$, pak ρ je spojitá na $(P \times P, \sigma)$.

Věta 4.7.24 (Heine)**.** *Pro $f : (P, \rho) \to (Q, \sigma)$, $x \in P$, $y \in Q$ jsou následující podmínku ekvivalentní:*

(i) $\lim_{z\to x} f(z) = y$,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P \setminus \{x\}$ splňující $x_n \to x$ platí $f(x_n) \to y$.

Věta 4.7.25 (Charakterizace spojitého zobrazení)**.** *Pro $f : (P, \rho) \to (Q, \sigma)$ jsou následující podmínku ekvivalentní:*

(i) f je spojité,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v P splňující $x_n \to x$ platí $f(x_n) \to f(x)$,

(iii) $f^{-1}(F)$ je uzavřená pro každou $F \subset Q$ uzavřenou,

(iv) $f^{-1}(G)$ je otevřená pro každou $G \subset Q$ otevřenou,

(v) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pro každou $A \subset P$.

Věta 4.7.26 (Spojité funkce na kompaktu)**.** *Je-li (K, ρ) kompaktní metrický prostor a $f : K \to \mathbb{R}$ je spojitá, pak f je omezená na K a nabývá svého maxima i minima na K.*

Poznámka. Funkce f na množině K je omezená, pokud existuje $C \geq 0$ tak, že $|f(x)| \leq C$ pro všechna $x \in K$.

Věta 4.7.27 (Vlastnosti spojitých zobrazení)**.** *(a) Nechť $f_1 : (P_1, \rho_1) \to (P_2, \rho_2)$ a $f_2 : (P_2, \rho_2) \to (P_3, \rho_3)$ jsou spojitá, pak $f_2 \circ f_1 : (P_1, \rho_1) \to (P_3, \rho_3)$ je spojité zobrazení.*

(b) Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Jsou-li $f, g : P \to X$ spojitá a $\alpha \in \mathbb{K}$, pak $x \mapsto f(x) + g(x)$ i $x \mapsto \alpha f(x)$ jsou spojitá.

(c) Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $f, g : P \to \mathbb{R}$ jsou spojitá. Pak $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ i $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ jsou spojitá.

Kapitola 5

Proseminář z kalkulu 1b

5.1 Téma 1: Taylorův polynom

Příklad 5.1.1. Dokažte, že pokud pro nějaké $k \in \mathbb{R}$ jest $f(x) = 1 + kx + o(x)$, $x \to 0$, pak platí $\lim_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}} = e^k$.

Příklad 5.1.2. Spočtěte limity:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\sin(x)) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}.$$

Příklad 5.1.3. Vyšetřete konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right).$$

Příklad 5.1.4. Pro která $x \in \mathbb{R}$ platí aproximace $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností na 10^{-4}?

Příklad 5.1.5. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a > 0$, $x > 0$. Dokažte, že platí

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

pro nějaké $r \in (0, \frac{n-1}{n^2}\frac{x^2}{a^{2n-1}})$.

Příklad 5.1.6. Nechť funkce f má na intervalu $(0,1)$ spojitou druhou derivaci a nechť f je spojitá na $[0,1]$. Nechť dále platí $f(0) = f(1) = 0$ a $|f''(x)| \leq A$ pro nějaké $A > 0$ a pro všechna $x \in (0,1)$. Dokažte, že potom platí $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$ pro všechna $x \in [0,1]$.

Příklad 5.1.7. Nechť funkce f má na $\mathbb{R}$ vlastní druhou derivaci a nechť

$$M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty, \quad k = 0, 1, 2.$$

Dokažte $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

Příklad 5.1.8. Jak je třeba zvolit koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$, aby platil vztah

$$x - (a + b\cos x)\sin x = o(x^3), \quad x \to 0?$$

Příklad 5.1.9. Jak je třeba zvolit koeficienty $A, B \in \mathbb{R}$, aby platil vztah

$$\operatorname{cotg} x - \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} = \omega(x),$$

kde funkce $\frac{\omega(x)}{x^5}$ je omezená na nějakém okolí 0.

Výsledky.

- Příklad 5.1.4: $|x| \leq 10^{-1} \cdot \sqrt[4]{24}$.
- Příklad 5.1.8: $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$.
- Příklad 5.1.9: $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{15}$.

5.2 Téma 2: Číselné řady s reálnými členy

Příklad 5.2.1. Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^\alpha + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad \alpha > 0, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2 a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2 a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2 a)}{n}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.2.2. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje absolutně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Příklad 5.2.3. Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k} \right| < 2\sqrt{\pi}.$$

Příklad 5.2.4. Dokažte následující *Kroneckerovo lemma*: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Potom

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right) \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o\left(b_n\right).$$

Příklad 5.2.5. Utvořte Cauchyův součin daných řad a spočítejte jeho součet:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!},$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n.$$

Příklad 5.2.6. Zkoumejte konvergenci (a eventuální součet) následujících zobecněných řad:

$$\text{(i)} \quad \sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} x^i y^k, \quad |x|, |y| < 1$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} \frac{1}{n!k!(n+k+1)},$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{nk(n+k+2)},$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} \frac{n!k!}{(n+k+2)!},$$

$$\text{(v)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha k^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$\text{(vi)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(n+k)^p}, \quad p > 0,$$

$$\text{(vii)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} n x^{nk}, \quad |x| < 1.$$

Výsledky.

- Příklad 5.2.1: (i), (ii), (iii) konvergují, (iv) konverguje pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, (v) konverguje, (vi), (vii) a (viii) konvergují pro každé $a \in \mathbb{R}$.
- Příklad 5.2.2: Řada konverguje absolutně právě tehdy, pokud $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro ostatní $a \in \mathbb{R}$ konverguje neabsolutně.
- Příklad 5.2.5: (i) $e^{\frac{5}{2}}$, (ii) $-\frac{1}{2}\log 2$, (iii) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

5.3 Dobrovolná vsuvka: Kummerovo kritérium konvergence řad a jeho důsledky

Příklad 5.3.1. Dokažte následující *Kummerovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť D_n je posloupnost kladných reálných čísel. Označme

$$p_n := D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Potom
(i) jestliže $\liminf p_n > 0$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup p_n < 0$ a navíc řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{D_n}$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje.

