Funkcionální analýza

J. Spurný

15. března 2017

Tento text slouží k záznamu struktury přednášek věnovaných funkcionální analýze. Děkuji všem, kteří mi (ať přímo či méně přímo) nejvíce pomohli a pomáhají s přípravou této série, tj. členům Matematické sekce MFF (nejvíce pak lidem na Katedře matematické analýzy) a studentům matematiky na MFF.

13.12.2011 Jiří Spurný

Obsah

Kapitola 1

Úvod do funkcionální analýzy

1.1 Banachovy a Hilbertovy prostory

1.1.1 Základní vlastnosti

Značení 1.1.1. V celé přednášce budeme pracovat s prostory $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ a budeme je označovat $\mathbb{F}$ bez bližší specifikace.

Definice 1.1.2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Řekněme, že $\|.\| : X \to [0, \infty)$ je norma, pokud splňuje:

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$.

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Tvrzení 1.1.3. *Nechť X je normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$. Pak*

(a) $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$, je metrika na X,

(b) $+ : X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ a $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ jsou spojitá zobrazení.

Důkaz. Zobrazení $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je zjevně metrika, neboť z vlastností normy platí

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x), \quad x, y \in X,$$

a

$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad x, y, z \in X.$$

Jelikož

$$\|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\| \leqslant \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in X,$$

je součet spojité zobrazení. Podobně odhad

$$\|\alpha x - \beta y\| = \|\alpha x - \alpha y + \alpha y - \beta y\| \leqslant |\alpha| \|x - y\| + \|y\| |\alpha - \beta|$$

platný pro $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x, y \in X$, dává spojitost zobrazení $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$. Konečně,

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

znamená 1-lipschitzovskost normy na metrickém prostoru (X, ρ), a tedy spojitost tohoto zobrazení. □

Značení 1.1.4.

- $B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leqslant r\}$ je uzavřená koule o středu $x \in X$ a poloměru $r \geqslant 0$,
- $U(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ je otevřená koule, kde $x \in X$ a $r \geqslant 0$
- $B_X = \{y \in X : \|y\| \leqslant 1\} = B(0, 1)$ je jednotková koule,
- $U_X = \{y \in X : \|y\| < 1\} = U(0, 1)$ je otevřená jednotková koule,
- $S_X = \{y \in X : \|y\| = 1\}$ je jednotková sféra,

- $Y \subset\subset X$ znamená, že Y je podprostor X.

Definice 1.1.5. (ekvivalentní normy) Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Pak $\|\cdot\|_1$ je ekvivalentní norma s $\|\cdot\|_2$, pokud existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že platí $c_1 \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_2$, $x \in X$.

Tvrzení 1.1.6. *Nechť $(X, \|\cdot\|_1)$ a $(X, \|\cdot\|_2)$ jsou normované lineární prostory a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$.*

(a) Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) $\|\cdot\|_1$ je ekvivalentní s $\|\cdot\|_2$,

(ii) existuje $c_1, c_2 > 0$ tak, že $c_1 B_1 \subset B_2 \subset c_2 B_1$.

(b) $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

(c) Jsou-li tyto normy ekvivalentní, otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$, tj. Id : $(X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ *je homeomorfizmus.*

Důkaz. (a) Nechť C_1, C_2 jsou kladné konstanty splňující

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1, \quad x \in X.$$

Vezměme $x \in B_2$. Pak

$$\|x\|_1 \leqslant \frac{1}{C_1}\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{C_1}.$$

Tedy $C_1 x \in B_1$, tj. $x \in \frac{1}{C_1} B_1$. Tedy $B_2 \subset \frac{1}{C_1} B_1$.

Podobně, je-li $x \in B_1$, pak $\|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \leqslant C_2$. Tedy $\frac{1}{C_2} x \in B_2$. Proto $B_1 \subset C_2 B_2$. Dohromady máme

$$\frac{1}{C_2} B_1 \subset B_2 \subset \frac{1}{C_1} B_1.$$

Předpokládejme nyní platnost inkluzí $c_1 B_1 \subset B_2 \subset c_2 B_2$ pro kladné konstanty c_1, c_2. Je-li $x \in X$ nenulový vektor, je $\frac{x}{\|x\|_2} \in B_2$, a tedy $\|\frac{x}{\|x\|_2}\|_1 \leqslant c_2$. Podobně $\frac{x}{\|x\|_1} \in B_1$, a tedy $\|\frac{x}{\|x\|_1}\|_2 \leqslant \frac{1}{c_1}$. Dohromady máme

$$c_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_2,$$

z čehož již platnost (i) zjevně plyne.

Tvrzení (b) a (c) jsou pak důsledky (a). □

Poznámka. Ekvivalentní normy dávají na X stejné topologie, neboť nemění otevřené množiny. A tedy při změně normy se mohou změnit geometrické vlastnosti, avšak topologické (konvergence nebo spojitost) zůstávají nezměněny.

Definice 1.1.7.

- Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$.
  - Řekneme, že A konvexní podmnožina X, pokud platí

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha) y \in A.$$

  - $\operatorname{co} A = \bigcap \{F \supset A, F \text{ je konvexní}\}$ je konvexní obal.
  - $\operatorname{span} A = \bigcap \{F \supset A, F \subset\subset X\}$ je lineární obal.
- Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$.
  - $\overline{\operatorname{co}} A = \bigcap \{F \supset A, F \text{ je uzavřená konvexní}\}$ je uzavřený konvexní obal.
  - $\overline{\operatorname{span}} A = \bigcap \{F \supset A, F \subset\subset X \text{ uzavřený }\}$ je uzavřený lineární obal.

Poznámka. Povšimněme si, že výše uvedené definice jsou smysluplné, neboť v definujících systémech množin se vždy vyskytuje X. Dále je zřejmé, že konvexní obal je konvexní množina, lineární obal je podprostor, uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina a uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor.

Tvrzení 1.1.8. *Nechť X je vektorový prostor. Označme $\Delta_n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,\infty)^n \colon \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $A \subset X$ je dána. Označme

$$B_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \colon x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda \in \Delta_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \quad B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n.$$

Pak platí následující tvrzení.

(a1) Množina B je konvexní množina.

(a2) Pokud A je konvexní, platí $A = B$.

(b) Je-li $A \subset X$, platí

$$\operatorname{co} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon x_1, \dots, x_n \in A, \lambda \in \Delta_n \}.$$

(c) Jsou-li $A_1, \dots A_m \subset X$ neprázdné, konvexní množiny, platí

$$\operatorname{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \colon x_1 \in A_1, \dots, x_m \in A_n, \lambda \in \Delta_m \}.$$

Důkaz. (a1) Ověříme, že B je konvexní. Nechť $n \leqslant m$, $x \in B_n$, $y \in B_m$ a $a \in [0,1]$ je dáno. Pak $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ a $y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$ pro odpovídající $\lambda \in \Delta_n$, $\mu \in \Delta_m$ a body $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in A$. Pak

$$\nu = (a\lambda_1, \dots, a\lambda_n, (1-a)\mu_1, \dots, (1-a)\mu_m) \in \Delta_{n+m}$$

a

$$ax + (1-a)y = \sum_{k=1}^{n+m} \nu_k z_k \in B_{n+m},$$

kde $z_k = x_k$ pro $k = 1, \dots, n$ a $z_k = y_{k-n}$ pro $k = n+1, \dots, n+m$. Tedy $ax + (1-a)y \in B_{n+m} \subset B$.

(a2) Předpokládejme nyní, že A je konvexní. Ukážeme indukcí, že každá množina B_n je obsažena v A.

Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní platnost inkluze $B_n \subset A$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a nechť $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ je prvek množiny B_{n+1}. Pokud $\lambda_{n+1} = 0$, je $x \in B_n$ a jsme hotovi. V opačném případě položme $a = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Pak $\mu = (\frac{\lambda_1}{a}, \dots, \frac{\lambda_n}{a}) \in \Delta_n$, což díky indukčnímu předpokladu implikuje

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \in A.$$

Jelikož $a + \lambda_n = 1$, z konvexity A tak plyne

$$x = ay + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in A.$$

Tedy jsme obdrželi inkluzi $B \subset A$. Jelikož $A \subset B_1$, je důkaz dokončen.

(b) Nechť B_n, $n \in \mathbb{N}$, a B znamenají to co v předešlém. Je-li $C \supset A$ libovolná konvexní množina, dle (a) platí $B \subset C$. Tedy $B \subset \operatorname{co} A$. Dále však víme, že B je konvexní, a tedy $\operatorname{co} A \subset B$.

(c) Položme $A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ a nechť B_n, $n \in \mathbb{N}$, a B jsou odpovídající množiny z (a). Díky (a2) platí $B_n \subset \operatorname{co} A$.

Nechť nyní $x \in \operatorname{co} A$ je dáno. Dle (b) existuje $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \Delta_m$ a $y_1, \dots, y_m \in A$ takové, že $x = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$. Pro každé $i \in \{1 \dots, n\}$ položme

$$I_i' = \{ j \in \{1, \dots, m\} \colon y_j \in A_i \}.$$

Nechť $I_1 = I_1'$ a $I_i = I_i' \backslash \sum_{l=1} I_l'$, $i \in \{2, \dots, n\}$.

Nechť $\lambda_i = \sum_{j \in I_i} \mu_j$. Pokud $\lambda_i = 0$, vezmeme libovolné $x_i \in A_i$. V opačném případě díky (a2) platí

$$x_i = \sum_{j \in I_i} \frac{\mu_j}{\lambda_i} y_j \in A_i.$$

Tedy

$$x = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j \in I_i} \frac{\mu_j}{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in B_n.$$

Tedy $\operatorname{co} A = B_n$ a důkaz je hotov. □

Definice 1.1.9. Normovaný lineární prostor X je Banachův prostor, pokud X je úplný prostor v metrice dané normou na X.

Definice 1.1.10. Skalární součin na vektorovém prostoru X je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ takové, že

- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,
- $\langle x, x \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in X$,
- $x \to \langle x, y \rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

- $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ pro každé $x,y \in X$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem nebo též unitární prostor.

Tvrzení 1.1.11. *Nechť H je prostor se skalárním součinem. Pak*

(a) $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ pro každé $x,y \in H$. [Cauchy–Schwarz]

(b) $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x \in H$, je norma na H.

Důkaz. K důkazu (a) zvolme $x,y \in H$. Pokud $y = 0$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$, tj. $\langle y,y\rangle > 0$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, x - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle x - ty, x - ty\rangle &= \langle x,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle - t\langle y,x\rangle - t\langle x,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle - t(\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}) \\ &= t^2\langle y,y\rangle - 2t\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle. \end{aligned}$$

Navíc má u t^2 kladný koeficient. Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj.

$$4(\operatorname{Re}\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0.$$

Dostáváme

$$|\operatorname{Re}\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

pro každou dvojici $x,y \in H$.

Mějme tedy opět dány vektory $x,y \in H$ a vezměme $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $|\langle x,y\rangle| = \alpha\langle x,y\rangle$. Pak z právě dokázané nerovnosti použité pro αx a y máme

$$\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \geqslant |\operatorname{Re}\langle \alpha x,y\rangle| = |\operatorname{Re}\alpha\langle x,y\rangle| = |\langle x,y\rangle|.$$

Vlastnosti normy pro zobrazení $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x \in H$, plynou z vlastností skalárního součinu a tvrzení (a), neboť trojúhelníkovou nerovnost odvodíme pomocí výpočtu

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

Definice 1.1.12. Unitární prostor $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem.

Věta 1.1.13 (Jordan – von Neumann)**.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) existuje skalární součin na X tak, že $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x \in X$,

(ii) pro každé $x,y \in X$ platí $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. [rovnoběžníkové pravidlo]

Důkaz. Implikace (i) $\implies$ (ii) se ověří přímým výpočtem. Pro důkaz obrácené implikace nejdříve předpokládejme, že X je reálný. Položme

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x,y \in X. \tag{1.1}$$

Pak zjevně

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle, \quad \langle 0,y\rangle = 0, \quad \langle -x,y\rangle = -\langle x,y\rangle \quad \text{a} \quad \langle x,x\rangle = \|x\|^2.$$

Dále, pro každé $x,y,z \in X$ platí z (ii)

$$\begin{aligned} \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4}[\frac{1}{2}(\|x+y+2z\|^2 + \|x+z-(y+z)\|^2) - \frac{1}{2}(\|x+y-2z\|^2 + \|x-z-(y-z)\|^2)] \\ &= \frac{1}{2}(\|\frac{x+y}{2} + z\|^2 - \|\frac{x+y}{2} - z\|^2) \\ &= 2\langle \frac{x+y}{2}, z\rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dosadíme-li za $y = 0$, dostaneme

$$\langle x, z\rangle = 2\langle \frac{x}{2}, z\rangle, \quad x, z \in X. \tag{1.3}$$

Opětovným použitím (1.2) dostáváme pomocí (1.3)

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\langle \frac{x+y}{2}, z\rangle = \langle x+y, z\rangle. \tag{1.4}$$

Dále nám (1.2) a (1.4) ukazují platnost vztahu

$$\frac{m}{2^n}\langle x, y\rangle = \langle \frac{m}{2^n}x, y\rangle, \quad x, y \in X, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Protože je zobrazení

$$c \mapsto \|cx+y\|^2 - \|cx-y\|^2, \quad c \in \mathbb{R},$$

spojité a množina $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ hustá v $\mathbb{R}$, máme z (1.5) platnost

$$c\langle x, y\rangle = \langle cx, y\rangle, \quad x, y \in X, c \in \mathbb{R}.$$

Tím je důkaz dokončen pro reálné prostory.

Je-li nyní X komplexní, označme výraz na pravé straně (1.1) jako $\langle \cdot, \cdot\rangle_1$ a položme

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_1 + i\langle x, iy\rangle_1, \quad x, y \in X. \tag{1.6}$$

Pak je X též reálný prostor se skalárním součinem, a tak máme (1.4) i pro skalární součin z (1.6). Dále platí

$$\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Díky $\langle ix, iy\rangle_1 = \langle x, y\rangle_1$ máme

$$\langle y, ix\rangle_1 = \langle -iiy, ix\rangle_1 = -\langle iy, x\rangle_1 = -\langle x, iy\rangle_1.$$

a

$$\langle ix, y\rangle_1 = \langle ix, -iiy\rangle_1 = -\langle ix, iiy\rangle_1 = -\langle x, iy\rangle_1.$$

Tedy

$$\langle y, x\rangle = \langle y, x\rangle_1 + i\langle y, ix\rangle_1 = \langle x, y\rangle_1 - i\langle x, iy\rangle_1 = \overline{\langle x, y\rangle}.$$

Podobně dostáváme

$$\langle ix, y\rangle = \langle ix, y\rangle_1 + i\langle ix, iy\rangle_1 = -\langle x, iy\rangle_1 + i\langle x, y\rangle_1 = i\langle x, y\rangle.$$

Proto $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$ i pro $c \in \mathbb{C}$.

Na závěr ověřme

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2 + i\frac{1}{4}(|1+i|^2 - |1-i|^2)\|x\|^2 = \|x\|^2.$$

$\square$

Příklady 1.1.14.

(a) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ s různými normami jsou Banachovy prostory.

- typická norma je $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, pro $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$
- pro $p = 2$ je to i Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$

(b)
- Nechť K je kompaktní (metrický) prostor. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor s $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ a $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \iff f_n \rightrightarrows f$,
- $c = \{\{x_n\} : \lim x_n$ existuje vlastní $\}$ se supremovou normou $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$,
- $c_0 = \{\{x_n\} : \lim x_n = 0\}$ se supremovou normou $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$,
- $c_{00} = \{\{x_n\} : \{x_n\}$ má pouze konečně mnoho nenulových členů $\}$ se supremovou normou $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

(c)
- Nechť $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je prostor s mírou, potom $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ je Banachův s normou $\|f\|_p = \left(\int_X |f|\, d\mu\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$,
- $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu) = \{f : \operatorname{esssup}|f| < \infty\}$ s normou $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}|f|$,

- pro $p = 2$ je $L^2(X, \mathscr{S}, \mu)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu$,
- pro $X = \Gamma$, $\mathscr{S} = \mathscr{P}(\Gamma)$ a počítací míru μ na Γ máme

$$L^p(X, \mathscr{S}, \mu) = \ell^p(\Gamma) = \{\{x_\gamma\} : \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|^p\right)^{1/p} < \infty\}$$

  a

$$L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu) = \ell^\infty(\Gamma) = \{\{x_\gamma\} : \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| < \infty\}.$$

- Pro $\Gamma = \mathbb{N}$ značíme $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$.

(d) K je kompaktní metrický (topologický) prostor, pak prostor $M(K)$ regulárních borelovských (komplexních či znaménkových) měr na K s normou $\|\mu\| = |\mu|(K)$ je Banachův prostor. Připomeňme, že nezáporná míra μ na kompaktním metrickém prostoru leží v $M(K)$, pokud je definovaná na σ-algebře borelovských množin, je vnitřně i zevně regulární a má konečné hodnoty na kompaktech. Znaménková či komplexní míra leží v $M(K)$, pokud je definována na borelovských množinách a její variace $|\mu|$ leží v $M(K)$.

Lemma 1.1.15. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \in X$, pak $\operatorname{span}(Y \cup \{x\})$ *je uzavřený.*

(b) Každý konečně rozměrný podprostor X je uzavřený.

Důkaz. (a) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \notin Y$. Je snadno vidět, že

$$\operatorname{span}(Y \cup \{x\}) = \{y + cx : y \in Y, c \in \mathbb{F}\}.$$

Vezměme posloupnost $\{y_n + c_n x\}$, kde $y_n \in Y$ a $c_n \in \mathbb{F}$ pro $n \in \mathbb{N}$, konvergující k $z \in X$ a ukažme, že z též leží v $\operatorname{span}(Y \cup \{x\})$. Nejdříve ověříme, že $\{c_n\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, mohli bychom přechodem k podposloupnosti předpokládat, že $|c_n| \to \infty$. Pak ale

$$\|\frac{y_n}{c_n} - (-x)\| = \|\frac{y_n}{c_n} + x - \frac{z}{c_n} + \frac{z}{c_n}\| \leqslant \frac{1}{|c_n|}\|y_n + c_n x - z\| + \|\frac{z}{c_n}\| \to 0.$$

Tedy $-x$ leží v $\overline{Y} = Y$, a tedy i $x \in Y$. To je ale spor s předpokladem $x \notin Y$.

Z posloupnosti $\{c_n\}$ tedy můžeme vybrat podposloupnost $\{c_{n_k}\}$ konvergující k $c \in \mathbb{F}$. Pak ale i prvky $y_{n_k} = y_{n_k} + c_{n_k}x - c_{n_k}x$ konvergují k nějakému $y \in Y$ (zde používáme uzavřenost Y). Tedy

$$z = \lim_{n\to\infty} y_{n_k} + c_{n_k}x = y + cx.$$

Tedy je $z \in \operatorname{span}(Y \cup \{x\})$.

Tvrzení (b) plyne indukcí z (a). □

Definice 1.1.16. Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekněme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^K x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$.

Věta 1.1.17 (Test úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) X Banachův,

(ii) Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť je řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ absolutně konvergentní. Pak máme pro indexy $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, odhad

$$\|\sum_{k=1}^m x_k - \sum_{k=1}^n x_k\| = \|\sum_{k=n+1}^m x_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|.$$

Z platnosti Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum \|x_k\|$ dostáváme platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^\infty x_k$. Ta je tedy konvergentní, neboť X je Banachův.

(ii) $\implies$ (i) Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ splňující $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leqslant 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak je řada $\sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ absolutně konvergentní, a existuje tedy $x \in X$ takové, že $\sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x$. To ale znamená, že

$$x = \sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^j (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Tedy $\{x_{n_k}\}$ konverguje. Jelikož sama posloupnost $\{x_n\}$ je cauchovská, je i ona konvergentní. □

Věta 1.1.18. *Máme-li normovaný lineární prostor či prostor se skalárním součinem, který není úplný, pak lze tento prostor zúplnit a to jednoznačně. Přesněji:*

(a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak existuje Banachův prostor X_1 a lineární zobrazení $T_1 : X \to X_1$ takové, že T je izometrie, tj. $\|T_1 x\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$ a $\overline{\operatorname{Rng} T_1} = X_1$.

Jestliže Banachův prostor X_2 a lineární izometrie $T_2 : X \to X_2$ splňují $\overline{\operatorname{Rng} T} = X_2$, pak existuje lineární surjektivní izometrie $I : X_1 \to X_2$ s vlastností $T_2 x = (I \circ T_1)(x)$, $x \in X$.

(b) Je-li H prostor se skalárním součinem, lze ho izometricky vnořit na hustý podprostor jednoznačně určeného Hilbertova prostoru.

1.1.2 Operace s Banachovými prostory, projekce a doplňky

Definice 1.1.19. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory:

(a) Je-li $Z \subset\subset X$, pak $(Z, \|\cdot\|)$ je též normovaný lineární prostor.

(b) $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ je prostor s lineární strukturou, přičemž vektorové operace se uvažují po složkách. Definujeme na něm normu: $\|(x, y)\|_{X \times Y} = p(\|x\|, \|y\|)$, kde p je libovolná norma na $\mathbb{R}^2$ splňující $p(a_1, a_2) \leqslant p(b_1, b_2)$ pro každou dvojici $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1$, $0 \leqslant a_2 \leqslant b_2$. Norma na $X \times Y$ není jednoznačně určená. Podle p se nám bude měnit geometrie na tomto prostoru. Nicméně víme, že všechny normy na konečně dimenzionálním prostoru jsou ekvivalentní a tedy topologické vlastnosti mají stejné.

Prostor $(X \times Y,\ \|\cdot\|_{X \times Y})$ je součinem (sumou) na X a Y.

(c) Nechť $Z \subset\subset X$ je uzavřený. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in Z.$$

Pak

$$X/Z = \{[x] :\ x \in X\},$$

kde

$$[x] = \{y \in X :\ y\ \sim x\} = \{y \in X :\ y - x \in Z\} = x + Z,$$

je vektorový prostor s operacemi $[x] + [y] = [x + y]$ a $c[x] = [cx]$.

Položíme-li

$$\|[x]\|_{X/Z} = \inf\{\|x + y\| : y \in Z\} = \operatorname{dist}(x + Z, 0) = \operatorname{dist}(x, Z) = \inf\{\|y\| : y \in [x]\},$$

je $\big(X/Z, \|[\cdot]\|_{X/Z}\big)$ normovaný lineární prostor. Nazýváme ho faktorprostorem prostoru X podle Z.

(d) [Komplexifikace reálného prostoru X] Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2 \in X$.

Potom $X \times X$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a s normou

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X : \alpha \in [0,\ 2\pi)\},$$

se jedná o normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$.

Poznámka. Je-li X komplexní normovaný lineární prostor, lze ho chápat i jako reálný normovaný lineární prostor.

Věta 1.1.20.

(a) Nechť X je Banachův prostor a $Z \subset\subset X$ uzavřený podprostor. Pak Z je Banachův prostor.

(b) (b1) $X \times Y$ je normovaný lineární prostor, který je Banachův, pokud X, Y jsou Banachovy.

(b2) $(X \times Y, \|\cdot\|_2)$ je Hilbertův, pokud X, Y Hilbertovy.

(c) (c1) Je-li $Z \subset\subset X$ uzavřený a X je normovaný lineární prostor, pak $(X/Z,\ \|\cdot\|_{X/Z})$ je normovaný lineární prostor. Navíc zobrazení $q : x \mapsto [x]$, $x \in X$, je lineární surjekce X na X/Z splňující $\|q(x)\| \leqslant \|x\|$, $x \in X$, a $q(U_X) = U_{X/Z}$.

(c2) Je-li navíc X Banachův, pak je X/Z též Banachův.

(d) (d1) Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor.

(d2) *Je-li navíc X Banachův, pak je $X_{\mathbb{C}}$ Banachův.*

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b1) Jsou-li X, Y normované lineární prostory, jednoduše se ověří, že $X \times Y$ je též normovaný lineární prostor. Jsou-li navíc Banachovy a $\{(x_n, y_n)\}$ je cauchyovská posloupnost v $X \times Y$, jsou cauchyovské i posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ v příslušných prostorech. (To plyne z faktu, že posloupnost v $\mathbb{R}^2$ je konvergentní právě tehdy, když jsou posloupnosti jejích souřadnic konvergentní.) Tedy jsou posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergentní v X, resp. Y. Tedy i $\{(x_n, y_n)\}$ je konvergentní v $X \times Y$.

(b2) Předpokládáme-li, že norma X a Y splňuje rovnoběžníkové pravidlo, dostáváme jeho platnost i v $X \times Y$ s normou $\|\cdot\|_2$, neboť

$$\begin{aligned}
&\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_2^2 + \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2^2 \\
&= \|x_1 + x_2\|_X^2 + \|y_1 + y_2\|_Y^2 + \|x_1 - x_2\|_X^2 + \|y_1 - y_2\|_Y^2 \\
&= 2(\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2 + \|y_1\|_Y^2 + \|y_2\|_Y^2) \\
&= 2(\|(x_1, y_1)\|_2^2 + \|(x_2, y_2)\|_2^2).
\end{aligned}$$

Tedy i $(X \times Y, \|\cdot\|_2)$ je Hilbertův prostor.

(c1) Je-li Z libovolný podprostor X, je snadné ověřit, že X/Z je vektorový prostor. Je-li $x, y \in Z$ a $c \in \mathbb{F}$, máme

$$\begin{aligned}
\|c[x]\|_{X/Z} = \|[cx]\|_{X/Z} &= \inf\{\|cx + z\|_X : z \in Z\} = \inf\{\|c(x+z)\|_X : z \in Z\} \\
&= \inf\{|c|\|x + z\|_X : z \in Z\} = |c| \inf\{\|x + z\|_X : z \in Z\} \\
&= |c|\|[x]\|_{X/Z}
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\|[x+y]\|_{X/Z} &= \inf\{\|x + y + z\|_X : z \in Z\} = \inf\{\|x + y + z_1 + z_2\|_X : z_1, z_2 \in Z\} \\
&\leqslant \inf\{\|x + z_1\|_X + \|y + z_2\|_X : z_1, z_2 \in Z\} \\
&= \inf\{\|x + z_1\|_X : z_1 \in Z\} + \inf\{\|y + z_2\|_X : z_2 \in Z\} \\
&= \|[x]\|_{X/Z} + \|[y]\|_{X/Z}.
\end{aligned}$$

Konečně, je-li Z uzavřený, platí pro $x \in X$, že $\|[x]\|_{X/Z} = \operatorname{dist}(x, Z) = 0$ právě tehdy, když $x \in \overline{Z} = Z$. Tedy $\|[x]\|_{X/Z} = 0$ právě tehdy, když $x \in Z$, tj. $[x] = 0$. Tedy $\|[\cdot]\|_{X/Z}$ je v případě uzavřenosti prostoru Z dobře definovaná norma.

Zobrazení $q : X \to X/Z$ je zjevně lineární surjekce splňující

$$\|q(x)\|_{X/Z} = \|[x]\|_{X/Z} = \inf\{\|x + z\|_X : z \in Z\} \leqslant \|x\|_X.$$

Tedy $q(U_X) \subset U_{X/Z}$. Obráceně, je-li $\|[x]\|_{X/Z} < 1$, z definice normy existuje $y \in [x]$ splňující $\|y\|_X < 1$. Tedy $q(y) = [x]$ a $U_{X/Z} \subset q(U_X)$.

(c2) K důkazu úplnosti X/Z vezměme absolutně konvergentní řadu $\sum [x_n]$ v X/Z. Z definice normy najdeme prvky $y_n \in [x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $\|y_n\|_X \leqslant \|[x_n]\|_{X/Z} + \frac{1}{2^n}$. Pak $\sum y_n$ je absolutně konvergentní řada v X, a tedy konvergentní. Označme $y = \sum y_n$. Pak prvek $[y] \in X/Z$ splňuje $[y] = \sum [x_n]$, což je vidět z výpočtu

$$\|[y] - \sum_{n=1}^{k} [x_n]\|_{X/Z} = \|[y] - \sum_{n=1}^{k} [y_n]\|_{X/Z} = \|[y - \sum_{n=1}^{k} y_n]\|_{X/Z} \leqslant \|y - \sum_{n=1}^{k} y_n\|_X$$

(poslední člen konverguje k nule pro k jdoucí do nekonečna). Tedy je X/Z úplný dle Věty 1.1.17.

(d1) Přímočarým výpočtem lze ověřit, že $X_{\mathbb{C}}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $\|\cdot\|_{X_{\mathbb{C}}}$ je zobrazení splňující trojúhelníkovou nerovnost. Dále $\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = 0$ právě tehdy, když $x_1 = x_2 = 0$. Zbývá ověřit $\|c(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = |c|\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}}$ pro $c \in \mathbb{C}$.

Vzhledem k tomu, že požadovaná rovnost zjevně platí pro $c \in \mathbb{R}$, stačí ji ověřit pro komplexní jednotku $c = \cos\beta + i\sin\beta$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\|(\cos\beta + i\sin\beta)(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} &= \|((\cos\beta)x_1 - (\sin\beta)x_2, (\cos\beta)x_2 + (\sin\beta)x_1)\|_{X_{\mathbb{C}}} \\
&= \sup\{\|\cos\alpha((\cos\beta)x_1 - (\sin\beta)x_2) + \sin\alpha((\cos\beta)x_2 + (\sin\beta)x_1)\|_X : \alpha \in [0, 2\pi)\} \\
&= \sup\{\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)x_1 + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)x_2)\|_X : \alpha \in [0, 2\pi)\} \\
&= \sup\{\|(\cos(\alpha - \beta)x_1 + (\sin(\alpha - \beta))x_2\|_X : \alpha \in [0, 2\pi)\} \\
&= \sup\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X : \alpha \in [0, 2\pi)\} = \|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}}.
\end{aligned}$$

(d2) Úplnost prostoru $X_{\mathbb{C}}$ pro Banachův prostor X pak snadno plyne z (b1). □

Definice 1.1.21 (algebraický součet)**.** Ať X je vektorový prostor a $A, B \subset\subset X$. Pak X je algebraickým součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $A + B = X$.

Je-li $A \subset\subset X$, pak každý $B \subset\subset X$ splňující $A \oplus B = X$ je algebraický doplněk A.

Tvrzení 1.1.22. *Ať X je vektorový prostor.*

(a) Nechť $X = A \oplus B$ a $x \in X$. Pak existuje právě jedna dvojice $x_A \in A$, $x_B \in B$ splňující $x = x_A + x_B$.

(b) Nechť $X = A \oplus B$ a P_A, P_B jsou zobrazení dané rozkladem $X = A \oplus B$. Pak

(b1) P_A, P_B jsou lineární a $P_A + P_B = \mathrm{Id}$,

(b2) $P_A^2 = P_A$, $P_B^2 = P_B$,

(b3) $A = \operatorname{Rng} P_A = \operatorname{Ker} P_B$, $B = \operatorname{Rng} P_B = \operatorname{Ker} P_A$.

(c) Je-li $P : X \to X$ lineární zobrazení splňující $P^2 = P$, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$, a $P = P_A$, $I - P = P_B$.

Důkaz. (a) Existence prvků $a \in A$, $b \in B$ splňující $x = a + b$ plyne z předpokladu $X = A + B$. Máme-li však dva takovéto rozklady, tj.

$$x = x_A + x_B = y_A + y_B,$$

pak $x_A - y_A \in A$ a $y_B - x_B \in B$. Protože $A \cap B = \{0\}$, platí

$$x_A - y_A = 0 = y_B - x_B.$$

(b1) Nechť $x, y \in X$. Pišme

$$x = x_A + x_B, \quad y = y_A + y_B,$$

kde $x_A, y_A \in A$ a $x_B, y_B \in B$. Pak pro každou dvojici skalárů $a, b \in \mathbb{F}$ platí

$$ax + by = (ax_A + by_A) + (ax_B + by_B),$$

přičemž $ax_A + by_Y \in A$, $ax_B + by_B \in B$. Díky jednoznačnosti rozkladu tedy platí

$$P_A(ax + by) = ax_A + by_A = aP_Ax + bP_Ay \quad \text{a} \quad P_B(ax + by) = ax_B + by_B = aP_Bx + bP_By.$$

Zjevně

$$(P_A + P_B)x = x_A + x_B = x = \mathrm{Id}\, x.$$

(b2) Je-li $x \in A$, pak $x = x_A$, a tedy $P_A(P_Ax) = P_Ax$ pro každé $x \in X$. Podobně pro P_B.

(b3) Zjevně platí $\operatorname{Rng} P_A \subset A$. Na stranu druhou, $P_Ax = x$ pro $x \in A$. Tedy $A = \operatorname{Rng} P_A$.

Je-li $x \in A$, pak $x = x_A + 0$, a tedy $P_Bx = 0$, tj. $x \in \operatorname{Ker} P_B$. Obráceně, je-li $P_Bx = 0$, pak $x = x_A + 0$, a tedy $x \in A$.

(c) Nechť $P : X \to X$ splňuje $P^2 = P$. Pak každé $x \in X$ lze psát jako

$$x = Px + (x - Px) \in A + B,$$

a tedy $A + B = X$. Je-li $x \in A \cap B$, pak $x = Py$ pro nějaké $y \in X$. Pak

$$0 = Px = PPy = Py = x,$$

tj. $A \cap B = \{0\}$. Proto $X = A \oplus B$.

Pro $x \in X$ nyní pišme $x = x_A + x_B$, kde $x_A \in A$ a $x_B \in B$. Pak $x_A = Py$ pro nějaké $y \in X$ a $Px_B = 0$. Tedy

$$Px = P(x_A + x_B) = PPy + 0 = Py = x_A = P_Ax.$$

Proto $P = P_A$ a $P_B = \mathrm{Id} - P_A = \mathrm{Id} - P$ z (b1). □

Definice 1.1.23. Lineární zobrazení P na vektorovém prostoru X je projekce, pokud $P^2 = P$.

Definice 1.1.24. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Podprostor $A \subset\subset X$ má topologický doplněk, pokud existuje $B \subset\subset X$ splňující $X = A \oplus_t B$.

Věta 1.1.25.

(a) Je-li X normovaný lineární prostor a $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y, Z uzavřené.

(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y, Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z Tvrzení 1.1.22(b3) a spojitostí projekcí P_Y, P_Z. Tvrzení (b) bude dokázáno později. □

Věta 1.1.26. *Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Jsou-li A a B doplňky Y v X, je A izomorfní s B a s X/Y, speciálně* $\dim(X/Y) = \dim(A) = \dim(B)$.

Důkaz. (a) Položme
$$\mathcal{A} = \{A \subset\subset X : A \cap Y = \{0\}\}.$$
Uvažujme na $\mathcal{A}$ uspořádání dané inkluzí. Pak $(\mathcal{A}, \subset)$ je částečně uspořádaná množina, která splňuje předpoklady Zornova lemmatu. Je-li totiž $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ řetězec, je $R = \bigcup \mathcal{R}$ podprostor X splňující $R \cap Y = \{0\}$. Existuje tedy maximální prvek $Z \in \mathcal{A}$. Pak $X = Y \oplus Z$. Kdyby totiž existovalo $x \in X \setminus (Y + Z)$, položíme
$$W = \operatorname{span}(Z \cup \{x\}) = \{z + cx : z \in Z, c \in \mathbb{F}\}.$$
Vezměme $w \in W$, tj. prvek tvaru $w = z + cx$, kde $z \in Z$ a $c \in \mathbb{F}$. Předpokládáme-li, že $w \in Y$ a $c = 0$, pak $z \in Z \cap Y = \{0\}$, a tedy $w = 0$. Pokud $w \in Y$ a $c \notin 0$, pak $x = \frac{1}{c} w - \frac{1}{c} z \in Y + Z$, což je spor s faktem $x \notin Y + Z$. Tedy W je element $\mathcal{A}$ striktně větší než Z, což je spor s maximalitou Z. Proto $X = Y + Z$.

(b) Nechť $q : X \to X/Y$ je kvocientové zobrazení. Ukažme, že q je izomorfizmus A na X/Y. Ověřme nejprve injektivitu q na A. Je-li totiž $q(a) = [a] = 0$ pro nějaké $a \in A$, pak $a \in Y$, a tedy $a = 0$. K důkazu surjektivity vezměme $[x] \in X/Y$ a rozložme $x = x_Y + x_A$, kde $x_Y \in Y$ a $x_A \in A$. Pak $x - x_A \in Y$, a tedy $[x] = q(x_A)$. □

Definice 1.1.27. Je-li X vektorový prostor a A jeho podprostor, pak kodimenzí A myslíme dimenzi algebraického doplňku A.

1.1.3 Operátory a funkcionály

Tvrzení 1.1.28. *Nechť T je lineární zobrazení z normovaného lineárního prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *T je spojité,*

(ii) *T je spojité v 0,*

(iii) *existuje $C \geqslant 0$ tak, že $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ pro každé $x \in X$,*

(iv) *T je lipschitzovské,*

(v) *T je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Zjevně (i) $\implies$ (ii), (iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (v) $\implies$ (i). Zbývá ověřit (ii) $\implies$ (iii). Pro $\varepsilon = 1$ tedy zvolme $\delta > 0$ takové, že $\|Tx\| \leqslant \varepsilon$, je-li $\|x\| \leqslant \delta$. Pak pro $x \in X$ nenulové platí
$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \|T(\delta \frac{x}{\|x\|})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|.$$
Nerovnost v (iii) tedy platí pro $C = \frac{\varepsilon}{\delta}$. □

Definice 1.1.29. Prostor všech spojitých lineárních zobrazení z normovaného lineárního prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y značíme $L(X, Y)$. Vektorové operace se uvažují bodově a norma je definována jako $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$. Všimněme si, že díky Tvrzení 1.1.28(iii) je $\|T\| < \infty$.

Lemma 1.1.30. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory. Pak pro $T \in L(X, Y)$ platí*

(a) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|Tx\|$.

(b) $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$, $x \in X$.

(c) *Operátor T je nulový právě tehdy, když* $\|T\| = 0$.

(d) $\|T\| = \inf\{C \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant C \|x\|, x \in X\}$.

(e) *Pro operátory $S \in L(X, Y), T \in L(Y, Z)$ platí* $\|T \circ S\| \leqslant \|T\|\|S\|$.

Důkaz. (a) Zjevně
$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \geqslant \sup_{x \in S_X} \|Tx\|.$$
Je-li $x \in X$ nenulové, je $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$ a
$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant \sup_{y \in S_Y} \|Ty\|.$$

Tedy
$$\sup_{x\in S_X}\|Tx\| \geqslant \sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$
Dále, je-li $x\in U_X$ nenulové, pak
$$\|Tx\| \leqslant \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$
Tedy
$$\sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{x\in U_X}\|Tx\|.$$
Je-li $x\in B_X$, je $(1-\frac{1}{n})x\in U_X$ a $\|T(1-\frac{1}{n})x\| \to \|Tx\|$. Tedy
$$\sup_{x\in U_X}\|Tx\| \geqslant \sup_{x\in B_X}\|Tx\| = \|T\|$$
a důkaz (a) je hotov.

Tvrzení (b) pak plyne z rovnosti
$$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : 0\neq x\in X\}.$$

(c) Je-li T nulový, je zřejmě $\|T\|=0$. Pokud $\|T\|=0$, je $T=0$ díky (a).

(d) Označme
$$M = \inf\{C\geqslant 0\colon \|Tx\| \leqslant C\|x\|, x\in X\}.$$
Je-li $x\in X$ nenulové dáno, platí díky (a) odhad $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant\|T\|$, tedy $\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|$. Proto $M\leqslant\|T\|$. Dokažme nyní nerovnost $M\geqslant\|T\|$. Vezměme libovolné $\varepsilon>0$. Z definice infima najdeme $C\in[M,M+\varepsilon)$ splňující $\|Tx\|\leqslant C\|x\|$, $x\in X$. Pak
$$\|T\| = \sup_{x\in B_X}\|Tx\| \leqslant \sup_{x\in B_X} C\|x\| \leqslant C \leqslant M+\varepsilon.$$
Jelikož ε bylo libovolné, je $\|T\|\leqslant M$.

(e) Pro $x\in X$ platí
$$\|T(Sx)\| \leqslant \|T\|\|Sx\| \leqslant \|T\|\|S\|\|x\|.$$
Tedy $\|T\circ S\|\leqslant\|T\|\|S\|$. □

Poznámka. Povšimněme si, že lineární zobrazení $T\colon X\to Y$ je spojité právě tehdy, když je omezené, tj. $T(A)$ je omezená v Y pro každou $A\subset X$ omezenou. Je-li totiž T spojité a $A\subset X$ omezená, existuje $C>0$ takové, že $A\subset CB_X$. Protože $T(B_X)\subset\|T\|B_Y$, je $T(A)\subset C\|T\|B_Y$ je omezená.

K důkazu obrácené implikace si uvědomme, že z předpokladu omezenosti T plyne existence $C>0$ splňujícího $T(B_X)\subset CB_Y$. Pak zřejmě platí $\|T\|\leqslant C$.

Věta 1.1.31. *Nechť X,Y jsou normované lineární prostory. Pak $L(X,Y)$ je normovaný lineární prostor, který je úplný, pokud Y je úplný.*

Důkaz. Je snadné ověřit vlastnosti $\|cT\|=|c|\|T\|$ a $\|T+S\|\leqslant\|T\|+\|S\|$ pro $T,S\in L(X,Y)$ a $c\in\mathbb{F}$. Dále, z Lemmatu 1.1.30(c) plyne, že $\|T\|=0$ právě tehdy, když $T=0$. Tedy $L(X,Y)$ je normovaný lineární prostor.

Předpokládejme úplnost prostoru Y a vezměme cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $L(X,Y)$. Jelikož
$$\|T_nx-T_mx\| \leqslant \|T_n-T_m\|\|x\|,\quad x\in X,$$
je $\{T_nx\}$ cauchyovská v Y pro každé $x\in X$. Tedy existuje limita $Tx=\lim_{n\to\infty}T_nx$.

Snadno nahlédneme ze spojitosti vektorových operací, že T je lineární. Dále pro $x\in B_X$ platí
$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_nx\| \leqslant (\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|)\|x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|.$$
Protože však platí
$$|\|T_n\|-\|T_m\||\leqslant\|T_n-T_m\|,$$
je číselná posloupnost $\{\|T_n\|\}$ cauchyovská, a tedy omezená. Tudíž máme
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\|\in B_X\} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|,$$
tj., $T\in L(X,Y)$.

Zbývá dokázat, že $\|T_n-T\|\to 0$. Pro dané $\varepsilon>0$ zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\|T_n-T_m\|\leqslant\varepsilon$ pro $n,m\geqslant n_0$. Pak pro $x\in B_X$ a $n\geqslant n_0$ máme
$$\|T_nx-Tx\| = \lim_{m\to\infty}\|T_nx-T_mx\| \leqslant \sup_{m\geqslant n_0}\|T_nx-T_mx\| \leqslant \sup_{m\geqslant n_0}\|T_n-T_m\|\|x\| \leqslant \varepsilon.$$
Tedy $\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon$ pro $n\geqslant n_0$. Proto $T_n\to T$. □

Definice 1.1.32. Prostor $L(X, \mathbb{F})$ značíme X^* a nazýváme duálním prostorem.

Věta 1.1.33. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Definice 1.1.34. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak T je

- izomorfizmus (X do Y), pokud T je bijekce X na $\operatorname{Rng} T$ a inverze $T^{-1} : \operatorname{Rng} T \to X$ je spojitá,
- izometrie (X do Y), pokud $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in X$.

Prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje izomorfizmus X na Y,
- izometrické, pokud existuje izometrie X na Y.

Prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje $T \in L(X, Y)$, které je izomorfizmem X a $\operatorname{Rng} T$,
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje $T \in L(X, Y)$, které je izometrií X a $\operatorname{Rng} T$.

Věta 1.1.35. *(a) $T \in L(X, Y)$ je izomorfizmus právě tehdy, když existují $c_1, c_2 > 0$ tak, že $c_1\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant c_2\|x\|$, $x \in X$.*

(b) Normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní na X právě tehdy, když $\operatorname{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfizmus.

(c) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

Důkaz. (a) Je-li $T : X \to Y$ izomorfizmus T na $\operatorname{Rng} T$, pak $c_2 = \|T\| + 1$ splňuje $\|Tx\| \leqslant c_2\|x\|$, $x \in X$. Jelikož je ale $T^{-1} : \operatorname{Rng} T \to X$ spojité, platí pro každé $y \in \operatorname{Rng} T$ nerovnost $\|T^{-1}y\| \leqslant \|T^{-1}\|\|y\|$. Tedy

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leqslant (\|T^{-1}\| + 1)\|Tx\|, \quad x \in X,$$

což dává

$$(\|T^{-1}\| + 1)^{-1}\|x\| \leqslant \|Tx\|, \quad x \in X.$$

Na druhou stranu, splňují-li kladné konstanty c_1, c_2 požadované nerovnosti, je T spojité a prosté. Pro $y \in \operatorname{Rng} T$ označme $x = T^{-1}y$ a odhadněme

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{c_1}\|Tx\| = \frac{1}{c_1}\|y\|.$$

Tedy i T^{-1} je spojité.

Tvrzení (b) ihned plyne z (a).

(c) Vezměme cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y. Díky odhadu $\|T^{-1}y_n - T^{-1}y_m\| \leqslant \|T^{-1}\|\|y_n - y_m\|$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}y_n\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{x_n\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T platí $y_n = T(T^{-1}y_n) \to Tx$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný. $\square$

Věta 1.1.36. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $X = Y \oplus_t Z$,

(ii) zobrazení $T : x \mapsto (y, z)$, kde $y \in Y$, $z \in Z$ a $y + z = x$, je izomorfizmus X na $Y \times Z$.

Důkaz. Nechť $P : X \to Y$ je projekce příslušná rozkladu $X = Y \oplus_t Z$. Na $Y \times Z$ vezměme normu $\|(y, z)\|_{Y \times Z} = \|y\|_X + \|z\|_X$. Pak pro $x = y + z$ platí

$$\begin{aligned}\|x\|_X = \|y + z\|_X \leqslant \|y\|_X + \|z\|_X = \|(y, z)\|_{Y \times Z} = \|Tx\|_{Y \times Z} \\ = \|y\|_X + \|z\|_X = \|Px\|_X + \|(I - P)x\|_X \leqslant (\|P\| + \|I - P\|)\|x\|_X.\end{aligned}$$

Tedy T je izomorfizmus dle Věty 1.1.35(a).

