

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

ÚLOHY ŘEŠITELNÉ BEZ VĚTY O MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte absolutní extrémum funkce f na množině M .

- 1.* $f(x, y) = x + y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $f(x, y) = e^x; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
- 3.* $f(x, y) = x^2 + y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
- 4.* $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z; M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$
5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z; M = \mathbf{R}^3$
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}; M = \mathbf{R}^2$
7. $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}; a > b > c > 0$
9. $f(x, y) = (x + y)e^{-2x - 3y}; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$
10. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádrů o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

ÚLOHY NA VĚTU O LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M .

- 11.* $f(x, y) = x + y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$
- 12.* $f(x, y, z) = xyz; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- 13.* $f(x, y, z) = xyz; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$
14. $f(x, y, z) = xyz; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$
15. $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
16. $f(x, y, z) = xy^2z^3; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0, z > 0\};$ kde $a > 0$
17. $f(x, y) = y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$
18. $f(x, y) = x^2 + y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$
- 19.* $f(x, y) = x^4y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
20. $f(x, y) = 2x + 4y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
21. $f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2); M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$
22. $f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$
23. $f(x, y, z) = xy + yz; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
24. $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2 + y^2)}; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
25. $f(x, y, z) = z + e^{xy}; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
26. $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z; M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$
27. $f(x, y) = \arctg x + \arctg y; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

VÝSLEDKY

1. Maximum: $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, minimum: $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. 2. Maximum: $[1, 0]$, minimum: $[-1, 0]$.
 3. Maximum: $[0, 1], [1, 0]$, minimum: $[0, 0]$. 4. Maximum: $[1, 1, 1], [1, -1, 1], [-1, 1, 1], [-1, -1, 1]$;
 minimum: $[0, 0, -1]$. 5. Maxima se nenabývá; minimum: $[-1, -2, 3]$. 6. Maximum se nabývá v
 každém bodě jednotkové kružnice; minimum: $[0, 0]$. 7. Maximum:

$[a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2}]$; minimum: $[-a/\sqrt{a^2 + b^2}, -b/\sqrt{a^2 + b^2}]$. **8.** Maximum: $[a, 0, 0]$, $[-a, 0, 0]$; minimum: $[0, 0, 0]$. **9.** Maximum: $[1/2, 0]$; minimum: $[0, 0]$. **10.** Dno nádrže bude čtverec $4m \times 4m$ a hloubka nádrže bude $2m$. **11.** Maximum: $[1, 1]$, minimum: $[0, 0]$. **12.** Maximum: $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$; minimum: $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$. **13.** Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, nabývá tedy na M maxima a minima. Použijeme Lagrangeovu větu o multiplikátorech. Položme $G = \mathbf{R}^3$,

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z.$$

Funkce f , g_1 a g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(G)$. Vypočítejme příslušné parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= yz, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= xz, & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= xy, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

Vektory $[2x, 2y, 2z]$ a $[1, 1, 1]$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí $x = y = z$. Žádný bod s touto vlastností ovšem neleží v množině M , neboť pro bod $[x, x, x]$ by muselo současně platit $g_1(x, x, x) = 3x^2 - 1 = 0$ i $g_2(x, x, x) = 3x = 0$, což nelze. Je tedy třeba vyřešit tuto nelineární soustavu:

$$yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0, \quad (1)$$

$$xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0, \quad (2)$$

$$xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 = 0, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

$$x + y + z = 0. \quad (5)$$

Odečtením (??) od (??) dostaneme:

$$-z(x - y) + 2\lambda_1(x - y) = 0. \quad (6)$$

Odtud plyne, že musí být $z = 2\lambda_1$ nebo $x = y$. Podobně odečtením (??) od (??) dostaneme:

$$-x(y - z) + 2\lambda_1(y - z) = 0. \quad (7)$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Ze vztahů (??) a (??) tedy vyplývá, že musí být buď $x = y$, nebo $y = z$, nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na první případ, kdy $x = y$. Z (??) máme $z = -2x$ a (??) pak dává $6x^2 = 1$, tj. $x = 1/\sqrt{6}$ nebo $x = -1/\sqrt{6}$. K těmto bodům lze skutečně dopočítat příslušná y, z, λ_1 a λ_2 . Případy $y = z$ a $z = x$ vyřešíme obdobně. Obdržíme tyto podezřelé body:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right], \\ & \left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right]. \end{aligned}$$

Výpočtem hodnot funkce f v uvedených bodech zjistíme, že v prvním řádku jsou body, kde funkce f nabývá maxima na M , a ve druhém řádku jsou body, kde f nabývá minima na M .