Příklad 5.3.2. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Raabeovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Potom
(i) jestliže $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje.

Příklad 5.3.3. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Gaussovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť existuje omezená posloupnost reálných čísel b_n a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Potom
(i) jestliže $k > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $k \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje.

5.4 Téma 3: Mocninné řady

Příklad 5.4.1. Dokažte následující tvrzení:

(a) Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n y^n| < \rho_1$ pro $y \in (-\rho_2, \rho_2)$ a $g(0) = 0$. Pak existují $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $(f \circ g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in (x_0 - \rho_2, x_0 + \rho_2)$.

(d) Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2 a $g(x_0) \neq 0$. Pak existují $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\rho > 0$ tak, že $\frac{f}{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

Příklad 5.4.2. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \right)^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n, \quad p \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p x^n \quad p \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

Příklad 5.4.3. Nechť R_1 a R_2 jsou po řadě poloměry konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$.
(i) Dokažte, že pokud $R_1 \neq R_2$, pak poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ je roven $\min\{R_1, R_2\}$.
(ii) Co se dá říci o poloměru konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, je-li $R_1 = R_2$?
(iii) Dokažte, že je-li R poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ je roven $\min\{R_1, R_2\}$, pak $R \geq R_1 R_2$.
(iv) Ukažte na příkladu, že nerovnost v (iii) může být ostrá.

Příklad 5.4.4. Nechť R_1 a R_2 jsou po řadě poloměry konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$.
(i) Dokažte, že pokud $R_1, R_2 \in (0, \infty)$ a R je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} x^n$, kde $b_n \neq 0$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, pak $R \leq \frac{R_1}{R_2}$.
(ii) Dokažte, že poloměr konvergence Cauchyova součinu řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ splňuje $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Příklad 5.4.5. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Potom existuje $M > 0$ takové, že

$$|f'(x)| < \frac{M}{1 - |x|}.$$

Příklad 5.4.6. Dokažte následující *Tauberovu větu.* Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a nechť poloměr konvergence této řady je roven 1. Jestliže navíc $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ a $\lim_{x\to 1-} f(x) = L \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$.

Příklad 5.4.7. Dokažte obrácenou implikaci v Toeplitzově větě.

Příklad 5.4.8. Předpokládejte navíc v Toeplitzově větě, že jsou čísla $c_{n,k}$ nezáporná. Dokažte, že pro každou omezenou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Výsledky. • Příklad 5.4.2:

(i) $R = 2$, pro $-1 < x < 3$ AK pro všechna p, pro $x = -1$ AK pro $p > 2$, K pro $p \in (0, \infty)$, pro $x = 3$ AK i K pro $p \in (2, \infty)$;

(ii) $R = 2^p$, AK pro $-2^p < x < 2^p$, pro $x = -2^p$ AK i K pokud $p > 2$, pro $x = 2^p$ AK pro $p \in (2, \infty)$, K pro $(0, \infty)$;

(iii) $R = \frac{1}{4}$, AK i K pro $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$.

5.5 Pro zajímavost: Nekonečné součiny

Příklad 5.5.1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost čísel. Pak $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme *nekonečným součinem* a existuje-li limita částečných součinů $\{p_n\}$, říkáme této limitě hodnota součinu $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$. Součin nazývéme *konvergentní*, pokud existuje vlastní nenulová limita posloupnosti $\{p_n\}$. Dokažte následující tvrzení:

- Je-li $\lim p_n$ konečná nenulová, pak $a_n \to 1$.
- Nechť $1 + u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $u_n \to 0$ a posloupnost $\{u_n\}$ nemění znaménko. Pak
  - $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$ konverguje, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje;
  - $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n) = \infty$, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$;
  - $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n) = 0$, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$;
- Pokud $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |u_n|)$ konverguje, konverguje též $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$.

Příklad 5.5.2. Najděte hodnoty součinů (existují-li) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2})$, $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^{2^n})$ pro $|x| < 1$, $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{1+\frac{1}{n}}$.

Příklad 5.5.3. Zkoumejte konvergenci součinů $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n})$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n})$ pro $|x| < 1$, $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{1+\frac{1}{n}}$.

Příklad 5.5.4. Nechť $a_n > 0$ a $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ diverguje. Ukažte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)} = 1.$$

5.6 Téma 4: Primitivní funkce

Příklad 5.6.1. Buď I otevřený neprázdný interval. Označme

$$C(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ spojitá na } I\}$$
$$P(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ má primitivní funkci na } I\}$$

Na přednášce bylo vysloveno a bude dokázáno, že platí

$$C(I) \subset P(I)\,. \tag{5.1}$$

Ukažte, že inkluze (5.1) není rovností, tedy že existuje nespojitá funkce na I, mající primitivní funkcí na I.

Návod: Uvažte funkci $g(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$, a funkci $G(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $G(0) = 0$.

Příklad 5.6.2. Funkce g z předchozího bodu je nespojitá právě v bodě $x = 0$. Buďte nyní $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ po dvou různé body. Potom funkce $\sum_{j=1}^{n} g(x - a_j)$ je nespojitá právě v bodech $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, a přitom má primitivní funkci $\sum_{j=1}^{n} G(x - a_j)$ na $\mathbb{R}$.

Poznámka. S využitím pojmu tzv. stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí (tedy nad rámec našich současných znalostí) lze ukázat např. následující tvrzení: buď $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost všech (různých) racionálních čísel z intervalu $(-1, 1)$. Potom funkce $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(x-r_n)}{2^n}$ je nespojitá ve všech racionálních bodech intervalu $(-1, 1)$, a přitom má primitivní funkci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x-r_n)}{2^n}$ na $(-1, 1)$. Funkce, mající všude primitivní funkci, tedy mohou být nespojité i na tzv. spočetné husté množině v $(-1, 1)$ (množina $A \subset (-1, 1)$ je hustá v $(-1, 1)$, pokud ke každému $x \in (-1, 1)$ existují $a_n \in A$, že $\lim_{n\to\infty} a_n = x$).