Obráceně, je-li T izomorfizmus, existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ splňující

$$c_1\|x\|_X \leqslant \|Tx\|_{Y \times Z} = \|(Px, (I - P)x)\|_{Y \times Z} \leqslant c_2 \|x\|_X, \quad x \in X.$$

Tedy

$$\|Px\|_X \leqslant \|Px\|_X + \|(I - P)x\|_X = \|(Px, (I - P)x)\|_{Y \times Z} \leqslant c_2 \|x\|_X, \quad x \in X,$$

a P je spojitá projekce. $\square$

Věta 1.1.37. *Nechť $X, \widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X,Y)$. Nechť X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Pak existuje právě jeden $\widehat{T} \in L(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Důkaz. Je-li $x \in \widehat{X}$ dáno, vezměme posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k x. Pak $\{Tx_n\}$ je cauchyovská v Y, a tedy konvergentní. Označme její limitu jako $\widehat{T}x$. (Je snadno vidět, že nezáleží na volbě posloupnosti $\{x_n\}$. Máme-li totiž jinou posloupnost konvergující k x, řekněme $\{y_n\}$, pak $x_n - y_n \to 0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n$.) Ze spojitosti T máme rovnost $T = \widehat{T}$ na X a ze spojitosti vektorových operací ihned dostáváme linearitu T na $\widehat{X}$. Pro $x \in \widehat{X}$ vezměme opět posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k x. Pak $\|x_n\| \to \|x\|$ a

$$\|\widehat{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|.$$

Tedy $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$. Jelikož obrácená nerovnost platí triviálně, máme $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Jednoznačnost rozšíření plyne z hustoty X v $\widehat{X}$. □

1.1.4 Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 1.1.38. Je-li I množina, označme jako $\mathcal{F}(I)$ systém všech konečných podmnožin I. Je-li X normovaný lineární prostor, I indexová množina a $x_i \in X$ pro $i \in I$, řekneme, že (zobecněná) řada $\sum_{i\in I} x_i$ konverguje k $x \in X$ pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F : \|x - \sum_{i\in F'} x_i\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, je zobecněná řada konvergentní. Konverguje-li zobecněná řada čísel $\sum_{i\in I} \|x_i\|$, je řada $\sum_{i\in I} x_i$ absolutně konvergentní.

Je-li $I = \varnothing$, položme $\sum_{i\in I} x_i = 0$.

Věta 1.1.39 (Vlastnosti zobecněných řad)**.** *Nechť $\sum_{i\in I} x_i$ je zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X.*

(a) Je-li konvergentní, má jen jeden součet.

(b) Pro $x \in X$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\sum_{i\in I} x_i = x$,

(ii) $\sum_{i\in I} x_{\pi(i)} = x$ pro každou permutaci $\pi : I \to I$ (tj. π je bijekce).

(c) Je-li X úplný, je řada $\sum_{i\in I} x_i$ konvergentní právě tehdy, když splňuje následující Bolzanovu-Cauchyovu pod*mínku:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F = \varnothing \colon \|\sum_{i\in F'} x_i\| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

(d) Je-li $\sum_{i\in I} \|x_i\|$ konvergentní a X úplný, je $\sum_{i\in I} x_i$ konvergentní.

(e) Je-li $J \subset I$, $\sum_{i\in I} x_i$ konvergentní a X úplný, je $\sum_{i\in J} x_i$ konvergentní.

(f) Je-li $\sum_{i\in I} x_i$ konvergentní, pak $\{\|x_i\|\}_{i\in I} \in c_0(I)$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b) Zjevně (ii) $\implies$ (i). Nechť $\sum_{i\in I} x_i = x$ a $\pi : I \to I$ je permutace. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \subset I$ konečnou splňující

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F : \|\sum_{i\in F'} x_i - x\| < \varepsilon.$$

Pak $\pi^{-1}(F)$ je konečná a pro $F' \supset \pi^{-1}(F)$ konečnou platí $\pi(F') \supset F$, a tedy

$$\|\sum_{i\in F'} x_{\pi(i)} - x\| = \|\sum_{i\in \pi(F')} x_i - x\| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{i\in I} x_{\pi(i)} = x$.

(c) Platí-li $\sum_{i\in I} x_i = x$, pak pro $\varepsilon > 0$ zvolme $F \in \mathcal{F}(I)$ z Definice 1.1.38. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(I)$ disjunktní s F platí

$$\|\sum_{i\in F'} x_i\| = \|\sum_{i\in F'\cup F} x_i - \sum_{i\in F} x_i\| = \|\sum_{i\in F'\cup F} x_i - x + x - \sum_{i\in F} x_i\| \leqslant \|\sum_{i\in F'\cup F} x_i - x\| + \|x - \sum_{i\in F} x_i\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Tedy $\sum_{i\in I} x_i$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (1.7).

Obráceně, předpokládejme platnost (1.7). Najdeme množiny $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ v $\mathcal{F}(I)$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F_n = \emptyset : \| \sum_{i \in F'} x_i \| < \frac{1}{n}.$$

Položíme-li $y_n = \sum_{i \in F_n} x_i$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme konvergentní posloupnost. Pro dané $\varepsilon > 0$ totiž vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ a odhadneme pro $n_0 \leqslant n < m$

$$\|y_m - y_n\| = \| \sum_{i \in F_m} x_i - \sum_{i \in F_n} x_i \| = \| \sum_{i \in F_m \setminus F_n} x_i \| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Tedy $\{y_n\}$ konverguje k nějakému $x \in X$.

Pak dokonce $\sum_{i \in I} x_i = x$. Pro dané $\varepsilon > 0$ totiž najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\| \sum_{i \in F_{n_0}} x_i - x\| < \varepsilon$ a $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potom pro $F \in \mathcal{F}(I)$ obsahující F_{n_0} platí

$$\| \sum_{i \in F} x_i - x\| \leqslant \| \sum_{i \in F} x_i - \sum_{i \in F_{n_0}} x_i \| + \| \sum_{i \in F_{n_0}} x_i - x \| \leqslant \| \sum_{i \in F \setminus F_{n_0}} x_i \| + \varepsilon \leqslant \frac{1}{n_0} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Tím je důkaz tvrzení (c) dokončen.

Tvrzení (d) ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Nechť

$$s = \sum_{i \in I} \|x_i\| = \sup\{ \sum_{i \in F} \|x_i\| : F \in \mathcal{F}(I)\} < \infty.$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(I)$ tak, že

$$s - \varepsilon < \sum_{i \in F} \|x_i\|.$$

Pak pro $F' \in \mathcal{F}(I)$ neprotínající F platí

$$\| \sum_{i \in F'} x_i \| \leqslant \sum_{i \in F'} \|x_i\| = \sum_{i \in F \cup F'} \|x_i\| - \sum_{i \in F} \|x_i\| \leqslant s - (s - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Obdobně dokážeme (e). Je-li $\sum_{i \in I} x_i$ konvergentní a $J \subset I$, najdeme pro dané $\varepsilon > 0$ množinu $F \in \mathcal{F}(I)$ splňující

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F = \emptyset : \| \sum_{i \in F'} x_i \| < \varepsilon.$$

Pak $F \cap J \in \mathcal{F}(J)$ a každá $F' \in \mathcal{F}(J)$ neprotínající $F \cap J$ je též disjunktní s F. Tedy

$$\| \sum_{i \in F'} x_i \| < \varepsilon$$

a (1.7) pro řadu $\sum_{i \in J} x_i$ je ověřena.

(f) Je-li řada $\sum_{i \in I} x_i$ konvergentní, je konvergentní i ve zúplnění $\widehat{X}$ prostoru X. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$I_\varepsilon = \{ i \in I : \|x_i\| \geqslant \varepsilon \}$$

a předpokládejme, že I_ε je nekonečná. Díky úplnosti prostoru $\widehat{X}$ je řada $\sum_{i \in I_\varepsilon} x_i$ konvergentní, a tedy splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Najdeme $F \subset I_\varepsilon$ konečnou z (1.7) pro $\frac{\varepsilon}{2}$ a uvažujme index $i \in I_\varepsilon \setminus F$. Pak je množina $\{i\}$ disjunktní s F, a tedy

$$\varepsilon \leqslant \|x_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z tohoto sporu plyne, že je množina I_ε konečná.

Tedy I_ε je konečná pro každé $\varepsilon > 0$, tj. $\{\|x_i\| : i \in I\} \in c_0(I)$. □

Definice 1.1.40. Nechť $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je řada v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně k x, pokud pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)} = x$. Existuje-li takové $x \in X$, nazveme řadu bezpodmínečně konvergentní.

Věta 1.1.41 (Zobecněné řady na $\mathbb{N}$)**.** *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X.*

(a) Je-li $x \in X$ a $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$, pak $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$.

(b) Je-li $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$, X Banachův, pak existuje $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ a $\sum_{n=1}^\infty x_n$.

(c) Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je bezpodmínečně konvergentní právě tehdy, když $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je konvergentní.

(d) Je-li $X = \mathbb{R}$, pak je ekvivalentní:

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *konverguje,*

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ *konverguje,*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *konverguje,*

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Důkaz. (a) Nechť $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Najděme pro něj $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ z Definice 1.1.38 a položme $n_0 = \max F$. Pak pro $n \geqslant n_0$ platí $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k - x\| = \|\sum_{k\in\{1,\dots,n\}} x_k - x\| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

(b) Platí-li $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, je i $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ konvergentní. Protože je X úplný, je zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentní dle Věty 1.1.39(c). Tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní podle (a).

(c) Je-li řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentní, řekněme se součtem $x \in X$, platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = x$ pro každou permutaci π na $\mathbb{N}$. Díky (a) tedy máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = x$ pro každou permutaci π na $\mathbb{N}$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je bezpodmínečně konvergentní.

Obráceně, nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně k nějakému $x \in X$. Předpokládejme, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \neq x$. Z definice pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall F \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \exists F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), F \subset F' : \|\sum_{n\in F'} x_n - x\| \geqslant \varepsilon.$$

Induktivně nyní sestrojíme bijekci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \neq x$.

V prvním kroku najdeme $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $\|\sum_{n\in F_1} x_n - x\| \geqslant \varepsilon$. Položme $k_1 = \#F_1$ a $n_1 = \max F_1$ a sestrojme bijekci $\pi_1 : \{1, \dots, n_1\} \to \{1, \dots, n_1\}$ tak, že $\pi_1(\{1, \dots, k_1\}) = F_1$. V druhém kroku vezměme konečnou podmnožinu $\mathbb{N}$ ostře větší než $\{1, \dots, n_1\}$ a najděme $F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ ji obsahující, která splňuje $\|\sum_{i\in F_2} x_n - x\| \geqslant \varepsilon$. Označme $k_2 = \#(F_2 \backslash F_1)$, $n_2 = \max F_2$ a definujeme bijekci $\pi_2 : \{1, \dots, n_2\} \to \{1, \dots, n_2\}$ tak, aby $\pi_2 = \pi_1$ na $\{1, \dots, n_1\}$ a $\pi(\{n_1 + 1, \dots, n_1 + k_2\}) = F_2 \backslash F_1$. Opakováním tohoto postupu sestrojíme indexy $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ v $\mathbb{N}$, indexy $k_j \in \mathbb{N}$, množiny $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ a bijekci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že

$$\|\sum_{l=1}^{n_{j-1}+k_j} x_{\pi(l)} - x\| = \|\sum_{l\in F_j} x_l - x\| \geqslant \varepsilon.$$

Pak zjevně $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \neq x$.

(d) Ekvivalence (i) $\iff$ (iv) plyne z Věty 1.1.39(a). (iv) $\implies$ (iii) platí díky Riemannově větě o přerovnání neabsolutně konvergentních řad. Předpokládáme-li $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, pak

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \sup\{\sum_{n\in F} |x_n| : F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\} = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |x_k| : n \in \mathbb{N}\} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Tedy (iii) $\implies$ (ii) platí. Konečně (ii) $\implies$ (i) je (c) z Věty 1.1.39. □

1.1.5 Hilbertovy prostory

Definice 1.1.42. Podmnožiny A, B unitárního prostoru H jsou ortogonální, pokud $\langle a, b\rangle = 0$ pro každé $a \in A$, $b \in B$.

Množina $A^{\perp} = \{x \in H : \{x\}$ ortogonální s $A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

Lemma 1.1.43. *Ortogonální doplněk množiny v unitárním prostoru H je uzavřený podprostor.*

Důkaz. Zjevně je $A^{\perp}$ podprostor H (stačí použít linearitu skalárního součinu v první souřadnici). Protože $A^{\perp} = \bigcap_{a\in A} \{a\}^{\perp}$ a skalární součin je spojitá funkce, je každá z množin $\{a\}^{\perp}$ uzavřená. Tedy $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor. □

Věta 1.1.44. *Nechť F je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in F$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$.*

Důkaz. Je-li $x \in F$, stačí volit $y = x$. Není-li x v F, užijeme rovnost $\operatorname{dist}(x, F) = \operatorname{dist}(0, F - x)$ k pozorování, že lze bez újmy na obecnosti předpokládat $x = 0 \notin F$. Označme $d = \operatorname{dist}(0, F)$ a najděme posloupnost $\{y_n\}$ v F splňující $\|y_n\| \to d$. Tato posloupnost je cauchyovská, neboť

$$\begin{aligned}\|y_n - y_k\|^2 &= 2(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2) - \|y_n + y_k\|^2 \\ &= 2(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2) - 4\|\frac{1}{2}(y_n + y_k)\|^2 \\ &\leqslant 2(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2) - 4d^2.\end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili fakt, že pro každou dvojici indexů $n, k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{2}(y_n + y_k) \in F$, a tedy $\|\frac{1}{2}(y_n + y_k)\| \geqslant d$.) Zvolíme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\|y_n\| \leqslant d + \varepsilon$ pro každé $n \geqslant n_0$, platí pro libovolnou dvojici indexů $n, k \geqslant n_0$ odhad

$$\|y_n - y_k\|^2 \leqslant 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon^2 + 8d\varepsilon.$$

Posloupnost $\{y_n\}$ tedy konverguje k nějakému prvku $y \in H$, který však leží v F díky uzavřenosti F. Pak $\operatorname{dist}(0, F) = d = \lim \|y_n\| = \|y\|$.

Předpokládejme nyní, že $y_1, y_2 \in F$ splňují $\|y_1\| = \|y_2\| = d$. Z rovnoběžníkového pravidla a faktu $\frac{y_1 + y_2}{2} \in F$ dostáváme

$$4d^2 = 2(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) = \|y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 + y_2\|^2 = \|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \geqslant \|y_1 - y_2\|^2 + 4d^2.$$

Tedy $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, tj. $y_1 = y_2$. Tím je důkaz jednoznačnosti dokončen. □

Lemma 1.1.45. *Nechť F je uzavřený podprostor v Hilbertově prostoru H a $x \in H$. Pak $y \in F$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$ právě tehdy, když $x - y \in F^\perp$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $x - y \in F^\perp$. Pak pro každé $z \in F$ platí $y - z \in F$, a tedy

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|x - y + y - z\|^2 = \langle x - y + y - z, x - y + y - z\rangle \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + \langle x - y, y - z\rangle + \langle y - z, x - y\rangle \\ &\geqslant \|x - y\|^2.\end{aligned}$$

Tedy

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in F\} = \operatorname{dist}(x, F).$$

Obráceně, nechť $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$ a $z \in F$ je libovolné. Chceme dokázat, že $\langle x - y, z\rangle = 0$. Zřejmě lze předpokládat, že $\|z\| = 1$. Nechť $\alpha \in \mathbb{F}$ je libovolné. Pak

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 \leqslant \|x - (y + \alpha z)\|^2 &= \langle x - y - \alpha z, x - y - \alpha z\rangle \\ &= \|x - y\|^2 + |\alpha|^2\langle z, z\rangle - \overline{\alpha}\langle x - y, z\rangle - \alpha\langle z, x - y\rangle.\end{aligned}$$

Položíme-li $\alpha = \langle x - y, z\rangle$, dostáváme

$$0 \leqslant |\alpha|^2 - |\alpha|^2 - |\alpha|^2.$$

Tedy $0 = \alpha = \langle x - y, z\rangle$. □

Věta 1.1.46 (Riesz)**.** *Nechť F je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = F \oplus_t F^\perp$ a projekce $P_F : H \to F$ příslušná rozkladu $H = F \oplus F^\perp$ splňuje*

(a) $\|P_F x - x\| = \operatorname{dist}(x, F)$, $x \in H$,

(b) $\|P_F x\| \leqslant \|x\|$ *pro každé* $x \in H$.

Důkaz. Dokažme nejprve rovnost $H = F \oplus F^\perp$. Pro dané $x \in H$ vezmeme $y \in F$ splňující $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$. Pak

$$x = y + (x - y), \tag{1.8}$$

přičemž $y \in F$ a $x - y \in F^\perp$ dle Lemmatu 1.1.45. Tedy $F + F^\perp = H$.

Pokud $x \in F \cap F^\perp$, pak $0 = \langle x, x\rangle$, a tedy $x = 0$. Tudíž $H = F \oplus F^\perp$.

Označme nyní $P_F : H \to F$ projekci příslušnou rozkladu $H = F \oplus F^\perp$. Díky rozkladu (1.8) víme, že $P_F x$ je prvek splňující $\|x - P_F x\| = \operatorname{dist}(x, F)$, tedy platí (a). Konečně máme z kolmosti $P_F x$ a $x - P_F x$ nerovnost

$$\|x\|^2 = \|P_F x\|^2 + \|x - P_F x\|^2 \geqslant \|P_F x\|^2.$$

□

Definice 1.1.47. Je-li H unitární prostor a $A \subset H$, řekneme, že A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_H$ a $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$ pro různé prvky $a_1, a_2 \in A$,
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A (jinými slovy, $A^\perp = \{0\}$),
- úplná ortonormální, pokud A je ortonormální a $\operatorname{span} A$ je hustý v H,
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_i : i \in I\}$ je ortonormální množina a každé $x \in H$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$.

(Ortonormální množině se též někdy říká ortonormální soustava či systém.)

Lemma 1.1.48. *Je-li A ortonormální množina v Hilbertově prostoru H, je $\|a_1 - a_2\| = \sqrt{2}$ pro každé dva různé prvky $a_1, a_2 \in A$.*

Důkaz. Přímočarým výpočtem máme

$$\|a_1 - a_2\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \langle a_1, a_2 \rangle + \langle a_2, a_1 \rangle = 2.$$

$\square$

Věta 1.1.49. *Každý Hilbertův prostor má maximální ortonormální systém.*

Důkaz. Nechť H je neprázdný. Uvažujme množinu

$$\mathcal{A} = \{A : A \text{ je ortonormální množina}\}$$

uspořádanou inkluzí. Pak $(\mathcal{A}, \subset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (je-li $x \in H$ nenulové, pak $\{\frac{x}{\|x\|}\} \in \mathcal{A}$). Navíc má každý řetězec horní závoru, totiž sjednocení všech prvků daného řetězce. Z Zornova lemmatu tedy existuje maximální element $A \in \mathcal{A}$. Z maximality A pak již plyne rovnost $A^\perp = \{0\}$, tj., A je maximální ortonormální systém. $\square$

Poznámka. *Je-li Hilbertův prostor H separabilní, neobsahuje pak nespočetnou ortonormální množinu, jelikož separabilní metrický prostor neobsahuje nespočetnou diskrétní množinu (viz Lemma 1.1.48).*

Věta 1.1.50 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_i\}_{i \in I}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H, platí $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ pro každé $x \in H$.*

Důkaz. Mějme dánu libovolnou konečnou množinu $F \subset I$. Položíme-li $x_F = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i$, máme

$$x - x_F \in (\operatorname{span}\{e_i : i \in F\})^\perp .$$

Tedy

$$\|x\|^2 = \|x - x_F + x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2 \geqslant \|x_F\|^2 = \sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Proto

$$\|x\|^2 \geqslant \sup\{\sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 : F \in \mathcal{F}(I)\} = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

$\square$

Lemma 1.1.51. *Nechť $\{e_i : i \in I\}$ je ortonormální soustava v Hilbertově prostoru a $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. Pak $x_i = \langle x, e_i \rangle$, $i \in I$.*

Důkaz. Mějme dané $i_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme $F \in \mathcal{F}(I)$ splňující $\|x - \sum_{i \in F'} x_i e_i\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ obsahující F. Pak pro $F' = F \cup \{i_0\}$ platí

$$\varepsilon \geqslant \|x - \sum_{i \in F'} x_i e_i\| \geqslant |\langle x - \sum_{i \in F'} x_i e_i, e_{i_0} \rangle| = |\langle x, e_{i_0} \rangle - x_{i_0}|.$$

Tedy $x_{i_0} = \langle x, e_{i_0} \rangle$. $\square$

Věta 1.1.52. *Nechť $\{e_i\}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *$\{e_i\}$ je ortonormální báze,*

(ii) *$\{e_i\}$ je maximální ortonormální systém,*

(iii) $\{e_i\}$ *je úplný ortonormální systém,*

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ *pro každé* $x \in H$ *(Parsevalova rovnost).*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\{e_i\}$ není maximální, tj., existuje nenulový vektor $x \in (\operatorname{span}\{e_i\})^\perp$. Protože $\{e_i\}$ je báze, lze x vyjádřit jako $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ pro nějaké koeficienty $x_i \in \mathbb{F}$. Z Lemmatu 1.1.51 ale víme, že $x_i = \langle x, e_i\rangle = 0$ pro každé $i \in I$. Tedy $x = 0$, což je spor.

(ii) $\implies$ (iii) Není-li systém $\{e_i\}$ úplný, je $F = \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in I\}$ vlastní uzavřený podprostor H. Vezmeme $x \in H\backslash F$ a uvědomíme si, že vektor $x - P_F x$ je nenulový a kolmý na všechny e_i (viz Lemma 1.1.45). Tedy $\{e_i\}$ není maximální systém.

(iii) $\implies$ (iv) Nechť $x \in H$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Díky (iii) existuje $A \in \mathcal{F}(I)$ a $c_i \in \mathbb{F}$, $i \in A$, tak že $\|x-\sum_{i\in A} c_i e_i\| < \varepsilon$. Položme $F = \operatorname{span}\{e_i : i \in A\}$. Pak

$$\operatorname{dist}(x, F) \leqslant \operatorname{dist}(x, \sum_{i\in A} c_i e_i) < \varepsilon.$$

Neboť $x - \sum_{i\in A}\langle x, e_i\rangle e_i \in F^\perp$, podle Lemmatu 1.1.45 platí

$$\varepsilon > \operatorname{dist}(x, F) = \|x - \sum_{i\in A}\langle x, e_i\rangle e_i\|.$$

Z toho dostáváme

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &\geqslant \|x - \sum_{i\in A}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \langle x - \sum_{i\in A}\langle x, e_i\rangle e_i, x - \sum_{i\in A}\langle x, e_i\rangle e_i\rangle \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2 - \sum_{i\in A}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_i\rangle} - \sum_{i\in A} \overline{\langle x, e_i\rangle}\langle x, e_i\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2.\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2 \geqslant \|x\|^2 - \varepsilon^2.$$

Tato nerovnost spolu s nerovností Besselovou 1.1.50 dává

$$\|x\|^2 \geqslant \sup\{\sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2 : A \in \mathcal{F}(I)\} = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

(iv) $\implies$ (i) Pro dané $x \in H$ chceme dokázat, že $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(I)$ tak, že $\sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(I)$ obsahující F máme

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{i\in F'}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 &= \langle x - \sum_{i\in F'}\langle x, e_i\rangle e_i, x - \sum_{i\in F'}\langle x, e_i\rangle e_i\rangle \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i\in F'} |\langle x, e_i\rangle|^2 - \sum_{i\in F'}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle - \sum_{i\in F'}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i\in F'} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. □

Důsledek 1.1.53. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 1.1.49 a 1.1.52. □

Příklad 1.1.54. Pro $H = L^2(0, 2\pi)$ je systém $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální báze.

Věta 1.1.55 (Riesz–Fischer). *Je-li* $\{e_i : i \in I\}$ *ortonormální báze Hilbertova prostoru* H*, je zobrazení* $T : H \to \ell^2(I)$*,* $Tx = \{\langle x, e_i\rangle\}_{i\in I}$ *izometrický izomorfizmus* H *na* $\ell^2(I)$*.*

Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell^2(I)$ *pro vhodnou množinu* I*.*

Důkaz. Díky rovnosti $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ platné pro každé $x \in H$ je zobrazení T dobře definovaná izometrie do $\ell_2(I)$. Zjevně je T lineární. Dále je $\operatorname{Rng} T$ hustý v $\ell^2(I)$, jelikož obsahuje $T(\operatorname{span}\{e_i : i \in I\})$, což jsou konečně nesené vektory v $\ell^2(I)$. Vzhledem k tomu, že T je izometrie, je $\operatorname{Rng} T$ úplný, a tedy je roven $\ell^2(I)$. □

Tvrzení 1.1.56. *Nechť* A_1, A_2 *jsou dvě různé ortonormální báze Hilbertova prostoru. Pak mají stejnou mohutnost.*

Důkaz. Je-li A_1 konečná, je i dimenze H konečná, a tedy $|A_1| = |A_2|$ dle známé věty z lineární algebry. Předpokládejme proto, že množiny A_1 a A_2 jsou nekonečné. Vyberme spočetnou hustou podmnožinu $D \subset \mathbb{F}$. Nechť $|A_1| < |A_2|$. Množina všech lineárních kombinací prvků A_1 utvořená pomocí koeficientů z D je hustá v H (viz Věta 1.1.52(iii)) a má kardinalitu $|A_1|$. Ale A_2 je dle Lemmatu 1.1.48 diskrétní množina kardinality ostře větší než $|A_1|$, což je spor. Tedy $|A_1| \geqslant |A_2|$. Jelikož je role A_1 a A_2 symetrická, platí i obrácená nerovnost, tj. $|A_1| = |A_2|$. □

1.1.6 Konečně rozměrné prostory

Lemma 1.1.57 (Riesz)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ tak, že* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$*.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \backslash Y$ a označme $d = \operatorname{dist}(u, Y)$. Najdeme $\eta > 0$ tak, že $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$ a zvolíme $v \in Y$ splňující

$$\|u - v\| \leqslant d + \eta.$$

Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v + \|u - v\| y \in Y$, a tedy

$$\|x - y\| = \|\frac{u - v}{\|u - v\|} - y\| = \frac{\|u - (v + \|u - v\| y)\|}{\|u - v\|} \geqslant \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme, že

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} \geqslant \frac{d}{d + \eta} > 1 - \varepsilon.$$

□

Lemma 1.1.58. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)\|f\|$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Je-li $x \in X$ a $y \in \operatorname{Ker} f$, pak

$$|f(x)| = |f(x - y)| \leqslant \|f\| \|x - y\|.$$

Tedy $|f(x)| \leqslant \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$. Pro důkaz obrácené nerovnosti zvolíme $\varepsilon \in (0, \|f\|)$ a najdeme $y \in S_X$ tak, že $|f(y)| \geqslant \|f\| - \varepsilon$. Pak $x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f$, a tedy

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \leqslant \|x - (x - \frac{f(x)}{f(y)} y)\| = \frac{|f(x)|}{|f(y)|} \leqslant \frac{|f(x)|}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Jelikož bylo ε libovolné, je důkaz dokončen. □

Tvrzení 1.1.59. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $f \in S_{X^*}$ a $Y = \operatorname{Ker} f$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) existuje $x \in S_X$ splňující $|f(x)| = 1$,

(ii) existuje $x \in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$*,*

(iii) existuje $u \in X \backslash Y$ a $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, Y)$,

(iv) pro každé $u \in X \backslash Y$ existuje $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, Y)$.

Důkaz. Ekvivalence (i) $\iff$ (ii) ihned plyne z Lemmatu 1.1.58 a zjevně (iv) $\implies$ (iii).

K důkazu implikace (iii) $\implies$ (ii) uvažme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$, kde u, v jsou dány (iii). Pak pro každé $y \in Y$ platí

$$\|x - y\| = \frac{\|u - (v + \|u - v\| y)\|}{\|u - v\|} \geqslant \frac{\operatorname{dist}(u, Y)}{\operatorname{dist}(u, Y)} = 1.$$

Protože $\operatorname{dist}(x, Y) \leqslant \|x\| \leqslant 1$, platí $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$.

(i) $\implies$ (iv) Vezměme $x \in S_X$ z podmínky (i) a pro $u \in X \backslash Y$ uvažme $u - \frac{f(u)}{f(x)} x \in Y$. Pak

$$\operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f) \leqslant \|u - (u - \frac{f(u)}{f(x)} x)\| = |f(u)| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$$

dle Lemmatu 1.1.58. □

Příklad 1.1.60. Nechť $Y = \{x \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0\}$. Pak neexistuje $x \in S_{c_0}$ tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Dále pro žádné $x \in c_0 \backslash Y$ neexistuje $y \in Y$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

Důkaz. Uvažme funkcionál $f(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$, $\{x_n\} \in c_0$. Pak zřejmě $f \in S_{(c_0)^*}$ a $Y = \operatorname{Ker} f$. K důkazu tvrzení nyní stačí podle Tvrzení 1.1.59 ověřit, že neexistuje $x \in S_{c_0}$ s vlastností $|f(x)| = 1$. Ale to je ihned vidět z pozorování, že pro každé $x \in S_{c_0}$ existuje index $j \in \mathbb{N}$ takový, že $|x_j| < 1$. Pak totiž

$$|f(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

□

Věta 1.1.61. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\dim X < \infty$,

(ii) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$,

(iii) B_X je kompaktní,

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\{a_1, \dots, a_n\}$ je báze X a $\{e_1, \dots, e_n\}$ značí klasickou bázi $\mathbb{F}^n$. Pak je zobrazení

$$T : \mathbb{F}^n \to X$$
$$\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

lineární bijekce, jež je spojitá (díky spojitosti vektorových operací na X).

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Vzhledem k linearitě T stačí ukázat, že $T(B_{\mathbb{F}^n})$ obsahuje okolí 0. Jelikož je $S_{\mathbb{F}^n}$ kompaktní množina, je i $T(S_{\mathbb{F}^n})$ kompaktní. Protože $0 \notin T(S_{\mathbb{F}^n})$, existuje $r > 0$ tak, že $U(0,r) \cap T(S_{\mathbb{F}^n}) = \emptyset$. Pak $T(B_{\mathbb{F}^n}) \supset U(0,r)$. Je-li totiž $y \in U(0,r) \backslash T(B_{\mathbb{F}^n})$, pak $y = Tx$ pro nějaké $\|x\|_2 > 1$. Pak $\frac{x}{\|x\|_2} \in S_{\mathbb{F}^n}$ a

$$T(\frac{x}{\|x\|_2}) = \frac{Tx}{\|x\|_2} = \frac{y}{\|x\|_2} \in U(0,r),$$

což je spor.

(ii) $\implies$ (iii) Máme-li $T : X \to \mathbb{F}^n$ izomorfizmus, je $T(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $\mathbb{F}^n$, a tedy kompaktní. Jest tedy i $B_X = T^{-1}(T(B_X))$ kompaktní.

(iii) $\implies$ (i) Nechť X je nekonečné dimenze. Postupně najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geqslant \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. V prvním kroce najdeme libovolné $x_1 \in S_X$. Máme-li $x_1, \dots, x_n$, je $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ vlastní a uzavřený (viz Lemma 1.1.15) podprostor X. Tedy dle Lemmatu 1.1.57 existuje x_{n+1} splňující $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geqslant \frac{1}{2}$. Tíme je konstrukce dokončena.

Zkonstruovaná posloupnost $\{x_n\}$ pak nemá konvergentní podposloupnost, neboť jsou všechny její prvky od sebe navzájem vzdáleny alespoň o $\frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní. □

Tvrzení 1.1.62. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Je-li X konečné dimenze, jsou každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

(b) Je-li X konečné dimenze a Y je normovaný lineární prostor, je každé lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ spojité.

(c) Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Prostor X je konečné dimenze.

(ii) Každé linární zobrazení X do normovaného lineárního prostoru je spojité.

(iii) Každá lineární forma na X je spojitá.

(iv) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

Důkaz. (a) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze X. Položme

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in X.$$

Pak $\|\cdot\|_1$ je norma na X. Stačí nyní ukázat, že každá jiná norma na X je s touto normou ekvivalentní. Nechť tedy $\|\cdot\|$ je libovolná norma na X. Položme $c_2 = \max\{\|e_1\|, \dots \|e_2\|\}$. Pak

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\| \leqslant c_2 \|x\|_1, \quad x \in X.$$

Nerovnost

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant c_2 \|x - y\|_1, \quad x, y \in X,$$

ukazuje, že $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Uvažujme nyní nějaký izomorfizmus $T\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$ (Věta 1.1.61). Jelikož $T(S_{(X,\|\cdot\|_1)})$ je omezená uzavřená množina v $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$, jedná se o kompaktní množinu. Tedy $S_{(X,\|\cdot\|_1)} = T^{-1}(T(S_{(X,\|\cdot\|_1)}))$ je kompaktní v $(X, \|\cdot\|_1)$. Spojitá funkce $\|\cdot\|$ nabývá na $S_{(X,\|\cdot\|_1)}$ svého minima, které označíme jako c_1. Zřejmě $c_1 > 0$. Je-li nyní $x \in X \backslash \{0\}$, je $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_{(X,\|\cdot\|_1)}$, a tedy

$$c_1 \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1}.$$

Tedy
$$c_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|$$
a důkaz tvrzení (a) je dokončen.

(b) Zvolme bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $\|x\|_1 = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Díky tvrzení (a) stačí dokázat, že $T\colon (X, \|\cdot\|_1) \to Y$ je spojité. To je ale zřejmé z odhadu
$$\|Tx\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i T e_i\right\| \leqslant (\max\{\|Te_1\|, \dots, \|Te_n\|\}) \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in X.$$

(c) Z tvrzení (a) a (b) máme (i) $\Longrightarrow$ (ii) a (i) $\Longrightarrow$ (iv). Zřejmě (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ukažme nyní (iii) $\Longrightarrow$ (i). Není-li X konečně dimenzionální, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_i\colon i \in I\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_i mají normu 1. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{i_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset I$ a definujme pro $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_{i_n}.$$
(Forma f je korektně definovaná, jelikož pouze konečně mnoho čísel x_i je nenulových.) Pak f je lineární zobrazení do $\mathbb{F}$, které není omezené na B_X, a tedy není spojité.

K důkazu implikace (iv) $\Longrightarrow$ (i) opět předpokládejme, že X je nekonečně dimenzionální, a tedy má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_i\colon i \in I\}$. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{i_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset I$ a definujme pro $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ normy
$$\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n |x_{i_n}| + \|x\|_1.$$
Pak zřejmě neexistuje $c_2 > 0$ splňující $\|x\|_2 \leqslant c_2 \|x\|_1$ pro všechny vektory $x \in \{e_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$. □

1.2 Hahnova–Banachova věta a dualita

1.2.1 Hahnova–Banachova věta

Definice 1.2.1. Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, nazývá se $p : X \to \mathbb{R}$ konvexní (sublineární) funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$, $x \in X$, $t \in [0, \infty)$.

Pokud má $p : X \to [0, \infty)$ vlastnosti

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x, y \in X$,
- $p(tx) = |t|p(x)$, $x \in X$, $t \in \mathbb{F}$,

nazývá se pseudonorma. (Zřejmě konvexní funkcionál i pseudonorma splňují $p(0) = 0$.)

Věta 1.2.2 (Algebraická verze Hahnovy–Banachovy věty)**.** *Nechť p je konvexní funkcionál na lineárním prostoru X nad $\mathbb{R}$, Y je podprostor X a f je lineární forma na Y splňující $f \leqslant p$. Pak existuje lineární forma F na X tak, že $F \leqslant p$ a $F = f$ na Y.*

Je-li p pseudonorma, nalezené F splňuje $|F| \leqslant p$.

Důkaz. 1. krok. Je-li $Y \neq X$, vezměme $x \in X \setminus Y$ a položme
$$Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\} = \{y + cx : y \in Y, c \in \mathbb{R}\}.$$
Hledejme nejprve rozšíření F na prostor Z, což vzhledem k linearitě znamená najít $\alpha = F(x)$ tak, aby platilo
$$F(y + cx) = f(y) + c\alpha \leqslant p(y + cx), \quad y \in Y, c \in \mathbb{R}.$$
K tomuto účelu ukažme, že
$$\forall y_1, y_2 \in Y : f(y_1) - p(y_1 - x) \leqslant p(y_2 + x) - f(y_2). \tag{1.9}$$
To ale platí díky nerovnostem
$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leqslant p(y_1 + y_2) = p(y_1 - x + y_2 + x) \leqslant p(y_1 - x) + p(y_2 + x).$$

Díky (1.9) tedy existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall y_1, y_2 \in Y : f(y_1) - p(y_1 - x) \leqslant \alpha \leqslant p(y_2 + x) - f(y_2). \tag{1.10}$$

Položme

$$F(y + cx) = f(y) + c\alpha, \quad y \in Y, c \in \mathbb{R}.$$

Pak F je lineární rozšíření f na Z splňující $F \leqslant p$ na Z. Vskutku, je-li $y \in Y$ a $c > 0$, platí díky (1.10)

$$F(y + cx) = f(y) + c\alpha = c(f(y/c) + \alpha) \leqslant cp(y/c + x) = p(y + cx).$$

Pro $y \in Y$ a $c < 0$ dostaneme obdobně z (1.10)

$$F(y + cx) = f(y) + c\alpha = (-c)(f(-y/c) - \alpha) \leqslant (-c)p(-y/c - x) = p(y + cx).$$

Tedy F je hledané rozšíření f v případě $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$.

2. krok. Uvažujme množinu

$$\mathcal{P} = \{(Y', f') : Y \subset\subset Y' \subset\subset X, f' \text{ je lineární forma na } Y' \text{ rozšiřující } f, f' \leqslant p \text{ na } Y'\}.$$

Definujme na $\mathcal{P}$ uspořádání pomocí $(Y', f') \leqslant (Y'', f'')$, pokud $Y' \subset\subset Y''$ a $f' = f''$ na Y'. Pak je $(\mathcal{P}, \leqslant)$ částečně uspořádaná neprázdná (dvojice (Y, f) náleží do $\mathcal{P}$) množina splňující předpoklady Zornova lemmatu.

Je-li totiž $\mathcal{R} = \{(Y_i, f_i) : i \in I\} \subset \mathcal{P}$ řetězec, $Z = \bigcup_{i \in I} Y_i$ je podprostor X obsahující Y. Lineární forma $g(x) = f_i(x)$ pro $x \in Y_i$ je zřejmě dobře definována a splňuje $g \leqslant p$ na Z. Navíc (Z, g) majorizuje všechny prvky $\mathcal{R}$. Tedy (Z, g) je horní závora $\mathcal{R}$.

Z Zornova lemmatu tedy obdržíme maximální prvek $(W, F) \in \mathcal{P}$. Pak nutně $W = X$, poněvadž v opačném případě bychom použitím prvního kroku obdrželi spor s maximalitou (W, F). Tedy F je hledané rozšíření.

Je-li p dokonce pseudonorma a $x \in X$, platí

$$F(x) \leqslant p(x) \quad \text{a} \quad -F(x) = F(-x) \leqslant p(-x) = p(x).$$

Tedy $|F(x)| \leqslant p(x)$. □

Lemma 1.2.3. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.*

(a) Je-li $f : X \to \mathbb{C}$ lineární, pak existuje reálně lineární $u : X \to \mathbb{R}$ splňující $f(x) = u(x) - iu(ix)$, $x \in X$. (Zobrazení $u : X \to \mathbb{R}$ je reálně lineární, pokud zachovává součet a násobení reálným číslem.)

(b) Je-li $u : X \to \mathbb{R}$ reálně lineární, pak $f : X \to \mathbb{C}$ definované jako $f(x) = u(x) - iu(ix)$, $x \in X$, je lineární funkcionál.

Důkaz. (a) Nechť u a v značí reálnou a imaginární složku f, tj. $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in X$. Pak u i v jsou reálně lineární a pro $x \in X$ máme

$$iu(x) - v(x) = if(x) = f(ix) = u(ix) + iv(ix).$$

Porovnáním složek dostáváme $v(x) = -u(ix)$.

(b) Zřejmě stačí ověřit vytýkání imaginární jednotky:

$$f(ix) = u(ix) - iu(i^2x) = iu(x) + u(ix) = i(u(x) - iu(ix)) = if(x).$$

□

Věta 1.2.4 (Komplexní případ). *Nechť p je pseudonorma na lineárním prostoru X nad $\mathbb{C}$, Y je podprostor X a f je lineární forma na Y splňující $|f| \leqslant p$. Pak existuje lineární forma F na X tak, že $|F| \leqslant p$ a $F = f$ na Y.*

Důkaz. Prostor X uvažujme jako prostor nad $\mathbb{R}$ a rozložme dle Lemmatu 1.2.3 f na Y jako $f(x) = u(x) - iu(ix)$, $x \in Y$, kde $u : Y \to \mathbb{R}$ je reálně lineární forma na Y. Protože

$$u(x) \leqslant |u(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in Y,$$

lze použít Větu 1.2.2 k nalezení reálně lineární formy $U : X \to \mathbb{R}$ splňující $|U| \leqslant p$.

Položíme-li $F(x) = U(x) - iU(ix)$, $x \in X$, obdržíme lineární formu na X rozšiřující f. Dále, pro $x \in X$ najdeme $t \in \mathbb{R}$ takové, že $|F(x)| = F(x)e^{it}$. Pak

$$|F(x)| = F(x)e^{it} = F(e^{it}x) = U(e^{it}x) - iU(ie^{it}x),$$

a proto $U(ixe^{it}) = 0$. Tedy

$$|F(x)| = U(e^{it}x) \leqslant p(e^{it}x) = |e^{it}|p(x) = p(x).$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 1.2.5 (Hahn–Banach)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset\subset X$ a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ tak, že $\|F\| = \|f\|$ a $F = f$ na Y.*

Důkaz. Položme $p(x) = \|f\|\|x\|$, $x \in X$. Pak p je pseudonorma splňující $|f| \leqslant p$ na Y. Dle Věty 1.2.2 a 1.2.4 existuje lineární forma $F : X \to \mathbb{F}$ rozšiřující f tak, že $|F| \leqslant p$ na X. Pak

$$|F(x)| \leqslant p(x) = \|f\|\|x\|, \quad x \in X,$$

tedy F je spojitý na X a $\|F\| \leqslant \|f\|$. Zjevně $\|f\| \leqslant \|F\|$, tedy $\|F\| = \|f\|$. □

Věta 1.2.6. *Nechť X je normovaný lineární prostor dimenze alespoň 1. Pro každé $x_0 \in X$ existuje $F \in S_{X^*}$ tak, že $F(x_0) = \|x_0\|$.*

Speciálně, jsou-li $x, y \in X$ různé body, existuje $F \in X^*$ tak, že $F(x) \neq F(y)$ (X^* odděluje body X).

Důkaz. Zjevně stačí uvažovat $x_0 \neq 0$. Uvažujme tedy pro $x_0 \in X\backslash\{0\}$ prostor $Y = \operatorname{span}\{x_0\}$, $p(x) = \|x\|$ pro $x \in X$ a $f(tx_0) = t\|x_0\|$, $t \in \mathbb{F}$. Pak f je lineární forma na Y splňující $f \leqslant p$ v reálném případě a $|f| \leqslant p$ v případě komplexním. Najdeme lineární formu $F\colon X \to \mathbb{F}$ rozšiřující f, která splňuje $|F| \leqslant p$. Pak $|F(x)| \leqslant p(x) = \|x\|$, $x \in X$, a tedy $\|F\| \leqslant 1$. Dále $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$, a proto $\|F\| = 1$.

Při důkazu speciálního případu uvažujeme $x_0 = x - y$. □

Tvrzení 1.2.7. *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max\{|x^*(x)| : x^* \in B_{X^*}\}$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 1.2.6. □

Věta 1.2.8. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset\subset X$ je uzavřený a $x_0 \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f = 0$ na Y a $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.*

Důkaz. Položme $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$, $d = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ a

$$\begin{aligned} f_0 &: Z \to \mathbb{F}, \\ &\quad y + cx_0 \mapsto cd, \quad y \in Y, c \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Pak f_0 je lineární forma na Z a pro $y \in Y$ a $c \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$ máme

$$|f_0(y + cx_0)| = |c|d \leqslant |c|\|x_0 - (-\frac{y}{c})\| = \|y + cx_0\|.$$

Tedy $\|f_0\| \leqslant 1$.

Vezměme $f \in X^*$ rozšiřující f_0 a splňující $\|f\| = \|f_0\|$. Pak $f = 0$ na Y, $\|f\| = \|f_0\| \leqslant 1$ a $f(x_0) = f_0(x_0) = d$. Vezměme posloupnost $\{y_n\}$ v Y splňující $\|x_0 - y_n\| \to d$. Pak

$$f\left(\frac{x_0 - y_n}{\|x_0 - y_n\|}\right) = \frac{f(x_0)}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{d}{\|x_0 - y_n\|} \to 1.$$

Tedy $\|f\| = 1$. □

Tvrzení 1.2.9. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset\subset X$.*

(a) Je-li Y konečně rozměrný, má topologický doplněk.

(b) Je-li Y uzavřený a konečné kodimenze, pak má též topologický doplněk.

Důkaz. (a) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze Y. Definujme funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na Y pomocí předpisu

$$f_j(\sum_{i=1}^n c_i e_i) = c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Protože Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na Y. Lze je tedy rozšířit na spojité funkcionály $g_1, \dots, g_n$ na X. Pak zobrazení

$$Px = \sum_{j=1}^n g_j(x)e_j, \quad x \in X,$$

je spojitá projekce X na Y.

(b) Nechť $\dim(X/Y) = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ jsou vybrány tak, že $\{[e_1], \dots, [e_n]\}$ je báze X/Y. Vezmeme funkcionály $f_1, \dots, f_n \in (X/Y)^*$ tak, že

$$f_j([e_i]) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Položme

$$g_j(x) = f_j([x]), \quad x \in X, j = 1, \dots, n.$$

Pak $g_1, \dots, g_n$ jsou spojité funkcionály na X. Zobrazení

$$Px = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j, \quad x \in X,$$

je pak spojitá projekce na $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, která je nulová na Y. Pak $Q = I - P$ je projekce X na Y. Pro $x \in X$ a $j = 1, \dots, n$ totiž platí

$$f_j([Qx]) = g_j(Qx) = g_j(x - \sum_{i=1}^{n} g_i(x) e_i) = g_j(x) - g_j(x) = 0.$$

Tedy $f_j([Qx]) = 0$ pro $j = 1, \dots, n$, a tedy $[Qx] = 0$. To ale neříká nic jiného, než že $Qx \in Y$. Protože $Q = I$ na Y, je $\operatorname{Rng} Q = Y$. □

Věta 1.2.10 (Oddělování množin)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou neprázdné, disjunktní a konvexní.*

(a) Pokud A je otevřená, pak existuje $f \in X^*$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\operatorname{Re} f(a) < c \leqslant \operatorname{Re} f(b)$ pro každé $a \in A$, $b \in B$.

