

4. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 15 body.

1. Ukažte, že rovnice

$$\cos(xy) = \sqrt{xy + 1}$$

definuje na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 0]$ jednoznačně funkci $y = y(x)$ proměnné x , která splňuje $y(1) = 0$. Nalezněte derivaci $y'(1)$.

2. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-2x^2 - y^2}$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

3. Nalezněte řešení soustavy

$$7x_1 + x_2 + 3x_3 - 11x_4 = k$$

$$3x_1 - 2x_4 = 2$$

$$-3x_3 + 7x_4 = 8$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

v závislosti na parametru $k \in \mathbb{R}$.

4. V závislosti na parametru $p \geq 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{n^p}} - 1}{n^{5p}}.$$