Příklad 5.6.3. Buď $I \subset \mathbb{R}$ neprázdný interval. Označme symbolem

$$\mathcal{B}_1(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, \text{ existuje posloupnost } f_n \in \mathcal{C}(I)\,,\ \forall x \in I \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}\,,$$

tzv. funkce první Baireovy třídy. (Jde tedy o funkce, které jsou bodovými limitami spojitých funkcí.) Ukažte, že platí:

1. pro každý neprázdný otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ je
$$\mathcal{P}(I) \subset \mathcal{B}_1(I)\,; \tag{5.2}$$
2. pro každý neprázdný interval $I \subset \mathbb{R}$ je
$$\mathcal{C}(I) \subset \mathcal{B}_1(I)\,, \tag{5.3}$$
přičemž inkluze v (5.3) není rovností, tj. existují nespojité funkce první Baireovy třídy.

Návod:

1. Studujte chování posloupnosti $f_n(x) := n(F(x + \frac{1}{n}) - F(x))$, kde F je primitivní k f na I. Nezapomeňte se zamyslet nad tím, jak se pro každé pevné $n \in \mathbb{N}$ zachovat vůči všem bodům $x \in I$, pro které $x + \frac{1}{n} \notin I$.
2. Je-li $f \in \mathcal{C}(I)$, uvažujte $f_n := f$ pro všechna přirozená n; poté studujte chování posloupnosti funkcí x^n na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Příklad 5.6.4. Násobení funkcí nezachovává ani vlastnost „mít primitivní funkci“, ani vlastnost „nemít primitivní funkci“. Ukažte:

1. existuje otevřený interval $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ taková, že $f \notin \mathcal{P}(I)$ & $f^2 \in \mathcal{P}(I)$;
2. existuje otevřený interval $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ a $h : I \to \mathbb{R}$ taková, že $h \in \mathcal{P}(I)$ & $h^2 \notin \mathcal{P}(I)$;

Návod:

1. Uvažte jakýkoli $I \supset \{0\}$ a funkci $f(x) = 1$ pro $x \geq 0$, $f(x) = -1$ pro $x < 0$.
2. Z vlastností funkce g z bodu 1 plyne, že funkce $h_1(x) := \cos\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $h_1(0) := 0$, má primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Podobně ukažte, funkce $h_2(x) := \sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $h_2(0) := 0$, má primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Funkce $h_1^2 + h_2^2$ však nemá Darbouxovu vlastnost na $\mathbb{R}$, alespoň jedna z funkcí h_1^2, h_2^2 tedy nemůže mít primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

Příklad 5.6.5. Ze vztahu $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ odvoďte pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ vzorce (možná hodné zapamatování):

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,, \qquad \int \frac{dx}{(x+b)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{a}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.4}$$

Příklad 5.6.6. Položme

$$L_n := \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^n}}\,, \qquad K_n := \int \sqrt{(x^2+1)^n}\,dx\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ukažte:

1. $L_1 = \log(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $K_1 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$;
3. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $L_{n+2} = \frac{x}{n\sqrt{(x^2+1)^n}} + \frac{n-1}{n} L_n$, $x \in \mathbb{R}$;
4. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $K_n = \frac{x}{n+1}\sqrt{(x^2+1)^n} + \frac{n}{n+1} K_{n-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Návod:

1. použijte substituci $\sqrt{x^2+1} = -x + t$;
2. integrujte $\int 1 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx$ per partes a využijte předchozího výsledku;
3. integrujte $\int 1 \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^n}}$ per partes;
4. integrujte $\int 1 \cdot \sqrt{(x^2+1)^n}\,dx$ per partes.

5.7 Téma 5: Určitý integrál

Příklad 5.7.1. Spočtěte tyto Riemannovy integrály bez použití primitivní funkce:

$$\text{(a)} \quad \int_0^a x^3 dx\,, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx\,.$$

Návod: Uvažte ekvidistantní dělení s normou $\frac{1}{n}$. V prvním případě budete potřebovat vztah $1^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ve druhém vzorec pro $\sum_{k=1}^n \sin kx$.

Příklad 5.7.2. Ukažte, že existuje Riemannův integrál z Riemannovy funkce na $\langle 0,1\rangle$. Spočtěte jej.

Příklad 5.7.3. Použitím Riemannových integrálů vhodných funkcí spočtěte tyto limity:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right), \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\,.$$

Návod: (a) Pište $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2n}{2n}}\right)$ a uvažte Riemannovské součty funkce $\frac{1}{\frac{1}{2}+x}$ při vhodném dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$. Proveďte podrobně.
(b) Označte $a_n := \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}$, ukažte, že $\log a_n := \frac{1}{n}\left(\log(1+\frac{1}{n})+\log(1+\frac{2}{n})\cdots\log(1+\frac{n}{n})\right)$ a dále postupujte obdobně jako v předchozím případě.

Příklad 5.7.4. Dokažte následující tvrzení: Buďte f, g omezené funkce, definované na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a takové, že $f=g$ s výjimkou konečného počtu bodů. Nechť f má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$. Potom i g má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Příklad 5.7.5. Spočtěte pro $n\in\mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx\,.$$

Návod: Substitucí ukažte, že $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$ a pak sečtěte oba tyto integrály.

Příklad 5.7.6. Položme $I_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x dx$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Ukažte (metodou integrace per partes), že

$$I_k = \frac{k-1}{k}I_{k-2}\,, \qquad k=2,3,\ldots\,.$$

Spočtěte I_0 a I_1 a odvoďte explicitní vztahy pro I_{2n} a I_{2n+1}, $n\in\mathbb{N}$.

Příklad 5.7.7. S použitím výsledků předchozího bodu ukažte tzv. Wallisovu formuli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 5.7.8. Ukažte tzv. Stirlingův vzorec:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Příklad 5.7.9. Ukažte, že číslo π je iracionální.