(b) Pokud A je kompaktní a B uzavřená, existuje $f \in X^*$ a $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, tak, že $\operatorname{Re} f(a) < c < d < \operatorname{Re} f(b)$ pro každé $a \in A$, $b \in B$.

Lemma 1.2.11. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$ je nenulové. Pak f je otevřené zobrazení (tj. $f(U)$ je otevřená v $\mathbb{F}$ pro každou $U \subset X$ otevřenou).*

Důkaz. Mějme $f \in X^*$ nenulové dáno. Díky jeho linearitě stačí dokázat, že $f(B_X)$ obsahuje okolí 0. Najdeme $x \in B_X$ splňující $f(x) = r > 0$. Pak $A = \{\alpha x \colon |\alpha| \leqslant 1\} \subset B_X$, a tedy

$$f(B_X) \supset f(A) = \{\alpha r \colon |\alpha| \leqslant 1\}.$$

Jelikož $\{\alpha r \colon |\alpha| \leqslant 1\}$ je okolí 0, je důkaz dokončen. □

Lemma 1.2.12. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $C \subset X$ je otevřené konvexní okolí 0. Pak je zobrazení*

$$p(x) = \inf\{t > 0 : x/t \in C\}, \quad x \in X,$$

konvexní funkcionál na X. Navíc $p < 1$ na C.

Důkaz. Nejprve si povšimneme, že díky faktu $0 \in \operatorname{Int} C = C$ je p je dobře definováno. Mějme dány prvky $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$. Vezměme $s, t > 0$ tak, že

$$x/t \in C, \quad t \leqslant p(x) + \varepsilon \quad \text{a} \quad y/s \in C, \quad s \leqslant p(y) + \varepsilon.$$

Pak

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{t+s} x/t + \frac{s}{t+s} y/s \in C,$$

a tedy

$$p(x+y) \leqslant s + t \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Zjevně $p(0x) = 0p(x)$. Nechť dále $x \in X$ a $\alpha > 0$. Vezměme $t > 0$ takové, že

$$\frac{\alpha x}{t} \in C \quad \text{a} \quad t \leqslant p(\alpha x) + \varepsilon.$$

Pak $\frac{x}{t/\alpha} \in C$, a tedy $p(x) \leqslant t/\alpha$. Proto

$$\alpha p(x) \leqslant t \leqslant p(\alpha x) + \varepsilon.$$

K důkazu obrácené nerovnosti zvolme $t > 0$ takové, že $t \leqslant p(x) + \varepsilon$ a $x/t \in C$. Pak $\frac{\alpha x}{\alpha t} \in C$, a tedy

$$p(\alpha x) \leqslant \alpha t \leqslant \alpha p(x) + \alpha \varepsilon.$$

Dohromady dostáváme $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Vezměme nyní $x \in C$ libovolné. Díky otevřenosti C existuje $t > 1$ splňující $tx = x/t^{-1} \in C$. Tedy $p(x) \leqslant t^{-1} < 1$. □

Důkaz Věty 1.2.10. (a) Uvažujme nejprve X nad $\mathbb{R}$. Zvolme $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ a položme $x_0 = b_0 - a_0$, $C = A - B + x_0$. Pak C je otevřená konvexní množina obsahující 0. Definujme pomocí C konvexní funkcionál p jako v Lemmatu 1.2.12. Protože $x_0 \notin C$, je $p(x_0) \geqslant 1$. Položme

$$\begin{aligned} f_0\colon\ \operatorname{span}\{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ tx_0 &\mapsto t. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0\colon f_0(tx_0) &= t \leqslant tp(x_0) = p(tx_0), \\ \forall t < 0\colon f_0(tx_0) &= t \leqslant 0 \leqslant p(tx_0). \end{aligned}$$

Tedy $f_0 \leqslant p$ na $\operatorname{span}\{x_0\}$.

Nechť f je lineární forma na X rozšiřující f_0, která splňuje $f \leqslant p$ na X. Protože $f \leqslant p \leqslant 1$ na C, je $|f| \leqslant 1$ na $C \cap (-C)$, což je okolí 0. Jakožto forma omezená na nějakém okolí 0 je $f \in X^*$.

Pro $a \in A$ a $b \in B$ je $a - b + x_0 \in C$, a tedy máme

$$f(a) - f(b) + 1 = f(a - b + x_0) \leqslant p(a - b + x_0) < 1.$$

Proto $f(a) < f(b)$. Jelikož $f(A)$ je otevřená konvexní množina v $\mathbb{R}$, položíme-li $c = \sup f(A)$, dostaneme

$$f(a) < c \leqslant f(b), \quad a \in A, b \in B.$$

(b) V tomto případě najdeme $r > 0$ tak, že $(A + U(0,r)) \cap B = \varnothing$. Oddělíme tyto množiny funkcionálem f a uvědomíme si, že $f(A)$ je kompaktní podmnožina $f(A + U(0,r))$. Existence požadovaných čísel $c_1 < c_2$ z toho snadno plyne.

V případě komplexního prostoru X uvažujeme jeho reálnou verzi $X_{\mathbb{R}}$ a najdeme funkcionál u jako výše. Pak je $f(x) = u(x) - iu(ix)$, $x \in X$, požadovaný funkcionál. □

1.2.2 Klasické duální prostory a reflexivita

Definice 1.2.13. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Zobrazení $\varepsilon : X \to X^{**}$, $x \mapsto \varepsilon_x$ pro $x \in X$, definované jako

$$\varepsilon_x(x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*,$$

se nazývá kanonické vnoření.

Tvrzení 1.2.14. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak $\varepsilon : X \to X^{**}$ je izometrický izomofizmus.*

Důkaz. Zjevně je ε dobře definované lineární zobrazení. Jeho izometričnost pak plyne z Tvrzení 1.2.7. □

Definice 1.2.15. Normovaný lineární prostor X se nazývá reflexivní, pokud $\varepsilon(X) = X^{**}$.

Důkaz Věty 1.1.18. (a) Položme $X_1 = \overline{\varepsilon(X)} \subset X^{**}$. Protože X^{**} je úplný, je i X_1 úplný a zřejmě $\varepsilon(X)$ je v něm hustý. Nechť nyní X_2 je Banachův prostor a $T : X \to X_2$ je izometrie na hustý podprostor. Pak $T \circ \varepsilon^{-1} : \varepsilon(X) \to \operatorname{Rng} T$ je izometrické zobrazení, které lze dle Věty 1.1.37 rozšířit na operátor $I : X_1 \to X_2$. Je-li $x \in X_1$ a $\{x_n\}$ posloupnost v $\varepsilon(X)$ k x konvergující, platí

$$\|Ix\| = \lim_{n\to\infty} \|Ix_n\| = \lim_{n\to\infty} \|T \circ \varepsilon^{-1}(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|,$$

a tedy I je izometrie. Vzhledem k tomu, že $\operatorname{Rng} I$ je hustý, platí $I(X_1) = X_2$.

(b) Postupujme jako výše, přičemž si povšimneme, že X_1 splňuje rovnoběžníkové pravidlo z Věty 1.1.13(ii). Tedy X_1 je Hilbertův prostor. Jednoznačnost dokážeme jako v předešlém. □

Lemma 1.2.16. *Nechť X je vektorový prostor a $f\colon X \to \mathbb{F}$ je lineární forma. Nechť $y \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{y\}$.*

Důkaz. Každý vektor $x \in X$ lze rozepsat jako

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y)}y\right) + \frac{f(x)}{f(y)}y,$$

kde $x - \frac{f(x)}{f(y)}y \in \operatorname{Ker} f$ a $\frac{f(x)}{f(y)}y \in \operatorname{span}\{y\}$. □

Věta 1.2.17 (Fréchet–Riesz)**.** *Je-li H Hilbertův prostor a $y \in H$, označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in H$.*

Pak zobrazení $I : y \mapsto f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^* (tj. $I(y_1+y_2) = I(y_1)+I(y_2)$ a $I(cy) = \overline{c}I(y)$).

Důkaz. Protože

$$|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in H,$$

a skalární součin je lineární v první souřadnici, je $f_y \in H^*$ a $\|f_y\| \leqslant \|y\|$. Je-li $y \neq 0$, máme

$$f_y(\frac{y}{\|y\|}) = \langle \frac{y}{\|y\|}, y\rangle = \|y\|,$$

a tedy $\|f_y\| = \|y\|$.

Snadno se ověří, že zobrazení I splňuje $I(y_1 + y_2) = I(y_1) + I(y_2)$. Dále

$$I(cy)(x) = f_{cy}(x) = \langle x, cy\rangle = \overline{c}\langle x, y\rangle = \overline{c}f_y(x) = \overline{c}I(y)(x), \quad x, y \in H, c \in \mathbb{F},$$

tedy I je sdruženě lineární. Konečně rovnost

$$\|I(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$$

neznamená nic jiného, než že I je izometrie do.

Ukažme, že je na. Je-li $f \in H^*$ nenulové dáno, pišme $H = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{z\}$, kde $z \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \cap S_H$. Položme $y = \overline{f(z)}z$, pak pro $x = x' + cz$, kde $x' \in \operatorname{Ker} f$ a $c \in \mathbb{F}$, platí

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle = \langle x' + cz, \overline{f(z)}z\rangle = cf(z)\langle z, z\rangle = cf(z) = f(x' + cz) = f(x).$$

Tedy $I(y) = f$. □

Věta 1.2.18. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Důkaz. Mějme $x^{**} \in H^{**}$ dáno. Položme

$$y^*(x) = \overline{x^{**}(Ix)}, \quad x \in H,$$

kde $I : H \to H^*$ je zobrazení z Věty 1.2.17. Pak

$$\begin{aligned} y^*(x_1 + x_2) &= y^*(x_1) + y^*(x_2), \quad x_1, x_2 \in H, \\ y^*(\alpha x) &= \overline{x^{**}(\overline{\alpha}(Ix))} = \alpha\overline{x^{**}(Ix)} = \alpha y^*(x), \quad x \in H, \alpha \in \mathbb{F}, \end{aligned}$$

a y^* je zřejmě spojité. Tedy $y^* \in H^*$, čili dle Věty 1.2.17 existuje $y \in H$ takové, že $y^*(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in H$. Vezměme libovolné $x^* \in H^*$ a nalezněme $x \in H$ splňující $Ix = x^*$. Pak

$$\begin{aligned} \varepsilon_y(x^*) &= \varepsilon_y(Ix) = (Ix)(y) = \langle y, x\rangle \quad \text{a} \\ x^{**}(x^*) &= x^{**}(Ix) = \overline{\overline{x^{**}(Ix)}} = \overline{y^*(x)} = \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle. \end{aligned}$$

Tedy $\varepsilon_y = x^{**}$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 1.2.19. *(a) Prostor $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)^*$ je sdruženě lineárně izometrický s $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$ pomocí zobrazení $I : y \in (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2) \mapsto f_y \in (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)^*$, kde $f_y(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in \mathbb{F}^n$.*

Zobrazení $I : y \in (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2) \mapsto f_y \in (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)^*$, kde $f_y(x) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, je lineární izometrie.

(b) Prostor $(c_0)^*$ je izometrický s ℓ^1 pomocí zobrazení $I : y \in \ell^1 \mapsto f_y \in (c_0)^*$, kde $f_y(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$, $x \in c_0$.

(c) Je-li $p \in (1, \infty)$ a $1 = 1/p + 1/q$, pak prostor $(\ell^p)^*$ je izometrický s ℓ^q pomocí zobrazení $I : y \in \ell^q \mapsto f_y \in (\ell^p)^*$, kde $f_y(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$, $x \in \ell^p$.

(d) Je-li $p = 1$ a $q = \infty$ (tedy opět $1 = 1/p + 1/q$), pak prostor $(\ell^1)^*$ je izometrický s ℓ^∞ pomocí zobrazení $I : y \in \ell^\infty \mapsto f_y \in (\ell^1)^*$, kde $f_y(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$, $x \in \ell^1$.

(e) Je-li $(X, \mathscr{S}, \mu)$ σ-konečný prostor s mírou a $1 = 1/p + 1/q$, kde $p \in [1, \infty)$, je $(L^p)^*$ izometrický s prostorem L^q pomocí zobrazení $I : g \in L^q \mapsto \varphi_g \in (L^p)^*$, kde $\varphi_g(f) = \int_X fg\, d\mu$, $f \in L^p$.

Důkaz. (a) První tvrzení plyne z Věty 1.2.18, druhé se snadno ověří.

(b) Pro $y \in \ell^1$ a $x \in c_0$ je zjevně f_y dobře definované lineární zobrazení na c_0 a platí

$$|f_y(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_{c_0} |y_n| = \|x\|_{c_0} \|y\|_{\ell^1}.$$

Tedy $f_y \in (c_0)^*$ a $\|f_y\| \leqslant \|y\|_{\ell^1}$. Uvažujeme-li vektory

$$x^n = (\operatorname{sgn} y_1, \dots, \operatorname{sgn} y_n, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N},$$

kde sgn značí komplexní signum, dostaneme vektory v B_{c_0}, které splňují

$$f_y(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sgn} y_k) y_k = \sum_{k=1}^{n} |y_n| \to \|y\|.$$

Tedy $\|f_y\| = \|y\|$. Proto je I izometrie (linearita je zřejmá).

Ukažme nyní, že každý prvek $f \in (c_0)^*$ je tvaru f_y pro nějaké $y \in \ell^1$. Označme

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \quad (1 \text{ je na } n\text{-tém místě}), \quad n \in \mathbb{N},$$

a pro dané $f \in (c_0)^*$ položme

$$y_n = f(e^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vektor $x^n = (\operatorname{sgn} y_1, \dots, \operatorname{sgn} y_n, 0, \dots)$ je v B_{c_0} pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy

$$\|f\| \geqslant |f(x^n)| = |f(\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sgn} y_k) e^k)| = \sum_{k=1}^{n} |y_k|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož je $n \in \mathbb{N}$ libovolné, je $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^1$.

Na závěr ukažme, že $f = f_y$ na c_0. Pro vektory e^n platí

$$f(e^n) = y_n = f_y(e^n).$$

Z linearity platí $f = f_y$ na $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, což je ale hustý podprostor c_0. Tedy $f = f_y$ na c_0.

(c) Pro $y \in \ell^q$ a $x \in \ell^p$ platí z Hölderovy nerovnosti

$$|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{1/q} = \|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^q}.$$

Tedy f_y je prvek $(\ell^p)^*$ splňující $\|f_y\| \leqslant \|y\|_{\ell^q}$.

Vektor

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{-1/p} (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{sgn} y_2, \dots)$$

splňuje

$$\|x\|_{\ell^p} = \frac{1}{(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{1/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(q-1)} \right)^{1/p} = \frac{1}{(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{1/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/p} = 1.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \|f_y\| \geqslant f_y(x) &= \frac{1}{(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{1/p}} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{q-1} (\operatorname{sgn} y_n) y_n = \frac{1}{(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{1/p}} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1-1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Proto je I linární izometrie.

Máme-li nyní dán prvek $f \in (\ell^p)^*$, označme e^n jako výše a položme

$$y_n = f(e^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} \operatorname{sgn} y_k e^k.$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q = f\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^{q-1}(\operatorname{sgn} y_k)e^k\right) = f(x^n) \leqslant \|f\|\|x^n\|_{\ell^p} = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/p}.$$

Tedy

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1-1/p} \leqslant \|f\|.$$

Dostáváme $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^q$ a pro e^n platí

$$f(e^n) = y_n = f_y(e^n).$$

Tedy $f = f_y$ na $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, což je hustý podprostor ℓ^p. Proto $f = f_y$ na ℓ^p.

(d) Z nerovnosti

$$|f_y(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leqslant \|x\|_{\ell^1}\|y\|_{\ell^\infty}, \quad x \in \ell^1, y \in \ell^\infty,$$

plyne, že $f_y \in (\ell^1)^*$ a $\|f_y\| \leqslant \|y\|_{\ell^\infty}$. Pomocí vektorů e^n dostáváme

$$\|f_y\| \geqslant |f_y(e^n)| = |y_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy $\|f_y\| \geqslant \|y\|_{\ell^\infty}$ a I je izometrie.

Je-li $f \in (\ell^1)^*$ dáno, položíme

$$y_n = f(e^n), \quad n \in \mathbb{N},$$

a jako výše máme

$$|y_n| = |f(e^n)| \leqslant \|f\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

tj. $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^\infty$. Obdobně jako výše ukážeme, že $f = f_y$.

(e) Hölderova nerovnost

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad f \in L^p, g \in L^q,$$

říká, že $\varphi_g \in (L^p)^*$ a $\|\varphi_g\| \leqslant \|g\|_q$. Nechť $q < \infty$. Pak funkce

$$f = \left(\int_X |g|^q\right)^{-1/p}|g|^{q-1}\operatorname{sgn} g$$

splňuje

$$\|f\|_p = \left(\int_X |g|^q\right)^{-1/p}\left(\int_X |g|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \left(\int_X |g|^q\right)^{-1/p}\left(\int |g|^q\right)^{1/p} = 1.$$

Tedy

$$\|\varphi_g\| \geqslant \varphi_g(f) = \left(\int_X |g|^q\right)^{-1/p}\int_X |g|^q = \left(\int_X |g|^q\right)^{1-1/p} = \left(\int |g|^q\right)^{1/q}.$$

Proto je I v případě $q < \infty$ izometrie.

Pro $q = \infty$ a $\varepsilon > 0$ uvažujme množinu $A = \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak A je kladné míry, a tedy existuje $B \subset A$ splňující $0 < \mu(B) < \infty$. Pak $f = \frac{(\operatorname{sgn} g)\chi_B}{\mu(B)} \in B_{L^1}$ a

$$\varphi_g(f) = \frac{1}{\mu(B)}\int_B |g| \geqslant \frac{\|g\|_\infty - \varepsilon}{\mu(B)}\int_B 1\,d\mu = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Tedy $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$ a I je izometrie i v tomto případě.

Ukažme nyní, že je surjektivní. Nechť φ je spojitý funkcionál na L^p. Pišme $X = \bigcup X_n$, kde $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ a $0 < \mu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$\nu_n(A) = \varphi(\chi_A), \quad A \in \mathscr{S}, A \subset X_n.$$

Pak je ν_n σ-aditivní míra na σ-algebře $\mathscr{S}$ restringované na X_n. Zjevně je konečně aditivní. Dále, je-li $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ systém po dvou disjunktních měřitelných množin v X_n, pak díky Lebesgueově větě platí $\left\|\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} - \chi_{\bigcup_{j=1}^m A_j}\right\|_p \to 0$. Tedy

$$\nu_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \varphi(\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}) = \lim_{m\to\infty}\varphi(\chi_{\sum_{j=1}^m A_j}) = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\varphi(\chi_{A_j}) = \lim_{m\to\infty}\nu_n(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\nu_n(A_j).$$

Zřejmě je ν_n absolutně spojité vzhledem k μ (na X_n), tj. $|\nu_n(A)| = 0$ pro každou $A \in \mathscr{S}$, $A \subset X_n$, splňující $\mu(A) = 0$.

Podle Radonovy-Nikodýmovy věty tedy existuje $g_n \in L^1(X_n)$ splňující

$$\nu_n(A) = \int_A g_n \, d\mu, \quad A \in \mathscr{S}, A \subset X_n. \tag{1.11}$$

Je-li nyní $n \leqslant m$, pak

$$\int_A g_n \, d\mu = \nu_n(A) = \varphi(\chi_A) = \nu_m(A) = \int_A g_m \, d\mu, \quad A \in \mathscr{S}, A \subset X_n,$$

z čehož plyne rovnost $g_n = g_m$ na X_n. Lze tedy definovat funkci g na X pomocí vzorce

$$g = g_n \text{ na } X_n.$$

Z (1.11) pak plyne rovnost

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad f \text{ je jednoduchá funkce nesená jednou z množin } X_n. \tag{1.12}$$

Je-li $f \in L^\infty(X_n)$, lze ji stejnoměrně aproximovat jednoduchými funkcemi nesenými X_n, což rozšiřuje platnost vzorce (1.12) i pro tyto f, tj.

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad f \in L^\infty(X_n), n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Mějme nyní funkci $f \in L^p(X)$ dánu. Definujme

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pokud } x \in X_n \text{ a } |f(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Použijeme-li (1.13) pro funkci $|f_n| \operatorname{sgn} g$, dostaneme

$$\|\varphi\| \|f\| \geqslant \|\varphi\| \||f_n| \operatorname{sgn} g\| \geqslant |\varphi(|f_n| \operatorname{sgn} g)| = \int_X |f_n||g| \, d\mu.$$

Z Fatouova lemmatu máme

$$\int_X |f||g| \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} |f_n||g| \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n||g| \, d\mu \leqslant \|\varphi\| \|f\|,$$

a tedy $|f||g| \in L^1(X)$. Protože $\|f - f_n\|_p \to 0$ a φ je spojitý funkcionál, platí $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$. Z (1.13) a Lebesgueovy věty tedy dostáváme

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Zbývá ukázat, že $g \in L^q(X)$. Položme

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{pokud } x \in X_n \text{ a } |g(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Uvažujme nejprve případ $q < \infty$ a položme $f = |g_n|^{q/p}$. Pak použitím (1.13) dostáváme

$$\|\varphi\| \left(\int_X |g_n|^q \right)^{1/p} = \|\varphi\| \|f\|_p \geqslant \|\varphi\| \|f \operatorname{sgn} g_n\| \geqslant |\varphi(f \operatorname{sgn} g_n)| = \int_X |g_n|^{(q/p)+1} = \int_X |g_n|^q.$$

Tedy

$$\left(\int_X |g_n|^q \right)^{1/q} = \left(\int_X |g_n|^q \right)^{1-1/p} \leqslant \|\varphi\|.$$

Z Fatouova lemmatu pak máme

$$\int_X |g|^q = \int \liminf_{n\to\infty} |g_n|^q \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |g_n|^q \leqslant \|\varphi\|^q < \infty,$$

tedy $g \in L^q(X)$.

Je-li $q = \infty$ a $c > \|\varphi\|$, je množina $A = \{x \in X : |g(x)| \geqslant c\}$ nulové míry. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A_n = A \cap X_n$ splňuje $0 < \mu(A_n) < \infty$. Pak máme z (1.13)

$$\|\varphi\| \mu(A_n) < c\mu(A_n) \leqslant \int_{A_n} |g| = \int_X g (\operatorname{sgn} g) \chi_{A_n} \, d\mu = \varphi((\operatorname{sgn} g)\chi_{A_n}) \leqslant \|\varphi\| \mu(A_n),$$

což je spor. Proto $\mu(A) = 0$ a $\operatorname{esssup} |g| \leqslant \|\varphi\|$. $\square$

Poznámka 1.2.20. Všimněme si, že z důkazu reprezentačních tvrzení plyne následující fakt. Jestliže $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je σ-konečný prostor s mírou a g je měřitelná funkce taková, že zobrazení $\varphi\colon f \mapsto \int_X fg\,d\mu$, $f \in L^p$, je prvek $(L^p)^*$, pak $g \in L^q$. Pišme $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, kde $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ a $0 < \mu(X_n) < \infty$. Podle předcházející věty existuje $h \in L^q$ splňující $\varphi(f) = \int_X fh\,d\mu$, $f \in L^p$. Tedy

$$\forall f \in L^p\colon \int_X f(g-h)\,d\mu = 0.$$

Stačí tedy dokázat, že $u = 0$, pokud u je měřitelná funkce na X splňující $\int_X fu\,d\mu = 0$ pro každou $f \in L^p$. Z tohoto předpokladu plyne, že $\int_X \chi_{X_n}(\operatorname{sgn} u)u = 0\,d\mu$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\int_A |u|\,d\mu = 0$ pro každou $A \in \mathscr{S}$ konečné míry. Tedy $u = 0$.

Věta 1.2.21 (Rieszova o reprezentaci nezáporných funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní metrický (topologický) prostor a $\Lambda : C(K) \to \mathbb{F}$ je funkcionál, který má nezáporné hodnoty na nezáporných funkcích. Pak existuje σ-algebra $\mathscr{S}$ obsahující otevřené množiny a míra μ na $\mathscr{S}$ splňující*

- $\Lambda f = \int_K f\,d\mu,\ f \in C(K),$
- $\mu(E) = \inf\{\mu(U)\colon U \supset E \textit{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F)\colon F \subset E \textit{ uzavřená}\},\ E \in \mathscr{S}.$

Splňují-li nezáporné míry μ, ν na borelovských množinách výše uvedené vlastnosti, mají na nich stejné hodnoty.

Lemma 1.2.22. *Nechť K je kompaktní topologický (metrický) prostor. Nechť F je jeho uzavřená podmnožina a $U \supset F$ je otevřená. Pak platí:*

(a) Existuje otevřená $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(b) Existuje spojitá funkce $f \in C(K)$ splňující $\chi_F \leqslant f \leqslant \chi_U$ a $\operatorname{spt} f \subset U$ (připomeňme, že $\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in K\colon f(x) \neq 0\}}$).

Důkaz. Důkaz předvedeme pouze pro K metrický. Nechť tedy ρ je metrika na K.

(a) Nechť $F \subset U$, F uzavřená a U otevřená. Pokud jedna z těchto množin je prázdná, stačí položit $V = \emptyset$. Stejně tak je tvrzení zřejmé v případě $V = K$. Ve zbývajících případech platí $d = \operatorname{dist}(F, K\backslash U) > 0$. Položíme-li tedy

$$V = \{x \in K\colon \operatorname{dist}(x, F) < \frac{d}{2}\},$$

máme

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset \{x \in K\colon \operatorname{dist}(x, F) \leqslant \frac{d}{2}\} \subset U.$$

(b) Nechť $F \subset U$ jsou množiny vyhovující předpokladům. Je-li F či U prázdná nebo $U = K$, požadovaná funkce zjevně existuje. Ve zbývajících případech najdeme díky tvrzení (a) otevřenou množinu $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Požadovanou funkci pak získáme pomocí formule

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, K\backslash V)}{\operatorname{dist}(x, K\backslash V) + \operatorname{dist}(x, F)}, \quad x \in K.$$

Pak totiž $f = 1$ na F a $\{x \in K\colon f(x) > 0\} \subset V$, tedy $\operatorname{spt} f \subset \overline{V} \subset U$. □

Lemma 1.2.23. *Nechť K je kompaktní prostor a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují spojité funkce $g_1, \dots, g_n$ splňující $0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}$, $\operatorname{spt} f_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$.*

Důkaz. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ a otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečná množina $x_1, \dots, x_m$ v K taková, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i jako

$$F_i = \bigcup\{\overline{V_{x_j}}\colon \overline{V_{x_j}} \subset U_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nechť V_i jsou otevřené množiny splňující $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Najdeme spojité funkce $f_1, \dots, f_n$ na K takové, že $\chi_{F_i} \leqslant f_i \leqslant \chi_{V_i}$, $i = 1, \dots, n$. Pak $\operatorname{spt} f_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ a $\sum_{i=1}^n f_i > 0$ na K. Položme

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)},\ x \in K, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak g_i jsou spojité, splňují $0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}$, $\operatorname{spt} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$ na K. □

Důkaz Věty 1.2.21. 1. krok. Definujme

$$\mu'(U) = \sup\{\Lambda f\colon f \in C(K), 0 \leqslant f \leqslant \chi_U, \operatorname{spt} f \subset U\}, \quad U \subset K \text{ otevřená}.$$

Pak platí

- $\mu'(\varnothing) = 0$,
- $\mu'(U) \leqslant \mu'(V)$, jsou-li $U, V \subset K$ otevřené a $U \subset V$,
- $\mu'(K) = \Lambda 1 < \infty$.

Můžeme nyní definovat množinovou funkci μ^* na K jako

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu'(U) \colon U \supset E \text{ otevřená}\}, \quad E \subset K.$$

Pak μ^* je monotónní množinová funkce definovaná na všech podmnožinách K, která se rovná μ' na otevřených množinách K. Ještě si povšimněme, že se jedná o subaditivní množinovou funkci.

Zvolme $E_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$, a $\varepsilon > 0$. Vezměme $U_n \supset E_n$ splňující $\mu'(U_n) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Položme $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Nechť $f \in C(K)$ splňuje $0 \leqslant f \leqslant \chi_U$, $\operatorname{spt} f \subset U$ a $\mu'(U) < \Lambda(f) + \varepsilon$. Položíme-li $L = \operatorname{spt} f$, dostaneme kompaktní podmnožinu U. Existuje tedy index $m \in \mathbb{N}$ takový, že $L \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Položme $V_{m+1} = K \backslash L$ a $V_i = U_i$, $i = 1, \ldots, m$. Pak $\{V_1, \ldots, V_{m+1}\}$ je otevřené pokrytí K, a tedy dle Lemmatu 9.1.43 existují spojité funkce $g_1, \ldots, g_{m+1}$ splňující

$$0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{V_i}, \ \operatorname{spt} g_i \subset V_i, \quad i = 1, \ldots, m+1, \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{m+1} g_i = 1.$$

Protože $g_{m+1} = 0$ na L, platí $\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$ na L. Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \ldots, m$. Pak

$$0 \leqslant h_i \leqslant \chi_{U_i}, \ \operatorname{spt} h_i \subset U_i, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{a} \qquad f = \sum_{i=1}^{m} h_i.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &\leqslant \mu'(U) \leqslant \Lambda(f) + \varepsilon = \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Lambda(h_i) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \mu'(U_i) \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i). \end{aligned}$$

Tedy μ^* je vnější míra na K.

2.krok. Ukažme, že pro disjunktní otevřené množiny U, V platí $\mu^*(U \cup V) = \mu^*(U) + \mu^*(V)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme f, g spojité funkce splňující $0 \leqslant f \leqslant \chi_U$, $\operatorname{spt} f \subset U$ a $0 \leqslant g \leqslant \chi_V$, $\operatorname{spt} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \geqslant \mu^*(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \geqslant \mu^*(V) - \varepsilon$. Pak $0 \leqslant f + g \leqslant \chi_{U \cup V}$ a $\operatorname{spt}(f+g) \subset U \cup V$, a tedy

$$\mu^*(U \cup V) \geqslant \Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g \geqslant \mu^*(U) + \mu^*(V) - 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu^*(U \cup V) \geqslant \mu^*(U) + \mu^*(V)$. Jelikož obrácená nerovnost platí díky subaditivitě μ^*, je druhý krok hotov.

3. krok Označme

$$\mathscr{S} = \{E \subset K \colon \mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \backslash E), T \subset K\}.$$

Dle Caratheódoryho konstrukce je pak $\mathscr{S}$ σ-algebra a $\mu = \mu^*|_{\mathscr{S}}$ je míra.

Je třeba ukázat, že $\mathscr{S}$ obsahuje všechny borelovské podmnožiny K. K tomu stačí ověřit, že $\mathscr{S}$ obsahuje všechny otevřené množiny, tj. že platí

$$\forall U \subset K \text{ otevřená } \forall T \subset K \colon \mu^*(T) = \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \backslash U). \tag{1.14}$$

Mějme tedy otevřenou neprázdnou množinu $U \subset K$ a testovací množinu $T \subset K$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $W \supset T$ otevřenou splňující $\mu^*(W) \leqslant \mu^*(T) + \varepsilon$. Z definice najdeme $f \in C(K)$ takovou, že $0 \leqslant f \leqslant \chi_{W \cap U}$, $\operatorname{spt} f \subset W \cap U$ a $\Lambda f > \mu^*(W \cap U) - \varepsilon$. Protože $\operatorname{spt} f \subset W \cap U$, existuje otevřená množina V splňující

$$\operatorname{spt} f \subset V \subset \overline{V} \subset W \cap U.$$

Pak

$$\mu^*(V) \geqslant \Lambda f \geqslant \mu^*(W \cap U) - \varepsilon.$$

Pak V a $W \backslash \overline{V}$ jsou disjunktní otevřené množiny. Použitím 2. kroku tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &\geqslant \mu^*(W) - \varepsilon \geqslant \mu^*(V \cup (W \backslash \overline{V})) - \varepsilon = \mu^*(V) + \mu^*(W \backslash \overline{V}) - \varepsilon \\ &\geqslant \mu^*(W \cap U) + \mu^*(W \backslash U) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \backslash U) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\mu^*(T) \geqslant \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \backslash U)$ pro každou $T \subset K$. Protože obrácená nerovnost plyne ze subaditivity μ^*, platí (9.4).

4. krok. Je-li $E \in \mathscr{S}$, máme z definice μ^* rovnost

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \colon U \supset E \text{ otevřená}\}.$$

Přechodem ke komplementům ověříme regularitu vnitřní. Tedy μ je regulární míra na $\mathscr{S}$.

5. krok. Ukažme, že $\Lambda f = \int_K f\,d\mu$ pro každou $f \in C(K)$. Zjevně stačí dokázat tuto rovnost pro každou reálnou spojitou funkci, což díky linearitě znamená ověřit nerovnost $\Lambda f \leqslant \int f\,d\mu$ pro každou reálnou $f \in C(K)$. Je-li $f \in C(K)$ dána, lze díky faktu $\Lambda(1) = \int_K 1\,d\mu$ po přičtení vhodné konstanty předpokládat bez újmy na obecnosti, že f má hodnoty v nějakém intervalu $[0,a]$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a body $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} \leqslant a < y_n$, kde $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ pro $i = 1,\dots,n$. Pak množiny

$$E_i = \{x \in K : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}, \quad i = 1,\dots,n,$$

tvoří borelovský rozklad K. Pro $i = 1,\dots,n$, nechť U_i jsou otevřené množiny splňující

$$\mu(U_i) \leqslant \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{a} \quad E_i \subset U_i \subset \{x \in K : f(x) < y_i + \varepsilon\}$$

(takové množiny existují díky regularitě μ a spojitosti f). Systém $\{U_1,\dots,U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí K, a tedy z Lemmatu 9.1.43 existují spojité funkce $g_1,\dots,g_n$ na K splňující

$$0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}, \ \operatorname{spt} g_i \subset U_i, \quad i = 1,\dots,n, \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n g_i = 1.$$

Pak máme $g_i f \leqslant (y_i + \varepsilon) g_i$ a $(y_i - \varepsilon)\chi_{E_i} \leqslant f\chi_{E_i}$, $i = 1,\dots,n$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \Lambda\Big(\sum_{i=1}^n g_i f\Big) = \sum_{i=1}^n \Lambda(g_i f) \leqslant \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda g_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\mu(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i - \varepsilon)\,d\mu + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} n(a + 2\varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f\,d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + a + 2\varepsilon) \\
&= \int_K f\,d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + a + 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz 5. kroku dokončen.

6. krok. Nechť μ, ν jsou dvě míry splňující $\int_K f\,d\mu = \Lambda f = \int_K f\,d\nu$ pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$. Je-li $U \subset K$ otevřená množina a $\varepsilon > 0$, najdeme uzavřenou množinu $F \subset U$ splňující $\mu(U) < \mu(F) + \varepsilon$. Nechť $f \in C(K)$ splňuje $\chi_F \leqslant f \leqslant \chi_U$. Pak

$$\mu(U) \leqslant \mu(F) + \varepsilon \leqslant \int_K f\,d\mu + \varepsilon = \int_K f\,d\nu + \varepsilon \leqslant \nu(U) + \varepsilon.$$

Tedy $\mu(U) \leqslant \nu(U)$ pro každou otevřenou množinu U. Prohozením rolí μ a ν dostaneme rovnost μ a ν na otevřených množinách, a z regularity tedy i na borelovských množinách K. $\square$

Věta 1.2.24 (Rieszova o reprezentaci $(C(K))^*$)**.** *Je-li K kompaktní metrický (topologický) prostor, je $(C(K))^*$ izometrický s prostorem regulárních borelovských měr $M(K)$ na K pomocí zobrazení $I : \mu \in M(K) \mapsto \varphi_\mu \in (C(K))^*$, kde $\varphi_\mu(f) = \int_K f\,d\mu$, $f \in C(K)$.*

Důkaz. Je-li $\mu \in M(K)$, máme

$$|\varphi_\mu(f)| \leqslant |\int_k f\,d\mu| \leqslant \int_K |f|\,d|\mu| \leqslant |\mu|(K)\|f\|, \quad f \in C(K).$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| \leqslant |\mu|(K) = \|\mu\|$. Na druhou stranu, existuje borelovská funkce h splňující $|h| = 1$ a $d\mu = hd|\mu|$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí nepřesahujících v normě 1 taková, že $f_n \to \overline{h}$ $|\mu|$-skoro všude (viz Věta 1.5.17(b)). Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n\,d\mu = \int_K \overline{h}h\,d|\mu| = \int_K 1\,d|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|\,.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| \geqslant \|\mu\|$.

Ukažme, že I je na. Nechť $\Phi \in (C(K))^*$ o normě 1 je dáno. Nechť $C_+(K)$ a $C_{\mathbb{R}}(K)$ značí nezáporné, respektive reálné spojité funkce na K. Položme

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi h| \colon h \in C(K), |h| \leqslant f\}, \quad f \in C_+(K).$$

Pak pro $f \in C_+(K)$ platí

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi h| \colon h \in C(K), |h| \leqslant f\} \leqslant \sup\{\|\Phi\| \, \|h\| : h \in C(K), |h| \leqslant f\} \leqslant \|\Phi\| \, \|f\| \leqslant \|f\|,$$

a tedy je Λ dobře definované zobrazení. Dále platí

$$\Lambda(C_+(K)) \subset [0, \infty), \quad \Lambda f_1 \leqslant \Lambda f_2 \text{ pro } f_1 \leqslant f_2 \text{ v } C_+(K), \quad \Lambda(cf) = c\Lambda f,\ c \geqslant 0, f \in C_+(K).$$

Ukažme, že

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g, \quad f, g \in C_+(K). \tag{1.15}$$

Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $h_1, h_2 \in C(K)$ takové, že $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$ a

$$\Lambda f \leqslant |\Phi(h_1)| + \varepsilon \quad \text{a} \quad \Lambda g \leqslant |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Nechť α_1, α_2 jsou komplexní jednotky splňující $\alpha_i \Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$, $i = 1, 2$. Pak

$$\begin{aligned}\Lambda f + \Lambda g &\leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon = \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leqslant \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \leqslant \Lambda(f+g) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Obráceně, nechť $h \in C(K)$ splňuje $|h| \leqslant f + g$. Položme

$$V = \{x \in K : f(x) + g(x) > 0\}$$

a

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & x \in V, \\ 0, & x \in K\backslash V, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & x \in V, \\ 0, & x \in K\backslash V, \end{cases}$$

Funkce h_i jsou zjevně spojité v bodech množiny V, v bodech doplňku se spojitost odvodí díky odhadu $|h_i| \leqslant |h|$ a vlastnosti $|h| = 0$ na $K\backslash V$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$, máme

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leqslant \Lambda f + \Lambda g.$$

Rovnost (9.5) je tedy ověřena.

Zobrazení Λ lze nyní lineárně rozšířit na $C_{\mathbb{R}}(K)$ pomocí předpisu

$$\Lambda f = \Lambda f_1 - \Lambda f_2, \quad f = f_1 - f_2, f_1, f_2 \in C_+(K), f \in C_{\mathbb{R}}(K).$$

Poznamenejme, že tato definice je korektní, jelikož máme-li $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, kde $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_+(K)$, pak

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2,$$

a tedy $\Lambda(f_1) - \Lambda(f_2) = \Lambda(g_1) - \Lambda(g_2)$.

Dále dodefinujeme Λ na $C(K)$ pomocí vzorce

$$\Lambda f = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f), \quad f \in C(K).$$

Tím jsme obdrželi nezáporný funkcionál Λ na $C(K)$ s vlastností

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|), \quad f \in C(K).$$

Dle Věty 1.2.21 existuje nezáporná regulární míra λ na borelovských množinách splňující

$$\Lambda f = \int_K f \, d\lambda, \quad f \in C(K).$$

Protože

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|) = \int_K |f| \, d\lambda = \|f\|_{L^1(\lambda)} \lambda(K) = \|f\|_{L^1(\lambda)} \Lambda 1 \leqslant \|f\|_{L^1(\lambda)}, \quad f \in C(K),$$

a $C(K)$ je hustý podprostor $L^1(\lambda)$ (viz Věta 1.5.17(c)), lze Φ chápat jako prvek prostoru $(L^1(\lambda))^*$ (viz Věta 1.1.37). Tedy dle Věty 1.2.19(e) existuje $g \in B_{L^\infty(\lambda)}$ taková, že

$$\Phi(f) = \int_K fg \, d\lambda, \quad f \in C(K).$$

Pak komplexní míra μ definovaná jako $d\mu = g d\lambda$ je požadovaný prvek $M(K)$ reprezentující Φ. $\square$

Důsledek 1.2.25. *Prostor $(\ell^\infty)^*$ je izometrický prostoru $M(\beta\mathbb{N})$ (zde $\beta\mathbb{N}$ značí Čechovu–Stoneovu kompaktifikaci $\mathbb{N}$).*

Věta 1.2.26 (James)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) X je reflexivní,

(ii) každý funkcionál $f \in X^*$ nabývá své normy na B_X.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $f \in X^*$. Najdeme $x^{**} \in S_{X^{**}}$ tak, že $\|f\| = |x^{**}(f)|$. Z reflexivity existuje $x \in S_X$ splňující $\varepsilon_x = x^{**}$. Pak
$$\|f\| = |x^{**}(f)| = |\varepsilon_x(f)| = |f(x)|.$$

(ii) $\implies$ (i) Bez důkazu. □

Věta 1.2.27. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Je-li X reflexivní, je X je úplný.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X reflexivní, je i Y reflexivní.

(c) Je-li X Banachův, je reflexivní právě tehdy, když X^* je reflexivní.

(d) uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(e) Jsou-li X, Y reflexivní, je $X \oplus Y$ reflexivní.

(f) Je-li $Z \subset\subset X$ uzavřený a X reflexivní, je X/Z reflexivní.

Důkaz. (a) Je-li $\varepsilon(X) = X^{**}$, je X izometricky izomorfní s úplným prostorem X^{**}. Tedy je sám úplný.

(b) Nechť $T : X \to Y$ je izomorfizmus, Y reflexivní a $x^{**} \in X^{**}$. Položme
$$y^{**}(y^*) = x^{**}(y^* \circ T), \quad y^* \in Y^*.$$
Pak $y^{**} \in Y^{**}$, a tedy existuje $y \in Y$ splňující $\varepsilon_y = y$. Pak $x = T^{-1}y$ splňuje $\varepsilon_x = x^{**}$. Zvolme totiž $x^* \in X^*$. Pak $y^* = x^* \circ T^{-1} \in Y^*$, a tedy
$$x^{**}(x^*) = x^{**}(x^* \circ T^{-1} \circ T) = x^{**}(y^* \circ T) = y^{**}(y^*) = y^*(y) = (x^* \circ T^{-1})(Tx) = x^*(x).$$

(c) Nechť $\varepsilon_1 : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2 : X^* \to X^{***}$ jsou kanonická vnoření. Je-li X reflexivní a $x^{***} \in X^{***}$, je prvek $x^* = x^{***} \circ \varepsilon_1 \in X^*$ a platí $\varepsilon_2(x^*) = x^{***}$. Pro $y^{**} \in X^{**}$ totiž najdeme $y \in X$ splňující $\varepsilon_1(y) = y^{**}$, pak
$$x^{***}(y^{**}) = (x^{***})(\varepsilon_1(y)) = x^*(y) = \varepsilon_1(y)(x^*) = y^{**}(x^*) = (\varepsilon_2(x^*))(y^{**}).$$
Tedy X^* je reflexivní.

Nechť nyní X^* je reflexivní a $\varepsilon_1(X) \neq X^{**}$. Pak existuje $x^{***} \in S_{X^{***}}$ s vlastností $x^{***} = 0$ na $\varepsilon_1(X)$. Ať $x^* \in S_{X^*}$ splňuje $\varepsilon_2(x^*) = x^{***}$. Pak pro $x \in X$ máme
$$0 = x^{***}(\varepsilon_1(x)) = (\varepsilon_2(x^*))(\varepsilon_1(x)) = (\varepsilon_1(x))(x^*) = x^*(x),$$
a tedy $x^* = 0$. To je ale spor s faktem $x^* \in S_{X^*}$.

(d) Nechť $Y \subset\subset X$ je uzavřený. Nechť $\varepsilon_1 : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2 : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Pro $y^{**} \in Y^{**}$ položme
$$x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y), \quad x^* \in X^*.$$
Pak $x^{**} \in X^{**}$, a tedy existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_1(x) = x^{**}$. Pak dokonce $x \in Y$, protože v opačném případě by existoval funkcionál $x^* \in X^*$ splňující $x^* = 0$ na Y a $x^*(x) = 1$, což by znamenalo
$$1 = x^*(x) = (\varepsilon_1(x))(x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y) = 0.$$
Nakonec ukažme, že $\varepsilon_2(x) = y^{**}$. Dané $y^* \in Y^*$ rozšiřme na $x^* \in X^*$ a počítejme
$$(\varepsilon_2(x))(y^*) = y^*(x) = x^*(x) = (\varepsilon_1(x))(x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y) = y^{**}(y^*).$$

(e) Označme $\varepsilon : X \oplus Y \to (X \oplus Y)^{**}$, $\varepsilon_1 : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2 : Y \to Y^{**}$ příslušná kanonická vnoření. Nechť $z^{**} \in (X \oplus Y)^{**}$. Položme
$$x^{**}(x^*) = z^{**}(x^*, 0),\ x^* \in X^*, \quad y^{**}(y^*) = z^{**}(0, y^*),\ y^* \in Y^*,$$

kde $(x^*,0)$ je prvek v $(X\oplus Y)^*$ definovaný jako $(x^*,0)(x,y) = x^*(x)$ (analogicky definujeme prvek $(0,y^*)$). Dostaneme tím prvky druhých duálů, a tedy existují elementy $x\in X$ a $y\in Y$ tak, že $\varepsilon_1(x) = x^{**}$ a $\varepsilon_2(y) = y^{**}$.

Pak $\varepsilon(x,y) = z^{**}$. Je-li totiž $z^*\in(X\oplus Y)^*$, položíme

$$x^*(x) = z^*(x,0),\ x\in X,\quad y^*(y) = z^*(0,y),\ y\in Y.$$

Pak $z^* = (x^*,0)+(0,y^*)$, a dostáváme tedy

$$\begin{aligned} z^{**}(z^*) &= z^{**}((x^*,0)+(0,y^*)) = x^{**}(x^*)+y^{**}(y^*)\\ &= \varepsilon_1(x)(x^*)+\varepsilon_2(y)(y^*) = x^*(x)+y^*(y)\\ &= z^*(x,y) = \varepsilon_{(x,y)}(z^*). \end{aligned}$$

Tedy $\varepsilon_{(x,y)} = z^{**}$.

