

VRSTEVNICE FUNKCE, OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY

Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice funkcí:

1. $f(x, y) = x + \sqrt{y}$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $f(x, y) = \frac{y}{x}$
4. $f(x, y) = x^2 - y^2$
5. $f(x, y) = \sqrt{xy}$
6. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
7. $f(x, y) = |x| + y$
8. $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
9. $f(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$
10. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

- 11.* Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \leq b$. Ukažte, že množina (a, b) je otevřená.
- 12.* Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Ukažte, že množina $\langle a, b \rangle$ je uzavřená.
- 13.* Necht' $M \subset \mathbb{R}^n$. Dokažte, že množina M je uzavřená právě tehdy, když platí $\overline{M} = M$.

Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené eventuálně uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici.

- 14.* $A_1 = \mathbb{Q}$
- 15.* $A_2 = \mathbb{N}$
- 16.* $A_3 = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$
17. $A_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}$
18. $A_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$
19. $A_6 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 1\}$
20. $A_7 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}$
21. $A_8 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$
22. $A_9 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$
- 23.* Určete uzávěr, hranici a vnitřek množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x + y| - x - y > 0\}$.

NĚKTERÉ VÝSLEDKY

1.

2.

3.

4.

5.

9.

14. A_1 není ani otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_1 = \emptyset$, $\overline{A_1} = \mathbb{R}$, $H(A_1) = \mathbb{R}$ 15. A_2 je uzavřená a není otevřená, $\operatorname{int} A_2 = \emptyset$, $\overline{A_2} = \mathbb{N}$, $H(A_2) = \mathbb{N}$ 16. A_3 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_3 = \emptyset$, $\overline{A_3} = A_3 \cup \{0\}$, $H(A_3) = A_3 \cup \{0\}$ 17. A_4 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_4 = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$, $\overline{A_4} = \langle 0, +\infty \rangle \times (-\infty, 0]$, $H(A_4) = \{0\} \times (-\infty, 0) \cup \langle 0, +\infty \rangle \times \{0\}$ 18. A_5 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_5 = A_5$, $\overline{A_5} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H(A_5) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ 19. A_6 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_6 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$, $\overline{A_6} = A_6$, $H(A_6) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ 20. A_7 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_7 = A_7$, $\overline{A_7} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y \geq 17\}$, $H(A_7) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y = 17\}$ 21. A_8 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_8 = \emptyset$, $\overline{A_8} = A_8$, $H(A_8) = A_8$ 22. A_9 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_9 = \emptyset$, $\overline{A_9} = \{[x, y, z] \in$

$$\mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}, H(A_9) = \overline{A_9} \quad \mathbf{23.} \text{ int } M = M, \overline{M} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x + y \leq 0\},$$
$$H(M) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x + y = 0\}$$