5.8 Téma 6: Newtonův integrál

Příklad 5.8.1. Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu. Buďte $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Symbolem $\mathcal{N}(a, b)$ rozumíme množinu všech funkcí f, definovaných na intervalu (a, b), takových, že $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

1. Nechť $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$ a f má primitivní funkci na (a, b). Ukažte, že potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
2. Ukažte, že implikaci, obsaženou v předchozím bodě, nelze „obrátit“, tj. že existuje $f \in \mathcal{N}(a, b)$ taková, že $|f|$ má primitivní funkci na (a, b) a $|f| \notin \mathcal{N}(a, b)$.
3. Ukažte, že implikace z bodu (i) neplatí bez předpokladu existence primitivní funkce k $|f|$ na (a, b), tj. najděte f takovou, že $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$ a přitom f nemá primitivní funkci na (a, b).

Příklad 5.8.2. Chování Newtonovsky integrovatelné funkce v nekonečnu. Rozhodněte, které z uvedených tvrzení platí. Podle toho tvrzení buď dokažte nebo najděte protipříklad:

1. $f \in \mathcal{C}([, \infty)), \int_1^\infty f \in \mathbb{R}$, potom $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. $f \in \mathcal{C}([1, \infty)), \int_1^\infty f \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ na $(1, +\infty)$, potom $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. $f \in \mathcal{C}([1, \infty)), \int_1^\infty f \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ na $(1, +\infty)$, potom f je omezená na $(1, +\infty)$.
4. $f \in \mathcal{C}([1, \infty)), \int_1^\infty f \in \mathbb{R}$, existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, potom $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Příklad 5.8.3. Záludnosti obratu „chová se jako“. Ukažte, že $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$, zatímco $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \notin \mathbb{R}$.

Varování. Uvedený příklad slouží jako varování před následující chybnou úvahou: Ve jmenovateli integrované funkce v integrálu $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ lze pro velká x funkci $\sin x$ „zanedbat“ vzhledem k funkci $\sqrt{x}$, proto se integrál $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ chová „stejně jako“ integrál $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Uvědomte si, jak byste tento váš odhad koretně oveřovali a proč toto ověření v tomto příkladu selže.

Návody a poznámky.

Příklad 5.8.1

1. Označte F primitivní funkci k f a H primitivní funkci k $|f|$, na (a, b). Ukažte že pro $x, y \in \mathcal{P}^-(b, \delta)$ je $|F(x)-F(y)| < |H(x)-H(y)|$ a použijte B-C podmínku pro existenci vlastní limity $\lim_{x\to b-} F(x)$. Podobně postupujte pro bod a.
2. $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} \in R$, zatímco $\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$. Ukažte.
3. Na intervalu $(0, 1)$ uvažte funkci $D(x) - \frac{1}{2}$; ($D(x)$ je Dirichletova funkce).

Příklad 5.8.2

1. Tvrzení neplatí. Uvažte $\int_1^\infty \sin x^2\, dx$. (Substituujte $x^2 = y$ a poté užijte A-D kritérium.)
2. Tvrzení neplatí. Uvažte funkci, jejíž graf je tvořen rameny rovnoramenných trojúhelníků o základně délky $2/n^2$ a výšce 1, umístěných v bodech $x = n$ reálné osy. „Mimo tyto trojúhelníky“ je funkce nulová.
3. Tvrzení neplatí. Uvažte podobnou funkci, jako v předchozím případě, pouze základny trojúhelníků budou $2/n^3$ a výšky n.
4. Tvrzení **platí**. Nechť $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ (konečná či nekonečná). Potom existují $x_0 > 0$, $c > 0$, že $f(x) > c$ pro všechna $x \geq x_0$. Ukažte, že taková funkce má nutně nekonečný integrál. Podobně odvoďte spor v případě $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$.

Příklad 5.8.3 $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$ podle A-D kritéria. Předpokládejte pro spor, že $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \in \mathbb{R}$, pak by ovšem i $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \int_\pi^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)} \in \mathbb{R}$. Poslední integrál však diverguje, neboť pro $x \geq \pi$ je $0 < \sqrt{x} + \sin x < \sqrt{x} + 1 < 2\sqrt{x}$, tedy $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)} > \frac{\sin^2 x}{2x}$ a $\int_\pi^\infty \frac{\sin^2 x}{2x} = +\infty$. Proveďte podrobně.

5.9 Téma 7: Limitní přechody v Riemannově integrálu

Příklad 5.9.1. (i) Dokažte, že je-li f spojitá na $[a,b]$ a pro každé α,β takové, že $a \le \alpha < \beta \le b$ platí

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0,$$

pak f je identicky nulová funkce na $[a,b]$.

(ii) Dokažte, že je-li f spojitá na $[a,b]$ a pro každou funkci g spojitou na $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0,$$

pak f je identicky nulová funkce na $[a,b]$.

(iii) Dokažte, že je-li f spojitá na $[a,b]$ a pro každou funkci g spojitou na $[a,b]$ a takovou, že $g(a) = g(b) = 0$ platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0,$$

pak f je identicky nulová funkce na $[a,b]$.

Příklad 5.9.2. Nechť f je spojitá na $\mathbb{R}$. Dokažte, že:

(i) je-li pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0,$$

pak f je lichá;

(ii) je-li pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt,$$

pak f je sudá;

(iii) je-li pro každé nějaké $T > 0$ a všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt,$$

pak f je periodická s periodou T.

Příklad 5.9.3.

- Nechť $f_n : [0,1] \to [0,1]$ spojité, $f_n \searrow 0$. Pak $\int_0^1 f_n \to 0$.
- Nechť $f_n : [0,1] \to [0,1]$ spojité, $f_n \to 0$. Pak $\int_0^1 f_n \to 0$. (Těžké.)

Příklad 5.9.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{x^5+1}\right);$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_n^{2n}\frac{x\,dx}{x^5+1}\right);$$
$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt\right);$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{x\,dx}{\operatorname{arctg}(nx)}\right)^n.$$

Výsledky.

- Příklad 5.9.4: $1,\quad \frac{7}{24},\quad 0,\quad e^{\frac{4}{3\pi^2}}$.