(f) Nechť $q : X\to X/Z$ je kvocientové zobrazení a

$$Z^\perp = \{x^*\in X^* : x^* = 0 \text{ na } Z\}.$$

Pro $x^*\in Z^\perp$ označme $Ix^*\in(X/Z)^*$ definované jako

$$Ix^*([x]) = x^*(x),\quad [x]\in X/Z.$$

Zjevně je Ix^* dobře definovaný prvek $(X/Z)^*$ a zobrazení $I : Z^\perp\to(X/Z)^*$ je lineární a spojité.

Pro dané $x^*\in Z^\perp$ a $[x]\in X/Z$ zvolíme $\varepsilon>0$ a najdeme $y\in[x]$ splňující $\|y\|\leqslant\|[x]\|+\varepsilon$. Pak

$$|Ix^*([x])| = |x^*(y)|\leqslant\|x^*\|\,\|y\|\leqslant\|x^*\|\,(\|[x]\|+\varepsilon).$$

Mějme nyní dán prvek $\psi\in(X/Z)^{**}$. Položme

$$y^{**}(x^*) = \psi(Ix^*),\quad x^*\in Z^\perp,$$

a uvažujme nějaké jeho spojité rozšíření $x^{**}\in X^{**}$. Nechť $x\in X$ splňuje $\varepsilon_x = x^{**}$. Chceme ukázat, že $\varepsilon_{[x]} = \psi$. Nechť tedy $\varphi\in(X/Y)^*$ je dáno. Pak $x^* = \varphi\circ q\in Z^\perp$ a $Ix^* = \varphi$, neboť

$$(Ix^*)([x]) = x^*(x) = \varphi\circ q(x) = \varphi([x]),\quad [x]\in X/Z.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{[x]}(\varphi) &= \varphi([x]) = x^*(x) = \varepsilon_x(x^*) = x^{**}(x^*)\\ &= y^{**}(x^*) = \psi(Ix^*) = \psi(\varphi). \end{aligned}$$

□

Příklad 1.2.28. (a) $\mathbb{F}^n$ je reflexivní (s libovolnou normou).

(b) $L^p(X,\mathscr{S},\mu)$ je reflexivní pro každý σ-konečný prostor X a $1<p<\infty$.

(c) c_0, ℓ^1, ℓ^∞, $L^1([0,1])$, $L^\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor $\mathcal{J}$ (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s $\mathcal{J}^{**}$.

Důkaz. (a) $(\mathbb{F}^n,\|\cdot\|_2)$ jest reflexivní, neboť se jedná o Hilbertův prostor. Při ekvivalentní renormaci se reflexivita zachová díky Větě 1.2.27(b).

(b) Nechť $I : L^q\to(L^p)^*$ označuje izometrii z Věty 1.2.19(e). Je-li $\psi\in(L^p)^{**}$ dáno, je $\psi\circ I\in(L^q)^*$. Existuje tedy $f\in L^p$ splňující

$$\int_X gf = \varphi_f(g) = (\psi\circ I)(g),\quad g\in L^q.$$

Pak $\varepsilon_f = \psi$, protože pro $\varphi\in(L^p)^*$ nalezneme $g\in L^q$ s vlastností $Ig = \varphi$ a spočteme

$$\varepsilon_f(\varphi) = \varepsilon_f(Ig) = Ig(f) = \int_X fg = \int_X gf = (\psi\circ I)(g) = \psi(\varphi).$$

(c) Jednoduše se ověří, že funkcionály

$$\begin{aligned} x\in c_0 &\mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n},\\ f\in L^1([0,1]) &\mapsto \int_0^1 tf(t)\,dt,\\ f\in C([0,1]) &\mapsto \int_0^1 (t-\frac{1}{2})f(t)\,dt \end{aligned}$$

nenabývají své normy na příslušných prostorech. Tedy c_0, $L^1([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní. Pro zbývající případy tvrzení plyne z Vět 1.2.27(c) a 1.2.19.

(d) Bez důkazu. □

1.3 Úplnost v Banachových prostorech

Věta 1.3.1 (Baire). *Je-li X úplný metrický prostor a G_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené husté podmnožiny X, je $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá množina.*

Tedy X není první kategorie v sobě, tj. X nelze napsat jako spočetné sjednocení řídkých množin.

Důkaz. Nechť G je daná otevřená neprázdná množina. Hledáme bod $x \in G \cap \bigcap G_n$. Induktivně najdeme otevřené neprázdné množiny $U_n \subset X$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

- $U_1 \subset G$,
- $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$,
- $U_n \subset G \cap G_{n+1}$,
- $\operatorname{diam} U_n \leqslant \frac{1}{n}$.

V prvním kroku najdeme U_1 takto: Jelikož je $G \cap G_1$ otevřená neprázdná množina, lze najít bod $y \in G \cap G_1$ spolu s poloměrem $r \in (0, 1/2)$ tak, že $B(y, r) \subset G \cap G_1$. Položme $U_1 = U(y, r)$.

Máme-li již $U_1, \dots U_n$ sestrojeny, najdeme v otevřené neprázdné množině $U_n \cap G_{n+1}$ bod y. Dále nalezneme $r \in (0, 1/2(n+1))$ takové, že $B(y, r) \subset U_n \cap G_{n+1}$. Pak $U_{n+1} = U(y, r)$ je zřejmě požadovaná množina.

Díky úplnosti prostoru X je průnik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$$

neprázdná množina obsahující právě jeden bod; nazvěme ho x. Pak $x \in U_1 \subset G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x \in U_n \subset G_n$. Tedy $x \in G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. □

Věta 1.3.2 (Princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{F}\} < \infty$,

(ii) pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|Lx\| : L \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Důkaz. Zjevně (i) $\implies$ (ii). Předpokládejme nyní platnost (ii) a pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X : \|Tx\| \leqslant n \text{ pro každé } T \in \mathcal{F}\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající díky (ii) celé X. Jedna z nich, například F_{n_0}, má proto díky úplnosti X neprázdný vnitřek. Tedy existuje koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Je-li $x \in B_X$ a $L \in \mathcal{F}$, je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy

$$\|L(rx)\| \leqslant \|L(x_0 + rx)\| + \|Lx_0\| \leqslant 2n_0.$$

Tedy

$$\|Lx\| \leqslant \frac{2n_0}{r}, \quad x \in B_X,$$

což znamená $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{F}\} \leqslant \frac{2n_0}{r}$. □

Věta 1.3.3 (Banach–Steinhaus). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{L_n\}$ je posloupnost v $L(X, Y)$ je taková, že $\lim_{n\to\infty} L_n x$ existuje pro každé $x \in X$. Pak $L : x \mapsto \lim_{n\to\infty} L_n x$, $x \in X$, je spojitý operátor z X do Y.*

Důkaz. Ze spojitosti vektorových operací plyne, že L je lineární operátor. Protože je pro každé $x \in X$ posloupnost $\{L_n x\}$ konvergentní, je pro každé $x \in X$

$$\sup\{\|L_n x\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Z Věty 1.3.2 plyne konečnost čísla $C = \sup\{\|L_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Tedy pro $x \in X$ máme

$$\|Lx\| = \lim_{n\to\infty} \|L_n x\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|L_n\| \|x\| \leqslant C\|x\|.$$

Tedy $\|L\| \leqslant C$. □

Definice 1.3.4. Zobrazení $f : X \to Y$ metrického prostoru X do metrického prostoru Y je otevřené, pokud $f(U)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $U \subset X$. (Tento pojem lze uvažovat i v kategorii topologických prostorů.)

Věta 1.3.5 (O otevřeném obrazení)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Lemma 1.3.6. *Nechť X je Banachův prostor a Y normovaný lineární prostor. Je-li $r, s > 0$ a $T \in L(X,Y)$ splňuje $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

Důkaz. Nejprve si povšimneme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat případ $r = s = 1$. Vskutku, máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in L(X,Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $U(0,1) \subset \overline{(\frac{r}{s}T)(U(0,1))}$, a tedy $U(0,1) \subset (\frac{r}{s}T)(U(0,1))$, tj. $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.

Uvažujme tedy případ $r = s = 1$ a označme jako U_X (respektive U_Y) jednotkovou kouli v X (respektive v Y). Nechť $z \in U_Y$ je dáno. Najdeme $\delta \in (0,1)$ takové, že $\|z\| < 1-\delta$. Ukážeme, že $y = \frac{z}{1-\delta} \in U_Y$ leží v $\frac{1}{1-\delta}T(U_X) = T(\frac{1}{1-\delta}U_X)$. Pak totiž pro $x \in \frac{1}{1-\delta}U_X$ splňující $y = Tx$ platí

$$z = (1-\delta)y = (1-\delta)Tx = T((1-\delta)x) \in T(U_X).$$

Induktivně najdeme prvky $y_0, y_1, \dots$ v Y takové, že

- $y_0 = 0$,
- $\|y - y_n\| < \delta^n$, $n \geqslant 0$,
- $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$, $n \in \mathbb{N}$.

Zjevně je volbou $y_0 = 0$ druhá podmínka splněna. Předpokládejme nyní, že $y_0, \dots, y_{n-1}$ splňující požadované podmínky již máme nalezeny. Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}U_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(U_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}U_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}U_X)$ splňující

$$\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n.$$

Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky. Tím je konstrukce provedena.

Nyní najdeme pro $n \in \mathbb{N}$ vektory $x_n \in \delta^{n-1}U_X$ takové, že $y_n - y_{n-1} = Tx_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ a X je úplný, je prvek $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dobře definován, přičemž platí

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Tedy

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} y_k = y.$$

Tím je důkaz lemmatu dokončen. □

Důkaz Věty 1.3.5. Díky linearitě zobrazení T stačí dokázat, že $T(U_X)$ obsahuje okolí 0. Protože

$$Y = TX = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU_X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U_X)$$

a Y je úplný, existuje $n \in Y$, $y_0 \in Y$ a $r > 0$ takové, že

$$U(y_0, r) \subset \overline{nT(U_X)}.$$

Jelikož je množina $\overline{nT(U_X)}$ symetrická, je i

$$U(-y_0, r) \subset \overline{nT(U_X)}.$$

Pro $y \in U(0,r)$ pak díky konvexitě množiny $\overline{nT(U_X)}$ platí

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{nT(U_X)}.$$

Tedy $U(0, \frac{r}{n}) \subset \overline{T(U_X)}$. Z Lemmatu 1.3.6 dostáváme $U(0, \frac{r}{n}) \subset T(U_X)$. □

Věta 1.3.7. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je surjektivní operátor.*

(a) Je-li T prosté, je T^{-1} spojité; tedy T je izomorfizmus X na Y.

(b) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ splňující $Tx = y$ a $\|x\| \leqslant c\|y\|$.

(c) Prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

Důkaz. (a) Spojitost T^{-1} plyne z otevřenosti T, tedy z Věty 1.3.5.

(b) Díky Větě 1.3.5 nalezneme $r > 0$ takové, že $T(B_X) \supset rB_Y$. Je-li pak $y \in Y$ nenulové, je $\frac{r}{\|y\|} y \in rB_Y$, a tedy existuje $x \in B_X$ splňující $Tx = \frac{r}{\|y\|} y$. Pak $T(\frac{\|y\|}{r} x) = y$ a $\|\frac{\|y\|}{r} x\| \leqslant \frac{1}{r}\|y\|$. Tedy tvrzení (b) platí s konstantou $c = \frac{1}{r}$.

(c) Definujme $\widehat{T} : X/\operatorname{Ker} T \to Y$ jako $\widehat{T}[x] = Tx$. Pak $\widehat{T}$ je dobře definované prosté a surjektivní zobrazení. Navíc je spojité. Máme-li totiž $[x] \in U_{X/\operatorname{Ker} T}$, existuje $y \in [x] \cap U_X$. Pak

$$\left\|\widehat{T}[x]\right\| = \|Ty\| \leqslant \|T\| \, \|y\| \leqslant \|T\| \,.$$

Tedy $\left\|\widehat{T}\right\| \leqslant \|T\|$ a $\widehat{T}$ je spojité. Proto je $\widehat{T}$ izomorfizmus dle (a). □

Definice 1.3.8. Je-li $f : X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, nazýváme množinu

$$\operatorname{gr} f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

grafem zobrazení f.

Zobrazení $f : X \to Y$ metrického prostoru X do metrického prostoru Y má uzavřený graf (je uzavřené), pokud je množina $\operatorname{gr} f$ uzavřená v $X \times Y$.

Věta 1.3.9 (O uzavřeném grafu)**.** *Jsou-li X, Y Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení s uzavřeným grafem, pak T je spojité.*

Důkaz. Nechť G je graf T a P, Q jsou projekce G na X, respektive Y. Pak $P : G \to X$ je spojitá bijekce, tedy i P^{-1} je spojité. Pak je ale i

$$T = Q \circ P^{-1}$$

spojité. □

Věta (viz Věta 1.1.25)**.** *Je-li X Banachův prostor a $X = Y \oplus Z$, kde Y, Z jsou uzavřené podprostory X, platí $X = Y \oplus_t Z$.*

Důkaz. Nechť $P : Y \oplus Z \to Y$ je projekce daná rozkladem $X = Y \oplus Z$. Díky Větě 1.3.9 stačí dokázat, že P je uzavřené zobrazení. Nechť tedy $x_n \to x$ a $Px_n \to y$. Pak $y \in Y$ a platí $x_n - Px_n \in Z$, proto $x - y = \lim_{n\to\infty}(x_n - Px_n) \in Z$. Tedy

$$x = y + (x - y), \quad y \in Y, x - y \in Z.$$

Proto $Px = y$. Tím je důkaz dokončen. □

1.4 Operátory

1.4.1 Duální operátory, adjungované operátory a zdola omezené operátory

Definice 1.4.1. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a T je v $L(X, Y)$. Pak definujeme *duální* (resp. *adjungovaný*) operátor $T' \colon Y^* \to X^*$ jako

$$T'y^*(x) = y^*(Tx), \quad x \in X,$$

kde $y^* \in Y^*$. (Ve Větě 1.4.2 dokážeme, že T' je dobře definovaný.)

Operátor $(T')'$ (tj. duální k T') pak značíme T''.

Věta 1.4.2. *Nechť X, Y, Z jsou normované linární prostory.*

(a) Je-li $T \in L(X, Y)$, je $T'y^* \in X^*$ pro každé $y^* \in Y^*$. Navíc $T' \in L(Y^*, X^*)$ a $\|T\| = \|T'\|$.

(b) $T \mapsto T'$ je lineární zobrazení z $L(X, Y)$ do $L(Y^*, X^*)$.

(c) Nechť $S \in L(Y, Z)$. Pak $(ST)' = T'S'$. Nechť $I \colon X \to X$ je identické zobrazení. Pak $I' = I$.

Důkaz. (a) Pro dané $y^* \in Y^*$ je zobrazení $x \in X \mapsto y^*(Tx)$ zjevně spojité a lineární, tedy se jedná o element X^*. Linearita zobrazení $T'\colon y^* \in Y^* \mapsto y^* \circ T$ je zjevná. Navíc platí

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|T'y^*\| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \sup_{x\in B_X} |T'y^*(x)| \\ &= \sup_{x\in B_X} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |T'y^*(x)| = \sup_{x\in B_X} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*(Tx)| \\ &= \sup_{x\in B_X} \|Tx\| = \|T\|,\end{aligned}$$

a tedy $T' \in L(Y^*, X^*)$ a $\|T\| = \|T'\|$.

(b) Linearita zobrazení $T \mapsto T'$ se snadno ověří a tvrzení (c) plyne z přímočarého výpočtu. □

Věta 1.4.3. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedno $T^* \in L(H_2, H_1)$ takové, že $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ pro každé $x \in H_1$, $y \in H_2$.*

Dále $T^* = I_1^{-1}T'I_2$, kde $I_i : H_i \to H_i^*$, $i = 1, 2$, jsou příslušné sdruženě–lineární izometrie z Věty 1.2.17.

Důkaz. Nechť $y \in H_2$ je dáno. Pak $f_y : x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ je prvek $(H_1)^*$, a tedy dle Věty 1.2.17 existuje právě jeden prvek $T^*y \in H_1$ splňující

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad x \in H_1.$$

Nechť nyní I_1 (respektive I_2) je sdruženě-lineární izometrie H_1 na $(H_1)^*$ (respektive H_2 na $(H_2)^*$). Pak

$$\begin{aligned} I_1x_0 &= f_{x_0} : x \in H_1 \mapsto \langle x, x_0\rangle, \qquad x_0 \in H_1, \\ I_2y_0 &= f_{y_0} : y \in H_2 \mapsto \langle y, y_0\rangle, \qquad y_0 \in H_2.\end{aligned}$$

Nechť $y_0 \in H_2$. Pak $T'(I_2y_0) = T'(f_{y_0}) \in (H_1)^*$, tedy existuje právě jedno $x_0 \in H_1$ splňující

$$T'(f_{y_0}) = f_{x_0} \ (= I_1x_0).$$

Pak pro $x \in H_1$ máme

$$\langle x, x_0\rangle = f_{x_0}(x) = (T'f_{y_0})(x) = f_{y_0}(Tx) = \langle Tx, y_0\rangle = \langle x, T^*y_0\rangle,$$

a tedy $x_0 = T^*y_0$. To neříká nic jiného než, že

$$T^*y_0 = x_0 = I_1^{-1}T'I_2(y_0).$$

□

Definice 1.4.4. Operátor T^* z předcházející věty nazýváme adjungovaným operátorem k T.

Věta 1.4.5. *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li $T \in L(H_1, H_2)$, je $(T^*)^* = T$. Pokud $T \in L(H_1, H_2)$ a $S \in L(H_2, H_3)$, platí $(TS)^* = S^*T^*$. Je-li $I\colon H_1 \to H_1$ identické zobrazení, platí $I^* = I$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě-lineární izometrie $L(H_1, H_2)$ na $L(H_2, H_1)$.

Důkaz. (a) Protože

$$\forall x \in H_1, y \in H_2 : \langle (T^*)^*x, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1} = \langle Tx, y\rangle_{H_2},$$

platí $T^{**} = T$. Zbývající rovnosti se snadno ověří.

(b) Pro pro $\alpha \in \mathbb{F}$ platí

$$\forall x \in H_1, y \in H_2 : \langle x, (\alpha T)^*y\rangle = \langle (\alpha T)x, y\rangle = \alpha\langle x, T^*y\rangle = \langle x, (\overline{\alpha}T^*)(y)\rangle.$$

Tedy $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$ a $T \mapsto T^*$ je sdruženě-lineární zobrazení. Je izometrické z Věty 1.4.2 a 1.4.3. Konečně je na, protože pro dané $S \in L(H_2, H_1)$ platí $T = S^* \in L(H_1, H_2)$ a $T^* = S^{**} = S$ z (a). □

Definice 1.4.6. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, definujeme

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(a) = 0 \text{ pro každé } a \in A\}.$$

Analogicky pro množinu $B \subset X^*$ položme

$$B_\perp = \{x \in X : b^*(x) = 0 \text{ pro každé } b^* \in B\}.$$

Poznámka 1.4.7. Je-li H Hilbertův prostor, $A \subset H$ a $I : H \to H^*$ identifikace z Věty 1.2.17, pak

$$I^{-1}(A^\perp) = \{x \in H : \langle a, x\rangle = 0 \text{ pro všechna } a \in A\} \text{ } (= A^\perp \text{ ve smyslu Hilbertova prostoru}).$$

Lemma 1.4.8. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

(a) $A^\perp$ je uzavřený podprostor X^* (je dokonce w^*–uzavřený),

(b) $B_\perp$ je uzavřený podprostor X,

(c) platí $\overline{\mathrm{span}}A = (A^\perp)_\perp$.

Důkaz. (a) Zřejmě $A^\perp$ je podprostor X^*. Jestliže $\{x_n^*\}$ je posloupnost v $A^\perp$ konvergující k $x^* \in X^*$ a $a \in A$, pak

$$x^*(a) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(a) = 0.$$

Tedy $x^* \in A^\perp$.

Tvrzení (b) se dokáže obdobně.

(c) Zřejmě $A \subset (A^\perp)_\perp$. Protože je $B_\perp$ uzavřený podprostor v X pro každou $B \subset X^*$ dle (b), platí $\overline{\mathrm{span}}A \subset (A^\perp)_\perp$. Je-li $x \in X \setminus \overline{\mathrm{span}}A$, existuje $x^* \in X^*$ splňující $x^*(x) = 1$ a $x^* = 0$ na $\overline{\mathrm{span}}A$ (viz Věta 1.2.8). Tedy $x^* \in A^\perp$ a $x^*(x) \neq 0$. Proto $x \notin (A^\perp)_\perp$. □

Věta 1.4.9. *Jsou-li X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$, platí*

(a) $\operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T')_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T')_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T'}^{w^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Důkaz. Tvrzení (a) dostaneme z ekvivalencí

$$\begin{aligned} y^* \in \operatorname{Ker} T' &\iff T'y^* = 0 \iff \forall x \in X : T'y^*(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in X : y^*(Tx) = 0 \iff y^* \in (\operatorname{Rng} T)^\perp. \end{aligned}$$

Tvrzení (b) dokážeme obdobně:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} T &\iff Tx = 0 \iff \forall y^* \in Y^* : y^*(Tx) = 0 \\ &\iff \forall y^* \in Y^* : (T'y^*)(x) = 0 \iff x \in (\operatorname{Rng} T')_\perp. \end{aligned}$$

(c) Protože $\operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Rng} T)^\perp$ dle (a), platí

$$(\operatorname{Ker} T')_\perp = ((\operatorname{Rng} T)^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{Rng} T}$$

dle Lemmatu 1.4.8(c).

Důkaz (d) nebude. □

Lemma 1.4.10. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ pro každé $x \in X$,

(ii) $\inf\{\|Tx\| : x \in S_X\} > 0$,

(iii) T je izomorfizmus do.

Jsou-li X, Y úplné, jsou předcházející podmínky ekvivalentní s podmínkou

(iv) $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený a* $T : X \to \operatorname{Rng} T$ *je prostý.*

Důkaz. Zřejmě (i) $\iff$ (ii) a (iii) $\iff$ (i) dle Věty 1.1.35(a).

Nechť X, Y jsou úplné. Pak (iii) $\implies$ (iv) dle Věty 1.1.35(c) a (iv) $\implies$ (iii) díky Větě 1.3.7(a). □

Definice 1.4.11. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Operátor $T \in L(X, Y)$ splňující (ii) z předcházející věty se nazývá *zdola omezený* operátor.

Lemma 1.4.12. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak $T'' \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T$, kde ε_X a ε_Y značí kanonická vnoření do druhých duálů.*

Důkaz. Pro $x \in X$ a $y^* \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(y^*) = y^*(Tx) = (T'y^*)(x) = (\varepsilon_X(x))(T'y^*) = (T''\varepsilon_X(x))(y^*),$$

tedy $\varepsilon_Y(Tx) = (T''\varepsilon_X)(x)$. □

Věta 1.4.13. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$.*

(a) Operátor T je izomorfizmus do Y právě tehdy, když T' je na.

(b) Operátor T je na právě tehdy, když T' je izomorfizmus do X^*.

(c) T je izomorfizmus právě tehdy, když T' je izomorfizmus.

Lemma 1.4.14. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pokud existuje $c > 0$ takové, že $\|T'y^*\| \geqslant c\|y^*\|$ pro $y^* \in Y^*$, pak platí $T(U_X) \supset cU_Y$.*

Důkaz. Ukažme, že

$$cU_Y \subset \overline{T(U_X)}. \tag{1.16}$$

Nechť $y_0 \in Y \setminus \overline{T(U_X)}$. Pak dle Věty 1.2.10(b) existuje $\varphi \in Y^*$ a $d \in \mathbb{R}$ splňující

$$\operatorname{Re}\varphi(y_0) > d > \sup\{\operatorname{Re}\varphi(y) : y \in \overline{T(U_X)}\}.$$

Protože $T(U_X)$ obsahuje 0, je $d > 0$. Položme $y^* = \frac{1}{d}\varphi$. Pak

$$|y^*(y_0)| \geqslant \operatorname{Re} y^*(y_0) = \frac{1}{d}\operatorname{Re}\varphi(y_0) > 1.$$

Nechť nyní $x \in U_X$ je libovolné. Nalezneme $\alpha \in \mathbb{F}$, $|\alpha| = 1$, splňující

$$|\varphi(Tx)| = \alpha\varphi(Tx).$$

Pak $\alpha x \in U_X$, a tedy platí

$$|y^*(Tx)| = \left|\frac{1}{d}\varphi(Tx)\right| = \frac{\alpha}{d}\varphi(Tx) = \frac{1}{d}\varphi(T(\alpha x)) = \frac{1}{d}\operatorname{Re}(\varphi(T(\alpha x))) \leqslant 1.$$

Tedy

$$|y^*(y_0)| > 1 \geqslant \sup\{|y^*(y)| : y \in \overline{T(U_X)}\}.$$

Pak máme

$$c\|y^*\| \leqslant \|T'y^*\| = \sup_{x \in U_X} |T'y^*(x)| = \sup_{x \in U_X} |y^*(Tx)| \leqslant 1.$$

Tedy

$$1 < |y^*(y_0)| \leqslant \|y^*\|\|y_0\| \leqslant \frac{1}{c}\|y_0\|.$$

Tím pádem $\|y_0\| > c$ a $y_0 \notin cU_Y$. Tím je ověřeno (1.16).

Z Lemmatu 1.3.6 pak plyne $T(U_X) \supset cU_Y$. □

Důkaz Věty 1.4.13. (a) Nechť $T : X \to \operatorname{Rng} T$ je izomorfizmus a $x^* \in X^*$ je dáno. Pak $x^* \circ T^{-1}$ je spojitý funkcionál na $\operatorname{Rng} T$. Lze ho tedy rozšířit na $y^* \in Y^*$. Pak pro $x \in X$ platí

$$(T'y^*)(x) = y^*(Tx) = (x^* \circ T^{-1})(Tx) = x^*(x).$$

Tedy $T'y^* = x^*$ a T' je na.

Nechť nyní T' je na. Protože

$$\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T')_\perp = (X^*)_\perp = \{0\}$$

dle Věty 1.4.9(b), je T prostý.

Ukažme, že je zdola omezený. Z Věty 1.3.7(b) máme $C > 0$ splňující

$$\forall x^* \in X^* \exists y^* \in Y^* : (T'y^* = x^*) \ \& \ (\|y^*\| \leqslant C\|x^*\|).$$

Nechť $x \in X$ je dáno. Nalezneme $x^* \in B_{X^*}$ splňující $\|x\| = |x^*(x)|$. Nechť $y^* \in CB_{Y^*}$ splňuje $T'y^* = x^*$. Pak

$$\|x\| = |x^*(x)| = \left|(T'y^*)(x)\right| = |y^*(Tx)| = \leqslant C\|Tx\|.$$

Tedy $\frac{1}{C}$ je konstanta požadovaná v Lemmatu 1.4.10.

(b) Je-li T na, pak z rovnosti $\operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Rng} T)^\perp = \{0\}$ plyne prostota T' (viz Věta 1.4.9(a)). Nechť $C > 0$ je dle tvrzení (b) Věty 1.3.7, tj.

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X\colon (Tx = y)\ \&\ (\|x\| \leqslant C\|y\|).$$

Mějme dáno $y^* \in S_{Y^*}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $y \in S_Y$ takové, že $|y^*(y)| > 1-\varepsilon$. Nechť $x \in CB_X$ splňuje $Tx = y$. Pak

$$\|T'y^*\| \geqslant \left|(T'y^*)(\frac{x}{C})\right| = \frac{1}{C}\,|y^*(Tx)| = \frac{1}{C}\,|y^*(y)| \geqslant \frac{1}{C}(1-\varepsilon).$$

Tedy

$$\inf\{\|T'y^*\|\colon y^* \in S_{Y^*}\} \geqslant \frac{1}{C}$$

a T' je zdola omezené zobrazení. Tedy je to izomorfizmus dle Lemmatu 1.4.10.

Obráceně, nechť T' je izomorfizmus do. Pak existuje $c > 0$ splňující $\|T'y^*\| \geqslant c\|y^*\|$, $y^* \in Y^*$. Dle Lemmatu 1.4.14 platí $T(U_X) \supset cU_Y$, a tedy T je na.

Tvrzení (c) plyne kombinací (a) a (b). □

1.4.2 Kompaktní operátory a jejich vlastnosti

Definice 1.4.15. Lineární zobrazení $T : X \to Y$ normovaného lineárního prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y se nazývá *kompaktním operátorem*, pokud je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y pro každou $A \subset X$ omezenou (tj. $\overline{T(A)}$ je kompaktní v Y). Množinu kompaktních operátorů z X do Y značíme $K(X,Y)$. Symbol $K(X)$ znamená $K(X,X)$.

Zobrazení T je *konečně dimenzionální operátor*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalších úvahách budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečně dimenzionálními operátory, označme proto množinu všech spojitých konečně dimenzionálních operátorů z X do Y jako $F(X,Y)$. Symbol $F(X)$ znamená $F(X,X)$.

Tvrzení 1.4.16. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Platí $K(X,Y) \subset L(X,Y)$.

(b) Následující tvrzení jsou pro lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ ekvivalentní:

- *(i) T je kompaktní,*
- *(ii) je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, má $\{Tx_n\}$ vybranou konvergentní podposloupnost,*
- *(iii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.*

(c) Je-li Y Banachův prostor a $T : X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *(i) T je kompaktní,*
- *(ii) $T(B_X)$ je totálně omezená.*

Důkaz. (a) Je-li T kompaktní, je $T(B_X)$ relativně kompaktní, a tedy omezená. Proto $T \in L(X,Y)$.

(b) (i) $\implies$ (ii) Množina $\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ je relativně kompaktní, a tedy lze vybrat konvergentní podposloupnost z $\{Tx_n\}$. (ii) $\implies$ (iii) Dle (ii) lze z každé posloupnosti v $T(B_X)$ vybrat konvergentní podposloupnost. Tedy $T(B_X)$ je relativně kompaktní. (iii) $\implies$ (i) Je-li $A \subset X$ omezená, existuje $C > 0$ splňující $A \subset CB_X$. Pak $T(A) \subset CT(B_X)$ je též relativně kompaktní.

(c) Plyne z (b) pomocí faktu, že v úplných prostorech je množina totálně omezená právě tehdy, když je relativně kompaktní. □

Věta 1.4.17 (Vlastnosti kompaktních operátorů)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení.*

(a) Zobrazení T je v $F(X,Y)$ právě tehdy, když existují $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $Tx = \sum_{i=1}^n x_i^*(x) y_i$, $x \in X$.

(b) Platí $F(X,Y) \subset\subset K(X,Y) \subset\subset L(X,Y)$.

(c) Pokud je Y Banachův prostor, je $K(X,Y)$ uzavřený v $L(X,Y)$.

(d) Kompaktní operátor zůstane kompaktním, složí-li se zprava či zleva se spojitým operátorem.

Důkaz. (a) Je-li T tvaru $Tx = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i$, pak je zjevně spojitý a $\operatorname{Rng} T \subset \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ je konečně dimenzionální. Obráceně, nechť je $\operatorname{Rng} T$ konečně dimenzionální a $\{y_1, \dots, y_n\}$ je báze $\operatorname{Rng} T$. Nechť $\{y_1^*, \dots, y_n^*\} \subset (\operatorname{Rng} T)^*$ jsou funkcionály splňující

$$y_i^*(y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Pak

$$x_i^* = y_i^* \circ T \in X^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

a

$$Tx = \sum_{i=1}^n y_i^*(Tx)y_i = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i.$$

(b) Jsou-li $T_1, T_2 \in F(X,Y)$, je $\operatorname{Rng}(T_1 + T_2) \subset \operatorname{Rng} T_1 + \operatorname{Rng} T_2$, tedy je též konečně dimenzionální. Zjevně $cT \in F(X,Y)$ pro $c \in \mathbb{F}$ a $T \in F(X,Y)$.

Dále platí, že $K(X,Y) \subset\subset L(X,Y)$. Jsou-li operátory $T_1, T_2 \in K(X,Y)$ a $\{x_n\}$ je omezená posloupnost, lze vybrat rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takovou, že $\{T_1 x_{n_k}\}$ je konvergentní. Dále nalezneme podposloupnost $\{n_{k_j}\}$, že $\{T_2 x_{n_{k_j}}\}$ je konvergentní. Pak je posloupnost $\{(T_1 + T_2)(x_{n_{k_j}})\}$ konvergentní. Tedy $T_1 + T_2 \in K(X,Y)$. Zřejmě $cT \in K(X,Y)$ pro $c \in \mathbb{F}$ a $T \in K(X,Y)$.

(c) Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost v $K(X,Y)$ konvergující k $T \in L(X,Y)$. Pro $\varepsilon > 0$ dané nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$ takovou, že $\{T_n x_1, \dots, T_n x_k\}$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť pro $T_n(B_X)$. Ukážeme, že $\{Tx_1, \dots, Tx_k\}$ je konečná ε-síť pro $T(B_X)$. Pro $x \in B_X$ totiž nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\|T_n x - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$\|Tx - Tx_i\| \leqslant \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|T_n x_i - T_n x_i\| < \|T - T_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n - T\| < \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená a T kompaktní dle Tvrzení 1.4.16(c).

(d) Nechť $T : X \to Y$ je kompaktní. Je-li $S : Y \to Z$ spojitý a $\{x_n\}$ omezená posloupnost v B_X, lze vybrat konvergentní posloupnost z $\{Tx_n\}$. Protože se konvergentní posloupnosti zachovávají při spojitém zobrazení, lze i z posloupnosti $\{STx_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost. Tedy je $S \circ T$ kompaktní. Je-li $S : Z \to X$ spojitý a $\{z_n\}$ omezená posloupnost v B_Z, je i $\{Sz_n\}$ omezená. Tedy lze vybrat konvergentní podposloupnost z $\{TSz_n\}$ a $T \circ S$ je kompaktní. □

Příklad 1.4.18. Nechť $k \in L^2([0,1]^2)$. Pak operátor $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definovaný jako

$$Kf(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \quad f \in L^2[0,1],$$

je kompaktní operátor.

Důkaz. Pro $l \in L^2([0,1]^2)$ označme K_l operátor definovaný pomocí výše uvedeného vzorce. Pak pro $f \in L^2([0,1])$ platí

$$\|K_l f\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 l(t,s)f(s)\,ds \right|^2 dt \leqslant \int_0^1 \left(\left(\int_0^1 |f(s)|^2\,ds \right) \left(\int_0^1 |l(t,s)|^2\,ds \right) \right) dt = \|f\|^2 \|l\|^2.$$

Tedy vskutku $K_l \in L(L^2([0,1]))$ a navíc platí $\|K_l\| \leqslant \|l\|$.

Položme

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(t)g_i(s) \colon f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in C([0,1]), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pak $\mathcal{A}$ je podprostor $C([0,1]^2)$ obsahující konstanty, oddělující body a uzavřený na komplexní sdružení. Navíc součin dvou elementů z $\mathcal{A}$, řekněme $\sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)$ a $\sum_{j=1}^m c_j(t)d_j(s)$, splňuje

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s) \right) \left(\sum_{j=1}^m c_j(t)d_j(s) \right) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (a_i(t)c_j(t))\,(b_i(s)d_j(s)) \in \mathcal{A}.$$

Tedy $\mathcal{A}$ je navíc algebra. Dle Stoneovy-Weierstrassovy věty je její uzávěr roven $C([0,1]^2)$. Protože toto je hustý podprostor $L^2([0,1]^2)$ (viz Věta 1.5.17(c)), je $\mathcal{A}$ hustá v $L^2([0,1]^2)$.

Pro danou funkci $k \in L^2([0,1]^2)$ tedy existuje posloupnost $\{k_n\}$ funkcí z $\mathcal{A}$ konvergujících v normě prostoru $L^2([0,1]^2)$ ke k. Tedy $k_n = \sum_{i=1}^{m_n} f_i^n(t)g_i^n(s)$, kde funkce vyskytující se v sumě jsou prvky $C([0,1])$. Pak

$$\|K_{k_n} - K\| = \|K_{k_n - k}\| \leqslant \|k_n - k\| \to 0.$$

Nyní si stačí jen uvědomit, že

$$K_{k_n} f = \sum_{i=1}^{m_n} f_i^n \int_0^1 g_i^n(s) f(s)\, ds = \sum_{i=1}^{m_n} \langle f, \overline{g_i^n} \rangle f_i^n,$$

tedy každý operátor K_{k_n} je elementem $F(L^2([0,1]^2))$. Z Věty 1.4.17 plyne, že K je kompaktní operátor. □

Věta 1.4.19 (Arzelà–Ascoli)**.** *Nechť K je kompaktní metrický (nebo topologický) prostor a $F \subset C(K)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) F je relativně kompaktní,

(ii) F je omezená a stejně spojitá.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Každá relativně kompaktní množina je omezená. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou $\frac{\varepsilon}{3}$-síť $\{f_1, \dots, f_n\} \subset F$ a fixujeme bod $x \in K$. Nechť U je takové okolí x, že

$$\operatorname{diam} f_i(U) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak pro $y \in U$ a $f \in F$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $\|f - f_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$ a dostaneme

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy F je stejně spojitá množina.

(ii) $\implies$ (i) Nechť $\{f_m\}$ je posloupnost v F. Ukážeme, že z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost. Vezmeme $n \in \mathbb{N}$ pevné a pro každé $x \in K$ najdeme jeho okolí U_x takové, že pro každé $f \in F$ platí $\operatorname{diam} f(U) < \frac{1}{n}$. Díky kompaktnosti lze z $\{U_x : x \in K\}$ vybrat konečné podpokrytí $\mathcal{U}_n$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $U \in \mathcal{U}_n$ najdeme bod $x_{n,U} \in U$ (předpokládáme, že pokrytí $\mathcal{U}_n$ jsou tvořena neprázdnými množinami). Položme $D = \{x_{n,U} : n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{U}_n\}$. Díky omezenosti množiny F lze diagonálním výběrem nalezneme podposloupnost $\{f_{m_j}\}$ takovou, že $\{f_{m_j}(d)\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje pro každé $d \in D$.

Podrobněji, nechť $D = \{d_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ je očíslování množiny D. Induktivně konstruujeme nekonečné množiny $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ takové, že posloupnost $\{f_l(d_p)\}_{l \in N_p}$ je konvergentní pro každé $p \in \mathbb{N}$. Pak lze vybrat indexy $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ splňující $m_p \in N_p$ pro každé $p \in \mathbb{N}$. Zřejmě pak pro každé $p \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{f_{m_j}(d_p)\}_{j=1}^{\infty}$ konvergentní.

Pak platí, že $\{f_{m_j}\}$ je cauchyovská.

Abychom to ukázali, zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ splňuje $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Nechť $j_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $j_1, j_2 \geqslant j_0$ platí $|f_{n_{j_1}}(d) - f_{n_{j_2}}(d)| < \varepsilon$ pro všechny body $d \in D$ dané pokrytím $\mathcal{U}_n$. Je-li $x \in K$ dáno, najdeme $U \in \mathcal{U}_n$ obsahující x a nechť d značí příslušný bod $x_{n,U}$. Pak pro tato j_1, j_2 platí

$$|f_{m_{j_1}}(x) - f_{m_{j_2}}(x)| \leqslant |f_{m_{j_1}}(x) - f_{m_{j_1}}(d)| + |f_{m_{j_1}}(d) - f_{m_{j_2}}(d)| + |f_{m_{j_2}}(d) - f_{m_{j_2}}(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Tedy

$$\|f_{m_{j_1}} - f_{m_{j_2}}\| = \sup_{x \in K} |f_{m_{j_1}}(x) - f_{m_{j_2}}(x)| \leqslant 3\varepsilon, \quad j_1, j_2 \geqslant j_0,$$

a $\{f_{m_j}\}$ je cauchyovská. □

Věta 1.4.20 (Schauder)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) T je kompaktní,

(ii) T' je kompaktní.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $T : X \to Y$ je kompaktní. Pak $K = \overline{T(B_X)}$ je kompaktní a množina

$$F = \{y^*|_K : y^* \in B_{Y^*}\}$$

je tvořena 1-lipschitzovskými funkcemi. Navíc pro každé $y^* \in B_{Y^*}$ je

$$\|y^*|_K\|_{C(K)} = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| \leqslant \|y^*\| \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leqslant \|T\|.$$

Tedy $F \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých funkcí na kompaktním prostoru K.

Nechť $\{y_n^*\}$ je posloupnost v B_{Y^*}. Pak dle Věty 1.4.19 lze vybrat rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takových, že $\{y_{n_k}^*|_K\}$ je konvergentní v $C(K)$. Pak $\{T'y_{n_k}^*\}$ je cauchyovská, protože pro indexy $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\|T'y_{n_{k_1}}^* - T'y_{n_{k_2}}^*\| &= \sup_{x\in B_X} |(T'y_{n_{k_1}}^* - T'y_{n_{k_2}}^*)(x)| = \sup_{x\in B_X} |y_{n_{k_1}}^*(Tx) - y_{n_{k_2}}^*(Tx)| \\ &= \sup_{k\in K} |y_{n_{k_1}}^*(k) - y_{n_{k_2}}^*(k)| = \|y_{n_{k_1}}^*|_K - y_{n_{k_2}}^*|_K\|_{C(K)}.\end{aligned}$$

Tedy je i konvergentní a T' je kompaktní.

(ii) $\implies$ (i) Uvažujme kanonická vnoření $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$. Je-li T' kompaktní, je i T'' kompaktní z první části důkazu. Podle Věty 1.4.17(d) je tedy

$$T = \varepsilon_Y^{-1} \circ T'' \circ \varepsilon_X$$

kompaktní (viz Lemma 1.4.12). □

1.4.3 Spektrální teorie kompaktních operátorů

V této kapitole jsou všechny prostory Banachovy a nad $\mathbb{C}$.

Definice 1.4.21. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Operátor $S \in L(X)$ se nazývá *inverzní* k T, pokud platí

$$ST = TS = I.$$

Jelikož za chvíli ukážeme, že inverze operátoru je jednoznačně určena, má smysl ji značit symbolem T^{-1}.

Lemma 1.4.22. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Inverze operátoru je jednoznačně určena,

(b) Jsou-li S a T invertibilní operátory, je operátor ST též invertibilní a platí $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Důkaz. (a) Jsou-li S_1, S_2 dvě inverze operátoru T, pak $S_1 = S_1 I = S_1 T S_2 = I S_2 = S_2$.

(b) Zřejmě

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = I = T^{-1}S^{-1}(ST).$$

□

Lemma 1.4.23. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) T je invertibilní,

(ii) T je prostý a na,

(iii) T je izomorfizmus X na X.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Zjevně $x = T(T^{-1}x)$, $x \in X$, a tedy T je na. Dále $0 = Tx$ implikuje $x = T^{-1}Tx = T^{-1}0 = 0$, a tedy T je prostý.

(ii) $\implies$ (iii) plyne z Věty 1.3.7(a) a (iii) $\implies$ (i) je zřejmé. □

Definice 1.4.24. Nechť T je spojitý operátor na Banachově prostoru X. Komplexní číslo λ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T, pokud $\mathrm{Ker}(T-\lambda I) \neq \{0\}$. Tento prostor je pak *vlastním prostorem příslušným číslu* λ. Množina všech vlastních čísel tvoří *bodové spektrum* a značí se $\sigma_p(T)$.

Spektrum operátoru T tvoří (značíme $\sigma(T)$) všechna čísla $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které není operátor $T - \lambda I$ invertibilní (tj. nemá inverzi). Množina $\rho(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$ je *rezolventní množina* a zobrazení

$$\lambda \in \rho(T) \mapsto (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$$

se nazývá *rezolventní funkce*.

Věta 1.4.25. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak $\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$ a platí*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}.$$

Důkaz. Bez důkazu. □

Věta 1.4.26. *(a) Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

(b) Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Důkaz. (a) Protože $(T-\lambda I)' = T' - \lambda I$ (viz Věta 1.4.2(a)) a operátor je invertovatelný právě tehdy, když operátor k němu duální je invertovatelný (Věta 1.4.13(c)), $\sigma(T) = \sigma(T')$ pro $T \in L(X)$.

(b) Protože $(T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ (viz Věta 1.4.2(a)) a operátor je invertovatelný právě tehdy, když operátor k němu adjungovaný je invertovatelný (Věta 1.4.13(c) a 1.4.3), $\sigma(T^*)$ je rovno množině sdružených komplexních čísel ze $\sigma(T)$.

□

Věta 1.4.27. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in K(X)$.*

(a) Pokud $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, je* $\dim \operatorname{Rng} T < \infty$.

(b) Pokud $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *je* $\dim \operatorname{Ker}(T-\lambda I) < \infty$.

(c) Pokud $\dim X = \infty$, *je* $0 \in \sigma(T)$.

Důkaz. (a) Je-li $\operatorname{Rng} T$ uzavřený, je $T : X \to \operatorname{Rng} T$ otevřené zobrazení dle Věty 1.3.5. Tedy relativně kompaktní množina $T(B_X)$ obsahuje nějaký násobek $B_{\operatorname{Rng} T}$, tedy i $B_{\operatorname{Rng} T}$ je relativně kompaktní. Díky Větě 1.1.61 tedy platí $\dim \operatorname{Rng} T < \infty$.

(b) Nechť $Y = \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$. Pak $T = \lambda I$ na Y, a tedy $T(B_Y) = \lambda B_Y$ je relativně kompaktní podmnožina Y. Opět z Věty 1.1.61 máme $\dim Y < \infty$.

(c) Pokud by 0 nebyla ve spektru, byla by identita $I = T^{-1}T$ kompaktní operátor na X dle Věty 1.4.17(d). Tedy by byl díky Větě 1.1.61 prostor X konečně dimenzionální, což je spor. □

Věta 1.4.28. *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pak* $\operatorname{Rng}(T-\lambda I)$ *je uzavřený.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda = 1$. Díky Tvrzení 1.2.9(a) můžeme rozložit X jako $X = \operatorname{Ker}(T-I) \oplus_t Y$, kde Y je uzavřený podprostor X. Ukážeme, že $T - I : Y \to \operatorname{Rng}(T-I)$ je zdola omezený operátor.