14. Množina M je kompaktní, neboť M je uzavřená polokoule. Funkce f je spojitá na M , takže nabývá na M maxima i minima. Body podezřelé z extrému budeme hledat zvlášť vzhledem k vnitřku množiny M a zvlášť vzhledem k hranici M . Mimo takto nalezené body již nemůže existovat další bod extrému, neboť je-li $\vec{x} \in A \subset M$ bod extrému vzhledem k M , pak je to i bod extrému vzhledem k A .

Vnitřek M je roven $\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z > 0\}$. Funkce f je třídy \mathcal{C}^1 . Body podezřelé z extrému vzhledem k $\text{Int } M$ jsou body, v nichž jsou všechny parciální derivace prvního řádu rovny 0. Platí $\nabla f(x, y, z) = [yz, xz, xy]$. Tento vektor je roven nulovému vektoru právě v bodech s alespoň dvěma nulovými souřadnicemi, tj. na souřadnicových osách. Body podezřelé z extrému ležící v $\text{Int } M$ jsou tedy právě prvky některé z následujících množin:

$$\{[x, 0, 0]; x \in (0, 1)\}, \quad \{[0, y, 0]; y \in (0, 1)\} \quad \text{a} \quad \{[0, 0, z]; z \in (0, 1)\}.$$

Hranici $H(M)$ si rozdělíme na části

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, y, z] \in G_1; x + y + z = 0\}, \quad \text{kde} \\ G_1 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \\ H_2 &= \{[x, y, z] \in G_2; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad \text{kde} \\ G_2 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z > 0\}, \\ H_3 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že množiny G_1 a G_2 jsou otevřené. Pro nalezení bodů podezřelých z extrému vzhledem k množině H_1 , resp. H_2 , H_3 , můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikatorech.

Funkce $[x, y, z] \mapsto x + y + z$ má na \mathbf{R}^3 nenulový gradient, takže v případě množiny H_1 dostaneme body podezřelé z extrému řešením soustavy

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0, \\ xz + \lambda &= 0, \\ xy + \lambda &= 0, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme jediné řešení této soustavy $[x, y, z] = [0, 0, 0]$. Tento bod leží v množině H_1 , a je tedy bodem podezřelým z extrému.

V případě množiny H_2 má funkce $[x, y, z] \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ nulový gradient pouze v bodě $[0, 0, 0]$, který není prvkem H_2 , takže body podezřelé z extrému dostaneme vyřešením soustavy

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x &= 0, \\ xz + 2\lambda y &= 0, \\ xy + 2\lambda z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme řešení, přičemž příslušné hodnoty λ neuvádíme:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ & \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ & [1, 0, 0], [-1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, -1, 0], [0, 0, 1], [0, 0, -1]. \end{aligned}$$

Z těchto bodů leží v množině H_2 pouze tyto body:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ & [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]. \end{aligned}$$

Množinu H_3 jsme vyšetřili již v předchozím příkladu. Zde dostáváme podezřelé body

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right], \\ & \left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right]. \end{aligned}$$

Porovnáním hodnot funkce f v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá maxima na M v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ a minima na M v bodech $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

15. Maximum: $[\pi/6, \pi/6, \pi/6]$; minima se nenabývá. **16.** Maximum: $[a/6, a/6, a/6]$; minima se nenabývá. **17.** Maximum: $[\sqrt{3}/2, 1/2]$, $[-\sqrt{3}/2, 1/2]$; minimum: $[\sqrt{3}/2, -1/2]$, $[-\sqrt{3}/2, -1/2]$.

18. Maximum: $[\sqrt{7\sqrt{5}/12}/3, \sqrt{5}/12]$, $[-\sqrt{7\sqrt{5}/12}/3, \sqrt{5}/12]$; minimum: $[0, 0]$.

19. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin

M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0, y]$; $y \in (-2, 2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 = 16, x > -1\},$$

$$H_2 = \{[-1, y] \in \mathbf{R}^2; y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazební podmínka je určena funkcí $g(x, y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $C^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$x^4 + y^4 = 16, \quad (1)$$

$$4x^3y = \lambda 4x^3, \quad (2)$$

$$x^4 = \lambda 4y^3. \quad (3)$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$. Zkoumejme chování na množině H_2 . Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1, y) = y, \quad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \quad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$ a minima v $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$.

20. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočítejme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M . Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0, y > 0\},$$

$$H_2 = \{[0, y] \in \mathbf{R}^2; y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_3 = \{[x, 0] \in \mathbf{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazební podmínka je určena funkcí $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy C^1 na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \quad x > 0, y > 0.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \quad (1)$$

$$2 = \lambda \frac{1}{4} x^{-3/4}, \quad (2)$$

$$4 = \lambda \frac{1}{4} y^{-3/4}. \quad (3)$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3} + 1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3} + 1)^4} \right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2 . Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0, y) = 4y, \quad y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[0, 1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3 . Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x, 0) = 2x, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[1, 0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0, 1]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

21. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x, y, 1) = f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 0), \quad [x, y, z] \in \mathbf{R}^3, \quad z \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Pro každé $[x, y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1)$$

$$2x + y = \lambda 2x, \quad (2)$$

$$x + 2y = \lambda 2y. \quad (3)$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme $(3 - 2\lambda)(x + y) = 0$. To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech

$$[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}], [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}].$$

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1],$$

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

22. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M . Spočteme parciální derivace f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0]$, $[0, 0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M .

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x = 0, y \in [-2, 2]\},$$

$$H_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 4, x < 0\}.$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0, 2]$, $[0, -2]$, $[0, 0]$, protože $f(0, y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (1)$$

$$2x + 4x^2 = \lambda 2x, \quad (2)$$

$$-2y = \lambda 2y. \quad (3)$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tuto x příslušná y a dostaneme body $[0, 2]$, $[0, -2]$, $[-1, \sqrt{3}]$, $[-1, -\sqrt{3}]$. První dva ovšem neleží v H_2 . Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2, 0]$ a bod $[2, 0]$, který ovšem neleží v H_2 .

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2, 0]$.

23. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1 , g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$ stejně jako funkce f . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = 1.$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \quad (1)$$

$$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \quad (2)$$

$$y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (4)$$

$$x + y + z = 1. \quad (5)$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$. V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1 - \sqrt{5})/4, 1/2, (1 + \sqrt{5})/4 \right], \quad \left[(1 + \sqrt{5})/4, 1/2, (1 - \sqrt{5})/4 \right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \quad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

24. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M . Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y). \end{aligned}$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M , které splňují

$$2x(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = 0, \quad (8)$$

$$2y(7 - (x^2 + 7y^2)) = 0. \quad (9)$$

Řešením této soustavy jsou body $[0, 0]$, $[1/\sqrt{2}, 0]$, $[-1/\sqrt{2}, 0]$, $[0, 1]$, $[0, -1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M .

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \quad (1)$$

$$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \quad (2)$$

$$x^2 + 4y^2 = 1. \quad (3)$$

Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2 + 7y^2) = -3$, což je spor. Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0, 0], [1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, 0], [0, 1/2], [0, -1/2], [1, 0], [-1, 0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0, 1/2]$, $[0, -1/2]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

25. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f , g_1 i g_2 jsou třídy $C^1(\mathbf{R}^3)$. Pro partiální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= -2z.\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \quad (1)$$

$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \quad (2)$$

$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (5)$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}],$$

$$[-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}],$$

$$[-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

26. Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin \mathbf{R}^n vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbf{R}^3)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + 2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) &= 2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) &= 2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) &= -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) &= 2x + 1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y) &= 2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y) &= -2z\end{aligned}$$

Zkoumejme pro která $[x, y, z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnota následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnota této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M . Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1)$$

$$x = y^2 + z^2 \quad (2)$$

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \quad (3)$$

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \quad (4)$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \quad (5)$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \quad (6)$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right], \quad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

27. Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém \mathbf{R}^2 a proto musí nabývat maxima i minima na množině M . Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, 0]; x \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_2 = \{[0, y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_3 = \{[x, y]; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li $[x, y] \in H_1$, platí $f(x, y) = \arctg x$. Funkce \arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Podobně je tomu na množině H_2 . Tam dostáváme podezřelé body $[0, 0]$ a $[0, 1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Necht' $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3 . Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \quad (2)$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \quad (3)$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \quad (4)$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2 + xy + y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$, $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proved' te podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0, 0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.