5.10 Téma 8: Aplikace určitého integrálu

Příklad 5.10.1. Spočtěte objem toru, vzniklého rotací kruhu o poloměru $a > 0$ a středu v bodě $b > a$ kolem osy y.

Příklad 5.10.2. Spočtěte povrch pláště parabolické mísy, vzniklé rotací parabolického oblouku $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ kolem osy y.

Příklad 5.10.3. Spočtěte povrch pláště ragbyového míče, vzniklého rotací elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$ kolem osy y.

Příklad 5.10.4. *Těžiště* rovinné oblasti dané nerovnostmi $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ je bod $[\overline{x}, \overline{y}]$, kde

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_a^b (f(x))^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Najděte těžiště rovinných oblastí, daných následujícími nerovnostmi:

$$\begin{aligned}
&-a \le x \le a, \quad 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2};\\
&0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\\
&x^2 + y^2 = r^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0.
\end{aligned}$$

Výsledky.

- Příklad 5.10.1: $V = 2\pi^2 a^2 b, \quad S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 5.10.2: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$
- Příklad 5.10.3: $8\pi\left(1 + \frac{\log(2+\sqrt{3})}{,} 2\sqrt{3}\right)$
- Příklad 5.10.4: $\left[0, \frac{4a}{3\pi}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\log(1+\sqrt{2})}, \frac{\pi}{8\log(1+\sqrt{2})},\right]$, $\left[\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right]$

5.11 Téma 9: Věty o střední hodnotě

Příklad 5.11.1. Nechť f je spojitá na $[0, 1]$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\,dx.$$

Výsledky.

- Příklad 5.11.1: $f(0)$.

Příklad 5.11.2. Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Dokažte, že existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^\xi f(t)\,dt = \int_\xi^b f(t)\,dt.$$

Příklad 5.11.3. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a nechť platí $\int_a^b f(s)\,dx = 0$. Dokažte, že existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = f(\xi).$$

Příklad 5.11.4. Nechť f je spojitá na $[a, b]$, $a > 0$ a nechť platí $\int_a^b f(s)\,dx = 0$. Dokažte, že existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \xi f(\xi).$$

5.12 Téma 10: Integrální kritérium konvergence řad

Příklad 5.12.1. Nechť f je spojitá a nezáporná na $[1,\infty)$ a nechť $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte (na čtyřech příkladech), že obecně neplatí žádný vztah mezi konvergencí řady a integrálu.

Příklad 5.12.2. Nechť f kladná a má vlastní klesající derivaci na $(0,\infty)$ a nechť $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Dokažte, že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n), \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$$

buď obě zároveň konvergují nebo obě zároveň divergují.

Příklad 5.12.3. Nechť f kladná klesající funkce na $[1,\infty)$. Položme

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} f(n) \qquad \text{a} \qquad I_N := \int_1^N f(x)\,dx.$$

Dokažte, že posloupnost $\{S_N - I_N\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí a její limita se nachází v intervalu $[0, f(1)]$.

Příklad 5.12.4. Dokažte, že limity posloupností

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{a} \qquad \left\{1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}-\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

se obě nacházejí v intervalu $(0,1)$.

5.13 Téma 11: Integrální tvar zbytku Taylorova polynomu

Příklad 5.13.1. Pomocí zbytku Taylorova polynomu v integrálním tvaru dokažte, že Taylorova řada pro $\log(1+x)$ konverguje k této funkci na intervalu $(-1,1]$.

Příklad 5.13.2. Pomocí zbytku Taylorova polynomu v integrálním tvaru odhadněte chybu aproximace Taylorovým polynomem stupně 4 funkce $\log(\sin x)$ rozvinutým v bodě $\frac{\pi}{2}$ pro hodnotu $\log(\sin(\frac{3}{2}))$.

Příklad 5.13.3. Kolik nenulových členů Taylorovy řady pro e^{-x^4} je třeba k výpočtu hodnoty $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^4}\,dx$ s přesností na pět desetinných míst? Spočtěte integrál s touto přesností.

5.14 Téma 12: Metrické prostory

Příklad 5.14.1. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na $\mathbb{R}$:

$$\varrho(x,y) = |x^3 - y^3|; \qquad \varrho(x,y) = |x^2 - y^2|; \qquad \varrho(x,y) = (x-y)^2.$$

Příklad 5.14.2. Nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě metriky na množině P. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na P:

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; 1\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; 2\}.$$

Příklad 5.14.3. Co je potřeba předpokládat o funkci φ, aby funkce $\varrho(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ definovala metriku na $\mathbb{R}$?

Příklad 5.14.4. Najděte okolí bodu $[1,1]$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ v ruské metrice o poloměrech 1 a 2 a v diskrétní metrice o poloměrech $\frac{1}{2}$ a 2.

Příklad 5.14.5. Rozhodněte, zda v obecném metrickém prostoru platí $\overline{A\cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Příklad 5.14.6. V metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou najděte uzávěry grafů funkcí

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad D(x); \qquad R(x),$$

kde symboly D a R značíme Dirichletovu a Riemannovu funkci.

Příklad 5.14.7. Rozhodněte, zda v metrikách ℓ_1, ℓ_p a ℓ_∞ konvergují následující posloupnosti:

$$\begin{aligned}
&\{1, 2, 3, \dots, n, 0, 0, \dots, 0, \dots\}\,;\\
&\{1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}\ \ (n \text{ krát});\\
&\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0, \dots\right\}\ \ (n \text{ krát});\\
&\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots\right\}\ \ (n \text{ krát}).
\end{aligned}$$

Příklad 5.14.8. Dokažte nálsedující vztah pro vnitřek množiny:

$$\operatorname{Int}(X \setminus Y) \subset \operatorname{Int} X \setminus \operatorname{Int} Y.$$

Platí v posledním vztahu obecně i opačná inkluze?

Příklad 5.14.9. Nalezněte uzávěr množiny $\{2^{\frac{p}{q}},\ p, q \in \mathbb{N}\}$ v prostoru $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou.

Příklad 5.14.10. Jsou dána kladná čísla $p \le q$. Sestrojte množinu A takovou, aby $\operatorname{diam} A = q$ a $\operatorname{diam} \operatorname{Int} A = p$.