Kdyby tomu tak nebylo, našli bychom posloupnost $\{x_n\}$ v S_Y splňující $(T-I)x_n \to 0$. Díky kompaktnosti T můžeme předpokládat, že $\{Tx_n\}$ konverguje k nějakému $z \in X$. Pak

$$x_n = x_n - Tx_n + Tx_n = (I-T)x_n + Tx_n \to z.$$

Tedy z je též v S_Y. Na stranu druhou platí

$$0 = \lim_{n\to\infty} (T-I)x_n = (T-I)z.$$

Protože $T - I$ je prostý na Y, je $z = 0$, což je spor. Tedy $T - I \colon Y \to \operatorname{Rng} T$ je zdola omezený operátor, což podle Lemmatu 1.4.10(iv) implikuje uzavřenost $\operatorname{Rng}(T-I)$. Tím je důkaz dokončen. □

Věta 1.4.29 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $T - \lambda I$ je prostý,

(ii) $T - \lambda I$ je na.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $T - \lambda I$ je prostý. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky Větě 1.4.17(d) máme

$$(T-\lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lambda^k \binom{n}{k} T^{n-k} + (-1)^n \lambda^n I = S - \mu I,$$

kde $S \in K(X)$ a $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Tedy prostory

$$Y_n = \operatorname{Rng}(T-\lambda I)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

jsou uzavřené. Položme ještě $Y_0 = X$. Zřejmě $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \cdots$.

Pak platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_{n_0} = Y_{n_0+1}. \tag{1.17}$$

Předpokládejme totiž, že (1.17) neplatí. Pak pro každé $n \geqslant 0$ najdeme $x_n \in S_{Y_n}$ splňující $\operatorname{dist}(x_n, Y_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}$ (viz Lemma 1.1.57). Pak pro indexy $m > n$ máme

$$Tx_m - Tx_n = (Tx_m - \lambda x_m) - (Tx_n - \lambda x_n) + \lambda x_m - \lambda x_n.$$

Protože

$$u = (Tx_m - \lambda x_m) - (Tx_n - \lambda x_n) + \lambda x_m \in Y_{m+1} + Y_{n+1} + Y_m = Y_{n+1},$$

platí

$$\|Tx_m - Tx_n\| = |\lambda|\|\frac{u}{\lambda} - x_n\| \geqslant \frac{|\lambda|}{2}.$$

Tedy posloupnost $\{Tx_n\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T. Tedy (1.17) platí.

Nechť $n_0 \geqslant 0$ je index z (1.17). Pak platí

$$Y_0 = Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_{n_0}. \tag{1.18}$$

Protože $T - \lambda I$ je prosté, dostáváme totiž z rovností

$$(T - \lambda I)(Y_{n_0}) = Y_{n_0+1} = Y_{n_0} = (T - \lambda I)(Y_{n_0-1}),$$

že $Y_{n_0} = Y_{n_0-1}$. Indukcí pak dostáváme (1.18).

Rovnost (1.18) speciálně říká, že

$$X = Y_0 = Y_1 = \operatorname{Rng}(T - \lambda I).$$

Tedy $T - \lambda I$ je na.

(ii) $\implies$ (i) Pokud $T - \lambda I$ je na, platí z Věty 1.4.9(a)

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda I)' = (\operatorname{Rng}(T - \lambda I)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\},$$

a tedy $T' - \lambda I$ je prostý. Použitím první části důkazu a Schauderovy věty 1.4.20 máme $\operatorname{Rng}(T' - \lambda I) = X^*$. Pomocí Věty 1.4.9(b) pak platí

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda I) = (\operatorname{Rng}(T' - \lambda I))_{\perp} = (X^*)_{\perp} = \{0\},$$

tedy $T - \lambda I$ je prostý. □

Lemma 1.4.30. *Nechť X je Banachův prostor, $T \in L(X)$ a $n \in \mathbb{N}$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ nenulové vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ jsou různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou nenulové vlastní vektory k nim příslušející. Nechť $c_1, \dots, c_{n+1}$ v $\mathbb{C}$ splňují $\sum_{k=1}^{n+1} c_k x_k = 0$. Pak

$$0 = T(\sum_{k=1}^{n+1} c_k x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \lambda_k x_k,$$

a tedy

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \lambda_k x_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} c_k x_k = \sum_{k=1}^{n+1} c_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = \sum_{k=1}^{n} c_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k.$$

Díky indukčnímu předpokladu platí

$$c_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

a tedy $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Tím pádem i $c_{n+1} = 0$. □

Věta 1.4.31. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak*

(a) $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$,

(b) množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r\}$ je konečná pro každé $r > 0$.

Důkaz. První část plyne z Věty 1.4.29. Abychom dokázali druhou část, zvolme $r > 0$. Pokud by množina $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geqslant r\}$ byla nekonečná, můžeme z ní vybrat posloupnost $\{\lambda_n\}$ navzájem různých vlastních čísel a k nim příslušné nenulové vlastní vektory $\{x_n\}$. Díky Lemmatu 1.4.30 pak prostory

$$X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

splňují $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subset \cdots$. Zvolme $z_n \in S_{X_n}$ takové, že $\operatorname{dist}(z_{n+1}, X_n) \geqslant \frac{1}{2}$ (viz Lemma 1.1.57). Pak pro indexy $m > k$ máme $\lambda_{m+1} z_{m+1} - Tz_{m+1} + Tz_k \in X_m$, a tedy

$$\|Tz_{m+1} - Tz_k\| = \|\lambda_{m+1} z_{m+1} - (\lambda_{m+1} z_{m+1} - Tz_{m+1} + Tz_k)\| \geqslant \operatorname{dist}(\lambda_{m+1} z_{m+1}, X_m) \geqslant r\frac{1}{2}.$$

Tedy posloupnost $\{Tz_n\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T. □

Věta 1.4.32 (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(T - \lambda I) = (\operatorname{Ker}(T' - \lambda I))_\perp \quad a \quad \operatorname{Rng}(T' - \lambda I) = (\operatorname{Ker}(T - \lambda I))^\perp .$$

Důkaz. (a) Díky Větě 1.4.9(c) a 1.4.28 platí

$$(\operatorname{Ker}(T' - \lambda I))_\perp = \overline{\operatorname{Rng}(T - \lambda I)} = \operatorname{Rng}(T - \lambda I).$$

(b) Opět díky Větě 1.4.9(b) máme pro $S = T - \lambda I$ inkluzi

$$\operatorname{Rng} S' \subset ((\operatorname{Rng} S')_\perp)^\perp = (\operatorname{Ker} S)^\perp.$$

Nechť nyní $y^* \in (\operatorname{Ker} S)^\perp$. Protože $\dim \operatorname{Ker} S < \infty$ (viz Věta 1.4.27(b)), můžeme podle Tvrzení 1.2.9(a) psát

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_t Y.$$

Pak je $\widehat{S} = S|_Y$ prostý a $\operatorname{Rng} S = \operatorname{Rng} \widehat{S}$ je uzavřený díky Větě 1.4.28. Tedy $\widehat{S}$ je invertovatelný dle Věty 1.3.7(a). Proto je

$$\widehat{x}^*(x) = y^*(\widehat{S}^{-1}x), \quad x \in \operatorname{Rng} S,$$

prvek $(\operatorname{Rng} S)^*$. Nechť $x^* \in X^*$ je prvek rozšiřující $\widehat{x}^*$.

Ukažme, že $S'x^* = y^*$. Nechť $x \in X$ je rozloženo jako $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in \operatorname{Ker} S$ a $x_2 \in Y$. Pak

$$\begin{aligned}(S'x^*)(x) &= x^*(Sx) = x^*(S(x_1 + x_2)) \\ &= x^*(Sx_2) = x^*(\widehat{S}x_2) = \widehat{x}^*(\widehat{S}x_2) \\ &= y^*(\widehat{S}^{-1}\widehat{S}x_2) = y^*(x_2) = y^*(x)\end{aligned}$$

(poslední rovnost platí díky předpokladu $y^* \in (\operatorname{Ker} S)^\perp$). Tedy $y^* \in \operatorname{Rng} S'$ a $(\operatorname{Ker} S)^\perp \subset \operatorname{Rng} S'$.

Dohromady máme $\operatorname{Rng} S' = (\operatorname{Ker} S)^\perp$. □

Věta 1.4.33. *Nechť X je Banachův prostor a $Y \subset\subset X$ je jeho uzavřený podprostor.*

(a) Zobrazení

$$y^* \mapsto x^* + Y^\perp = [x^*] , \quad y^* \in Y^* ,$$

kde $x^* \in X^*$ je nějaké rozšíření $y^* \in Y^*$, je izometrie Y^* na $X^*/Y^\perp$.

(b) Ať $q : X \to X/Y$ je kvocientové zobrazení. Pak

$$z^* \mapsto z^* \circ q , \quad z^* \in (X/Y)^* ,$$

je izometrie $(X/Y)^*$ na $Y^\perp$.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* s $X^*/Y^\perp$.

Důkaz. (a) Zjevně je zobrazení I z tvrzení (a) dobře definované a lineární. Je-li $y^* \in Y^*$ a x^* je jeho rozšíření zachovávající normu, pak

$$\|Iy^*\| = \inf\{\|x^* + z^*\| : z^* \in Y^\perp\} \leqslant \|x^*\| = \|y^*\|.$$

Na stranu druhou, pro každé $z^* \in Y^\perp$ platí

$$\|x^* + z^*\| = \sup_{x \in B_X} |(x^* + z^*)(x)| \geqslant \sup_{x \in B_Y} |(x^* + z^*)(x)| = \sup_{x \in B_Y} |x^*(x)| = \|y^*\|.$$

Tedy I je izometrie.

Je-li $[x^*] \in X^*/Y^\perp$, platí

$$I(x^*|_Y) = [x^*].$$

Tedy I je na.

(b) Označme $I : (X/Y)^* \to Y^\perp$ příslušné zobrazení. Pak zřejmě I je lineární a $\operatorname{Rng} I \subset Y^\perp$. Nechť $z^* \in (X/Y)^*$ je dáno. Jelikož $\|q\| \leqslant 1$, platí $\|Iz^*\| \leqslant \|z^*\|$. Pro $\varepsilon > 0$ nyní zvolme $[x] \in U_{X/Y}$ splňující $z^*([x]) > \|z^*\| - \varepsilon$. Pak najdeme $x \in [x] \cap U_X$ a odhadneme

$$\|Iz^*\| \geqslant |Iz^*(x)| = |z^*([x])| \geqslant \|z^*\| - \varepsilon.$$

Tedy I je izometrie.

Konečně, je-li $x^* \in Y^\perp$, lze definovat

$$z^*([x]) = x^*(x), \quad [x] \in X/Y,$$

a pak $Iz^* = x^*$. Tedy $\operatorname{Rng} I = Y^\perp$. □

Věta 1.4.34 (Třetí Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}(T-\lambda I) &= \dim(X/\operatorname{Rng}(T-\lambda I))\\ &= \dim \operatorname{Ker}(T'-\lambda I) = \dim(X^*/\operatorname{Rng}(T'-\lambda I))\end{aligned}$$

a toto číslo je konečné.

Důkaz. Položme $S = T - \lambda I$. Pak jsou všechny prostory vyskytující se v tvrzení uzavřené, a tedy jsou příslušné faktorprostory dobře definované. Dokažme nejprve nerovnost

$$\dim \operatorname{Ker} S \leqslant \dim(X/\operatorname{Rng} S). \tag{1.19}$$

Předpokládejme opak, tj. $\dim \operatorname{Ker} S > \dim(X/\operatorname{Rng} S)$. Protože je $\operatorname{Ker} S$ konečně dimenzionální dle Věty 1.4.27(b), je uzavřený prostor $\operatorname{Rng} S$ konečné kodimenze. Tedy lze psát

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_t E = \operatorname{Rng} S \oplus_t F,$$

kde E, F jsou uzavřené podprostory a $\dim \operatorname{Ker} S > \dim F$. Nechť $A : \operatorname{Ker} S \to F$ je lineární surjektivní zobrazení, které se nuluje na nějakém nenulovém prvku $x_0 \in \operatorname{Ker} S$. Zobrazení A je díky konečné dimenzi prostorů $\operatorname{Ker} S$ a F automaticky spojité. Nechť $P : X \to \operatorname{Ker} S$ je projekce příslušná našemu rozkladu. Pak P je spojitá, a tedy je operátor

$$Ux = Tx + APx, \quad x \in X,$$

kompaktní. Dále platí $U - \lambda I = S + AP$ a

$$\operatorname{Rng}(U - \lambda I) = X. \tag{1.20}$$

Máme totiž

$$\begin{aligned}\forall x \in E &: (U-\lambda I)x = Sx + APx = Sx = (S+AP)x,\\ \forall x \in \operatorname{Ker} S &: (U-\lambda I)x = Sx + Ax = Ax = (S+AP)x.\end{aligned}$$

Tedy $U - \lambda I = S + AP$. Dále

$$\operatorname{Rng}(U-\lambda I) \supset S(E) + A(\operatorname{Ker} S) = \operatorname{Rng} S + F = X,$$

a tedy (1.20) platí.

Z Věty 1.4.29 víme, že $U - \lambda I$ je prostý. To je ale ve sporu s faktem

$$(U-\lambda I)x_0 = Ax_0 = 0.$$

Tím jsme ověřili (1.19).

Aplikací (1.19) na S a S' dostáváme

$$\dim \operatorname{Ker} S \leqslant \dim(X/\operatorname{Rng} S) \quad \text{a} \quad \dim \operatorname{Ker} S' \leqslant \dim(X^*/\operatorname{Rng} S'). \tag{1.21}$$

Značí-li $\cong$ existenci izometrického izomorfizmu mezi Banachovými prostory, Věty 1.4.9 a 1.4.33 dávají

$$(X/\operatorname{Rng} S)^* \cong (\operatorname{Rng} S)^\perp = \operatorname{Ker} S' \quad \text{a} \quad (\operatorname{Ker} S)^* \cong X^*/(\operatorname{Ker} S)^\perp = X^*/\operatorname{Rng} S'. \tag{1.22}$$

Vzhledem ke konečné dimenzi prostorů $\operatorname{Ker} S$ a $\operatorname{Ker} S'$ tedy máme z (1.22)

$$\dim(X/\operatorname{Rng} S) = \dim(X/\operatorname{Rng} S)^* \quad \text{a} \quad \dim \operatorname{Ker} S' = \dim(\operatorname{Ker} S')^*. \tag{1.23}$$

Kombinací (1.21), (1.22) a (1.23) dostáváme

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker} S &\leqslant \dim(X/\operatorname{Rng} S) = \dim(X/\operatorname{Rng} S)^* = \dim \operatorname{Ker} S'\\ &\leqslant \dim(X^*/\operatorname{Rng} S') = \dim(\operatorname{Ker} S)^* = \dim \operatorname{Ker} S.\end{aligned}$$

□

1.5 Teorie distribucí

1.5.1 Prostor testovacích funkcí

Definice 1.5.1. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^d$.

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ je multiindex a jeho řád je $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

- $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}$ označuje diferenciální operátor.
- $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $N \in \mathbb{N}_0$, pak $\|\varphi\|_N = \sup\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leqslant N\}$.
- Označme $\operatorname{spt}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \neq 0\}}$ jako nosič φ.
- $\mathscr{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{spt}\varphi$ je kompaktní podmnožina $\Omega\}$.
- Je-li $K \subset \Omega$ kompakt, pak $\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \operatorname{spt}\varphi \subset K\}$.
- Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ v $\mathscr{D}(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pokud existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že
  - $\operatorname{spt}\varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
  - $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.
- Distribucí na Ω rozumíme lineární zobrazení $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ takové, že $\Lambda(\varphi_n) \to \Lambda(\varphi)$, kdykoliv $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$. Množinu všech distribucí značíme $\mathscr{D}'(\Omega)$. Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\Lambda_n\}$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$ konverguje k distribuci $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Příklad 1.5.2. Funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| \leqslant 1, \\ 0, & \|x\| > 1, \end{cases}$$

patří do $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Tvrzení 1.5.3. *Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní.*

(a) Pro $N, M \in \mathbb{N}$ a $N \leqslant M$ platí $\|\varphi\|_N \leqslant \|\varphi\|_M$.

(b) Zobrazení $\rho(f,g) = \sum_{N \in \mathbb{N}_0} 2^{-N} \min\{\|f-g\|_N, 1\}$ je metrika na $\mathscr{D}_K(\Omega)$, ve které je $\mathscr{D}_K(\Omega)$ úplný metrický prostor.

(c) Posloupnost $\{\varphi_n\}$ v $\mathscr{D}_K(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ v $\mathscr{D}(\Omega)$ právě tehdy, když $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé. Je snadno vidět, že ρ je dobře definovaná metrika na $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Je-li $\{\varphi_n\}$ cauchyovská v metrice ρ, pak pro každý multiindex α je $\{D^\alpha \varphi_n\}$ stejnoměrně cauchyovská posloupnost. Tedy $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows g_\alpha$ pro nějakou funkci $g_\alpha \in C(K)$. Označme $\varphi = g_{(0,\dots,0)}$. Díky známé větě z matematické analýzy pak máme $D^\alpha \varphi = g_\alpha$. Tedy $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ a $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$. Dle následujícího bodu pak platí $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$.

(c) Jestliže $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$, pak pro každé $M \geqslant 0$ platí $\sum_{N=0}^M 2^{-N} \min\{\|\varphi_n - \varphi\|_N, 1\} \to 0$. Tedy

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(\varphi_n, \varphi) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sum_{N=0}^{M} 2^{-N} \min\{\|\varphi_n - \varphi\|_N, 1\} + \sum_{N=M+1}^{\infty} 2^{-N} = 2^{-M}.$$

Odtud plyne $\lim \rho(\varphi_n, \varphi) = 0$.

Pokud $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$, pak $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \geqslant 0$. Tedy $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$. □

Věta 1.5.4. *Nechť $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

(ii) pro každou posloupnost $\{\varphi_n\}$ konvergující k nule v $\mathscr{D}(\Omega)$ platí $\Lambda(\varphi_n) \to 0$,

(iii) $\Lambda|_{(\mathscr{D}_K(\Omega), \rho)}$ je spojitá pro každý kompakt $K \subset \Omega$,

(iv) pro každý kompakt $K \subset \Omega$ existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, že $|\Lambda\varphi| \leqslant C\|\varphi\|_N$, $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$.

Důkaz. (i) $\iff$ (ii) je zřejmé díky linearitě Λ.

(i) $\implies$ (iii) Jestliže $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$ pro φ_n a φ v $\mathscr{D}_K(\Omega)$, pak $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$ dle Tvrzení 1.5.3(c). Tedy $\Lambda(\varphi_n) \to \Lambda(\varphi)$ z definice $\mathscr{D}'(\Omega)$. Jinými slovy, Λ je spojitá funkce na $(\mathscr{D}_K(\Omega), \rho)$.

(iii) $\implies$ (iv) Nechť K je kompaktní podmnožina Ω. Pokud (iv) neplatí, najdeme pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ funkce $\varphi_N \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ splňující

$$|\Lambda\varphi_N| \geqslant 2^N \|\varphi_N\|_N.$$

Pak jsou funkce

$$\psi_N = 2^{-N} \frac{\varphi_N}{\|\varphi_N\|_N}, \quad N \geqslant 0,$$

v $\mathscr{D}_K(\Omega)$ a pro pevné $M \geqslant 0$ platí

$$\|\psi_N\|_M \leqslant \|\psi_N\|_N = 2^{-N}, \quad M \leqslant N.$$

Tedy $\|\psi_N\|_M \to 0$ pro každé $M \geqslant 0$, a proto $\rho(\psi_N, 0) \to 0$. Tedy $\Lambda(\psi_N) \to 0$ dle (iii). Na druhou stranu máme

$$|\Lambda(\psi_N)| \geqslant 1,$$

což je spor.

(iv) $\implies$ (i) Pokud $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$, existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{spt}\varphi_n \subset K$ a přitom $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \geqslant 0$. Nechť $N \geqslant 0$ a $C > 0$ jsou dány díky (iv). Pak máme

$$|\Lambda(\varphi_n - \varphi)| \leqslant C\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0,$$

tedy $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$. □

Definice 1.5.5. Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}^{'}(\Omega)$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každý kompakt $K \subset \Omega$ existuje $C \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : |\Lambda\varphi| \leqslant C\|\varphi\|_N,$$

potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

Příklad 1.5.6.

- Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Potom $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, je prvek $\mathscr{D}'(\Omega)$ řádu 0.
- Nechť $\mu \in M(\Omega)$. Potom $\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi\, d\mu$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, je prvek $\mathscr{D}'(\Omega)$ řádu 0.
- Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \varphi'(0)$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu 1.
- Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi^{(n)}(n)$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu nekonečno.

Důkaz. Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a $K \subset \Omega$ kompakt, je $f \in L^1(K)$ a platí

$$|\Lambda_f(\varphi)| \leqslant \int_K |\varphi f| \leqslant \left(\int_K |f|\right) \|\varphi\|_0, \quad \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Obdobně pro $\mu \in M(\Omega)$ a $K \subset \Omega$ kompakt máme

$$|\Lambda_\mu(\varphi)| \leqslant \int_K |\varphi|\, d\,|\mu| \leqslant \|\mu\|\|\varphi\|_0, \quad \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

□

1.5.2 Operace s distribucemi

Definice 1.5.7. Mějme dánu otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)(\Omega)$.

- Je-li α multiindex, *α–tá derivace distribuce* Λ je definována jako

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

- *Násobení distribuce* Λ *funkcí* f definujeme jako

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega), f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Tvrzení 1.5.8. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Potom $\varphi \mapsto \Lambda_\varphi$ je vnoření $\mathscr{D}(\Omega)$ do $\mathscr{D}'(\Omega)$ takové, že $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$ pro každou posloupnost $\{\varphi_n\}$ konvergující k φ v $\mathscr{D}(\Omega)$.*

Důkaz. Nechť $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$, a tedy

$$\Lambda_{\varphi_n}(\psi) = \int_{\operatorname{spt}\psi} \varphi_n\psi \to \int_{\operatorname{spt}\psi} \varphi\psi = \Lambda_\varphi(\psi).$$

Proto $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$. □

Tvrzení 1.5.9. *Nechť je vše jako v definici 1.5.7. Pak*

(a) $D^\alpha\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ pro $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

(b) $\Lambda \mapsto D^\alpha\Lambda$ je spojité na $\mathscr{D}'(\Omega)$ vzhledem ke konvergenci v $\mathscr{D}'(\Omega)$,

(c) $f\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ pro $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,

(d) Zobrazení $\Lambda \mapsto f\Lambda$ je spojité vzhledem ke konvergenci v $\mathscr{D}'(\Omega)$.

(e) Je-li $f \in C^\infty(\Omega)$ a $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, platí $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$, $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Důkaz. (a) Pro kompakt $K \subset \Omega$ najdeme C a $N \in \mathbb{N}_0$ z Věty 1.5.4(iv) pro Λ. Pak pro $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ máme

$$|(D^\alpha\Lambda)(\varphi)| = |(-1)^\alpha\Lambda(D^\alpha\varphi)| \leqslant C\|D^\alpha\varphi\|_N = C\|\varphi\|_{N+|\alpha|}.$$

Tedy (iv) z Věty 1.5.4 platí i pro $D^\alpha\Lambda$.

(b) Konverguje-li $\{\Lambda_n\}$ k Λ v $\mathscr{D}'(\Omega)$ a $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, je $D^\alpha\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ a platí

$$(D^\alpha\Lambda_n)(\psi) = \Lambda_n(D^\alpha\psi) \to \Lambda(D^\alpha\psi) = (D^\alpha\Lambda)(\psi).$$

Proto $D^\alpha\Lambda_n \to D^\alpha\Lambda$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$.

(c) Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní, nechť $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ jsou z Věty 1.5.4. Pak pro $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ platí

$$|(f\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(f\varphi)| \leqslant C\|f\varphi\|_N = C\sup\{\|D^\alpha(f\varphi)\|_{C(K)} : |\alpha| \leqslant N\} \leqslant C'\|\varphi\|_N,$$

kde $C' > 0$ je vhodná konstanta závisející na normách derivací f.

(d) Nechť $\Lambda_n \to \Lambda$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak $f\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, a tedy

$$(f\Lambda_n)(\varphi) = \Lambda_n(f\varphi) \to \Lambda(f\varphi) = (f\Lambda)(\varphi).$$

(e) Je-li $f \in C^\infty(\Omega)$ a $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, je $fg \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pro $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ platí

$$(f\Lambda_g)(\varphi) = \Lambda_g(f\varphi) = \int f\varphi g$$

a

$$\Lambda_{fg}(\varphi) = \int fg\varphi.$$

□

Věta 1.5.10. *Nechť f je absolutně spojitá na (a,b). Pak $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$ v $\mathscr{D}'((a,b))$.*

Důkaz. Z klasické analýzy víme, že f i f' jsou v $L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$, tedy Λ_f i $\Lambda_{f'}$ jsou dobře definované prvky $\mathscr{D}'((a,b))$. Pro $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$, kde $\operatorname{spt}\varphi \subset [c,d] \subset (a,b)$, pak máme

$$(\Lambda_f)'(\varphi) = -\Lambda_f(\varphi') = -\int \varphi' f = -\int_c^d f\varphi' = -[f\varphi]_c^d + \int_c^d f'\varphi = \int_c^d f'\varphi = \int f'\varphi = (\Lambda_{f'})(\varphi).$$

□

Věta 1.5.11 (Baire)**.** *Nechť je dán metrický (topologický) prostor X a funkce $f_n, f : X \to \mathbb{F}$, $f_n \to f$, f_n spojité. Pak množina $N = \{x \in X : f \text{ nespojitá v } x\}$ je první kategorie. Je-li tedy X prostor druhé kategorie, má f bod spojitosti.*

Věta 1.5.12 (Banachova–Steinhausova pro distribuce)**.** *Nechť $\{\Lambda_n\} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ a $\Lambda\varphi = \lim_{n\to\infty}\Lambda_n\varphi$ existuje pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*

Důkaz. Zjevně je Λ lineární zobrazení na $\mathscr{D}(\Omega)$. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Pak $\Lambda|_{(\mathscr{D}(K),\rho)}$ má dle Věty 1.5.11 bod spojitosti $\psi \in \mathscr{D}(K)$. Je-li tedy $\{\varphi_n\}$ posloupnost v $\mathscr{D}(K)$ konvergující k $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, pak

$$\Lambda(\varphi_n) - \Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi_n - \varphi + \psi) - \Lambda(\psi) \to \Lambda(\psi) - \Lambda(\psi) = 0,$$

tedy $\Lambda(\varphi_n) - \Lambda(\varphi) \to 0$. □

Definice 1.5.13. Nechť $G \subset \Omega$ je otevřená. Řekneme, že Λ *je nulová na G*, pokud $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou φ s kompaktním nosičem v G. *Nosič* Λ definujeme jako $\operatorname{spt}\Lambda = \Omega\setminus\bigcup\{G \subset \Omega : G \text{ otevřená, } \Lambda \text{ nulová na } G\}$.

Tvrzení 1.5.14. *(a) $\Lambda\varphi = 0$ pro φ splňující $\operatorname{spt}\varphi \subset \Omega\setminus\operatorname{spt}\Lambda$,*

(b) pokud $\operatorname{spt}\Lambda$ je kompaktní, pak Λ je konečného řádu,

(c) $\operatorname{spt}\Lambda = \{p\} \iff \Lambda = \sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha D^\alpha\Lambda_{\delta_p}$.

Důkaz. Viz Rudin. □

Věta 1.5.15. *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pak existují spojité funkce $g_\alpha \in \mathcal{C}(\Omega)$ takové, že*

- *každý kompakt $K \subset \Omega$ protíná pouze konečně mnoho nosičů $\{g_\alpha\}$ a*
- *$\Lambda = \sum_\alpha D^\alpha\Lambda_{g_\alpha}$.*

Důkaz. Viz Rudin. □

1.5.3 Konvoluce funkcí

Věta 1.5.16 (Luzin). *Nechť X je metrický prostor, $\mathscr{S}$ σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná regulární míra na $\mathscr{S}$ (tj. μ splňuje*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F) : F \subset A \text{ uzavřená}\}, \quad A \in \mathscr{S}).$$

Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f : X \to \mathbb{F}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \backslash F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá.

Důkaz. Nechť $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z regularity μ uzavřenou množinu F_n a otevřenou množinu U_n v X takové, že

$$F_n \subset f^{-1}(V_n) \cap U_n \quad \text{a} \quad \mu(U_n \backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pak je $F = X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \backslash F_n)$ uzavřená a platí $\mu(X \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně je $f|_F$ spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$(f|_F)^{-1}(V_n) = f^{-1}(V_n) \cap F = U_n \cap F$$

otevřená v F. □

Důsledek 1.5.17. *Nechť X je metrický prostor, $\mathscr{S}$ σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná regulární míra na $\mathscr{S}$.*

(a) *Je-li f měřitelná funkce na X, existuje borelovská funkce g rovnající se f μ-skoro všude.*

(b) *Nechť $f : X \to \mathbb{F}$ je μ-měřitelná. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $\|f_n\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$ a $f_n \to f$ μ-skoro všude.*

(c) *Nechť $p \in [1, \infty)$. Označuje-li $C^b(X)$ prostor omezených spojitých funkcí na X, je $C^b(X)$ hustý v $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$.*

Důkaz. (a) Pišme $X = \bigcup X_n$, kde $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ jsou konečné míry. Díky regularitě míry μ můžeme předpokládat, že X_n jsou borelovské. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme měřitelný prostor $(X_n, \mathscr{S}_n, \mu_n)$, kde $\mathscr{S}_n = \{A \cap X_n : A \in \mathscr{S}\}$ a $\mu_n(B) = \mu(A \cap X_n)$ pro libovolnou množinu $A \in \mathscr{S}$ splňující $A \cap X_n = B$. Pak μ_n splňuje předpoklady Věty 1.5.16, a tedy existuje množina $H_n \subset X_n$ taková, že H_n je uzavřená v X_n, $f|_{H_n}$ je spojitá a $\mu_n(X_n \backslash H_n) < 2^{-n-1}$. Dále nalezneme $V_n \subset X_n$ uzavřenou v X splňující $\mu(X_n \backslash V_n) < 2^{-n-1}$. Pak $F_n = H_n \cap V_n$ je podmnožina X_n, která je uzavřená v X a $f|_{F_n}$ je spojitá. Nakonec si povšimněme, že

$$\mu(X_n \backslash F_n) \leqslant \mu(X_n \backslash H_n) + \mu(X_n \backslash V_n) = \mu_n(X_n \backslash H_n) + \mu(X_n \backslash V_n) < 2 \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n}.$$

Tedy jsme zkonstruovali posloupnost $\{F_n\}$ uzavřených množin v X takovou, že $F_n \subset X_n$, $f|_{F_n}$ je spojitá a $\mu(X_n \backslash F_n) < 2^{-n}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$. Pak je funkce

$$g = \begin{cases} f & \text{na } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

borelovská a rovna f μ-skoro všude. Označíme-li totiž $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\mu(X_k \backslash A) \leqslant \mu(X_k \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \leqslant \mu(X_n \backslash F_n) < 2^{-n}, \quad n \geqslant k.$$

Tedy $\mu(X_k \backslash A) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $\chi_{X_k \backslash A} \nearrow \chi_{X \backslash A}$, díky Leviho větě dostáváme

$$\mu(X \backslash A) = \int \chi_{X \backslash A} \, d\mu = \int \lim_{k \to \infty} \chi_{X_k \backslash A} \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \mu(X_k \backslash A) = 0.$$

(b) Nechť X_n a F_n jsou jako výše. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, díky Tietzově větě najdeme spojité funkce $f_n : X \to \mathbb{R}$ splňující $f_n = f|_{F_n}$ a $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f|_{F_n}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Pak $f_n \to f$ na $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, tedy μ-skoro všude.

Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, aplikujeme výše uvedený postup na $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ a dostaneme posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ spojitých reálných funkcí na X konvergující k $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ μ-skoro všude a splňující $\|u_n\|_\infty \leqslant \|\operatorname{Re} f\|_\infty$ a $\|v_n\|_\infty \leqslant \|\operatorname{Im} f\|_\infty$. Pak $u_n + iv_n \to f$ μ-skoro všude a

$$\|u_n + iv_n\|_\infty \leqslant \|u_n\|_\infty + \|v_n\|_\infty \leqslant \|\operatorname{Re} f\|_\infty + \|\operatorname{Im} f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

(c) Nechť $f \in L^p(\mu)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Zvolme $\eta > 0$ splňující $(2\eta)^{\frac{1}{p}} + (\eta(2^p + 2^{2p-1}))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Nejprve najdeme množinu $Y \subset X$ konečné míry takovou, že $\int_{X\setminus Y} |f|^p < \eta$. Dále najdeme omezenou nenulovou měřitelnou funkci $\widetilde{f}$ tak, že $\widetilde{f} = 0$ na $X\setminus Y$ a $\int_Y |f - \widetilde{f}|^p < \eta$. Pak platí

$$\int_X |f - \widetilde{f}|^p = \int_Y |f - \widetilde{f}|^p + \int_{X\setminus Y} |f|^p \leqslant 2\eta. \tag{1.24}$$

Položme $c = \|\widetilde{f}\|_\infty$. Pomocí Věty 1.5.16 najdeme množinu $H \subset Y$ uzavřenou v Y takovou, že $\mu(Y\setminus H) < \eta c^{-p}$ a $\widetilde{f}|_H$ je spojitá. Dále najdeme $V \subset Y$ uzavřenou v X splňující $\mu(Y\setminus V) < \eta c^{-p}$. Pak $F = H \cap V$ je uzavřená v X, $\mu(Y\setminus F) \leqslant 2\eta c^{-p}$ a $\widetilde{f}|_F$ je spojitá. Dále díky regularitě existuje otevřená množina $U \supset F$ taková, že $\mu(U\setminus F) < \eta c^{-p}$. Použitím Tietzeovy věty najdeme $g\colon X \to \mathbb{F}$ spojitou omezenou, která je nulová na $X\setminus U$, rovna $\widetilde{f}$ na F a $\|g\|_\infty \leqslant 2\|\widetilde{f}|_F\|_\infty \leqslant 2c$. Pak máme díky nerovnosti $(a + b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p)$ platné pro každou dvojici čísel $a, b \in [0, \infty)$ odhad

$$\begin{aligned}\int_X |\widetilde{f} - g|^p &= \int_F |\widetilde{f} - g|^p + \int_{X\setminus F} |\widetilde{f} - g|^p \leqslant 0 + 2^{p-1}(\int_{Y\setminus F} |\widetilde{f}|^p + \int_{U\setminus F} |g|^p)\\ &\leqslant 2^{p-1}(c^p\mu(Y\setminus F) + (2c)^p\mu(U\setminus F))\\ &\leqslant 2^{p-1}(c^p 2c^{-p}\eta + 2^p c^p \eta c^{-p})\\ &= \eta(2^p + 2^{2p-1}).\end{aligned} \tag{1.25}$$

Kombinací (1.24) a (1.25) dostáváme

$$\|f - g\|_p \leqslant \|f - \widetilde{f}\|_p + \|\widetilde{f} - g\|_p = (\int_X |f - \widetilde{f}|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_X |\widetilde{f} - g|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (2\eta)^{\frac{1}{p}} + (\eta(2^p + 2^{2p-1}))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

□

Definice 1.5.18.
- *Posun funkce* f definujeme jako $(\tau_x f)(y) = f(y - x)$, kde $x \in \mathbb{R}^d$.
- Pro libovolnou funkci f zavádíme otočení jako $(\check{f})(y) = f(-y)$, $y \in \mathbb{R}^d$.
- *Konvoluce funkcí f a g* je funkce $f * g$ definovaná jako

  $$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\, dy,$$

  pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál existuje.

Věta 1.5.19. *(a) $y \mapsto f(y)g(x - y)$ je měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ a f, g měřitelné.*

(b) Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, je $x \mapsto (f * g)(x)$ skoro všude konečná měřitelná funkce v $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(c) $\operatorname{spt}(f * g) \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$, kde f, g jsou měřitelné omezené a s kompaktním nosičem.

(d) $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$ pro f, g měřitelné, $p \in [1, \infty]$ (speciální verze Youngovy nerovnosti),

(e) $*$ je komutativní a asociativní operace na $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(f) Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, je $x \mapsto (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\, dy$ nekonečně hladká funkce splňující $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α.

Důkaz. (a) Protože je Lebesgueova míra translačně invariantní a symetrická, je funkce $y \mapsto g(x - y)$ měřitelná. Tedy i $y \mapsto f(y)g(x - y)$ je měřitelná.

(b) Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Protože $\int f(y)g(x - y)\, dy$ se nezmění při změně funkcí f, g na množině míry nula, lze předpokládat, že f, g jsou borelovské. Pak $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$ je borelovská funkce na $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy lze použít Fubiniovu větu k výpočtu

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(y)|\, |g(x - y)|\; dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y)|\; dx\right) dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Tedy $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ je v $L^1((\mathbb{R}^d)^2)$, což znamená, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ je integrál $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\, dy$ konečný a funkce $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\, dy$ je element $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(c) Nechť $x \in \mathbb{R}^d\setminus(\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g)$. Pak pro $y \in \operatorname{spt} f$ platí $x - y \notin \operatorname{spt} g$, a tedy

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\, dy = \int_{\operatorname{spt} f} f(y)g(x - y)\, dy = 0.$$

(d) Případ $p = 1$ je dokázaný v (b). Nechť tedy $p \in (1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Nechť q je sdružený exponent k p. Jako výše stačí uvažovat případ borelovských funkcí f, g.

Nechť $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ je libovolná, opět předpokládejme, že je borelovská. Pak $(x, y) \mapsto h(x)f(y)g(x-y)$ je borelovská funkce na $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy z Fubiniovy věty a Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} |h(x)||f(y)||g(x-y)|\,dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-z)||g(z)|\,dz)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|(\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)||f(x-z)|\,dx)\,dz \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|\|h\|_q \|\tau_z f\|_p\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|\|h\|_q \|f\|_p\,dz = \|h\|_q \|f\|_p \|g\|_1.\end{aligned}$$

Tedy pro každé $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ existuje množina A_h míry 0 taková, že funkce $y \mapsto h(x)f(y)g(x-y)$ je v $L^1(\mathbb{R}^d)$ pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus A_h$. Vezměme funkce $h_n = \chi_{B(0,n)}$ a příslušné množiny A_{h_n}. Nechť $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{h_n}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in B(0, n)$, tj. $h_n(x) = 1$. Tedy je funkce $y \mapsto f(y)g(x-y) = h_n(x)f(y)g(x-y)$ v $L^1(\mathbb{R}^d)$. Tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ je $y \mapsto f(y)g(x-y)$ prvek $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Položme nyní $f_n = f\chi_{B(0,n)}$. Pak $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, a tedy $f_n * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Navíc pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ je

$$y \mapsto |f_n(y)g(x-y)| \leqslant |f(y)g(x-y)|$$

v $L^1(\mathbb{R}^d)$, a tedy z Lebesgueovy věty dostáváme pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(y)g(x-y)\,dy = (f_n * g)(x).$$

Tedy $f * g$ je měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$.

Pro libovolné $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ nyní zopakujeme předcházející výpočet a obržíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)||h(x)|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|\,dy)\,dx \leqslant \|h\|_q \|f\|_p \|g\|_1.$$

Tedy je

$$\varphi\colon h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h(f * g), \quad h \in L^q(\mathbb{R}^d),$$

dobře definované lineární zobrazení na $L^q(\mathbb{R}^d)$ splňující

$$|\varphi(h)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |h(f * g)| \leqslant \|h\|_q \|f\|_p \|g\|_1, \quad h \in L^q(\mathbb{R}^d),$$

z čehož podle Věty 1.2.19(e) a Poznámky 1.2.20 plyne $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

Je-li $p = \infty$, obdobně jako v první části důkazu odvodíme měřitelnost $f * g$ takto. Položíme $f_n = f\chi_{B(0,n)}$, pak $f_n * g$ jsou měřitelné funkce a

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(y)g(x-y)\,dy = \lim_{n\to\infty} (f_n * g)(x)$$

díky Lebesgueově větě (použijeme majorantu

$$|y \mapsto f_n(y)g(x-y)| \leqslant \|f\|_\infty |y \mapsto g(x-y)| \in L^1(\mathbb{R}^d)).$$

Konečně nerovnost $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$ plyne z odhadu

$$|(f * g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,dy \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$$

platného pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

(e) Substitucí dostaneme

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(z)f(x-z)\,dz = (g * f)(x).$$

Asociativitu odvodíme pomocí Fubiniovy věty, jejíž předpoklady ověříme podobně jako v bodu (b). Přesněji:

$$((f * g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(y)h(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y-z)\,dz)h(x-y)\,dy. \tag{1.26}$$

Dále

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(g*h)(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(z)h(x-y-z)\,dz\Big)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(u-y)h(x-u)\,du\Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} h(x-u)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(u-y)\,dy\Big)\,du.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Z rovností (1.26) a (1.27) vidíme, že $((f*g)*h)(x) = (f*(g*h))(x)$.

(f) Nejprve si uvědomme, že integrál

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{x-\operatorname{spt} g} f(y)g(x-y)\,dy$$

je konečný pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Dokažme tvrzení pro multiindex $\alpha = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{N}_0^d$, tj. $D^\alpha = \partial_1$. Označme $h(x) = (f*g)(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Nechť $a \in \mathbb{R}^d$ je dáno. Pišme $a = (a_1, a') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Položme $\varphi(t) = h(t,a')$, $t \in \mathbb{R}$. Pak $\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)(a_1) = (\partial_1 h)(a)$.

Označme dále

$$\psi(t,y) = g((t,a')-y), \quad \omega(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y), \quad (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Pak $\psi, \omega \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ a

$$\omega(a_1,y) = \left(\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,y)\right)_{s=a_1} = (\partial_1 g)(a-y), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Označme $K = B(a,1) - \operatorname{spt} g$, pak K je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^d$. Existuje $C > 0$ takové, že pro $(t,y) \in (a_1-1, a_1+1) \times K$ platí

$$|\omega(t,y)| \leqslant C.$$

Pak

$$h(x) = \int_{x-\operatorname{spt} g} f(y)g(x-y)\,dy = \int_K f(y)g(x-y)\,dy, \quad x \in B(a,1),$$

a tedy díky větě o záměně derivace a integrálu dostáváme

$$\begin{aligned}(D^\alpha h)(a) = (\partial_1 h)(a) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)\right)_{t=a_1} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_K f(y)g((t,a')-y)\,dy\right)_{t=a_1} \\ &= \int_K f(y)\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y)\right)_{t=a_1} dy \\ &= \int_K f(y)\omega(a_1,y)\,dy \\ &= \int_K f(y)(\partial_1 g)(a-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(D^\alpha g)(a-y)\,dy \\ &= (f*D^\alpha g)(a).\end{aligned}$$

Pro vyšší multiindexy tvrzení dokážeme indukcí. $\square$

Definice 1.5.20. Posloupnost $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je *aproximativní jednotka*, pokud

$$\forall j \in \mathbb{N} : h_j(x) = j^d h(jx), \text{ kde } h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \text{ nezáporná a } \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,dx = 1.$$

Poznámka 1.5.21. Všimněme si, že platí $\int_{\mathbb{R}^d} h_j = 1$ a $\operatorname{spt} h_j = \frac{1}{j}\operatorname{spt} h$. (To ověříme za pomoci rovností

$$\{x \in \mathbb{R}^d \colon h_j(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon h(jx) > 0\} = \frac{1}{j}\{x \in \mathbb{R}^d \colon h(x) > 0\}.)$$

Věta 1.5.22. *Ať $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ je aproximativní jednotka.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d$, potom $f * h_j \rightrightarrows f$.

(b) Pokud $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $p \in [1,\infty)$, potom $f * h_j \xrightarrow{L^p} f$.

(c) Pokud $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, potom $f * h_j \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\to} f$.

Důkaz. (a) Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ takové, že $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$, je-li $|u - v| < \delta$. Protože $\operatorname{spt} h_j = \frac{1}{j} \operatorname{spt} h$, existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, že pro $j \geqslant j_0$ je $\operatorname{spt} h_j \subset B(0, \delta)$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\begin{aligned}|(f * h_j)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) h_j(x - y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^d} h_j(y) f(x)\, dy \right| \\ &\leqslant \int_{\operatorname{spt} h_j} h_j(y) |f(x - y) - f(x)|\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} h_j(y) \varepsilon\, dy = \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $r > 0$ takové, že $\|f - f\chi_{B(0,r)}\|_p < \varepsilon$. Pomocí Věty 1.5.17(c) najdeme $g \in C(B(0, r))$ splňující $\|f\chi_{B(0,r)} - g\|_{L^p(B(0,r))} < \varepsilon$. Rozšíříme g na spojitou funkci na $\mathbb{R}^d$ s kompaktním nosičem (jmenuje se opět g) tak, že $\|f\chi_{B(0,r)} - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. Pak $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < 2\varepsilon$. Protože dle (a) platí $g * h_j \rightrightarrows g$ a funkce $g * h_j$ mají stejně omezené nosiče, dostáváme $\|g * h_j - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$. Nechť $j_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $\|g * h_j - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ pro $j \geqslant j_0$. Pak máme pro $j \geqslant j_0$ díky Větě 1.5.19(c)

$$\begin{aligned}\|f * h_j - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \|f * h_j - g * h_j + g * h_j - g + g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|h_j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g * h_j - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < 5\varepsilon.\end{aligned}$$

(c) Je-li $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, existuje $\delta > 0$ takové, že kompakt $K = \operatorname{spt} f + B(0, \delta)$ je v Ω. Nechť $j_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{j_0} \operatorname{spt} h \subset B(0, \delta)$. Pak pro $j \geqslant j_0$ platí

$$\operatorname{spt} h_j = \frac{1}{j} \operatorname{spt} h = \frac{j_0}{j} \frac{1}{j_0} \operatorname{spt} h \subset \frac{j_0}{j} B(0, \delta) \subset B(0, \delta).$$

Tedy pro $j \geqslant j_0$ platí

$$\operatorname{spt}(f * h_j) \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} h_j \subset \operatorname{spt} f + B(0, \delta) = K.$$

Tedy funkce $f * h_j$ mají společný kompaktní nosič. Protože dle (a) platí pro každý multiindex α

$$D^\alpha(f * h_j) = (D^\alpha f) * h_j \rightrightarrows D^\alpha f,$$

máme $f * h_j \to f$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. □

Důsledek 1.5.23. *Pro $p \in [1, \infty)$ je $\mathscr{D}(\Omega)$ husté v $L^p(\Omega)$.*

Důkaz. Pro danou $f \in L^p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$ najdeme kompaktní množinu $K \subset \Omega$ takovou, že pro $g = f\chi_K$ platí $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Dle Věty 1.5.22(b) je pro dosti velké $j \in \mathbb{N}$ funkce $g * h_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ a platí odhad $\|g * h_j - g\|_p < \varepsilon$. Tedy $\|f - g * h_j\|_p < \varepsilon$. □

Věta 1.5.24. *Pro $p \in [1, \infty)$ a $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelnou je $L^p(A)$ separabilní.*

Důkaz. Nechť nejprve A leží v nějaké kompaktní množině $K \subset \mathbb{R}^d$. Pak lze prostor $L^p(A)$ přirozeně chápat jako podprostor $L^p(K)$, a tedy stačí ukázat separabilitu $L^p(K)$. Ale $C(K)$ je dle Důsledku 1.5.17(c) hustý podprostor $L^p(K)$. Prostor $(C(K), \|\cdot\|_p)$ je však separabilní díky Stoneově-Weierstrassově větě o stejnoměrné hustotě polynomů v $C(K)$. Tedy i $L^p(K)$ je separabilní.

Pro obecnou množinu A pak máme

$$L^p(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L^p(A \cap B(0, n))},$$

z čehož plyne separabilita $L^p(A)$. □

1.5.4 Konvoluce distribucí

Definice 1.5.25. Ať $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. *Konvoluci funkce φ a distribuce u* definujeme jako funkci

$$(u * \varphi)(x) = u(\tau_x \check{\varphi}) = u(y \mapsto \varphi(x - y)), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Je-li $x \in \mathbb{R}^d$, *posun distribuce u o x* definujeme jako

$$(\tau_x u)(\varphi) = u(\tau_{-x}\varphi) = u(y \mapsto \varphi(y + x)), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 1.5.26. *Pro $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ a $e \in S_{\mathbb{R}^d}$ označme $\eta_r = \frac{1}{r}(\tau_0 - \tau_{re})$. Pak $\eta_r \varphi \xrightarrow[r \to 0]{} D_e \varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Zjevně mají funkce $\{\eta_r\varphi : r \in (-1,1)\setminus\{0\}\}$ nosič obsažený v jedné kompaktní množině.

Pro důkaz tvrzení si ukažme, že $\eta_r\varphi \rightrightarrows D_e\varphi$. Platí totiž (pro $t = -r$)

$$\begin{aligned}(\eta_r\varphi)(x) &= \frac{1}{r}(\varphi(x) - \varphi(x - re)) = -\frac{1}{r}(\varphi(x - re) - \varphi(x)) \\ &= \frac{1}{t}(\varphi(x + te) - \varphi(x)) = \frac{1}{t}\int_0^t (D_e\varphi)(x + se)\,ds.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Je-li $t > 0$, z (1.28) tedy máme

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t}(\varphi(x + te) - \varphi(x)) - D_e\varphi(x)\right| &= \left|\frac{1}{t}\int_0^t ((D_e\varphi)(x + se) - D_e\varphi(x))\,ds\right| \\ &\leqslant \frac{1}{t}\left|\int_0^t ((D_e\varphi)(x + se) - D_e\varphi(x))\,ds\right|,\end{aligned} \tag{1.29}$$

pro $t < 0$ platí

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t}(\varphi(x + te) - \varphi(x)) - D_e\varphi(x)\right| &= \left|\frac{-1}{t}\int_t^0 ((D_e\varphi)(x + se) - D_e\varphi(x))\,ds\right| \\ &\leqslant \frac{-1}{t}\int_t^0 |(D_e\varphi)(x + se) - D_e\varphi(x)|\,ds.\end{aligned} \tag{1.30}$$

Protože je funkce $D_e\varphi$ stejnoměrně spojitá, existuje pro dané $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že $|D_e\varphi(x_1) - D_e\varphi(x_2)| \leqslant \varepsilon$ pro $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$. Pro $t \in \mathbb{R}$ splňující $|t| < \delta$ pak máme z (1.29) a (1.30) pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ odhad

$$|(\eta_r\varphi)(x) - (D_e\varphi)(x)| = \left|\frac{1}{t}\int_0^t ((D_e\varphi)(x + se) - D_e\varphi(x))\,ds\right| \leqslant \varepsilon.$$

Tedy vskutku $\eta_r\varphi \rightrightarrows D_e\varphi$.

Mějme nyní libovolný multiindex α. Pak z předchozího máme

$$D^\alpha(\eta_r\varphi) = \frac{1}{r}(D^\alpha\varphi - \tau_{re}(D^\alpha\varphi)) \rightrightarrows D_e(D^\alpha\varphi) = D^\alpha(D_e\varphi).$$

Tedy $\eta_r\varphi \to D_e\varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. □

Věta 1.5.27.

(a) Pro $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $x \in \mathbb{R}^d$ platí $\tau_x u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Je-li navíc $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, platí $\tau_x\Lambda_u = \Lambda_{\tau_x u}$.

(b) Je-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, platí $\tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x\varphi)$.

(c) Je-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, je $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * D^\alpha\varphi$.

(d) Pro $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ platí $\Lambda_u * v = u * v$.

(e) Je-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $v, w \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, platí $u * (v * w) = (u * v) * w$.

(f) Je-li $\{h_j\}$ aproximativní jednotka a $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_{u*h_j} \to u$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Důkaz. (a) Je-li $\{\varphi_n\}$ posloupnost konvergující k 0 v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, konverguje k 0 i posunutá posloupnost $\{\tau_{-x}\varphi_n\}$. Tedy

$$(\tau_x u)(\varphi_n) = u(\tau_{-x}\varphi_n) \to 0$$

a $\tau_x u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Je-li $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, platí pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}(\tau_x\Lambda_u)(\varphi) = \Lambda_u(\tau_{-x}\varphi) &= \int(\tau_{-x}\varphi)\cdot u = \int \varphi(t + x)u(t)\,dt \\ &= \int \varphi(s)u(s - x)\,ds = \Lambda_{\tau_x u}(\varphi).\end{aligned}$$

(b) Označme $\psi = \tau_x\varphi$. Postupně pak dostaneme z definice rovnosti

$$\begin{aligned}\tau_x(u * \varphi)(y) &= (u * \varphi)(y - x) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}) = u(z \mapsto \varphi(y - x - z)), \\ ((\tau_x u) * \varphi)(y) &= (\tau_x u)(\tau_y\check{\varphi}) = u(\tau_{-x}\tau_y\check{\varphi}) = u(\tau_{-x+y}\check{\varphi}) = u(z \mapsto \varphi(-x + y - z)), \\ (u * (\tau_x\varphi))(y) &= (u * \psi)(y) = u(\tau_y\check{\psi}) = u(z \mapsto \psi(y - z)) = u(z \mapsto \varphi(y - z - x)),\end{aligned}$$

tedy (b) platí.

(c) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$ a $e \in S_{\mathbb{R}^d}$. Dokážeme, že $D_e(u * \varphi)$ v bodě x existuje a je rovna $(u * D_e\varphi)(x)$ a $(D_e u * \varphi)(x)$. Nechť $\eta_r = \frac{1}{r}(\tau_0 - \tau_{re})$ pro $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dle Lemmatu 1.5.26 máme $\eta_r\varphi \to D_e\varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Tedy

$$(\eta_r(u * \varphi))(x) = (u * (\eta_r\varphi))(x) \overset{r\to 0}{\to} (u * (D_e\varphi))(x),$$

a proto

$$(D_e(u * \varphi))(x) = (u * (D_e\varphi))(x).$$

Dále

$$\begin{aligned}(D_e u * \varphi)(x) &= (D_e u)(\tau_x\check{\varphi}) = (-1)u(D_e(y \mapsto \varphi(x-y))) \\ &= (-1)u((-1)(y \mapsto (D_e\varphi)(x-y))) = u(y \mapsto (D_e\varphi)(x-y))\end{aligned}$$

a je-li $\psi = D_e\varphi$, máme

$$(u * D_e\varphi)(x) = u(\tau_x\check{\psi}) = u(y \mapsto \psi(x-y)) = u(y \mapsto (D_e\varphi)(x-y)).$$

Tedy rovnost platí pro derivaci ve směru e. Indukcí zřejmě dostaneme $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a požadovanou rovnost pro každý multiindex α.

(d) Máme

$$(u * v)(x) = \int u(x-y)v(y)\,dy$$

a

$$(\Lambda_u * v)(x) = \Lambda_u(\tau_x\check{v}) \int (\tau_x\check{v})u = \int v(x-y)u(y)\,dy = \int v(z)u(x-z)\,dz.$$

Tedy tvrzení platí.

(e) Je-li $x = 0$, dostaneme

$$(u * (v * w))(0) = u(\widetilde{u * v}) = u(y \mapsto \int v(s)w(-y-s)\,ds)$$

a

$$\begin{aligned}((u * v) * w)(0) &= \int w(s)(u * v)(-s)\,ds = \int w(s)u(\tau_{-s}\check{v})\,ds \\ &= \int w(s)u(y \mapsto v(-s-y))\,ds.\end{aligned}$$

Rovnost těchto výrazů není v žádném případě zřejmá, ale dle strany 172 v [?] platí.

Je-li $x \neq 0$, použijeme předchozí rovnost následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}(u * (v * w))(x) &= (u * (v * \tau_{-x}w))(0) \\ &= ((u * v) * (\tau_{-x}w))(0) = ((u * v) * w)(x).\end{aligned}$$

(f) Nechť $\{h_j\}$ je aproximativní jednotka, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak

$$\begin{aligned}\Lambda_{u*h_j}(\check{\varphi}) &= \Lambda_{u*h_j}(\tau_0\check{\varphi}) = (\Lambda_{u*h_j} * \varphi)(0) \\ &= ((u * h_j) * \varphi)(0) = (u * (h_j * \varphi))(0) \overset{j\to\infty}{\to} (u * \varphi)(0) = u(\check{\varphi}).\end{aligned}$$

(Limitní přechod lze provést, neboť pro $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ platí

$$(u * \varphi_j)(x) = u(\tau_x\check{\varphi_j}) \to u(\tau_x\check{\varphi}) = (u * \varphi)(x).)$$

□

Definice 1.5.28. Jsou-li $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, definujeme *konvoluci distribucí u a v* jako distribuci definovanou vztahem

$$(u * v)(\varphi) = (u * (v * \check{\varphi}))(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Poznámka. Tato definice dává dobrý smysl v případech, které více osvětlí následující věta.

Věta 1.5.29. *(a) $u * v$ je dobře definováno, pokud alespoň jedna distribuce má kompaktní nosič,*

(b) $\Lambda_f * \Lambda_g = \Lambda_{f*g}$, $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$,

(c) $\Lambda_{u*f} = u * \Lambda_f$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$,

(d) $*$ je komutativní (asociativní), pokud alespoň jedna (dvě) distribuce mají kompaktní nosič,

(e) $\operatorname{spt}(u*v) \subset \operatorname{spt} u + \operatorname{spt} v,\ u,v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$,

(f) $D^\alpha(u*v) = D^\alpha u * v = u * D^\alpha v$, *má-li alespoň jedna kompaktní nosič,*

(g) $u = \Lambda_{\delta_0} * u$ *a* $D^\alpha u = (D^\alpha \Lambda_{\delta_0}) * u$.

Důkaz. Provedeme pouze náznaky důkazů některých tvrzení.

(a) Má-li $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ kompaktní nosič, je $v * \check{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, a tedy $u * (v * \check{\varphi})$ je dobře definováno.

Má-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ kompaktní nosič, je funkce $v * \check{\varphi}$ pouze v $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Vezmeme funkci $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tak, že $\eta = 1$ na otevřené množině obsahující $\operatorname{spt} u$. Pak pro $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ můžeme výraz $u(\psi)$ chápat jako $u(\psi\eta)$ (je vidět, že tato hodnota nezáleží na volbě funkce η).

(b) Nechť $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Pak pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\begin{aligned}(\Lambda_f * \Lambda_g)(\varphi) &= (\Lambda_f * (\Lambda_g * \check{\varphi}))(0) = (\Lambda_f * (g * \check{\varphi}))(0) = (f * (g * \check{\varphi}))(0) \\ &= \int f(x)(\check{\varphi} * g)(-x)\,dx = \int f(x)\Big(\int \check{\varphi}(y) g(-x-y)\,dy\Big)\,dx \\ &= \iint f(x)\varphi(-y)g(-x-y)\,dxdy\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(\Lambda_{f*g})(\varphi) &= \int (f*g)(y)\varphi(y)\,dy = \int \varphi(y)\Big(\int f(x)g(y-x)\,dx\Big)\,dy \\ &= \iint f(x)g(y-x)\varphi(y)\,dx\,dy = \iint f(x)g(-y-x)\varphi(-y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Tedy $\Lambda_f * \Lambda_g = \Lambda_{f*g}$.

(c) Pro $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ máme

$$\begin{aligned}(\Lambda_{u*f})(\varphi) &= \int (u*f)(y)\varphi(y)\,dy = \int u(\tau_y \check{f})\varphi(y)\,dy \\ &= \int u(x \mapsto f(y-x))\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(u * \Lambda_f)(\varphi) &= (u * (\Lambda_f * \check{\varphi}))(0) = (u * (f * \check{\varphi}))(0) \\ &= u(\widetilde{f * \check{\varphi}}) = u(x \mapsto (\check{\varphi} * f)(-x)) \\ &= u\Big(x \mapsto \int \check{\varphi}(y) f(-x-y)\,dy\Big) = u\Big(x \mapsto \int \varphi(-y) f(-x-y)\,dy\Big) \\ &= u\Big(x \mapsto \int \varphi(y) f(y-x)\,dy\Big) = \int \varphi(y) u(x \mapsto f(y-x))\,dy\end{aligned}$$

(poslední rovnost opět není zřejmá). Tvrzení (c) tedy díky provedeným výpočtům platí.

(g) Počítejme

$$\begin{aligned}(\Lambda_{\delta_0} * u)(\varphi) &= (\Lambda_{\delta_0} * (u * \check{\varphi}))(0) = \Lambda_{\delta_0}(\widetilde{u * \check{\varphi}}) \\ &= (\widetilde{u * \check{\varphi}})(0) = (u * \check{\varphi})(0) \\ &= u(\tau_0 \check{\check{\varphi}}) = u(\varphi).\end{aligned}$$

□

1.5.5 Fourierova transformace funkcí a Schwartzův prostor

Definice 1.5.30. Máme dán prostor $\mathbb{R}^d$. Pak zavádíme

- normalizovanou míru $m_d = (2\pi)^{-d/2}\lambda^d$, vůči ní budeme uvažovat i konvoluci a L^p-prostory,
- pro $t \in \mathbb{R}^d$ definujeme *charakter* jako $e_t(x) = e^{it\cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^d$,
- *Fourierova transformace funkce* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, m_d)$ je definována jako

$$\widehat{f}(t) = (f * e_t)(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e_{-t}(x)\,dm_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-it\cdot x}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

- operátor $D_\alpha = (i)^{-|\alpha|} D^\alpha = (\frac{1}{i}\frac{d}{dx_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{1}{i}\frac{d}{dx_d})^{\alpha_d}$,

- Pro P polynom na $\mathbb{R}^d$, tj.
$$P(t) = \sum c_\alpha t^\alpha = \sum c_\alpha (t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}),$$
definujeme diferenciální operátory
$$P(D) = \sum c_\alpha D_\alpha, \quad P(-D) = \sum c_\alpha (-1)^{|\alpha|} D_\alpha.$$

Tvrzení 1.5.31. *Nechť P polynom d proměnných, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x, t \in \mathbb{R}^d$. Pak*

(a) $D_\alpha e_t = t^\alpha e_t$,

(b) $P(D) e_t = P(t) e_t$,

(c) $\widehat{(\tau_x f)} = e_{-x} \widehat{f}$,

(d) $\widehat{(e_x f)} = \tau_x \widehat{f}$,

(e) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$,

(f) je-li $\lambda > 0$ *a* $h(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, *pak* $\widehat{h}(t) = \lambda^d \widehat{f}(\lambda t)$.

Důkaz. (a) Zjevně
$$\left((\frac{1}{i} \frac{d}{dx_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{1}{i} \frac{d}{dx_d})^{\alpha_d} \right) (e^{i \sum_{j=1}^d t_j x_j}) = (t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}) e^{i \sum_{j=1}^d t_j x_j}.$$

(b) Díky (a) platí
$$P(D) e_t = \sum c_\alpha D_\alpha e_t = \sum c_\alpha t^\alpha e_t = P(t) e_t.$$

(c) Z definice dostáváme pro $t \in \mathbb{R}^d$ rovnosti
$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_x f}(t) &= \int (\tau_x f) e_{-t} = \int f(s - x) e^{-it \cdot s} \, dm_d(s) \\
&= \int f(u) e^{-it \cdot u} e^{-itx} \, dm_d(u) = e_{-x}(t) \widehat{f}(t).
\end{aligned}$$

(d) Dále
$$\begin{aligned}
\widehat{e_x f}(t) &= \int (e_x f)(s) e^{-it \cdot s} \, dm_d(s) = \int e^{ix \cdot s} f(s) e^{-it \cdot s} \, dm_d(s) \\
&= \int f(s) e^{-is \cdot (t - x)} \, dm_d(s) = \widehat{f}(t - x) = (\tau_x \widehat{f})(t).
\end{aligned}$$

(e) Pro $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ počítejme
$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(t) &= \int (f * g)(s) e^{-it \cdot s} \, dm_d(s) = \int \left(\int f(y) g(s - y) \, dm_d(y) \right) e^{-it \cdot s} \, dm_d(s) \\
&= \int f(y) \left(\int g(s - y) e^{-it \cdot s} \, dm_d(s) \right) dm_d(y) \\
&= \int f(y) \left(\int g(u) e^{-it \cdot (u + y)} \, dm_d(u) \right) dm_d(y) \\
&= \int f(y) e^{-it \cdot y} \left(\int g(u) e^{-it \cdot u} \, dm_d(u) \right) dm_d(y) = \widehat{f}(t) \widehat{g}(t).
\end{aligned}$$

(f) Máme
$$\widehat{h}(t) = \int f(\frac{x}{\lambda}) e^{-it \cdot x} \, dm_d(x) = \lambda^d \int f(s) e^{-i(t\lambda) \cdot s} \, dm_d(s) = \lambda^d \widehat{f}(t\lambda).$$

□

Definice 1.5.32. • *Schwartzův prostor* $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ je systém všech nekonečně hladkých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s dostatečně rychlým poklesem, přesněji
$$\mathscr{S} = \{ f \in \mathcal{C}^\infty \left(\mathbb{R}^d \right) : \sup_{|\alpha| \leqslant N} \| \left(1 + |x|^2 \right)^N (D_\alpha f)(x) \|_\infty < \infty, N \in \mathbb{N}_0 \}.$$

Pro $N = 0, 1, 2, \ldots$ uvažujme normy
$$p_N(f) = \sup_{|\alpha| \leqslant N} \| \left(1 + |x|^2 \right)^N (D_\alpha f)(x) \|_\infty.$$

Na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ uvažujme konvergenci danou těmito normami, tj. $\{\varphi_n\}$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ konverguje k $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, pokud

$$\lim_{n\to\infty} p_N(\varphi_n - \varphi) = 0, \quad N = 0, 1, 2, \dots.$$

- Připomeňme, že $C_0(\mathbb{R}^d)$ značí prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ splňujících, že množina $\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ je kompaktní pro každé $\varepsilon > 0$. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme supremovou normu.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že pro daný polynom $p(x) = (1 + |x|^2)^n$ často budeme hledat $m > 0$ takové, že $\int((1 + |x|^2)^n)^{-m} \, dm_d(x) < \infty$, je dobré připomenout Fubiniovu větu pro sférické souřadnice, tj. rovnost

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|x|) \, dx = d\kappa_d \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r) \, dr,$$

kde $\varphi \colon (0, \infty) \to [0, \infty)$ je měřitelná funkce a κ_d značí objem d-dimenzionální jednotkové koule. Z tohoto vzorce již snadným výpočtem najdeme požadované m.

Věta 1.5.33. *(a)* $\mathscr{S} \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^d)$.

(b) Je-li $\{f_n\}$ posloupnost v $\mathscr{S}$, pak $f_n \to 0$ v $\mathscr{S}$ právě tehdy, když $P \cdot D_\alpha f_n \rightrightarrows 0$ pro každý polynom P a multiindex α. Dále je $\mathscr{S}$ s metrikou $\rho(f, g) = \sum_{N=0}^\infty \frac{1}{2^N} \min\{p_N(f - g), 1\}$ úplný metrický prostor.

(c) Je-li $g \in \mathscr{S}$, P polynom a α multiindex, jsou zobrazení $f \mapsto Pf$, $f \mapsto D_\alpha f$ a $f \mapsto gf$ spojitá na $\mathscr{S}$.

(d) $(\widehat{P(D)}f) = P\widehat{f}$ a $\widehat{Pf} = P(-D)\widehat{f}$.

(e) Fourierova transformace je lineární zobrazení $\mathscr{S}$ do $\mathscr{S}$.

(f) Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$.

(g) Fourierova transformace je spojité zobrazení $\mathscr{S}$ do $\mathscr{S}$.

Důkaz. (a) Nechť $f \in \mathscr{S}$ je dána. Pak $g(x) = (1 + |x|^2)f(x) \in \mathscr{S}$, a tedy $\|g\|_\infty < \infty$. Pak pro $\varepsilon > 0$ máme

$$\{x \in \mathbb{R}^d \colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \frac{1}{1 + |x|^2} |g(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d \colon \frac{\|g\|_\infty}{(1 + |x|^2)} \geqslant \varepsilon\},$$

což je omezená množina. Tedy $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $N \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $\frac{1}{(1+|x|^2)^N} \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pak $g(x) = (1 + |x|^2)^N f(x) \in \mathscr{S}$, a tedy

$$\int |f|^p = \int \left(\frac{1}{(1 + |x|^2)^N} \right)^p |g|^p \leqslant \|g\|_\infty^p \int \left(\frac{1}{(1 + |x|^2)^N} \right)^p < \infty.$$

(b) Nechť $f_n \to 0$ v $\mathscr{S}$, tj. $p_N(f_n) \to 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$. Z definice norem p_N vidíme, že $|x|^k (D_\alpha f_n)(x) \rightrightarrows 0$ pro každý multiindex α a každé $k \in \mathbb{N}_0$. Tedy $PD_\alpha f_n$ konverguje stejnoměně k 0 pro každý multiindex α a polynom P. Obrácená implikace je pak snadná.

Zobrazení ρ je zjevně metrika na $\mathscr{S}$, pro kterou platí $\rho(f_n, f) \to 0$ právě tehdy, když $f_n \to f$ v $\mathscr{S}$. Nechť $\{f_n\}$ je ρ-cauchyovská posloupnost, pak pro každý polynom P a multiindex α existuje spojitá funkce $g_{P,\alpha}$ taková, že $PD_\alpha f_n \rightrightarrows g_{P,\alpha}$ (protože $\mathscr{S} \subset C_0(\mathbb{R}^d)$, je funkce $g_{P,\alpha}$ omezená). Speciálně tedy máme spojitou funkci f takovou, že $f_n \rightrightarrows f$. Z klasické věty pak máme $D_\alpha f_n \rightrightarrows D_\alpha f$ pro každý multiindex α. Pak ale pro každý polynom P víme, že $\{PD_\alpha f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k $PD_\alpha f$. Tedy $PD_\alpha f = g_{P,\alpha}$ a dostáváme, že $f \in \mathscr{S}$ a $f_n \to f$ v $\mathscr{S}$.

(c) Nechť $f_n \to 0$ v $\mathscr{S}$.

Je-li P polynom, pak pro každý multiindex β a polynom Q platí, že výraz $QD_\beta(Pf_n)$ je konečná suma obsahující členy $Q' D_{\beta'} f_n$, kde Q' polynom a β' multiindex. Tedy $QD_\beta(Pf_n) \to 0$ v $\mathscr{S}$.

Je-li α multiindex, pak pro každý multiindex β a polynom Q platí, že výraz $QD_\beta(D_\alpha f_n)$ je konečná suma obsahující členy $Q' D_{\beta'} f_n$, kde Q' polynom a β' multiindex. Tedy $QD_\beta(D_\alpha f_n) \to 0$ v $\mathscr{S}$.

Je-li $g \in \mathscr{S}$, pak pro každý multiindex β a polynom Q platí, že výraz $QD_\beta(gf_n)$ je konečná suma obsahující členy $Q' D_{\beta_1} g D_{\beta_2} f_n$, kde Q' polynom a β_1, β_2 jsou multiindexy. Tedy $QD_\beta(gf_n) \to 0$ v $\mathscr{S}$.

(d) Pro $f \in \mathscr{S}$ a polynom P máme $P(D)f \in \mathscr{S}$ a

$$\begin{aligned}(\widehat{P(D)}f)(t) &= (P(D)f * e_t)(0) = (f * P(D)e_t)(0) = (f * P(t)e_t)(0) \\ &= (P(t)(f * e_t))(0) = P(t)((f * e_t)(0)) = P(t)\widehat{f}(t).\end{aligned}$$

Pro důkaz druhé identity uvažme polynom $P(x) = x_1$. Pak $P(-D) = \frac{-1}{i}\partial_1$. Z Lebesgueovy věty máme

$$\begin{aligned}(P(-D)\widehat{f})(t) &= \frac{-1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1}\int f(x)e^{-it\cdot x}\,dm_d(t) = \int \frac{-1}{i} f(x)e^{-it\cdot x}(-ix_1)\,dm_d(x)\\ &= \int x_1 f(x)e^{-it\cdot x}\,dm_d(x) = \widehat{Pf}(t).\end{aligned}$$

Pro obecný polynom P pak požadovaná rovnost plyne opakovanou aplikací předchozího výpočtu.

(e) Ukažme, že $\widehat{f} \in \mathscr{S}$ pro $f \in \mathscr{S}$. Je-li P polynom a α multiindex, položme $Q(x) = (-1)^{|\alpha|}x^\alpha$ a $g = Qf$. Pak $g \in \mathscr{S}$ a platí díky (c)

$$\widehat{g} = \widehat{Qf} = Q(-D)\widehat{f} = D_\alpha \widehat{f}.$$

Dále máme

$$PD_\alpha \widehat{f} = P\widehat{g} = \widehat{P(D)g},$$

což je omezená funkce na $\mathbb{R}^d$. Tedy $PD_\alpha\widehat{f}$ je omezená pro každý polynom P a multiindex α, tj. $\widehat{f} \in \mathscr{S}$.

(f) Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak zjevně platí $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$. Je-li $\varepsilon > 0$, potom dle Důsledku 1.5.23 existuje $g \in \mathscr{S}$ tak, že $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$. Pak $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty \leqslant \|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$, a tedy $\widehat{f} \in \overline{\mathscr{S}}^{\|\cdot\|_\infty} \subset C_0(\mathbb{R}^d)$.

(g) Nechť nyní $f_n \to 0$ v $\mathscr{S}$. Nechť polynom P a multiindex α jsou dány. Pak pro $Q(x) = (-1)^{|\alpha|}x^\alpha$ a

$$g_n(x) = Q(x)f_n(x)$$

platí $g_n \to 0$ v $\mathscr{S}$. Tedy i $P(D)g_n \to 0$ v $\mathscr{S}$. Z definice konvergence na $\mathscr{S}$ dostáváme, že $P(D)g_n \to 0$ v $L^1(\mathbb{R}^d)$. Tedy

$$PD_\alpha\widehat{f_n} = PQ(-D)\widehat{f_n} = P\widehat{Qf_n} = P\widehat{g_n} = \widehat{P(D)g_n} \rightrightarrows 0$$

dle (c). Proto $\widehat{f_n} \to 0$ v $\mathscr{S}$. $\square$

Lemma 1.5.34. *Nechť $\phi_d(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Pak*

(a) $\phi_d \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

(b) $\widehat{\phi_d} = \phi_d$ (je to vlastní funkce Fourierovy transformace pro hodnotu 1),

(c) $\phi_d(0) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\phi}_d\,dm_d$.

Důkaz. Nechť nejprve $d = 1$. Pak funkce ϕ_1 a $\widehat{\phi_1}$ splňují diferenciální rovnici $y' + xy = 0$. Pro funkci ϕ_1 je to zřejmé, pro $\widehat{\phi_1}$ máme

$$(\widehat{\phi_1})'(t) = i\int e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)e^{-ixt}\,dm_1(x) = \Big[ie^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixt}\Big]_{-\infty}^{\infty} - i(-it)\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixt}\,dm_1(t) = -t\widehat{\phi_1}(t).$$

Tedy z věty o jednoznačnosti existuje konstanta $c \in \mathbb{C}$ splňující $\widehat{\phi_1} = c\phi_1$. Ale ze vztahu

$$\widehat{\phi_1}(0) = \int e^{\frac{-x^2}{2}}\,dm_1(x) = 1$$

plyne

$$c = c\phi_1(0) = \widehat{\phi_1}(0) = 1.$$

Tedy $\widehat{\phi_1} = \phi_1$.

Je-li nyní $d > 1$, platí $\phi_d(x) = \phi_1(x_1)\cdots\phi_1(x_d)$, a tedy dle prvního kroku platí

$$\widehat{\phi_d}(t) = \widehat{\phi_1}(t_1)\cdots\widehat{\phi_1}(t_d) = \phi_1(t_1)\cdots\phi_1(t_d) = \phi_d(t).$$

Konečně

$$\phi_d(0) = \widehat{\phi_d}(0) = \int \phi_d(x)\,dm_d(x) = \int \widehat{\phi_d}(t)\,dm_d(t).$$

$\square$

Lemma 1.5.35. *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ je taková, že $\int f\varphi = 0$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak $f = 0$.*

Důkaz. Je-li $f \neq 0$, existuje kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$, že $\int_K f \neq 0$. Nechť $\{h_j\}$ je aproximativní jednotka, pak $\chi_K * h_j \to \chi_K$ v $L^1(\mathbb{R}^n)$ dle Věty 1.5.22(b). Navíc

$$\|\chi_K * h_j\|_\infty \leqslant \|\chi_K\|_\infty \|h_j\|_1 \leqslant 1.$$

Výběrem vhodné podposloupnost můžeme zaručit, že $\chi_K * h_j \to \chi_K$ skoro všude. Nechť $r > 0$ je takové, že $\operatorname{spt} h_1 \subset B(0,r)$. Pak $L = K + B(0,r)$ je kompakt, $\operatorname{spt}(\chi_K * h_j) \subset L$ a $\chi_K * h_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Dále

$$|f \cdot (\chi_K * h_j)| \leqslant |f\chi_L| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Z Lebesgueovy věty tedy máme

$$0 = \lim_{j\to\infty} \int f \cdot (\chi_K * h_j) = \int_K f \neq 0,$$

což je spor. □

Poznámka 1.5.36. Přechozí lemma ukazuje, že vnoření $f \mapsto \Lambda_f$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, je prosté.

Věta 1.5.37 (O inverzi)**.** *(a) Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\int \widehat{f} g \, dm_d = \int f \widehat{g} \, dm_d$.*

(b) Pro $g \in \mathscr{S}$ platí $g(x) = \int \widehat{g} e_x \, dm_d$, $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) Fourierova transformace je spojitá bijekce $\mathscr{S}$ na $\mathscr{S}$, která má spojitou inverzi a periodu 4. Navíc platí $\widehat{\widehat{\varphi}} = \check{\varphi}$, $\varphi \in \mathscr{S}$.

(d) Je-li $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $f_0(x) = \int \widehat{f} e_x \, dm_d$, $x \in \mathbb{R}^d$, pak $f = f_0$ skoro všude.

Důkaz. (a) Požadovaná rovnost snadno plyne z Fubiniovy věty, neboť

$$\int \widehat{f} g \, dm_d = \iint f(x) g(y) e^{-ix\cdot y} \, dm_d(x) dm_d(y) = \int f \widehat{g} \, dm_d.$$

(b) Nechť $g \in \mathscr{S}$. Je-li $\phi \in \mathscr{S}$ a $\lambda > 0$, pak pro $f(x) = \phi(x/\lambda)$ máme

$$\begin{aligned}\int g(\frac{t}{\lambda}) \widehat{\phi}(t) \, dm_d(t) &= \int g(t) \lambda^d \widehat{\phi}(\lambda t) \, dm_d(t) \\ &= \int g(t) \widehat{f}(t) \, dm_d(t) = \int \widehat{g}(y) \phi(\frac{y}{\lambda}) \, dm_d(y).\end{aligned}$$

Protože

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\frac{t}{\lambda}) = g(0) \quad \text{a} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \phi(\frac{y}{\lambda}) = \phi(0),$$

dostáváme pomocí Lebesgueovy věty rovnost

$$\int g(0) \widehat{\phi}(t) \, dm_d(t) = \int \phi(0) \widehat{g}(y) \, dm_d(y).$$

Zvolíme-li za ϕ funkci ϕ_d z Lemmatu 1.5.34, máme rovnost

$$g(0) = \int \widehat{g}(y) \, dm_d(y).$$

Tedy požadovná rovnost platí pro $x = 0$.

Je-li nyní $x \in \mathbb{R}^d$ obecné, platí díky předchozímu

$$g(x) = (\tau_{-x} g)(0) = \int \widehat{\tau_{-x} g} \, dm_d = \int \widehat{g} e_x \, dm_d.$$

Tedy (b) platí.

(c) Označme $\mathcal{F} f = \widehat{f}$, $f \in \mathscr{S}$. Pak $\operatorname{Ker} \mathcal{F} = \{0\}$ dle (b), a tedy $\mathcal{F}$ je prostá. Z tvrzení (b) též dostáváme, že

$$f(-x) = \int \widehat{f} e_{-x} \, dm_d = \mathcal{F}^2 f(x),$$

a tedy $\mathcal{F}^2 f = \check{f}$. Proto $\mathcal{F}^4 f = f$ a $\mathcal{F}$ je surjektivní. Konečně je inverze $\mathcal{F}^{-1}$ spojitá, neboť platí $(\mathcal{F}^3)\mathcal{F} = I = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3)$, což implikuje, že $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$.

(d) Nechť f i $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak pro $g \in \mathscr{S}$ máme z (a) a (b)

$$\begin{aligned}\int f \widehat{g} \, dm_d = \int g \widehat{f} \, dm_d &= \int \widehat{f}(x) \left(\int \widehat{g}(y) e^{ix\cdot y} \, dm_d(y) \right) dm_d(x) \\ &= \int \widehat{g}(y) \left(\int \widehat{f}(x) e^{ix\cdot y} \, dm_d(x) \right) dm_d(y) = \int \widehat{g}(y) f_0(y) \, dm_d(y).\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall g \in \mathscr{S} : \int (f - f_0)\widehat{g}\, dm_d = 0.$$

Protože je Fourierova transformace surjektivní, platí rovnost $0 = \int (f - f_0)g$ pro každou funkci $g \in \mathscr{S}$. Platí $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$ dle Věty 1.5.33(e), a tedy je $f - f_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Vhledem k tomu, že $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}$, je funkce $f - f_0$ nulová dle Lemmatu 1.5.35, tj. $f = f_0$ skoro všude. □

Věta 1.5.38. *Jsou-li $f, g \in \mathscr{S}$, pak $f * g \in \mathscr{S}$ a $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

Důkaz. Dokažme nejprve druhou rovnost a označme jako $\mathcal{F}$ Fourierovu transformaci. Protože

$$\widehat{f}, \widehat{g}, fg \in \mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{a} \quad \widehat{f} * \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

platí dle Tvrzení 1.5.31(e) pro funkci $h = \widehat{f} * \widehat{g}$

$$\widehat{h} = \widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = (\mathcal{F}^2 f)(\mathcal{F}^2 g) = \check{f}\check{g} = \widecheck{fg} = \widehat{\widehat{fg}}.$$

Tedy $\widehat{h} \in \mathscr{S}$, a proto i $\widehat{f} * \widehat{g} = h \in \mathscr{S}$. Pomocí Věty 1.5.37(c) tedy máme $\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{fg}$.

Vezměme nyní funkce $f_1, g_1 \in \mathscr{S}$ splňující $\widehat{f_1} = f$ a $\widehat{g_1} = g$. Pak z předchozího platí

$$f * g = \widehat{f_1} * \widehat{g_1} \in \mathscr{S}.$$

□

Věta 1.5.39 (Plancherelova věta)**.** *Existuje právě jedna surjektivní izometrie $F : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ taková, že $Ff = \widehat{f}$, $f \in \mathscr{S}$. Navíc $Ff = \widehat{f}$ pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Důkaz. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí skalární součin na $L^2(\mathbb{R}^d) = (L^2(\mathbb{R}^d), m_d)$. Pak pro $f, g \in \mathscr{S}$ máme

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int f\overline{g}\, dm_d = \int \overline{g}(x) \left(\int \widehat{f}(t) e^{ix\cdot t}\, dm_d(t) \right) dm_d(x) \\
&= \int \widehat{f}(t) \left(\int \overline{g}(x) e^{ix\cdot t}\, dm_d(x) \right) dm_d(t) = \int \widehat{f}(t) \left(\overline{\int g(x) e^{-ix\cdot t}\, dm_d(x)} \right) dm_d(t) \\
&= \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle.
\end{aligned}$$

Tedy Fourierova transformace je izometrickým zobrazením $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ na $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Díky hustotě $\mathscr{S}$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a Větě 1.1.37 existuje operátor $F : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ rozšiřující Fourierovu transformaci z $\mathscr{S}$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Je snadné si rozmyslet, že toto rozšíření je izometrií $L^2(\mathbb{R}^d)$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Mějme nyní funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Fixujme $r > 0$ a označme $f_r = f\chi_{B(0,r)}$. Pak existují funkce $\{f_n\}$ z $\mathscr{D}(B(0,2r))$ splňující $\|f_n - f_r\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f_n - f_r\|_{L^2(B(0,2r))} \to 0$. Tedy i $\|f_n - f_r\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|f_n - f_r\|_{L^1(B(0,2r))} \to 0$ a $Ff_n \to Ff_r$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Protože

$$\|\widehat{f_r} - \widehat{f_n}\|_\infty \leqslant \|f_r - f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0,$$

máme

$$\left\|\widehat{f_r} - \widehat{f_n}\right\|_\infty \to 0, \quad \|Ff_r - Ff_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{a} \quad \widehat{f_n} = Ff_n.$$

Tedy $Ff_r = \widehat{f_r}$ pro každé $r > 0$. (Můžeme totiž výběrem podposloupnosti zařídit, že $Ff_n \to Ff_r$ skoro všude.)

Proveďme nyní limitní přechod pro $r \to \infty$. Protože

$$\lim_{r\to\infty} \|f - f_r\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{r\to\infty} \|f - f_r\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

máme pro $r = N$, $N \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{N\to\infty} \|Ff_N - Ff\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{N\to\infty} \|\widehat{f_N} - \widehat{f}\|_\infty = 0.$$

Protože $Ff_N = \widehat{f_N}$ podle předcházejícího kroku, analogicky jako výše platí $Ff = \widehat{f}$. □

1.5.6 Temperované distribuce

Tvrzení 1.5.40. *Vnoření $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ do $\mathscr{S}$ je spojité na hustou podmnožinu.*

Důkaz. Zjevně je $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ podmnožinou $\mathscr{S}$.

Pokud posloupnost $\{\varphi_n\}$ konverguje k 0 v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\operatorname{spt}\varphi_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$, pro nějaký kompakt $K \subset \mathbb{R}^d$ a $D^\alpha\varphi_n \rightrightarrows 0$ pro každý multiindex α. Je-li nyní P polynom a α multiindex, konverguje dle předchozího posloupnost $\{D_\alpha\varphi_n\}$ stejnoměrně k 0, a tedy i $PD_\alpha\varphi_n \rightrightarrows 0$. Tedy $\varphi_n \to 0$ v $\mathscr{S}$.

Ukažme nyní, že $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustou podmnožinou $\mathscr{S}$. Nechť $f \in \mathscr{S}$ je dána. Vezmeme $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ rovnající se 1 na $B(0,1)$ a položme $f_n(x) = f(x)\psi(x/n)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou funkce $f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a platí $f_n \to f$ v $\mathscr{S}$. Vskutku, je-li P polynom a α multiindex, pak

$$P(x)D^\alpha(f - f_n)(x) = P(x)\sum_{\beta\leqslant\alpha} c_\beta D^{\alpha-\beta}(f)D^\beta(1 - \psi(x/n).$$

Jelikož $D^\beta(1 - \psi(x/n)) = 0$ pro $|x| < n$, funkce $D^\beta(\psi(x/n))$ jsou stejně omezená a funkce $PD^{\alpha-\beta}(f)$ je v $C_0(\mathbb{R}^d)$, konverguje $PD^\alpha(f - f_n)$ stejnoměrně k 0. Tedy $f_n \to f$ v $\mathscr{S}$. □

Definice 1.5.41. Spojité lineární funkcionály na $\mathscr{S}$ se nazývají *temperované distribuce*. Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathscr{S}'$. Na $\mathscr{S}'$ uvažujeme následující konvergenci: Posloupnost $\{\Lambda_n\}$ v $\mathscr{S}'$ konverguje v $\mathscr{S}'$ k $\Lambda \in \mathscr{S}'$, pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$.

Poznámka 1.5.42. Funkcionál $u\colon \mathscr{S} \to \mathbb{F}$ je v $\mathscr{S}'$ právě tehdy, když $v = u|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ a existuje spojité rozšíření v z $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ na $\mathscr{S}$.

Příklady 1.5.43. Následující objekty jsou temperované distribuce.

(a) Každý prvek $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem.

(b) Míra $\mu \in M^+(\mathbb{R}^d)$ splňující $\int(1 + |x|^2)^{-k}\,d\mu(x) < \infty$ pro nějaké $k \in (0,\infty)$.

(c) Funkce g splňující $\int|(1 + |x|^2)^{-k}g(x)|^p\,dm_d(x) < \infty$ pro nějaké $k > 0$ a $p \in [1,\infty)$.

(d) Funkce z $(L^p(\mathbb{R}^d), m_d)$, $p \in [1,\infty]$, a funkce majorizované nějakým polynomem.

Důkaz. (a) Vezmeme $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\psi = 1$ na otevřené množině obsahující $\operatorname{spt} u$ a položíme

$$v(f) = u(f\psi), \quad f \in \mathscr{S}.$$

Pak nezáleží na volbě ψ a přitom v je spojité rozšíření u na $\mathscr{S}$.

(b) Splňuje-li $\mu \in M^+(\mathbb{R}^d)$ odhad $\int(1 + |x|^2)^{-k}\,d\mu(x) < \infty$ pro $k \in (0,\infty)$, pak definujme

$$\Lambda_\mu(f) = \int f(x)\,d\mu(x), \quad f \in \mathscr{S}.$$

Zobrazení Λ_μ je díky předpokladu dobře definované, neboť

$$|\Lambda_\mu(f)| \leqslant \int \|(1 + |x|^2)^k f(x)\|_\infty (1 + |x|^2)^{-k}\,d\mu(x) < \infty.$$

Je-li dále $\{f_n\}$ posloupnost konvergující k 0 v $\mathscr{S}$, pak máme $\|(1 + |x|^2)^k f_n(x)\|_\infty \to 0$, a tedy

$$|\Lambda_\mu(f_n)| \leqslant \int |f_n(x)|\,d\mu(x) \leqslant \|(1 + |x|^2)^k f_n(x)\|_\infty \int (1 + |x|^2)^{-k}\,d\mu(x) \to 0.$$

Tedy Λ_μ je v $\mathscr{S}'$.

(c) Nechť $k > 0$ a $p \in [1,\infty)$ jsou dány předpokladem. Položme

$$\Lambda_g(f) = \int fg\,dm_d(x), \quad f \in \mathscr{S}.$$

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konvergující k 0 v $\mathscr{S}$. Nechť q je sdružený exponent k p a $m > 0$ je voleno tak, že $(\int(1 + |x|^2)^{(k-m)q}\,dm_d(x))^{\frac{1}{q}} < \infty$. Pak máme

$$\begin{aligned}
|\Lambda_g(f_n)| &\leqslant \int |f_n g|\,dm_d(x) \leqslant \int |f_n(x)(1 + |x|^2)^k||(1 + |x|^2)^{-k}g(x)|\,dm_d(x)\\
&\leqslant \left(\int |f_n(x)(1 + |x|^2)^k|^q\,dm_d(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |(1 + |x|^2)^{-k}g(x)|^p\,dm_d(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C\left(\int |(1 + |x|^2)^{k-m}(1 + |x|^2)^m f_n(x)|^q\,dm_d(x)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\|(1 + |x|^2)^m f_n(x)\|_\infty \left(\int (1 + |x|^2)^{(k-m)q}\,dm_d(x)\right)^{\frac{1}{q}} \overset{n\to\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

(d) Je-li $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1,\infty)$, plyne tvrzení z (c). Je-li g majorizováno nějakým polynomem P, tj. $|g| \leqslant |P|$, pak lze volbou vhodného $k \in \mathbb{N}$ zařídit, že

$$\int |(1+|x|^2)^{-k} g(x)|\, dm_d(x) \leqslant \int |P(x)|(1+|x|^2)^{-k}\, dm_d(x) < \infty.$$

Tedy závěr opět plyne z (c). Tedy i funkce z $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ jsou v $\mathscr{S}'$. ☐

Tvrzení 1.5.44. *Je-li α multiindex, P polynom a $f \in \mathscr{S}$, jsou $u \mapsto D^\alpha u$, $u \mapsto Pu$ a $u \mapsto fu$ dobře definované spojité operace na $\mathscr{S}'$.*

Důkaz. Nechť $u \in \mathscr{S}'$, α je multiindex a $\{f_n\}$ konverguje k 0 v $\mathscr{S}$. Pak $D^\alpha f_n \to 0$ v $\mathscr{S}$, a tedy

$$(D^\alpha u)(f_n) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f_n) \to 0.$$

Tedy $D^\alpha u \in \mathscr{S}'$. Dále pro posloupnost $\{u_n\}$ konvergující k 0 v $\mathscr{S}'$ a pevné $f \in \mathscr{S}$ máme

$$\lim_{n\to\infty} (D^\alpha u_n)(f) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} u_n(D^\alpha f) = 0,$$

a tedy $u \mapsto D^\alpha u$ je spojité zobrazení na $\mathscr{S}'$.

Ostatní případy se dokáží obdobně. ☐

Definice 1.5.45. *Fourierova transformace temperované distribuce u* je definována jako $\widehat{u}(f) = u(\widehat{f})$, $f \in \mathscr{S}$.

Věta 1.5.46. *Platí následující tvrzení.*

(a) Fourierova transformace je spojitá bijekce $\mathscr{S}'$ na $\mathscr{S}'$ s periodou 4 a spojitou inverzí.

(a) Máme $\widehat{u_f} = u_{\widehat{f}}$ pro $f \in L^1$ a $\widehat{u_f} = u_{Ff}$ pro $f \in L^2$.

(c) Je-li P polynom, platí $\widehat{P(D)u} = P\widehat{u}$ a $\widehat{Pu} = P(-D)\widehat{u}$.

Důkaz. (a) Nechť $u \in \mathscr{S}'$ a $\{f_n\}$ jde k 0 v $\mathscr{S}$. Pak $\widehat{f_n} \to 0$ v $\mathscr{S}$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{u}(f_n) = \lim_{n\to\infty} u(\widehat{f_n}) = 0.$$

To znamená, že $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$.