Příklad 5.14.11. Dokažte, že je-li podmnožina A metrického prostoru P otevřená, pak $\partial A = \overline{A} \setminus A$.

Příklad 5.14.12. Definujme *břeh* množiny A předpisem $B(A) := A \cap \partial A$. Dokažte

$$\partial A = B(A) \cup B(P \setminus A); \qquad B(A) \cap B(P \setminus A) = \emptyset; \qquad B(B(A)) = B(A).$$

Příklad 5.14.13. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } |x - y| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};\\ \frac{1}{2} & \text{jestliže } |x - y| \in \mathbb{Q} \setminus \{0\};\\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny otevřené a všechny kompaktní množiny v této metrice.

Příklad 5.14.14. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) := \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, spočtěte $\operatorname{diam}(F_n)$, kde $F_n := [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, v této metrice. Jsou množiny F_n omezené, uzavřené, kompaktní?

Příklad 5.14.15. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{jestliže } x \neq 0,\ y = 0;\\ \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } y \neq 0,\ x = 0;\\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } x \neq 0,\ y \neq 0, x \neq y;\\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny kompaktní množiny v této metrice. Je celý prostor $(\mathbb{R}, \varrho)$ kompaktní?

Příklad 5.14.16. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{jestliže } x \neq 0,\ y = 0;\\ \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } y \neq 0,\ x = 0;\\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } x \neq 0,\ y \neq 0, x \neq y;\\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny kompaktní množiny v této metrice. Je celý prostor $(\mathbb{R}, \varrho)$ kompaktní?

Příklad 5.14.17. Dokažte, že je-li metrický prostor (P, ϱ) kompaktní, pak existují $y, z \in P$ tak, že $\varrho(y, z) = \operatorname{diam} P$.

Příklad 5.14.18. Uvažujte $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou ρ a metrikou $\sigma(x, y) = \operatorname{arctg}(|x - y|)$. Ukažte, že prostory $(\mathbb{R}, \rho)$ a $(\mathbb{R}, \sigma)$ mají stejný systém otevřených množin.

Kapitola 6

Matematická analýza 1b - cvičení

6.1 Téma 1: Taylorův polynom

Příklad 6.1.1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ v bodě $x = 0$ až do řádu x^4 včetně. Spočtěte $f^{(4)}(0)$.

Příklad 6.1.2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$ v bodě $x = 0$ až do řádu x^{13} včetně.

Příklad 6.1.3. Rozložte funkci $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ pro $x > 0$ do řady mocnin $\frac{1}{x}$ až do řádu $\frac{1}{x^3}$ včetně.

Příklad 6.1.4. Odhadněte absolutní chybu aproximace daných funkcí na daných intervalech:

$$
\begin{aligned}
&e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in [0,1] \\
&\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\
&\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \qquad x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Příklad 6.1.5. Spočtěte přibližnou numerickou hodnotu následujících veličin a odhadněte chybu:

$$\sqrt{e}, \qquad \arcsin 0,45, \qquad \log(1,2), \qquad (1,1)^{1,2}.$$

Příklad 6.1.6. Spočtěte přibližnou numerickou hodnotu následujících veličin s danou přesností:

$$e \text{ s přesností na } 10^{-9}, \quad \sqrt{5} \text{ s přesností na } 10^{-4}, \quad \log_{10}(11) \text{ s přesností na } 10^{-5}.$$

Příklad 6.1.7. S pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x,\right) \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}, \\
&\lim_{x\to \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right].
\end{aligned}
$$

Příklad 6.1.8. S pomocí Taylorova polynomu vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) - \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}\right].$$

Příklad 6.1.9. Vyšetřete konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \log(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n})(\arcsin \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Výsledky.
- Cvičení 6.1.1: $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4), \quad -48.$
- Cvičení 6.1.2: $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13}).$
- Cvičení 6.1.3: $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$
- Cvičení 6.1.4: $\frac{3}{(n+1)!}, \quad \frac{1}{3840}, \quad 2 \cdot 10^{-6}.$
- Cvičení 6.1.5: $1,64872, \quad 0,46676, \quad 1,12117.$
- Cvičení 6.1.6: $2,718281828, \quad 2,2361, \quad 1,04139.$
- Cvičení 6.1.7: $-\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}.$
- Cvičení 6.1.8: konverguje, diverguje.

6.2 Téma 2: Číselné řady s reálnými členy

Příklad 6.2.1. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3} - 1\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{58} n}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{4};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \left(\sqrt{n^6 + n} - n^3\right).$$

Příklad 6.2.2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|\sin n|}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Příklad 6.2.3. Vyšetřete charakter konvergence řad v závislosti na parametru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\log a}}{n}, \qquad x \geq 0,\ q \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

Příklad 6.2.4. Nalezněte součet řad

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1,$$
$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k}, \quad |x| < 1,\ |y| < 1,$$
$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}.$$

Výsledky.
- Cvičení 6.2.1: (i), (ii), (iii) konvergují neabsolutně, (iv) konverguje absolutně;
- Cvičení 6.2.2: (i) konverguje neabsolutně, (ii) diverguje, (iii) konverguje neabsolutně, (iv) konverguje neabsolutně;

- Cvičení 6.2.3: (i) diverguje pro $x = 0$, konverguje neabsolutně pro $0 < x \le 1$, konverguje absolutně pro $x > 1$;

  (ii) diverguje pro $q \le \frac{1}{2}$, konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2} < q \le 1$, konverguje absolutně pro $q > 1$;

  (iii) konverguje neabsolutně pro každé $a > 1$;

- Cvičení 6.2.4: (i) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$, (ii) $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, (iii) $e - 1$.