Nechť $\{u_n\}$ konverguje k 0 v $\mathscr{S}'$. Pak pro pevné $f \in \mathscr{S}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{u_n}(f) = \lim_{n\to\infty} u_n(\widehat{f}) = 0,$$

a $u \mapsto \widehat{u}$ je spojité zobrazení na $\mathscr{S}'$.

Označme $\mathcal{F}u = \widehat{u}$, $u \in \mathscr{S}$. Pak

$$\mathcal{F}^4 u(f) = u(\mathcal{F}^4 f) = u(f), \quad f \in \mathscr{S},$$

a tedy $\mathcal{F}^4$ je identita na $\mathscr{S}'$. Tedy je $\mathcal{F}$ bijekce $\mathscr{S}'$ na $\mathscr{S}'$. Protože též dostáváme $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$, je inverze $\mathcal{F}^{-1}$ spojitá.

(b) Nechť $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak pro $f \in \mathscr{S}$ platí

$$\widehat{u_g}(f) = u_g(\widehat{f}) = (2\pi)^{d/2} \int \widehat{f} g\, dm_d = (2\pi)^{d/2} \int f \widehat{g}\, dm_d = \int f\widehat{g} = u_{\widehat{g}}(f).$$

Pro funkci $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ je třeba jako výše ověřit, že je-li $f \in \mathscr{S}$, platí $\int f Fg\, dm_d = \int \widehat{f} g\, dm_d$ (zde Fg značí Fourierovu transformaci na $L^2(\mathbb{R}^d)$ z Věty 1.5.39). K ověření této rovnosti uvažujme $g_n = g\chi_{B(0,n)}$. Pak $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ a platí limitní přechody $g_n \to g$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a $\int g_n \widehat{f} \to \int g \widehat{f}$. Tedy i $Fg_n \to Fg$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a dostáváme

$$\begin{aligned}\int g\widehat{f}\, dm_d &= \lim_{n\to\infty} \int g_n \widehat{f}\, dm_d = \lim_{n\to\infty} \int \widehat{g_n} f\, dm_d \\ &= \lim_{n\to\infty} \int (Fg_n) f\, dm_d = \int (Fg) f\, dm_d.\end{aligned}$$

(c) Pro polynom P, temperovanou distribuci u a $f \in \mathscr{S}$ máme

$$\begin{aligned}\widehat{P(D)u}(f) &= (P(D)u)(\widehat{f}) = (\sum c_\alpha D_\alpha u)(\widehat{f}) \\ &= \sum (c_\alpha D_\alpha u)(\widehat{f}) = \sum c_\alpha ((i)^{-|\alpha|} D^\alpha u)(\widehat{f}) \\ &= \sum c_\alpha (i)^{-|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \widehat{f}) = u\left(\sum c_\alpha (-1)^{|\alpha|} (i)^{-|\alpha|} D^\alpha \widehat{f}\right) \\ &= u(P(-D)\widehat{f}) = u(\widehat{Pf}) = \widehat{u}(Pf) = (P\widehat{u})(f).\end{aligned}$$

Tedy $\widehat{P(D)u} = P\widehat{u}$.

Dále platí

$$\begin{aligned}(P(-D)\widehat{u})(f) &= ((\sum c_\alpha(-1)^{|\alpha|}(i)^{-|\alpha|}D^\alpha)(\widehat{u}))(f) = \widehat{u}(\sum c_\alpha(i)^{-|\alpha|}D^\alpha f)\\ &= \widehat{u}(P(D)f) = u(\widehat{P(D)f}) = u(P\widehat{f})\\ &= (Pu)(\widehat{f}) = \widehat{Pu}(f).\end{aligned}$$

□

Definice 1.5.47. Je-li $u \in \mathscr{S}'$ a $f \in \mathscr{S}$, definujeme konvoluci $u * f$ jako $(u * f)(x) = u(\tau_x \check{f})$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 1.5.48. *Nechť $u \in \mathscr{S}'$ a $f, g \in \mathscr{S}$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) $u * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *a* $D^\alpha(u * f) = D^\alpha u * f = u * D^\alpha f$.

(b) $u * f \in \mathscr{S}'$.

(c) $\widehat{u * f} = \widehat{f}\widehat{u}$ *a* $\widehat{fu} = \widehat{u} * \widehat{f}$.

(e) $u * (f * g) = (u * f) * g$.

Kapitola 2

Úvod do funkcionální analýzy - příklady

2.1 Témata ke cvičení (zima 2014/2015)

- Téma 1:
  1. Něco z Příkladu 2.2.9(a) i (b).
  2. Příklad 2.2.5.
  3. Separabilita a úplnost $C(K)$ se supremovou a integrální normou.
  4. Separabilita a úplnost c_0 a ℓ^p.
  5. Něco o $M(K)$ (příklady, separabilita, úplnost).
  6. Komplexifikace.
  7. Něco na faktorprostory, např. Příklady 2.4.4, 2.4.9.
- Téma 2
  1. Něco na komplementy, např. Příklady 2.4.8, 2.4.6.
  2. Lemma 1.1.30(a),(d).
  3. Něco norem funkcionálů a operátorů, viz Sekce 2.10, 2.13.1.
  4. Řídkost uzavřeného vlastního podprostoru, vlastní hustý podprostor, vlastní podprostor druhé kategorie.
  5. Příklady 2.7.3, 2.7.4.
  6. Příklad 2.10.7.
  7. Něco na řady, např. Příklady 2.5.1 a 2.5.2.
- Téma 3
  1. Důkaz Věty 1.1.41.
  2. Příklad 2.5.4.
  3. Příklad 2.6.11.
  4. Příklad 2.6.19.
  5. Příklad 2.6.3.
  6. Příklady 2.8.3 a 2.8.4.
- Téma 4
  1. Příklad 2.7.6.
  2. Tvrzení 1.1.58.
  3. Tvrzení 1.1.59.
  4. Příklad 1.1.60.
- Téma 5
  1. Tvrzení b) a c) z Věty 1.2.19.
  2. Příklad 2.8.1.
  3. Příklad 2.8.5.

4. Věta 1.2.10.
5. Příklad 1.2.28(c).

- Téma 6
  1. Příklad 2.12.5.
  2. Příklad 2.12.2.
  3. Příklad 2.12.3.
  4. Příklad 2.12.15.
  5. Příklad 2.12.8.
- Téma 7
  1. Příklad 2.13.8
  2. Souvislost duálních a adjungovaných operátorů s maticemi.
  3. Příklad 1.4.18
  4. Příklady na spektrum (konečně dimenzionální, posuny, integrální operátor)
  5. Kompaktní podmnožiny různých prostorů.
  6. Příklad 1.4.18.
- Téma 8
  1. Příklady 2.15.: 5, 6, 8, 10, 21, 31
- Téma 9
  1. Ukažte, že zobrazení $u\colon \varphi \mapsto \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt$ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}$ spočtěte $\widehat{u}$.
  2. Ukažte, že u_{e^x} není temperovaná distribuce. (Uvažte funkci $e^{-x}\chi_{[2,\infty)}$ a shlaďte ji pomocí konvoluce vhodnou hladkou funkcí s kompaktním nosičem.)
  3. Ukažte, že rovnice $y' - y = 0$ nemá nenulové řešení v $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. (Je-li u temperovaná distribuce řešící tuto rovnici, splňuje její Fourierova distribuce Fu rovnici $(1 + ig)Fu = 0$, kde $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Odtud odvoďte, že $u = 0$.)
  4. Spočtěte $F(u_1)$ a $F(u_{\delta_a})$, kde $a \in \mathbb{R}$.
  5. Nechť $f \in L^1((0, 2\pi))$ a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_f(k)e^{ikx}$ je její Fourierova řada. Dodefinujte f na $\mathbb{R}$ 2π-periodicky a vyjádřete $F(u_f)$ pomocí koeficientů $\{a(k)\}$. (Rozveďte podrobně následující návod. Předpokládejme nejprve, že $f \in L^2((0, 2\pi))$. Pak $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_f(k)e^{ikx}$ v $L^2((0, 2\pi))$ a dostaneme $F(u_f) = \sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_f(k)\delta_k$. V obecném případě aproximujte danou $f \in L^1((0, 2\pi))$ funkcemi v $L^2((0, 2\pi))$ a proveďte limitní přechody k ověření $F(u_f) = \sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_f(k)\delta_k$.)

2.2 Normované lineární prostory

Příklad 2.2.1. (a) Najděte nejakou algebraickou bázi v $\mathbb{R}^n$ a v $\mathbb{C}^n$.

(b) Napište definici eukleidovské normy na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ukažte (vysvětlete, z čeho plyne), že $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ jsou Banachovy prostory dimenze n.

(d) Co jsou normy $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, a jaký je jejich vztah k eukleidovské normě. Odvoďte odpovědi na otázku (c) i pro tyto normy.

Příklad 2.2.2. Ukažte, že na konečně rozměrném prostoru jsou každé dvě normy ekvivalentní.

Příklad 2.2.3. Ukažte, že libovolná norma na konečně dimenzionálním prostoru je úplná.

Příklad 2.2.4. Najděte na daném nekonečně rozměrném Banachově prostoru X dvě úplné normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ tak, že identita $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ není spojitá ani v jednom směru.

Příklad 2.2.5. Každá koule v normovaném lineární prostoru je konvexní a každá konvexní množina je souvislá.

Příklad 2.2.6. Vnitřek konvexní množiny je konvexní.

Příklad 2.2.7. Sféra alespoň dvoudimenzionálního prostoru je souvislá.

Příklad 2.2.8. (a) Uzávěr prodprostoru je podprostor a uzávěr konvexní množiny je konvexní.

(b) Platí

$$\operatorname{span} A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}, x_1, \dots, x_n \in A\},$$

$$\operatorname{co} A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_1, \dots, x_n \in A\}.$$

Příklad 2.2.9. Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) Nechť $A \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span} A} = \overline{\operatorname{span}} A$ a $\overline{\operatorname{co} A} = \overline{\operatorname{co}} A$.

(b) $\overline{U(x,r)} = B(x,r)$ a $\operatorname{Int} B(x,r) = U(x,r)$. Najděte příklad metrického prostoru, kde tyto identity neplatí.

Příklad 2.2.10. (a) Ukažte, že prostor matic $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ reálných (komplexních) čísel je vektorový prostor s obvyklými operacemi sčítání a násobku.

(b) Určete jeho dimenzi.

(c) Je norma definovaná výrazem $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ rovna normě operátoru $T(x) = Ax$ na $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), uvažujeme-li na $\mathbb{R}^n$ eukleidovské normy? Případně platí aspoň nějaká nerovnost mezi nimi?

Příklad 2.2.11. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou v normovaném lineární prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.:

(i) $\{x_1, \dots, x_n\}$ jsou lineárně nezávislé.

(ii) Existuje $C > 0$ tak, že $\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{F}^n : \|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\| < C\}$ je omezená v $\mathbb{F}^n$.

(iii) Pro každé $C > 0$ platí, že $\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{F}^n : \|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\| < C\}$ je omezená v $\mathbb{F}^n$.

Příklad 2.2.12. Nechť $(X, \|\cdot\|_1)$ je Banachův prostor a $\|\cdot\|_2 : X \to [0, \infty]$ má následující vlastnosti:

- Na množině $Y = \{x \in X : \|x\|_2 < \infty\}$ je to norma,
- $\|\cdot\|_2$ je zdola polospojitá na X.

Pak $(Y, \|\cdot\|_2)$ je Banachův.

Příklad 2.2.13. Zkuste použít předchozí příklad na $X = (\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ a $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\ell^p}$.

Příklad 2.2.14. Nechť X je metrický prostor a $A, B \subset X$ neprázdné. Zjistěte, zda se nabýva $\operatorname{dist}(A, B)$ v následujících případech:

- bez dalších předpokladů,
- A jakákoliv a B jednobodová,
- A, B uzavřené,
- A, B uzavřené a X úplný,
- A, B uzavřené a $X = \mathbb{R}^n$,
- A kompaktní a B uzavřená,
- X Banachův prostor, A uzavřený podprostor a B jednobodová,
- A, B uzavřené a omezené,
- A kompaktní, B uzavřená a X lokálně kompaktní,
- A kompaktní, B uzavřená, X úplný a lokálně kompaktní,
- A kompaktní, B uzavřená, $X = \mathbb{R}^n$.

Příklad 2.2.15. (a) Najděte klesající posloupnost $\{B_n\}$ uzavřených koulí v úplném metrickém prostoru X tak, že $\bigcap_n B_n = \varnothing$.

(b) Ukažte, že takovou posloupnost nelze najít v Banachově prostoru.

(c) Najděte neúplný prostor X a klesající posloupnost $\{B_n\}$ uzavřených koulí s diametry jdoucími k 0 tak, že $\bigcap_n B_n = \varnothing$.

2.3 Příklady Banachových prostorů

Příklad 2.3.1. Nechť $\ell^\infty(\Gamma)$ je vektorový prostor všech reálných (komplexních) omezených funkcí na množině Γ.

(a) Dokažte, že $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$ je norma na $\ell^\infty(\Gamma)$.

(b) Pro jaká Γ je $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ konečně rozměrný?

(c) Pro jaká Γ je $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ separabilní?

(d) Dokažte, že normovaný lineární prostor $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný.

Příklad 2.3.2. (a) Připomeňte, jak jsou definovány normy v prostorech $C([0,1])$, c_0, c, $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

(b) Ukažte, že jde o uzavřené lineární podprostory $\ell^\infty(\Gamma)$ pro $\Gamma = [0,1]$, resp. $\Gamma = \mathbb{N}$.

(c) Jak z toho plyne, že jde o Banachovy prostory?

(d) Které z těchto prostorů jsou separabilní?

Příklad 2.3.3. (a) Připomeňte, jak jsou definovány normy na prostorech ℓ^p pro $p \in [1,\infty]$. Zopakujte si důkazy toho, že jde o normy a že jsou úplné.

(b) Pro která p jde o separabilní Banachovy prostory?

(c) V jakém vztahu jsou prostory ℓ^p a ℓ^q pro $p < q$?

Příklad 2.3.4. (a) Připomeňte, jak jsou definovány vektorové prostory $L^p(\mathbb{R})$ pro $p \in [1,\infty]$.

(b) Jde o Banachovy prostory?

(c) Pro která p jde o separabilní Banachovy prostory?

(d) Ukažte, že $L^p(\mathbb{R})$ obsahuje podprostor, který je izomorfní prostoru ℓ^p.

(e) V jakém vztahu jsou prostory L^p a L^q pro $p < q$ (uvažujte, zda je míra prostoru konečná či nikoliv)?

Příklad 2.3.5. Nechť $C^k([0,1]) = \{f \in C([0,1]) : f^{(k)} \in C([0,1])\}$ a $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} + \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in [0,1]\}$ pro $f \in C^k([0,1])$. (Zde derivací v nule a v jedné rozumíme odpovídající jednostranné derivace.)

(a) Dokažte, že $(C^k([0,1]), \|\cdot\|)$ je nekonečně rozměrný, separabilní Banachův prostor.

(b) Jde o uzavřený podprostor prostoru $C([0,1])$?

Příklad 2.3.6. Nechť (X,ρ) je metrický prostor s metrikou ρ a $x_0 \in X$ je dáno. Uvažujte prostor $\mathrm{Lip}(X)$ všech lipschitzovských funkcí na X s normou

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = |f(x_0)| + \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)} : x \neq y\}.$$

Je $\mathrm{Lip}(X)$ Banachův prostor? Je $\mathrm{Lip}[0,1]$ separabilní? Co se stane, když vynecháme v definici normy $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ člen $|f(x_0)|$?

Příklad 2.3.7. Prostor X všech posloupností $\{x_n\}$ s konečnou variací, tj. posloupností splňujících

$$\|\{x\}\| = |x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < \infty,$$

je s touto normou Banachův.

2.4 Operace s prostory

Příklad 2.4.1. Ukažte, že X/M z předchozího příkladu je Banachův, pokud je X Banachův.

Příklad 2.4.2. Nechť X, Y jsou normované prostory. Uvažujte $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, resp. $\|\cdot\|_p$ na součinu $X \times Y$.

(a) Jsou tyto normy ekvivalentní?

(b) Kdy je součin úplný?

(c) Jak vypadá duál k $X \times Y$?

Příklad 2.4.3. Nechť X je normovaný lineární prostor, $X = A \oplus B$, kde A je úplný a B konečně dimenzionální. Ukažte, že X je úplný.

Příklad 2.4.4. Nechť $X = \mathcal{C}(K)$ a $Y = \{f \in X : f = 0 \text{ na } F\}$, kde $F \subset X$ je uzavřená množina. Ukažte, že $X/Y = \mathcal{C}(F)$.

Příklad 2.4.5. Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset\subset H$ jeho uzavřený podprostor. Pak H/Y je izometricky izomorfní $Y^{\perp}$.

Příklad 2.4.6. Ukažte,k že $L^p(\mathbb{R}) = L^p((-\infty, 0)) \oplus_t L^p((0, \infty))$.

Příklad 2.4.7. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ a $Y = \{f \in X : f(0) = 0\}$. Popište X/Y.

Příklad 2.4.8. Nechť $X = \mathcal{C}([-1,1])$, $Y_1 = \{f \in X : f \text{ lichá}\}$ a $Y_2 = \{f \in X : f \text{ sudá}\}$. Pak $X = Y_1 \oplus_t Y_2$.

Příklad 2.4.9. (a) Nechť Y je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X. Je–li Y i X/Y úplný, je X také úplný.

(b) Nechť Y je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) X je separabilní,

(ii) Y i X/Y jsou separabilní.

2.5 Řady v normovaných prostorech

Příklad 2.5.1. Nechť X je Banachův a $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Pak pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Příklad 2.5.2. Najděte X Banachův a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergující při každém přerovnání, která ale splňuje $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$.

Příklad 2.5.3. Ukažte, že předpoklad úplnosti ve Větě 1.1.39(c) nelze vynechat.

Příklad 2.5.4. Nechť $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je množina navzájem kolmých prvků Hilbertova prostoru. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle$ konverguje pro každé $y \in H$.

Jak tvrzení dopadne v případě obecného systému $\{x_i : i \in I\}$ kolmých prvků?

2.6 Hilbertovy prostory

Příklad 2.6.1. Najděte několik různých skalárních součinů na $\mathbb{R}^n$ (na $\mathbb{C}^n$). Vysvětlete, proč normy definované každým z nich jsou ekvivalentní s eukleidovskou normou.

Příklad 2.6.2. Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $x_0 \in H$. Pak $\operatorname{dist}(x, M) = \max\{|\langle x_0, y \rangle| : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\}$.

Příklad 2.6.3. Spočtěte $\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$.

Příklad 2.6.4. Spočtěte $\min_{a,b,c} \int_0^{\infty} |x^3 - (a + bx + cx^2)|^2 e^{-x} \, dx$, a $\max \int_0^{\infty} x^3 g(x) e^{-x} \, dx$ kde g je kolmé na $\{1, x, x^2\}$ a $\int_0^{\infty} |g(x)|^2 e^{-x} \, dx = 1$.

Příklad 2.6.5. Nechť $\varphi : H \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Dokažte, že kodimenze prostoru $\{x : \varphi(x) = 0\}$ je nejvýše jedna.

Příklad 2.6.6. Dokažte tvrzení: M je uzavřený podprostor H, právě když $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Příklad 2.6.7. Je-li M podprostor Hilbertova prostoru, platí $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

Příklad 2.6.8. Nechť $A \subset [0, 2\pi]$ je měřitelná. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx = \lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx = 0.$$

Příklad 2.6.9. Popište ortogonální projekce H na M, pokud

$$M = \{f \in L^2(0, 2\pi) : c_n(f) = 0 \text{ pro } n \in A \subset Z\},$$
$$M = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ s.v. pro } x \in B \subset \mathbb{R}\}$$

(A a B jsou dané množiny a $c_n(f)$ značí Fourierovy koeficenty funkce f).

Příklad 2.6.10. Ukažte, že na $\mathcal{C}([0,1])$ nelze zavést skalární součin generující $\|.\|_\infty$.

Příklad 2.6.11. Najděte prostor se skalárním součinem a v něm maximální ortonormální soustavu, jejíž lineární obal není hustý.

Příklad 2.6.12. Nechť N je přirozené číslo, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^N = 1$ a $\alpha^2 \neq 1$. Dokažte, že skalární součin na Hilbertově prostoru splňuje identity

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x + \alpha^n y\|^2 \alpha^n$$

a

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x + e^{it} y\|^2 e^{it}\, dt.$$

Příklad 2.6.13. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak je ekvivalentní:

(i) $\langle x, y \rangle = 0$,

(ii) $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ pro každý skalár α,

(iii) $\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|$ pro každý skalár α.

Příklad 2.6.14. Nechť X je množina všech reálných absolutně spojitých funkcí na $[0,1]$, pro něž $f' \in L^2(0,1)$. Rozhodněte, zda X je prostor se skalárním součinem, či zda je dokonce Hilbertův, pokud

$$(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'g'.$$

Příklad 2.6.15. Určete ortogonální doplněk v $L^2(0,1)$ k prostoru $\{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0\}$.

Příklad 2.6.16. Nechť $X \subset Y$ jsou uzavřené podprostory Hilbertova prostoru. Pak existuje $y \in Y$ tak, že $\|y\| = 1$ a $\|y - x\| \geqslant 1$ pro každé $x \in X$.

Příklad 2.6.17. Pro n přirozené a $t \in [-1, 1]$ položme $f_n(t) = t^{n-1}$. Pak existuje právě jedna ortonormální posloupnost $g_n \in L_2(-1, 1)$ tak, že

$$\operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_k\} = \operatorname{span}\{g_1 \ldots, g_k\}.$$

Spočtěte $g_1, \ldots, g_5$.

Uvažujte analogický problém pro interval $[0, 1]$.

Příklad 2.6.18. Dokažte, že v množině $A = \{x \in \ell^2 : \sum(1 + \frac{1}{i})x_i^2 \leqslant 1\}$ neexistuje prvek x tak, aby $\|x\| = \sup\{\|a\| : a \in A.\}$

Příklad 2.6.19. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra. Je-li $f \in L^2(X, \mathcal{S}, \mu)$, je funkce $g \in L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$ podmíněná střední hodnota f, pokud platí

$$\forall T \in \mathcal{T} : \int_T f\, d\mu = \int_T g\, d\mu.$$

Hilbertův prostor $M = L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$ lze přirozeně uvažovat jako podprostor Hilbertova prostoru $H = L^2(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Ukažte, že g je podmíněná střední hodnota f právě tehdy, když $\|f - g\| = \operatorname{dist}(f, M)$.

2.7 Báze všeho druhu

Příklad 2.7.1. Najděte dimenzi algebraické báze pro prostory $\mathcal{C}([0,1])$, c_0, ℓ^p a $L^p[0,1]$.

Příklad 2.7.2. Ukažte, že dvě různé báze vektorového prostoru mají stejnou mohutnost.

Příklad 2.7.3. Najděte nekonečně rozměrný normovaný prostor se spočetnou algebraickou dimenzí.

Příklad 2.7.4. Ukažte, že algebraická dimenze Banachova prostoru nemůže být nekonečná a spočetná. (Návod: Užijte Baireovu větu.)

Příklad 2.7.5. Ujasněte si rozdíl mezi algebraickou a ortonormální bází Hilbertova prostoru.

Příklad 2.7.6. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) $\dim X < \infty$,

(ii) každé dvě normy na X jsou ekvivalentní,

(iii) každé lineární zobrazení T prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y je spojité.

2.8 Hahn–Banachova věta

Příklad 2.8.1. (Banachova limita) Ukažte, že existuje spojitý lineární funkcionál L na prostoru ℓ^∞ takový, že

$L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ pro $x \in c$,

$L(x) \leqslant L(y)$, je-li $x_n \leqslant y_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a konečně

$L(x_1, x_2, \dots) = L(x_k, x_{k+1}, \dots)$ pro $x \in \ell^\infty$ a $k \in \mathbb{N}$.

(a) Užijte návod: Uvažujte funkcionál, který konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu, a sublineární funkcionál $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

(b) Užijte návod: Uvažujte funkcionál rovný nule na posloupnostech tvaru $(x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots)$ a sublineární funkcionál $p(x) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Ukažte, že "Banachova limita"L nemůže splňovat rovnost $L(xy) = L(x)L(y)$.

Příklad 2.8.2. Nechť f je konkávní a g je konvexní na konvexní uzavřené množině $K \subset \mathbb{R}^n$, nechť $f(x) \leqslant g(x)$ pro $x \in K$. Rozhodněte, zda existuje afinní funkce h na $\mathbb{R}^n$ taková, že $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pro $x \in K$.

(Funkce h je afinní, jestliže $h(x) - h(0)$ je lineární. Ukažte, že h je afinní, právě když $h(ax+by) = ah(x)+bh(y)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = 1$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.)

Příklad 2.8.3. Nechť f je omezený funkcionál na podprostoru M Hilbertova prostoru X. Dokažte, že existuje právě jedno rozšíření f na celý X se stejnou normou a že se toto rozšíření anuluje na $M^\perp$.

Příklad 2.8.4. Sestrojte omezený funkcionál na podprostoru $L^1(\mu)$ tak, aby existovala dvě různá rozšíření na $L^1(\mu)$ zachovávající normu.

Příklad 2.8.5. Připomeňte si, že funkcionál f na normovaném lineárním prostoru X je spojitý, právě když $\operatorname{Ker} f$ je uzavřený. Ukažte, že obdobná věta neplatí pro operátory.

Příklad 2.8.6. Nechť M je podprostor normovaného prostoru X. Jestliže jediná spojitá lineární forma na X, která je nulová na M, je nulová, potom M je hustý v X.

Příklad 2.8.7. Množina $H \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá nadrovina, pokud existují reálná čísla $a_1, \dots, a_n$, c tak, že $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum a_i x_i = c\}$. Nechť E je konvexní s neprázdným vnitřkem a y leží na hranici E.Dokažte, že existuje nadrovina H tak, že $y \in H$ a E leží na jedné straně H.

Příklad 2.8.8. Nechť S_X je jednotková sféra normovaného lineárního prostoru X nekonečné dimenze. Je možné S_X pokrýt konečně mnoha uzavřenými koulemi, které neprotínají počátek?

2.9 Duální prostory a reflexivita

2.9.1 Klasické duální prostory

Příklad 2.9.1. (a) Popište, jak lze reprezentovat spojité lineární funkcionály na $\mathbb{R}^n$, na Hilbertově prostoru, na c_0, na ℓ^p, na $C(K)$, na c,... a co to znamená o jejich normě. Ve kterých případech umíte ukázat, že jde o izometrii?

(b) V případe reprezentace funkcionálu na c zkuste použít znalost reprezentace funkcionálu na prostoru spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Jsou prostory c_0^* a c^* "lineárně izometrické"?

Příklad 2.9.2. Který z klasických prostorů je reflexivní?

2.9.2 Duály obecně

Příklad 2.9.3. (a) Ukažte, že prostor spojitých lineárních operátorů mezi Banachovými prostory je Banachův prostor s obvyklou normou.

(b) Ukažte, že duální prostor X^* k Banachovu prostoru X je speciálním případem předchozího.

(c) Najděte lineární izometrii prostoru X^* na podprostor prostoru $\ell^\infty(B_X)$, kde B_X je otevřená jednotková koule v prostoru X.

Příklad 2.9.4. Dokažte: X^* separabilní, pak X separabilní. (Návod: Zvolte $\{f_n\}$ spočetnou hustou v jednotkové sféře X^*. Najděte $\{x_n\}$ v jednotkové sféře X tak, že $f_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Ukažte, že $\{x_n\}$ je hustá v jednotkové sféře X a tím pádem je X separabilní.)

Platí to i naopak?

Příklad 2.9.5. Nechť X je Banachův prostor, jehož duál X^* je reflexivní. Pak X je reflexivní. Dokažte.

Příklad 2.9.6. Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

Příklad 2.9.7. Reflexivní normovaný prostor je úplný.

Příklad 2.9.8. (a) Existuje spojitý funkcionál s normou jedna, který na jednotkové kouli nenabývá hodnotu jedna, na prostoru c_0, $C([0,1])$, ℓ^1, ...?

(b) Existuje v jednotkové kouli prostoru c_0 ($C([0,1])$, ℓ^1, ...) posloupnost, která nemá vybranou slabě konvergentní podposloupnost?

Najdete konkrétní příklady takových funkcionálů a posloupností na uvedených nereflexivních prostorech.

Příklad 2.9.9. Nechť X Banachův. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) X reflexivní,

(ii) pro každý vlastní uzavřený $Y \subset\subset X$ existuje $x \in S_X$ tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$,

(iii) pro každý vlastní uzavřený $Y \subset\subset X$ a $x \in X$ existuje $y \in Y$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

Příklad 2.9.10. Nechť ℓ^1 je uvažováno s normou $\|x\|_n = \|x\|_{\ell^1} + \|x\|_{\ell^\infty}$. Ukažte, že $(\ell^1, \|\cdot\|_n)^*$ lze ztotožnit s ℓ^∞ s normou

$$\|x\|_n^* = \sup\{\frac{1}{|N|+1}\sum_{i\in N} |x_i| : N \subset \mathbb{N} \text{ konečná}\}.$$

Příklad 2.9.11. Nechť $Y \subset\subset X$ uzavřený, Y reflexivní a X/Y reflexivní. Pak X je reflexivní.

2.10 Funkcionály

Příklad 2.10.1. Spočtěte normy následujících funkcionálu (pokud jsou dobře definovány) z X do $\mathbb{R}$ (respektive do $\mathbb{C}$) a určete, zda se jich nabývá.

(a) $F : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n^2}$, $X = c_0$.

(b) $(x, y) \mapsto 2x + 5y$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s normou $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

(c) $F : f \mapsto \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$, $X = L^2(0, \pi)$.

(d) $F : f \mapsto \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$, $X = C([-1, 1])$.

(e) $F : \{x_n\} \mapsto \sum \frac{n}{(2+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}} x_n$, $X = \ell^2$.

(f) $F : f \mapsto \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt$, $X = C([-1, 1])$.

(g) $F : f \mapsto \int_0^1 t f(t)\,dt$, $X = L^p(0, 1)$.

(h) $F : f \mapsto \int_0^1 t^{-\frac{1}{5}} f(t)\,dt$, $X = L^2(0, 1)$.

(i) $F : \{x_n\} \mapsto \sum(1 - \frac{1}{n})x_n$, $X = \ell^1$.

(j) $F : f \mapsto f'(0)$, $X = \{f \in C([-1, 1]) : f \text{ je polynom nejvýše 2. stupně}\}$.

(k) $F : \{x_n\} \mapsto \sum n \cdot x_n$, $X = c_{00}$.

(l) $F : f \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(1/k)}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C([0,1])$.

Příklad 2.10.2. Najděte normu následujících funkcionálů na $C([0,1])$:

(a) $F(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} f(1/k)$,

(b) $F(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} f(1/k^2)$,

(c) $F(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(k/n)$,

(d) $F(f) = \int_{1/4}^{3/4} f$,

(e) $F(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{sgn}(\sin(1/t))$.

Příklad 2.10.3. Nechť a, b, c jsou reálná a $ac - b^2 > 0$. Definujme skalární součin na $\mathbb{R}^2$ předpisem

$$(x, y) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Najděte Rieszovu reprezentaci funkcionálu f a jeho normu, pokud je definován vzorcem $f(x_1, x_2) = \alpha x + \beta y$.

Příklad 2.10.4. Najděte normu $\varphi : C^1([-1,1]) \to \mathbb{R}$ daného předpisem $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} tf(t)\,dt$ a norma f je dána $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Příklad 2.10.5. Ukažte, že lineární forma $f : X \to \mathbb{F}$ je spojitá právě tehdy, když její jádro je uzavřené.

Příklad 2.10.6. Ukažte, že lineární zobrazení $f : X \to \mathbb{F}^n$ je spojité právě tehdy, když jeho jádro je uzavřené.

Příklad 2.10.7. Nechť X je normovaný lineární prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení. Jaké implikace platí mezi následujícími výroky?

(i) $f \in X^*$,

(ii) $\mathrm{Ker}\, f$ uzavřený,

(iii) f je otevřené zobrazení (tj. posílá otevřené množiny na otevřené),

(iv) graf f je uzavřený v $X \oplus \mathbb{R}$.

(v) $\mathrm{Ker}\, f$ není hustý v X.

2.11 Slabá konvergence

Příklad 2.11.1. Ukažte, že konvergence posloupností v normě splývá se slabou konvergencí v $\mathbb{R}^n$ a ve všech konečně rozměrných Banachových prostorech.

Příklad 2.11.2. Ve kterých Hilbertových prostorech splývá konvergence posloupností v normě se slabou konvergencí? Kdy lze najít posloupnost na jednotkové sféře, která slabě konverguje k nule?

Příklad 2.11.3. Najdete posloupnosti na jednotkové sféře, které konvergují slabě k nule, také v prostorech c_0, ℓ^∞, ...

Příklad 2.11.4. Ukažte, že slabá a w^*- konvergence posloupností splývají na duálu k Hilbertove prostoru.

Příklad 2.11.5. Ukažte, že každá posloupnost v duálu k Banachovu prostoru X, která konverguje slabě, konverguje též w^*.

Příklad 2.11.6. Posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([0,1])$ konverguje slabě k $f \in \mathcal{C}([0,1])$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ bodově.

Příklad 2.11.7. Ukažte, že slabá a w^*–konvergence v duálu k reflexivnímu prostoru splývají.

Příklad 2.11.8. Nechť X je normovaný prostor, $\{x_n\}$ je relativně kompaktní množina a $x_n \to x$ slabě, pak $x_n \to x$.

Příklad 2.11.9. Nechť H je Hilbertuv, $x_n \to x$ slabě a $\|x_n\| \to \|x\|$. Pak $x_n \to x$.

Příklad 2.11.10. (Schurova věta) Dokažte, že každá slabě konvergentní posloupnost v ℓ^1 je konvergentní v normě.

Příklad 2.11.11. Nechť X je Banachuv a T omezený operátor na X. Dokažte

(a) x_n konverguje slabě v X, pak $\|x_n\|$ je omezená.

(b) $x_n \to x$ slabě, pak $Tx_n \to Tx$ slabě.

(c) T kompaktní a $x_n \to x$ slabě, pak $Tx_n \to Tx$.

(d) Pokud X je reflexivní, $Tx_n \to Tx$ kdykoliv $x_n \to x$ slabě, pak T je kompaktní.

(e) X reflexivní a $T : X \mapsto l^1$, pak T je kompaktní, a proto $R(T) \neq l^1$.

(f) Y reflexivní a $T : c_0 \mapsto Y$, pak T je kompaktní.

Příklad 2.11.12. Nechť $f_n, f \in L^1(\mu)$, $f_n \to f$ μ-s.v. a f_n konvergují k f slabě. Pak $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

2.12 Důsledky Baireovy věty

Příklad 2.12.1. Nechť X, K jsou metrické prostory a K je kompaktní. Má-li $T : X \to K$ uzavřený graf, je již spojité.

Příklad 2.12.2. (a) Ukažte, že $\mathcal{C}([0,1])$ je vektorový podprostor $L^1([0,1])$ (v tom smyslu, že spojitou funkci ztotožníme s třídou funkcí, které se jí rovnají skoro všude).

(b) Najděte posloupnost spojitých funkcí ležící na sféře prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, které konvergují v normě prostoru $L^1([0,1])$ k nule.

(c) Je identita na $\mathcal{C}([0,1])$ otevřené zobrazení?

(d) Má identita spojitou inverzi?

(e) Obraz $\mathcal{C}([0,1])$ je 1. kategorie v $L^1[0,1]$.

(f) Inverzní zobrazení k identitě je uzavřené.

(g) Ukažte přímo, že vektorový podprostor $\mathcal{C}([0,1])$ není uzavřený v $L^1([0,1])$, a tedy nejde o Banachův prostor.

Příklad 2.12.3. Dokažte, že $L^2(0,1)$ je 1. kategorie v $L^1(0,1)$ těmito postupy:

(a) $\{f \in L^2 : \int |f|^2 \leqslant n\}$ jsou uzavřené v L^1 a mají prázdný vnitřek.

(b) Ukažte, že identita z L^2 do L^1 je spojitá, ale není na.

To samé dokažte pro L^p a L^q, kde $p < q$ (resp. l^p, l^q).

Příklad 2.12.4. (a) Ukažte, že posloupnost $(1/n, ..., 1/n, 0, ...)$ leží v $\ell^1 \subset c_0$ a konverguje v normě prostoru c_0 k nule, kdežto v norme prostoru ℓ^1 leží na jednotkové sfére a nemá limitu.

(b) Je identita z ℓ^1 do c_0 otevřené zobrazení? Jak z toho plyne, že ℓ^1 není v c_0 normě úplný? (Užijte Banachovu větu o otevřeném zobrazení.)

(c) Ukažte přímo, že vektorový podprostor ℓ^1 není uzavřený v c_0, a tedy nejde o Banachův prostor.

Příklad 2.12.5. Nechť $\{a_n\}$ jsou nezáporná čísla taková, že $\sum a_n b_n < \infty$ pro každou $\{b_n\} \in \ell^2$. Pak $\{a_n\} \in \ell^2$.

Příklad 2.12.6. Nechť $\{a_n\}$ jsou nezáporná čísla taková, že $\sum a_n b_n < \infty$ pro každou $\{b_n\} \in c_0$. Pak $\{a_n\} \in \ell^1$.

Příklad 2.12.7. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost konvergující k nekonečnu. Ukažte, že existují posloupnosti $a = \{a_n\}$ a $b = \{b_n\}$ kladných čísel tak, že $b \in \ell^1$, $a \notin \ell^1$ a $a_n/b_n = c_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 2.12.8. Definujme funkcionály L_n a T_n na c_{00} předpisy:

$$L_n : \{x_n\} \mapsto nx_n \text{ a } T_n : \{x_n\} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Pak $\|L_n\| = n$ a $\sup\{|L_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ pro každé $x \in c_{00}$. Dále $\{T_n\}$ konverguje bodově na c_{00} a přesto tato limita není spojitým funkcionálem na c_{00}. Není to ve sporu s principem stejnoměrné omezenosti či Banach-Steinhausovou větou?

Příklad 2.12.9. Definujme funkcionály na $\mathcal{C}([0,1])$ F_n, F předpisem $F_n(f) = f(\frac{1}{n})$ a $F(f) = f(0)$. Pak pro každou f spojitou platí $F_n(f) \to F(f)$. Nicméně spočtěte $\limsup \|F - F_n\|$ a $\liminf \|F - F_n\|$.

Příklad 2.12.10. Definujme pro $f \in \mathcal{C}([0,1])$ $F_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$ a $F(f) = \int\limits_0^1 f$. Dokažte, že $F_n(f) \to F_f$, ale $\|F_n - F\|$ nekonverguje k 0.

Příklad 2.12.11. Dokažte, že existuje hustá G_δ množina E v $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ tak, že pro každou $f \in E$ je množina těch x, kde Fourierova řada funkce f nekonverguje, hustá a typu G_δ.

Příklad 2.12.12. Nechť T je spojité prosté lineární zobrazení Banachova prostoru X na Banachův prostor Y. Pak existuje $c > 0$ tak,že $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$.

Příklad 2.12.13. Najděte neúplný prostor, který není 1. kategorie.

Příklad 2.12.14. Nechť X je hustý podprostor Y, který je 2. kategorie v sobě. Může být 1. kategorie v Y?

Příklad 2.12.15. Najděte X, Y a $T \in L(X, Y)$ surjektivní neinvertovatelný tak, že

(a) X, Y nejsou Banachovy,

(b) X není Banachův,

(c) Y není Banachův.

Příklad 2.12.16. Sestrojte úplný metrický prostor a posloupnost do sebe zanořených omezených uzavřených koulí tak, že mají prázdný prunik. Jde to v Banachových prostorech?

Příklad 2.12.17. Ukažte, že předpoklad úplnosti ve větě o otevřeném zobrazení nelze vynechat ani pro X, ani pro Y.

2.13 Operátory a jejich spektrum

2.13.1 Něco příkladů

Příklad 2.13.1. Najděte normu zobrazení $F : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $F(x, y, z) = (2x + 3y - z, 4x - 3y - 2z)$.

Příklad 2.13.2. Prozkoumejte prostotu, surjektivitu, jádro a normu následujících zobrazení na ℓ^∞ zobrazujících $\{x_k\}$ na $\{y_k\}$ takto:

(a) $y_1 = 0$, $y_{k+1} = x_k$,

(b) $y_k = x_{k+1}$,

(c) $y_k = (1 + (-1)^k)x_k$,

(d) $y_k = \frac{x_k}{k}$,

(e) $y_k = (x_1 + \cdots + x_k)/k^2$,

(f) $y_k = x_{2k}$,

(g) $y_k = \frac{4k-3}{k+1} x_{k!}$.

Příklad 2.13.3. Hledejte spektrum (bodové spektrum) operátoru

(a) $T((x_n)) = (0, x_1, \dots)$ na ℓ^2.

(b) $T((x_n)) = (x_{n+1})$ na ℓ^2.

(c) $T((x_n)) = (x_n + x_{n+1})$ na ℓ^3. (Návod: Pro důkaz toho, že nekterá komplexní čísla nejsou ve spektru, můžete užít Banachovu větu o kontrakci.)

(d) $Tf = gf$ na $\mathcal{C}([0, 1])$ v závislosti na $g \in \mathcal{C}([0, 1])$.

(e) $Tf(t) = tf(t)$ na podprostoru $X \subset \ell^\infty([0, 1])$ těch funkcí, které jsou spojité v nule zprava, spojité v jedné zleva a mají v nule limitu nula. Vyšetřete, pro které prvky $\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$ je $(T - \lambda)(X)$ hustý v X.

(f) $Tf = (x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt)$ na $\mathcal{C}([0, 1])$. (Návod: Užijte své znalosti o řešení lineárních diferenciálních rovnic.)

Příklad 2.13.4. Spočtěte normy následujících operátoru z X do X, určete, zda se jich nabývá a podívejte se na jejich spektrum.

(a) $T : \{x_n\} \mapsto (0, 0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$, $X = \ell_2$.

(b) $T : \{x_n\} \mapsto (ix_1, i^2x_2, i^3x_3, \dots)$, $X = \ell_2$.

(c) $T : \{x_n\} \mapsto (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$, $X = \ell_2$.

(d) $T : \{x_n\} \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$, $X = \ell_2$.

(e) $Tf(x) = g(x)f(x)$, $X = \mathcal{C}([0,1])$.

(f) $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $X = \mathcal{C}([0,1])$.

(g) $Tf(x) = x^2 f(0)$, $X = \mathcal{C}([0,1])$.

(h) $Tf(x) = f(x^2)$, $X = \mathcal{C}([0,1])$.

(i) $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $X = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$.

(j) $Tf(x) = \int_{-1}^1 x^2 t f(t)\,dt$, $X = L^2(-1,1)$.

(k) $Tf(x) = x\int_0^1 f(t)\,dt$, $X = L^2(0,1)$.

(l) $Tf(x) = f(x+1)$, $X = L^2(\mathbb{R})$.

(m) $Tf(x) = xf(x)$, $X = L^2(-1,1)$.

(n) $Tf(x) = f(\sqrt{x})$, $X = L^1[0,1]$.

(o) $Tf(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + f(1)$, $f \in C([0,1])$.

(p) $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + f(1)$, $f \in C([0,1])$.

(q) $Tf(x) = 2f(x) + x\int_0^1 f(t)\,dt + x^2\int_0^1 tf(t)\,dt$, $f \in C([0,1])$.

2.13.2 Operátory obecně

Příklad 2.13.5. Ať $T : X \to Y$ je lineární zobrazení mezi normovanými prostory. Nechť existuje otevřená množina $M \subset X$ tak, že $T(M)$ je omezená. Ukažte, že T je spojitý.

Příklad 2.13.6. Najděte spojitý prostý operátor zobrazující neseparabilní prostor do separabilního.

Příklad 2.13.7. Ukažte, že zobrazení $T(x,y) = \{x \sin\alpha_n + y\cos\alpha_n\}$ je izometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ do ℓ^∞, je-li $\{\alpha_n\}$ hustá v $[0, 2\pi]$.

Příklad 2.13.8. (a) Napište, co je adjungovaným operátorem k $T : (x_n) \in \ell^1 \mapsto (0, x_1, \dots) \in c_0$. Popište operátor jako zobrazení z ℓ^1 do ℓ^∞.

(b) Uvažujte operátor T definovaný předpisem jako v (a) na prostoru ℓ^2. Porovnejte adjungované operátory ve smyslu Hilbertova prostoru a ve smyslu Banachově. Napište, jak lze dostat jeden pomocí druhého.

Příklad 2.13.9. Nechť $Y = \{(x_n) : x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$ je podprostor prostoru $X = \ell^1$, resp. $X = \ell^2$. Najděte nějakou spojitou projekci P prostoru X na Y, pokud existuje. Je v tom případě prostor $\operatorname{Ker} P$ izomorfní (izometrický) s prostorem X/Y?

Příklad 2.13.10. Je $T : f \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ projekce na prostoru $\mathcal{C}([-1,1])$? Co je jádro a co obraz T? Platí, že $X/\operatorname{Ker} T$ je izomorfní s $T(X)$? Je $T(X)$ doplněk k $\operatorname{Ker} T$?

Příklad 2.13.11. Najdete příklad omezeného operátoru T Banachova prostoru X do sebe, pro který není $X/\operatorname{Ker} T$ izomorfní s $T(X)$. Uvažujte např. operátor T definovaný předpisem $Tf(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ na $X = C([0,1])$.

Příklad 2.13.12. Ukažte, že zobrazení $T \mapsto T'$ z věty 1.4.2 obecně není na.

Příklad 2.13.13. Necht T je operátor definovaný predpisem $T(x_n) = ((1 + \frac{1}{n})x_n)$ na $X = \ell^1$. Platí v tomto případe, že $X/T(X)$ je izomorfní s $\ker T$?

Příklad 2.13.14. Najděte omezený operátor T na nějakém Banachově prostoru X takový, že

(a) $X/\operatorname{Ker} T$ je izomorfní s $T(X)$;

(b) $X/T(X)$ není izomorfní s $\operatorname{Ker} T$.

Uvažujte operátor T, který je definován na ℓ^2 předpisem $T : (x_n) \mapsto (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$.

Příklad 2.13.15. Nechť X je komplexní Banachuv prostor a $\varphi \in X^*$. Pak adjunkce k φ zobrazuje $\mathbb{C}$ do X^*. Najděte obraz $\mathbb{C}$ při zobrazení φ^*.

Příklad 2.13.16. Dokažte, že $T \in B(X,Y)$ je izometrie, právě když operátor $T' \in B(Y^*, X^*)$ je izometrie.