6.3 Téma 3: Mocninné řady

Příklad 6.3.1. Následující funkce vyjádřete jako součet mocninné řady o středu 0 na maximálním otevřeném intervalu.

$$e^{-x^2}, \quad \cos^2 x, \quad , \sin^3 x, \quad \frac{x^{10}}{1-x}, \quad \frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}, \quad \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \frac{x}{1+x-2x^2}, \quad \frac{1}{x^2+x+1}, \quad \log(1+x+x^2+x^3).$$

Příklad 6.3.2. Na intervalu konvergence sečtěte mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} 1(-1)^k k^2 x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k, \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}.$$

Příklad 6.3.3. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}.$$

Příklad 6.3.4. Užitím Abelovy věty sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}.$$

Příklad 6.3.5. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{(n+1)2^n}.$$

Příklad 6.3.6. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$$

na jejím definičním oboru. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje absolutně.

Příklad 6.3.7. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-1)}{3^n n!} x^n$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 6.3.8. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(2n-1)!}$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 6.3.9. Nalezněte definiční obor funkce f, zadané předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} \right)^n x^n.$$

Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje absolutně.

Příklad 6.3.10. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(2n)!}$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 6.3.11. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n! 2^n}.$$

Příklad 6.3.12. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}.$$

Příklad 6.3.13. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, \quad a > 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \quad \text{(těžké)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n.$$

Výsledky.

- Cvičení 6.3.12: (i) $R = \frac{1}{3}$, AK pro $-\frac{4}{3} \le x < -\frac{2}{3}$, K pro $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$;
  (ii) $R = 4$, AK i K pro $-4 < x < 4$;
  (iii) $R = \frac{1}{e}$, AK i K pro $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$;
  (iv) $R = \frac{1}{e}$, AK pro $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$, K pro $-\frac{1}{e} \le x < \frac{1}{e}$.
- Cvičení 6.3.13: (i) $R = 1$, pro $-1 < x < 1$ AK pro všechna $a > 0$, pro $x = \pm 1$ AK i K pro $a \in (1, \infty)$;
  (ii) $R = 1$, AK pro $-1 < x < 1$ K pro $-1 \le x < 1$;
  (iii) $R = 1$, AK i K pro $-1 < x < 1$;
  (iv) $R = 1$, AK pro $-1 < x < 1$ K pro $-1 < x \le 1$;
  (v) $R = \frac{1}{e}$, AK i K pro $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$.

6.4 Téma 4: Primitivní funkce

Příklad 6.4.1. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int (x+5)^3 \, dx, \qquad \int \sin(2x+7) \, dx, \qquad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}} \, dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx, \qquad \int \sqrt{1 - \sin(2x)} \, dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx;$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, \qquad \int \frac{x}{1+x^4} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Příklad 6.4.2. Pomocí jednoduchých substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \sin(\log x)\,\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Příklad 6.4.3. Pomocí trigonometrických vzorců určete následující primitivní funkce:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}, \qquad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 + x\cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x};$$
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x};$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} \qquad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$$

Příklad 6.4.4. Pomocí metody integrování per partes spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int e^x\sin x\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \log x\,dx;$$
$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx.$$

Příklad 6.4.5. Pomocí metody integrování per partes odvoďte formule pro následující primitivní funkce:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \sin(\log x)\,dx.$$

Příklad 6.4.6. Pomocí vhodné substituce spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}};$$
$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx.$$

Příklad 6.4.7. Procvičte si lepení primitivních funkcí na následujících příkladech:

$$\int |x|\,dx, \qquad \int e^{-|x|}\,dx, \qquad \int \max\{x,x^2\}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \qquad \int |2x+1|\,dx; \qquad \int (|1+x|-|1-x|)\,dx.$$

Příklad 6.4.8. Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4};$$
$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+x^6}, \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx.$$

Příklad 6.4.9. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx, \qquad \int \sqrt{x^2-2x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$$
$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Příklad 6.4.10. Pomocí Eulerových substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$$
$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}, \qquad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 6.4.11. Na intervalu $(-\pi,\pi)$ nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{(\sin x)|\sin x|+(\cos x)^2}{(\sin x)^2+2(\cos x)^2}\,dx.$$

Příklad 6.4.12. Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(0,\pi)$ k funkci

$$f(x)=\frac{1}{6\cos^2 x+4\sin x\cos x+\sin^2 x}.$$

Příklad 6.4.13. Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu k funkci

$$f(y)=\frac{1}{3\cos^2 y+\sin(2y)+1}.$$

Příklad 6.4.14. Spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, na kterých existuje, k funkci

$$\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}}{e^{3x}-1}\,dx.$$

Výsledky.

- Cvičení 6.4.11: Označme

$$I:=\int \frac{(\sin x)|\sin x|+(\cos x)^2}{(\sin x)^2+2(\cos x)^2}\,dx.$$

Použijeme substituci $t=\operatorname{tg} x$, a to na intervalech $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ a $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, pak po řadě vychází $t\in(-\infty,\infty)$, $t\in(0,\infty)$ a $t\in(-\infty,0)$. Tedy

$$I=\begin{cases}\int \frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}\,dt, & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}),\ x\in(-\frac{\pi}{2},0),\\ \int \frac{dt}{2+t^2} & x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ x\in(\frac{\pi}{2},\pi).\end{cases}$$

Rozložíme první funkci na parciální zlomky a druhou spočítáme rovnou. U první funkce dostaneme rozklad

$$\frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{2+t^2},$$

uhodneme $A=C=0$ a dopočítáme $B=2$, $D=-3$. Celkem dostaneme

$$I=\begin{cases}2x-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+C_1, & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}),\\ 2x-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+C_2, & x\in(-\frac{\pi}{2},0),\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+C_3, & x\in(0,\frac{\pi}{2}),\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+C_4, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi).\end{cases}$$

Nyní spočítáme jednu primitivní funkci na celém intervalu $(-\pi,\pi)$, řekněmě F_0. Nejprve zvolíme konstantu $C_2=0$ Konstanty C_1, C_3 a C_4 spočítáme z jednostranných limit funkce F_0 v bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0. Dostáváme

$$C_1=\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, \qquad C_3=0, \qquad C_4=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

V bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0 dodefinujeme funkci F_0 tak, aby byla spojitá. Celkem tedy máme

$$F_0(x)=\begin{cases}2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}),\\ \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}-\pi, & x=-\frac{\pi}{2},\\ 2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right), & x\in(-\frac{\pi}{2},0),\\ 0, & x=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right), & x\in(0,\frac{\pi}{2}),\\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi).\end{cases}$$

Všechny primitivní funkce na intervalu $(-\pi, \pi)$ jsou tedy tvaru

$$F(x) = F_0(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Cvičení 6.4.12: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(x) + C$, $x \in (0, \pi)$, kde (například)

$$F_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,(3\operatorname{cotg} x + 1)\right)$$

nebo

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\operatorname{tg} x + 2)\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}); \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\operatorname{tg} x + 2)\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}); \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Cvičení 6.4.13: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(y) + C$, $y \in (-\infty, \infty)$, kde (například)

$$F_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} y + 1}{\sqrt{3}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}}\right), & y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + k\right), & y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Cvičení 6.4.14:

$$\log|e^x - 1| - \frac{1}{2}\log\left(e^{2x} + e^x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x + \frac{1}{2}\right)\right), \qquad x \in (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad x \in (0, \infty).$$

6.5 Téma 6: Určitý integrál

Příklad 6.5.1. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{4x} + 4e^{3x} - e^{2x} - 2e^x}{(e^{2x} + 1)(2e^{2x} + 3e^x + 1)}\, dx.$$

Příklad 6.5.2. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}}.$$

Příklad 6.5.3. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Příklad 6.5.4. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{y} - 1}{(y + 2)(\sqrt{y} + 1)\sqrt{y}}\, dy.$$

Příklad 6.5.5. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t + 3\sin t + 1}} dt.$$

Příklad 6.5.6. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{(\cos(2x) + \sin^2 x)(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 3)}\, dx.$$

Příklad 6.5.7. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{16}^{\infty} \frac{2y^{\frac{3}{2}} - 5y + 8\sqrt{y} - 1}{\left(y - 2\sqrt{y} - 3\right)\sqrt{y}\left(y - \sqrt{y} + 2\right)}\, dy$$

Výsledky. • Cvičení 6.5.1: Označme

$$I := \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{4x} + 4e^{3x} - e^{2x} - 2e^{x}}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^{x}+1)}\, dx.$$

Použijeme substituci $y = e^x$, pak $y \in (0,1)$. Protože $dy = e^x\, dx$, máme

$$I = \int_0^1 \frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)}\, dy.$$

Rozložíme integrand na parciální zlomky:

$$\frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{2y+1} + \frac{D}{y+1}$$

Použitím cover-up rule, tj. dosazením $y = -\frac{1}{2}$ a $y = -1$ dostaneme ihned $C = D = -1$, pak dosazením například $y = 0$ vypočítáme $B = 0$ a konečně dosazením například $y = 1$ dostaneme $A = 2$. Celkem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= \left[\log(y^2+1) - \frac{1}{2}\log(2y+1) - \log(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{1}{2}\log 3. \end{aligned}$$

- Cvičení 6.5.2:

$$\frac{1}{8}\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right)$$

- Cvičení 6.5.4:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 2\log\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)$$

- Cvičení 6.5.5:

$$\sqrt{5} - 2 + 3\log(5 - 2\sqrt{5}) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-2\sqrt{5}} - 1\right)$$

- Cvičení 6.5.6:

$$\frac{1}{4}\log\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- Cvičení 6.5.7: ∞ (integrál existuje, ale nekonverguje)

6.6 Téma 7: Aplikace určitého integrálu

Příklad 6.6.1. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4}, \qquad x \in [2,4].$$

Příklad 6.6.2. Určete objem a povrch pláště tělesa, vzniklého rotací množiny

$$\left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y-b)^2 \le a^2\right\}, \quad (0 < a \le b),$$

okolo osy x.

Příklad 6.6.3. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right), \qquad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Příklad 6.6.4. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \qquad x \in [2, 4].$$

Příklad 6.6.5. Spočtěte objem a povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $y = e^x$ kolem osy x, kde $x \in (-\infty, 0)$.

Příklad 6.6.6. Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Příklad 6.6.7. Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \cosh x, \qquad x \in [0, a]$$

Příklad 6.6.8. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti

$$M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 8 \le 6y\right\}$$

kolem osy x.

Výsledky.

- Cvičení 6.6.1: Označme L hledanou délku křivky. Podle příslušného vzorce je

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

kde

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4},$$

takže

$$f'(x) = x - \frac{1}{4x},$$

tj.

$$f'(x)^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}.$$

Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx \\ &= \int_2^4 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\log x\right]_{x=2}^{x=4} \\ &= 6 + \frac{\log 2}{4}. \end{aligned}$$

- Cvičení 6.6.2: $V = 2\pi^2 a^2 b$, $S = 4\pi^2 ab$
- Cvičení 6.6.4: $\frac{1}{2} \log \frac{e^4 - e^{-4} - 2}{e^2 - e^{-2} - 2}$
- Cvičení 6.6.5: $\frac{\pi}{2}$
- Cvičení 6.6.6: $6a$
- Cvičení 6.6.7: $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$
- Cvičení 6.6.8: $6\pi^2$

6.7 Téma 8: Konvergence Newtonova integrálu

Příklad 6.7.1. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}\,dx; \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx; \quad \int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,dx;$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^a\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx;$$
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^p}\,dx; \quad \int_0^1 x^{ax}\,dx;$$
$$\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^p}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Příklad 6.7.2. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:

$$\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^q(1/x)}\,dx.$$

Výsledky. • Cvičení 6.7.1:

konverguje; $p, q > 0$; $p > -1$;

konverguje; $a \in (-1, 1)$; $0 < p+1 < q$;

$a \in \mathbb{R}$, $1 < p < 3$; $a \in \mathbb{R}$;

$a \in (-1, -\frac{1}{2})$; $p > -\frac{1}{2}$.

- Cvičení 6.7.2 $\alpha > 1$; $q < \frac{3}{2}$.

6.8 Téma 9: Integrální kritérium konvergence řad

Příklad 6.8.1. Vyšetřete, pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje následující řada:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha (\log(\log n))^\beta}.$$

Výsledky. • Cvičení 6.8.1:

řada konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$, $\beta > 1$.