Příklad 2.13.17. Popište izometrii u mezi c_0^* a ℓ^1 a v mezi c^* a ℓ^1. Definujte $S : c_0 \to c$ vztahem $Sx = x$ a popište operátor vS^*u^{-1}, který zobrazuje ℓ^1 do ℓ^1. Definujte operátor $T : c \to c_0$ vztahem $y_1 = x_\infty, y_{n+1} = x_n - x_\infty$ pro $n \geqslant 1$. Dokažte, že T je prostý a na. Najděte $\|T\|$ a $\|T^{-1}\|$. Popište operátor uT^*v^{-1} , který zobrazuje ℓ^1 do ℓ^1.

Příklad 2.13.18. Nechť S a T jsou spojité lineární operátory na X a $T = TST$. Dokažte, že T má uzavřený obor hodnot.

Příklad 2.13.19. Nechť $f, g \in L^2(0,1)$ a $f \perp g$. Definujme operátor $Ah(x) = \int_0^1 f(x)g(y)h(y)\,dy$. Dokažte, že $A^2 = 0$ a řešte rovnici $(I - A)h = w$.

Příklad 2.13.20. Nechť X je $\ell^2(\mathbb{Z})$ a $Y = \{x \in X : x(n) = 0 \text{ pro } n \leqslant 0\}$. Najděte spektrum operátoru $Ax(n) = x(n-1)$. Určete dále spektrum $A|_Y$ a porovnejte obě spektra.

Příklad 2.13.21. Nechť S je libovolná neprázdná kompaktní podmnožina komplexní roviny. Najděte Banachuv prostor X a operátor $T : X \to X$ tak, že $\sigma(T) = S$.

Příklad 2.13.22. Nechť $A \neq 0$ je operátor na konečně rozměrném prostoru X. Pak existuje právě jeden polynom $p(t) = t^m + \alpha_1 t^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}t + \alpha_m$ tak, že $p(A) = A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}A + \alpha_m I = 0$ a $q(A) \neq 0$ pro polynom menšího stupně.

Příklad 2.13.23. Nechť P je spojitá projekce na Banachově prostoru X. Najděte $\sigma(P)$ a popište operátor $(\lambda I - P)^{-1}$ pro λ z rezolventy P.

Příklad 2.13.24. Nechť X je normovaný komplexní prostor. Má každý operátor na X neprázdné spektrum?

Příklad 2.13.25. Rozhodněte, zda pro operátor A na konečně rozměrném Banachově prostoru platí:

(a) Spektrum A závisí na normě X.

(b) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

(c) Každý bod spektra A je vlastním číslem A.

(d) Operátor A lze reprezentovat maticí, pokud ano, napište jak.

(e) Vlastní vektory pro ruzná vlastní čísla jsou lineárně nezávislé.

(f) Existuje $x \in X$ tak, že $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$.

(g) Spektrum A závisí na volbě báze prostoru.

Příklad 2.13.26. Ukažte na příkladu,že $S \circ T = I$ neimplikuje $T \circ S = I$.

Příklad 2.13.27. Jak vypadá předchozí příklad v konečné dimenzi?

Příklad 2.13.28. Zkuste najít na ℓ^2 nenulový operátor splňující $T^2 = 0$.

Příklad 2.13.29. Nechť T je operátor na X a Y je jednodimenzionální podprostor X takový, že $TY \subset Y$. Dokažte, že existuje vlastní číslo λ tak, že každý vektor $y \in Y$ je vlastním vektorem pro číslo λ.

Příklad 2.13.30. Nechť operátor na komplexním Hilbertově prostoru H splňuje $(Ax, x) = 0$. Dokažte, že $A = 0$. Dále najděte protipříklad na toto tvrzení pro případ, že H je reálný.

Příklad 2.13.31. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$ a $T \in L(X)$. Je $\sigma(T) \neq \emptyset$?

2.14 Kompaktní operátory

2.14.1 Kompaktní množiny

Příklad 2.14.1. Charakterizujte kompaktní podmnožiny v klasických Banachových prostorech, tj. $c_0, l^{\text{cokoliv}}, \mathcal{C}(K)$. Konkrétně:

(a) Omezená množina $K \subset c_0$ je relativně kompaktní právě tehdy, když $\{\sup_{x \in K} |x(n)|\} \in c_0$,

(b) $p \in [1, \infty)$, pak omezená množina $K \subset \ell^p$ je relativně kompaktní právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} |x(i)|^p = 0$$

stejnoměrně na K,

(c) Omezená množina $K \subset \ell^\infty$ je relativně kompaktní právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozbití $N_1 \cup \cdots \cup N_k = \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{diam} f(N_i) < \varepsilon$ pro každé $i = 1, \ldots, k$ a $f \in K$.

(d) Je-li $p \in [1, \infty)$, pak omezená množina $K \subset L^p(\mathbb{R})$ je relativně kompaktní právě tehdy, když

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx = 0$$

stejnoměrně na K.

Příklad 2.14.2. H je Hilbertuv prostor a $\{e_n\}$ je ortonormální soustava. Pak $Q = \{\sum x_n e_n : |x_n| \leqslant \frac{1}{n}\}$ je kompaktní. Dále žadný nekonečně rozměrný Hilbertuv prostor není lokálně kompaktní. Dokažte.

Příklad 2.14.3. Ukažte, že jsou následující tvrzení o množině A ve metrickém prostoru X ekvivalentní:

(i) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset A$ konečná splňující $A \subset \bigcup_{x\in F} B(x, \varepsilon)$.

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset \bigcup_{x\in F} B(x, \varepsilon)$.

(iii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset A$ konečná splňující $A \subset \bigcup_{x\in F} U(x, \varepsilon)$.

(iv) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset \bigcup_{x\in F} U(x, \varepsilon)$.

2.14.2 Operátory

Příklad 2.14.4. Které z operátorů v kapitole 2.13 jsou kompaktní? Co to znamená o jejich spektru?

Příklad 2.14.5. Dokažte, že každé spojité lineární zobrazení z konečně rozměrného normovaného lineárního prostoru do libovolného normovaného lineárního prostoru je kompaktním operátorem.

Příklad 2.14.6. Je operátor T definovaný předpisem $Tf(x) = x\int_0^1 f(t)\,dt + x^2 f(1)$ na $\mathcal{C}([0,1])$ kompaktní?

Příklad 2.14.7. Dokažte, že každý omezený operátor z normovaného prostoru do konečně rozměrného normovaného lineárního prostoru je kompaktní.

Příklad 2.14.8. Ukažte, že operátor T definovaný předpisem $T : (x_n) \mapsto (x_n/n)$ je kompaktní na ℓ^2. Vyšetřete jeho spektrum.

Příklad 2.14.9. Ukažte, že operátor $T : (x_n) \in \ell^p \mapsto (z_n x_n)$ je kompaktní na ℓ^p, $p \in [1, \infty]$, právě když $(z_n) \in c_0$.

Příklad 2.14.10. Dokažte, že pokud $\|T_n - T\| \to 0$ pro posloupnost omezených operátoru normovaného lineárního prostoru X do Banachova prostoru Y a pokud každý $T_n(X)$ je konečně rozměrný, pak je T kompaktní. Najděte příklad, že $T(X)$ nemusí být konečně rozměrný.

Příklad 2.14.11. Necht $k \in L^2(\mathbb{R}^2)$ a zobrazení T je definováno predpisem $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x,y) f(y)\,dy$ na $L^2(\mathbb{R})$. Ukažte, že T je kompaktní operátor na $L^2(\mathbb{R})$.

Návod. Ukažte nejprve, že ke k lze v $L^2(\mathbb{R}^2)$ najít jednoduché funkce k_n tvaru $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \chi_{A_i} \chi_{B_j}$, kde suma je konečná. Z toho ukažte, že operátory T_n definované predpisem $T_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} k_n(x,y) f(y)\,dy$ mají konečně rozměrné obrazy a konvergují v operátorové norme k T.

Příklad 2.14.12. Ukažte, že operátor T definovaný předpisem $Tf(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x-y) f(y)\,dy$ je kompaktní na $L^2([0, 2\pi])$. Najděte jeho normu a spektrum.

Příklad 2.14.13. Ukažte, že operátor T definovaný jako $Tf(x) = \int_0^1 |x-y|^\alpha f(y)\,dy$ je kompaktní na $L^2([0, 2\pi])$, pokud $0 < \alpha < 1/2$. Najděte jeho normu a spektrum.

Příklad 2.14.14. Nechť

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{pro } 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (1-t)s & \text{pro } s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

a definujme operátor T na $L^2(0,1)$ rovností

$$Tf(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\,dt \quad (0 \leqslant s \leqslant 1).$$

Dokažte, že:

(a) Vlastní čísla T jsou čísla $(n\pi)^{-2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, odpovídající vlastní vektory jsou $\sin n\pi x$ a každý vlastní prostor je jednodimenzionální.

(b) Vlastní funkce tvoří ortonormální bázi v $L^2(0,1)$.

(c) Nechť $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$. Zkoumejte rovnici $Tf - \lambda f = g$.

(d) T je dokonce kompaktní operátor na $\mathcal{C}([0,1])$ (Návod: Arzela-Ascoli.)

Příklad 2.14.15. Dokažte, že identita na prostoru $\mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ je kompaktní operátor z $\mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$.
Návod. užijte Arzelà-Ascoliho větu.

Příklad 2.14.16. Ukažte, že operátor T definovaný předpisem $Tf(x) = \int_0^x k(x,y)\ dy$ je kompaktní na $\mathcal{C}([0,1])$, pokud $k \in \mathcal{C}([0,1]^2)$.
Návod. Užijte Arzela-Ascoliho větu.

Příklad 2.14.17. Nechť $T \in K(H)$, H Hilbertův. Pak $T \in \overline{F(H)}$.

Příklad 2.14.18. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze a $T \in K(X)$. Pak T není na.

2.15 Distribuce

1. Ať S je 2-rozměrná hladká omezená plocha v $\mathbb{R}^3$ a ρ je spojitá funkce na S. Ukažte, že následující zobrazení definují distribuce:
$$\varphi \mapsto \int_S \varphi(x)\rho(x)dS(x)\ , \quad \varphi \mapsto \int_S \frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\rho(x)dS(x)\ .$$
2. Ukažte, že neexistuje distribuce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tak, že pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ platí
$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x)dx\ .$$
3. Ať $\varphi_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ jsou nezáporné, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$ a pro každé $\varepsilon > 0$ platí
$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi_n dx = 0\ .$$
Pak $\varphi_n \to \delta_0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
4. Ukažte, že $\sin(nx) \to 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ale $\sin(nx)$ nekonverguje bodově k nule.
5. Spočtěte derivace a druhé derivace distribucí:
$$\delta_0\ , \quad \sin x \cdot \chi_{(0,1)}\ , \quad \ln|x|\ , \quad |\sin x|\ , \quad \max\{0,x\}\ .$$
6. Ukažte, že platí
$$x\Lambda_{\delta_0} = 0, \quad x\Lambda_{\frac{1}{x}} = \Lambda_1.$$
Z toho odvoďte, že na $\mathscr{D}'(\Omega)(\mathbb{R})$ nejde definovat komutativní a asociativní násobení, které by rozšiřovalo násobení distribucí hladkou funkcí.
7. Ať $f(t,x) = \frac{1}{2}$ pro $t > |x|$ a 0 jinak. Ukažte, že $T := T_f$ splňuje rovnici
$$T_{tt} - T_{xx} = \delta_{(0,0)}\ .$$
8. Najděte funkci $f \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$, $f = 0$ na $(-\infty,0)$ tak, že
$$f'' + f = \delta$$
v $D'(\mathbb{R})$.
9. Ukažte, že formule
$$T_{\frac{1}{|x|^2}}(\varphi) := \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2}dx$$
definuje distribuci v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$, která řeší rovnici
$$|x|^2 T = 1\ .$$
10. Ukažte, že všechna řešení rovnice $f' = 0$ v $\mathscr{D}'((a,b))$ jsou konstanty.
11. Ukažte, že funkce
$$\varphi(x) \begin{cases} 0\ , |x| \geqslant 1\ , \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}\ , |x| < 1\ , \end{cases}$$
je prvkem $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

12. Ukažte, že $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ nejsou metrizovatelné prostory.
13. Ukažte, že
$$\triangle T_{\frac{1}{|x|}} = -4\pi\delta_{(0,0,0)}$$
v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$.
14. K tomu aby trigonometrická řada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ konvergovala v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ stačí, aby existovala čísla M, k tak, že $|a_n| \leqslant Mn^k$. Dokažte.
15. Ať $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a $T_f = T_g$. Ukažte, že $f = g$ skoro všude.
16. Ukažte, že formule
$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$
definuje distribuci.
17. Ukažte, že formule
$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{\sin x} dx + \int_{n\pi+\varepsilon}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)}{\sin x} dx$$
definuje distribuci $p.v.\frac{1}{\sin x}$.
18. A co formule
$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0)\log\varepsilon\Big) \text{ ?}$$
19. Definuje
$$T(\varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
distribuci na $\mathbb{R}$? A definuje distribuci na $(0, \infty)$?
20. Obecněji, jak je to s předpisem
$$T(\varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} (D^{\alpha_n}\varphi)(x_n) \ ,$$
kde α_n jsou multiindexy a $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v Ω, která nemá hromadné body.
21. Dána distribuce $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Existuje $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tak, aby $\alpha T = S$? Ukažte, že jediné řešení je $\frac{1}{\alpha}S$ pokud $\alpha > 0$ všude. Obecně může být řešení víc, např. $xT = T_1$ právě tehdy, když existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $T = T_{\frac{1}{x}} + cT_{\delta_0}$.
22. Ukažte, že
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta''_{x-2\pi n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos(nx) \ .$$
23. Ať $f \in L^1(\mathbb{R})$ spojitá a $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Pak $nf(nx) \to \delta_0$.
24. Ať $T_n \to T$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pak $T'_n \to T'$. Dokažte a aplikujte na funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$. Tak dokážete, že δ' je limitou funkcí.
25. Spočtěte $\lim \sqrt{n} e^{-nx^2}$ v distribucích.
26. Ukažte, že distribuce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ je generovaná mírou právě tehdy, když $T(\varphi) \geqslant 0$ pro každou $\varphi \geqslant 0$ ležící v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
27. Ať u a f jsou lokálně integrovatelné funkce na (a, b) a $u' = f$ ve smyslu distribucí. Ukažte, že existuje absolutně spojitá funkce v a konstanta c tak, že $u = v + c$ skoro všude na (a, b).
28. Ať $f_n, f \in L^1$ a $\lim_n \int_K |f_n - f| \to 0$ pro každý kompakt K. Ukažte, že $T_{f_n} \to T_f$.
29. Ukažte, že $\frac{\sin nx}{\pi x} \to \delta_0$ pro $n \to \infty$.
30. Ať f je 2π–periodická funkce na $\mathbb{R}$ definovaná jako
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) \ , & x \in (0, \pi] \ , \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) \ , & x \in [-\pi, 0) \ , \\ 0 \ , & x = 0 \ . \end{cases}$$
Ukažte, že
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

ve smyslu distribucí. Dále derivace f je 2π–periodická míra, jejíž restrikce na $[-\pi,\pi]$ je $-\frac{1}{2}+\delta_0$. A nakonec ukažte, že platí

$$(T_f)' = \sum_{k=1}^{\infty} T_{\cos kx} \,.$$

31. Najděte všechna řešení rovnice $T' - T = 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
32. Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ splňuje $\nabla T = 0$. Ukažte, že T je konstantní funkce.
33. Najděte všechna řešení rovnice $x\Lambda = 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
34. Najděte všechna řešení rovnice $x\Lambda = \Lambda_1$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

2.16 Konvoluce

1. Konvoluce pro funkce z L^p:
   (a) Ukažte, že
   $$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p \,,$$
   pokud $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Pro $p = 1$ a $p = \infty$ může v (a) nastat rovnost. Najděte podmínky, kdy rovnost platí.
   (c) Pokud $1 < p < \infty$ a v (a) nastává rovnost, je f nebo g rovna 0 skoro všude.
   (d) Ukažte, že $\varepsilon > 0$ existuje $f \in L^1$ a $g \in L^p$ tak, že
   $$\|f * g\|_p > (1-\varepsilon)\|f\|_1 \|g\|_p \,.$$
   (e) Ukažte, že $f * g$ je stejnoměrně spojitá, pokud $f \in L^p$, $g \in L^q$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Je-li navíc $1 < p < \infty$, je $f * g \in \mathcal{C}_0$, což obecně neplatí pro $f \in L^1$ a $g \in L^\infty$.
   (f) Najděte netriviální $f, g \in L^1$ tak, že $f * g = 0$. (Počkejte na Fourierovu transformaci.)
   (g) Pokud $f \in L^1$ a $f * f = f$, je $f = 0$. Dokažte.
   (e) Pokud $f \in L^1$ a $f * f = 0$, je $f = 0$. Dokažte.
4. Spočtěte:
   $$\begin{aligned} H(x)\sin x * H(x)\cos x \,, &\qquad e^{-|x|} * e^{-|x|} \,, \\ H(x)\sin x * H(x)\sin x \,, &\qquad \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} * \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{x^2+\beta^2} \,, \ \alpha,\beta > 0 \,, \\ H(x) * H(x) \,, & \end{aligned}$$
   kde $H = 1$ pro $x > 0$ a $H = 0$ jinak.

2.17 Temperované distribuce a Fourierova transformace

1. Dokažte, že $\mathscr{S} \subset L^1$, $L^1 \subset \mathscr{S}'$ a $L^\infty \subset \mathscr{S}'$.
2. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $H(1-|x|)$, kde H je Heavisidova funkce.
3. Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci temperované distribuce e^{-ax^2}, $a > 0$.
4. Spočtěte $\widehat{T}$, kde
   $$T(\varphi) := \int_{\partial B(0,1)} \varphi(x)\, dS(x) \,,$$
   kde $B(0,1)$ je jednotková koule v $\mathbb{R}^3$.
5. Najděte posloupnost $T_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ takovou, že konverguje k 0 v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ale nekonverguje k nule v $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
6. Ať $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je 2π–periodická funkce a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$ je její Fourierova řada. Spočtěte $\hat{f}$.
7. Ukažte, že pro funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ platí
   $$\widehat{T_f} = T_{\hat{f}} \,.$$
8. Spočtěte $\widehat{T_{\delta_0}}$ a $\widehat{T_1}$.
9. Ať p je polynom na $\mathbb{R}$. Je T_p temperovaná distribuce?
10. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $\hat{f}$, kde $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
11. Najděte funkci f, která splňuje
    $$-\triangle \hat{f} + \hat{f} = \delta$$
    v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$.
12. Ukažte, že e^x není temperovaná distribuce na $\mathbb{R}$, zatímco $e^x\cos(e^x)$ je.

2.18 Fourierova transformace

1. Ať $\hat{f}$ značí Fourieorovu transformaci. Ukažte, že platí

$$\begin{aligned}
&\widehat{f(x)e^{i\alpha x}}(t) = \hat{f}(t-\alpha)\ ,\\
&\widehat{f(x-\alpha)}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}\ ,\\
&\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}\ ,\\
&\widehat{\overline{f(-x)}}(t) = \overline{\hat{f}(t)}\ ,\\
&\widehat{f(x/\lambda)}(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)\ , \quad \lambda > 0\ ,\\
&(\hat{f}(t))' = \widehat{-ixf(x)}(t)\ , \quad \text{je–li } -ixf(x) \in L^1\ .
\end{aligned}$$

   Ať $f \in L^1$ je absolutně spojitá na $\mathbb{R}$ a $f' \in L^1$. Pak

$$\widehat{f'}(y) = iy\hat{f}(y);.$$

2. Zobrazení $f \mapsto \hat{f}$ je homomorfismus L^1 do $\mathcal{C}_0$. Ukažte, že není na, nicméně obor hodnot je hustý v $\mathcal{C}_0$.
3. Je-li $f, \hat{f} \in L^1$ a

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}\, dt\ ,$$

   je $g \in \mathcal{C}_0$ a $f = g$ skoro všude.
4. Ať $f \in L^1$, $f > 0$. Ukažte, že platí $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(0)$ pro všechny $y \neq 0$.
5. Najděte všechny komplexní homomorfismy na algebře L^1.
6. Ať $g = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_k}$. Najděte vztah mezi $\hat{f}$ a $\hat{g}$.
7. Ukažte, že $F : f \mapsto \hat{f}$ je unitární operátor na L^2. Spočtěte F^4.
8. Najděte a klasifikujte spektrum F.
   (Uvažujte funkce $\exp(\frac{x^2}{2})(\frac{d}{dx})^m \exp(-x^2)$).
9. Spočtěte

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin \lambda t}{t} e^{itx}\, dt\ .$$

10. Spočtěte Fourierovy transformace funkcí

$$\begin{aligned}
k_n(y) &:= \exp(\frac{-|y|}{n})\ ,\\
k_n(y) &:= (1 - \frac{|y|}{n})\chi_{[-n,n]}(y)\ ,\\
k_n(y) &:= \exp(-\frac{y^2}{2n^2})\ .
\end{aligned}$$

11. Spočtěte pomocí bodu předchozího

$$\int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin \alpha y}{y})^2\, dy$$
$$\int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin \alpha y}{y})^4\, dy$$
$$\int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin \alpha y}{y})^3\, dy\ .$$

12. Ať $g \in L^1$ je dvakrát diferencovatelná a $g', g'' \in L^1$ a g, g' jsou absolutně spojité. Ukažte, že existuje $f \in L^1$ tak, že $\hat{f} = g$. Dále ukažte, že předpoklady na g jsou splněny, pokud $g, g', g'' \in L^1 \cap \mathcal{C}_0$.
13. Ať $F \subset U \subset \mathbb{R}$, kde F je kompaktní a U je otevřená. Ukažte, že existuje $f \in L^1$ tak, že $\hat{f} = 1$ na F a $\hat{f} = 0$ na $\mathbb{R}\backslash U$.
14. Najděte $f \in L^2\backslash L^1$ tak, aby $\hat{f} \in L^1$.
15. Spočtěte Fourierovu transformaci funkcí

$$\cos(\alpha x)\ , \quad e^{-\alpha x^2}\ , \quad \sin(\alpha x)$$

Kapitola 3

Funkcionální analýza I.

3.1 Topologické vektorové prostory

3.1.1 Základní vlastnosti

Definice 3.1.1. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ splňující $|\alpha| \leqslant 1$,
- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $t > 0$ takové, že $sx \in A$ pro každé $s \in [0, t]$.
- symetrická, pokud $-A = A$.

Dále definujme vyvážený obal A jako

$$\mathrm{b}(A) = \bigcap \{B \colon B \text{ vyvážená nadmnožina } A\}$$

a vyvážený konvexní obal A jako

$$\mathrm{bco}(A) = \bigcap \{B \colon B \text{ vyvážená konvexní nadmnožina } A\}.$$

Tvrzení 3.1.2. *Nechť X je vektorový prostora $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Množina $\mathrm{b}(A)$ *je vyvážená a* $\mathrm{bco}(A)$ *je konvexní a vyvážená.*

(b) Platí $\mathrm{b}(A) = \bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} \lambda A$.

(c) Je-li A vyvážená, je $\mathrm{co}(A)$ *vyvážená.*

(d) Platí $\mathrm{bco}(A) = \mathrm{co}(\mathrm{b}(A))$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b) Množina $C = \bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} \lambda A$ je zřejmě vyvážená a obsahuje A. Tedy $\mathrm{bco}(A) \subset C$. Je-li nyní $B \supset A$ vyvážená, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{F}$ splňuje $|\lambda| \leqslant 1$, platí $x \in B$, a tedy $\lambda x \in B$. Proto $C \subset B$, což implikuje $C = \mathrm{b}(A)$.

(c) Pokud $x \in \mathrm{co}(A)$ a $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ jsou dány, dle Tvrzení 1.1.8(b) existují $x_1, \ldots, x_n \in A$ a $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n$ takové, že $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Pak $\lambda x_i \in A$ pro každé $i \in \{1, dots, n\}$, a tedy

$$\lambda x = \sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\lambda x_i) \in \mathrm{co}(A).$$

Množina $\mathrm{co}(A)$ je tedy vyvážená.

(d) Zjevně platí $\mathrm{bco}(A) \supset \mathrm{b}(A)$. Jelikož je množina $\mathrm{bco}(A)$ konvexní, platí $\mathrm{bco}(A) \supset \mathrm{co}(\mathrm{b}(A))$. Jelikož je $\mathrm{b}(A)$ a vyvážená, a $\mathrm{co}(\mathrm{b}(A))$ je tak dle (c) konvexní a vyvážená, platí $\mathrm{bco}(A) \subset \mathrm{co}(\mathrm{b}(A))$. □

Příklad 3.1.3. Nechť $X = \mathbb{R}^2$ a $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Pak $\mathrm{bco}(A) \neq \mathrm{b}(\mathrm{co}(A))$.

Důkaz. Důkaz jest elementární. □

Definice 3.1.4. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a τ je topologie na X. Pokud τ je regulární a operace

$$+ \colon X \times X \to X \quad \mathrm{a} \cdot \colon \mathbb{F} \times X \to X$$

jsou spojité, nazveme dvojici (X, τ) topologickým vektorovým prostorem.

Systém všech okolí 0 značíme $\tau(0)$.

Definice 3.1.5. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- omezená, pokud pro každé $V \in \tau(0)$ existuje $s > 0$ takové, že pro každé $t > s$ platí $A \subset tV$,
- prekompaktní (totálně omezená), pokud pro každé $V \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná splňující $A \subset F + V$.

Tvrzení 3.1.6. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \alpha x$ homeomorfismy X na X.

(b) Pro každé $x \in X$ je $\{x + U : U \in \tau(0)\}$ báze okolí x.

(c) Je-li $U \subset X$ otevřená a $A \subset X$ libovolná, je $A + U$ otevřená množina.

(d) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ symetrická, otevřená taková, že $V + V \subset U$.

(e) Každá $U \in \tau(0)$ je pohlcující.

Důkaz. (a) Spojité inverze k daným zobrazením jsou dány po řadě dány předpisy $x \mapsto x - a$ a $x \mapsto \frac{1}{\alpha}x$.

(b) Je-li $x \in X$ dáno a U je otevřená množina obsahující x, je $U - x$ otevřená množina obsahující 0. Existuje tedy $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U - x$. Pak $x + V \subset U$.

(c) Tvrzení plyne z (a) a rovnosti $A + U = \bigcup\{a + U : a \in A\}$

(d) Jelikož $0 + 0 = 0$ a $0 \in U$, existují $V_1, V_2 \in \tau(0)$ otevřené, které splňují $V_1 + V_2 \subset U$. Pak $V = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$ je otevřená, symetrická množina v $\tau(0)$ splňující $V + V \subset U$.

(e) Nechť $x \in X$ a $U \in \tau(0)$ je dáno. Jelikož násobení na $\mathbb{F} \times X$ je spojité v bodě $(0, x) \in \mathbb{F} \times X$, existuje $\delta > 0$ a $V \in \tau(0)$ takové, že $\lambda y \in U$, kdykoliv $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < \delta$, a $y \in x + V$. Položme $t = \frac{\delta}{2}$. Pak pro každé $s \in [0, t]$ platí $|s| < \delta$, a tedy $sx \in U$. □

Definice 3.1.7. Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak X je

- lokálně konvexní, pokud existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami,
- lokálně omezený, pokud existuje omezené okolí 0,
- lokálně kompaktní, pokud existuje relativně kompaktní okolí 0,
- metrizovatelný, pokud existuje metrika generující topologii X,
- F-prostor, pokud je topologie na X generovaná translačně invariantní úplnou metrikou (metrika ρ na X je translačně invariantní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$),
- Fréchetův, pokud X je lokálně konvexní F-prostor,
- normovatelný, pokud je topologie na X generovaná normou.

Příklady 3.1.8. Následující prostory jsou příklady lokálně konvexních prostorů:

- normované vektorové prostory,
- je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, uvažujme $\mathscr{D}_K(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ se standardními topologiemi (viz Sekce 3.1.6),
- $C(K)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence na kompaktech, kde K je lokálně kompaktní topologický prostor,
- prostor $\mathrm{Hol}(\Omega)$ holomorfních funkcích na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence,
- prostory funkcí na množině s topologií bodové konvergence,
- lokálně konvexní prostor s w-topologií,
- duální lokálně konvexní prostor s w^*-topologií.

Příklad 3.1.9. Uvažujme prostor $X = L^p([0,1])$ pro $p \in (0,1)$ s metrikou $\rho(f, g) = \int_0^1 |f - g|^p$, $f, g \in L^p([0,1])$. Pak X je topologický vektorový prostor.

Důkaz. Důkaz spolu s dalšími informacemi lze nalézt v Příkladu 3.1.46. □

Příklad 3.1.10. Uvažujme prostor $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{F} : f \text{ měřitelná}\}$ s metrikou $\rho(f, g) = \int_0^1 \min\{1, |f - g|\}\, d\lambda$, $f, g \in X$ (ztotožňujeme přitom funkce rovnající se skoro všude). Pak X je metrizovatelný topologický vektorový prostor a platí, že posloupnost $\{f_n\}$ v X konverguje k $f \in X$ právě tehdy, když $f_n \to f$ v míře.

Důkaz. Krok 1. Zobrazení ρ je zjevně metrika, která je navíc translačně invariantní. Nechť τ je topologie generovaná ρ. Ukažme, že (X, τ) je topologický vektorový prostor.

Pokud $\rho(f_n, f) \to 0$ a $\rho(g_n, g) \to 0$, pak

$$\begin{aligned}\rho(f_n + g_n, f + g) &= \int_0^1 \min\{1, |(f_n + g_n) - (f + g)|\}\, d\lambda \leqslant \int_0^1 \min\{1, |(f_n + g_n) - (f + g)|\}\, d\lambda \\ &\leqslant \int_0^1 \min\{1, |f_n - f| + |g_n - g|\}\, d\lambda \leqslant \int_0^1 (\min\{1, |f_n - f|\} + \min\{1, |g_n - g|\})\, d\lambda \\ &= \rho(f_n, f) + \rho(g_n, g),\end{aligned}$$

a tedy $+ \colon X \times X \to X$ je spojité.

Pokud $c_n \to c$ v $\mathbb{F}$ a $f_n \to f$ v ρ, označme $M = 1 + \sup\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Pak funkce $g_n(x) = \min\{1, |f(x)|\,|c_n - c|\}$, $x \in [0,1]$, konvergují bodově k 0 a platí nerovnost $\min\{1, Mx\} \leqslant M \min\{1, x\}$, $x \in [0, \infty)$. Proto

$$\begin{aligned}\rho(c_n f_n, cf) &= \int_0^1 \min\{1, |c_n f_n - cf|\}\,d\lambda \leqslant \int_0^1 \min\{1, |c_n f_n - c_n f| + |c_n f - cf|\}\,d\lambda \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\min\{1, |c_n|\,|f_n - f|\} + \min\{1, |f|\,|c_n - c|\}\right)\,d\lambda \\ &\leqslant \int_0^1 M \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda + \int_0^1 g\,d\lambda = M\rho(f_n, f) + \int_0^1 g\,d\lambda.\end{aligned}$$

Jelikož $\int_0^1 g_n\,d\lambda \to 0$ dle Lebesgueovy věty, máme $\rho(c_n f_n, cf) \to 0$. Tedy i operace $\cdot \colon \mathbb{F} \times X \to X$ je spojitá.

Krok 2. Nechť nyní posloupnost $\{f_n\}$ v X konverguje k $f \in X$ v ρ. Ukážeme, že konverguje v míře, tj. že platí

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \lambda\left(\{x \in [0,1] \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \to 0.$$

Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je dáno. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\varepsilon < 1$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\begin{aligned}&E_n = \{x \in [0,1] \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \quad A_n = \{x \in [0,1] \colon |f_n(x) - f(x)| > 1\} \quad \text{a} \\ &B_n = \{x \in [0,1] \colon \varepsilon < |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1\}.\end{aligned}$$

Pak $E_n = A_n \cup B_n$, $n \in \mathbb{N}$, a platí

$$\lambda(A_n) = \int_{A_n} 1\,d\lambda = \int_{A_n} \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda \leqslant \int_0^1 \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda = \rho(f_n, f) \to 0.$$

Z toho dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda(E_n) &= \int_{E_n} 1\,d\lambda = \int_{A_n \cup B_n} 1\,d\lambda = \lambda(A_n) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_n} \varepsilon\,d\lambda = \lambda(A_n) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_n} \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda \\ &\leqslant \lambda(A_n) + \frac{1}{\varepsilon}\rho(f_n, f).\end{aligned}$$

Tedy $\lambda(E_n) \to 0$.

Obráceně, nechť $f_n \to f$ v míře. Nechť $\varepsilon \in (0,1)$ je dáno. Označme

$$E_n = \{x \in [0,1] \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(E_n) < \varepsilon$ pro $n \geqslant n_0$. Pak pro tato $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\int_0^1 \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda &= \int_{E_n} \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \min\{1, |f_n - f|\}\,d\lambda \\ &\leqslant \int_{E_n} 1\,d\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \varepsilon\,d\lambda \leqslant \lambda(E_n) + \varepsilon < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ☐

Tvrzení 3.1.11. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Nechť K je kompaktní a C uzavřená podmnožina X disjunktní s K. Pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřená taková, že $(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$.

(b) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ taková, že $\overline{V} \subset U$.

(c) Prostor X je Hausdorffův.

Důkaz. (a) Pro každé $x \in K$ nalezneme pomocí Tvrzení 3.1.6(d) symetrickou otevřenou množinu $V_x \in \tau(0)$ splňující

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \varnothing.$$

Díky symetrii pak platí $(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing$. (Jsou-li totiž $v_i \in V_x$, $i = 1,2,3$, $c \in C$ a $x + v_1 + v_2 = c + v_3$, dostáváme

$$c = x + v_1 + v_2 - v_3 \in (x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \varnothing,$$

což je spor.) Jelikož K je kompakt, existují body $x_1, \dots, x_n$ v K takové, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Položíme-li $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, platí $V \in \tau(0)$ a

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \subset X \setminus (C + V).$$

(b) Použijeme (a) pro $K = \{0\}$ a $C = X \setminus \operatorname{Int} U$.

(c) Použijeme (a) pro $K = \{x\}$ a $C = \{y\}$. ☐

Tvrzení 3.1.12. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\overline{A} = \bigcap\{A + V : V \in \tau(0)\}$,

(b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$,

(c) je-li $Y \subset\subset X$, *pak* $\overline{Y} \subset\subset X$,

(d) je-li A konvexní, pak $\overline{A}$ a $\operatorname{Int} A$ *jsou konvexní,*

(e) je-li A vyvážená, pak $\overline{A}$ je vyvážená,

(f) je-li A vyvážená a $0 \in \operatorname{Int} A$, *pak* $\operatorname{Int} A$ *je vyvážená,*

(g) je-li A omezená, pak $\overline{A}$ je omezená.

Důkaz. (a) K důkazu si stačí uvědomit, že pro $x \in X$ díky Tvrzení 3.1.6(d) platí

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \tau(0)\colon (x + V) \cap A \neq \varnothing \iff \forall V \in \tau(0)\colon x \in A - V \iff \forall V \in \tau(0)\colon x \in A + V.$$

(b)-(e) Tvrzení o uzávěrech se snadno ověří, například pomocí netů (viz Tvrzení **??**).

Nechť A je konvexní a $\lambda \in (0, 1)$. Pak $\lambda \operatorname{Int} A$ a $(1 - \lambda) \operatorname{Int} A$ jsou otevřené množiny stejně jako $\lambda \operatorname{Int} A + (1 - \lambda) \operatorname{Int} A$. Díky konvexitě A platí

$$\lambda \operatorname{Int} A + (1 - \lambda) \operatorname{Int} A \subset A,$$

a tedy $\lambda \operatorname{Int} A + (1 - \lambda) \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} A$.

(f) Nechť A je vyvážená a $\alpha \in \mathbb{F}$ splňuje $0 < |\alpha| \leqslant 1$. Pak

$$\alpha \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\alpha A) \subset \operatorname{Int} A.$$

Pro $\alpha = 0$ platí $\alpha \operatorname{Int} A = \{0\} \in \operatorname{Int} A$ přímo z předpokladu tvrzení.

(g) Nechť A je omezená a $V \in \tau(0)$ je dáno. Pak existuje $W \in \tau(0)$ takové, že $\overline{W} \subset V$. Nalezneme $s > 0$ takové, že pro každé $t > s$ platí $A \subset tW$. Pak pro $t > s$ platí

$$\overline{A} \subset \overline{tW} = t\overline{W} \subset tV.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 3.1.13. Nechť

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x| \leqslant |y|\}.$$

Pak A je vyvážená množina, jejíž vnitřek není vyvážený.

Důkaz. Množina A je zřejmě vyvážená. Bod $(0, 0)$ není ve vnitřku A, neboť například posloupnost $\{(\frac{1}{n}, 0)\}$ k němu konverguje. Platí však $a = (0, 1) \in \operatorname{Int} A$, přičemž $0a \notin \operatorname{Int} A$. □

Věta 3.1.14. *Nechť X je topologický vektorový prostor*

(a) Pro každé $U \in \tau(0)$ existuje vyvážená, otevřená $V \in \tau(0)$ taková, že $V \subset U$.

(b) Pro každé $U \in \tau(0)$ konvexní existuje vyvážená, otevřená a konvexní množina $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$.

Důkaz. (a) Je-li $U \in \tau(0)$ dáno, použijeme spojitost zobrazení $\cdot\colon \mathbb{F} \times X \to X$ v bodě $(0, 0) \in \mathbb{F} \times X$ a obdržíme $\delta > 0$ a $V \in \tau(0)$ otevřenou splňující $\alpha V \subset U$ pro každé $\alpha \in B(0, \delta)$. Položíme-li $W = \bigcup\{\alpha V : \alpha \in B(0, \delta)\}$, je W požadovaná množina.

(b) Nechť konvexní množina $U \in \tau(0)$ je dána. Pak $A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$ je konvexní množina. Zvolme $W \in \tau(0)$ vyváženou množinu splňující $W \subset U$. Pak $\alpha^{-1} W = W \subset U$ pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ splňující $|\alpha| = 1$, a tedy $W \subset A$. Množina A je tedy (ne nutně otevřené) okolí 0 a navíc $0 \in \operatorname{Int} W \subset \operatorname{Int} A$. Tedy $\operatorname{Int} A$ je konvexní, otevřené okolí 0 množina a $\operatorname{Int} A \subset A \subset U$. K dokončení důkazu stačí dle Tvrzení 3.1.12(f) ověřit, že A je vyvážená množina. Nechť $r \in [0, 1]$ a β splňuje $|\beta| = 1$. Pak dostáváme

$$(r\beta)A = \bigcap_{|\alpha|=1} (r\beta)\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = A. \tag{3.1}$$

(Inkluze v (3.1) přitom platí, protože αU je konvexní množina, $0 \in \alpha U$ a $r \in [0, 1]$.) □

Důsledek 3.1.15. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Prostor X má bázi sestávající z otevřených, vyvážených a pohlcujících množin.

(b) Je-li X lokálně konvexní, má bázi sestávající z otevřených, vyvážených, konvexních a pohlcujících množin.

(c) Množina A v X je omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Důkaz. (a) Tvrzení plyne z Věty 3.1.14(a) a 3.1.6(e).

(b) Použijeme opět Větu 3.1.14 a 3.1.6(e).

(c) Je-li A omezená, je podmínka v tvrzení triviálně splněna. K důkazu obrácené implikace nyní předpokládejme platnost této podmínky a zvolme $U \in \tau(0)$. Nalezneme $V \in \tau(0)$ vyváženou, která splňuje $V \subset U$. Nechť $s > 0$ splňuje $A \subset sV$. Pak pro každé $t > s$ platí $\frac{s}{t}V \subset V$, a tedy

$$A \subset sV \subset tV \subset tU.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 3.1.16. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém množin obsahujících 0 takový, že*

(1) $\mathcal{U}$ sestává z vyvážených, pohlcujících množin a $\mathcal{U}$ je báze filtru (tj. pro všechna $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U_3 \in \mathcal{U}$ splňující $U_3 \subset U_1 \cap U_2$),

(2) pro každé $x \in X \backslash \{0\}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $x \notin U$,

(3) pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.

Pak existuje na X právě jedna topologie τ taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0.

Důkaz. Definujme topologii τ takto: množina $G \subset X$ je v τ právě tehdy, když pro každé $x \in G$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $x + U \subset G$.

Krok 1. Snadno se ukáže, že τ je topologie (využije se přitom předpoklad (1)).

Krok 2. Ukážeme, že $\{0\}$ je uzavřená množina. Pro každé $x \in X \backslash \{0\}$ existuje dle (2) prvek $V \in \mathcal{U}$ splňující $x \notin V$. Nechť $W \in \mathcal{U}$ splňuje $W + W \subset V$ (viz (3)). Pak $(x + W) \cap W = \varnothing$. (Pokud by totiž nastala rovnost $x + w_1 = w_2$ pro nějaké prvky $w_1, w_2 \in W$, dostali bychom díky rovnosti $x = w_1 + (-w_2) \in W_1 + W_2 \subset V$ spor.) Dostáváme $x + W \subset X \backslash \{0\}$, a tedy $X \backslash \{0\}$ je otevřená množina.

Jelikož je z definice zřejmé, že zobrazení $x \mapsto x + a$ je na X homeomorfizmus pro každé $a \in X$, tvoří každý bod X uzavřenou množinu.

Krok 3. Ukážeme, že každé $U \in \mathcal{U}$ je okolí 0. Máme-li tedy $U \in \mathcal{U}$ dáno, položíme

$$G = \{x \in X : \exists V \in \mathcal{U} \text{ splňující } x + V \subset U\}.$$

Pak $0 \in G$ a $G \subset U$. Množina G je dokonce otevřená, neboť pro dané $y \in G$ nalezneme $V \in \mathcal{U}$ splňující $y + V \subset U$ a dále $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset V$. Pak

$$(y + W) + W \subset y + V \subset U,$$

a tedy $y + W \subset G$.

Proto je G otevřená podmnožina U obsahující 0, a tedy $U \in \tau(0)$.

Krok 4. Ukažme, že operace sčítání je spojitá na $X \times X$. Nechť $(x_1, x_2) \in X \times X$. Uvažujme libovolnou otevřenou množinu G obsahující $x_1 + x_2$. Z definice τ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $x_1 + x_2 + U \subset G$. Nalezneme $V \in \mathcal{U}$ takové, že $V + V \subset U$. Pak platí $(x_1 + V) + (x_2 + V) \subset x_1 + x_2 + U \subset G$ a díky třetímu kroku víme, že $x_1 + V_1$ je okolí x_1 a $x_2 + V_2$ je okolí x_2. Tím je spojitost sčítání v bodě (x_1, x_2) ověřena.

Krok 5. Ověříme nyní spojitost násobení na $\mathbb{F} \times X$. Mějme $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{F} \times X$ dáno. Pro dané $U \in \mathcal{U}$ hledáme $\delta > 0$ a $V \in \mathcal{U}$ takové, že

$$\forall \lambda \in U(\lambda_0, \delta)\ \forall x \in x_0 + U : \lambda x \in \lambda_0 x_0 + U.$$

Nejdříve induktivně zkonstruujeme množiny $V_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $V_1 = U$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underbrace{V_n + \cdots + V_n}_{2^{n-1}\text{-krát}} \subset U. \tag{3.2}$$

Vezměme $n > |\lambda_0|$. Jelikož V_{n+2} je pohlcující, existuje $\delta \in (0, 1)$ splňující $\delta x_0 \in V_{n+2}$. Pak pro $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times X$ splňující $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ a $x \in x_0 + V_{n+2}$ platí díky vyváženosti V_{n+2} a (3.2)

$$\begin{aligned}
\lambda x &= (\lambda_0 x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) \\
&\in \lambda_0 x_0 + \delta V_{n+2} + \frac{\lambda - \lambda_0}{\delta} V_{n+2} + \lambda_0 V_{n+2} \\
&\subset \lambda_0 x_0 + V_{n+2} + V_{n+2} + n V_{n+2} \\
&\subset \lambda_0 x_0 + V_{n+2} + V_{n+2} + 2^n V_{n+2} \\
&\subset \lambda_0 x_0 + \underbrace{(V_{n+2} + \cdots + V_{n+2})}_{2^{n+1}\text{-krát}} \subset \lambda_0 x_0 + U.
\end{aligned}$$

Krok 6. Ověřme nyní, že $\mathcal{U}$ je báze okolí 0. Nechť G je otevřená množina obsahující 0. Pak existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset G$. Jelikož U je okolí 0 dle třetího kroku, je $\mathcal{U}$ báze okolí 0.

Krok 7. Uvažujme nyní jinou topologii σ, s níž je X topologický vektorový prostor a pro níž je $\mathcal{U}$ báze okolí 0. Nechť $V \in \tau(0)$ je libovolné. Pak existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $U \subset V$. Jelikož $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 v topologii σ, je $U \in \sigma(0)$. Tedy i $V \in \sigma(0)$. Obdobně obdržíme, že $\sigma(0) \subset \tau(0)$. Použitím Tvrzení 3.1.6(a) důkaz zakončíme. □

Tvrzení 3.1.17. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $\lambda \in \mathbb{F}$ a $A \subset X$ je omezená, je i množina λA omezená.

(b) Jsou-li $A, B \subset X$ omezené množiny, jsou i množiny $A + B$ a $A \cup B$ omezené.

(c) Je-li $A \subset X$ omezená, je i množina $\mathrm{b}(A)$ omezená.

Důkaz. (a) Zjevně můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno, přičemž můžeme předpokládat, že V je vyvážené. Nalezneme $t > 0$ splňující $A \subset tU$. Pak

$$\lambda A \subset t\lambda U = t\,|\lambda|\,\frac{\lambda}{|\lambda|}U \subset t\,|\lambda|\,U.$$

Tedy λA je omezená.

(b) Nechť $A, B \subset X$ jsou omezené a $U \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Dle definice existují čísla $s_a, s_b \in (0, \infty)$ taková, že pro $t_a > s_a$ a $t_b > s_b$ platí $A \subset t_a V$ a $B \subset t_b V$. Pak pro $t > \max\{s_a, s_b\}$ platí

$$A + B \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU$$

Množina $A + B$ je tedy omezená dle Důsledku 3.1.15.

Dále $A \cup B \subset tV \subset tU$, a tedy i $A \cup B$ je omezená.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme vyváženou množinu $V \in \tau(0)$ obsaženou v U a nechť $t > 0$ splňuje $A \subset tV$. Pak

$$\mathrm{b}(A) = \bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{D}}} \lambda A \subset \bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{D}}} t\lambda V = tV \subset tU.$$

Tedy $\mathrm{b}(A)$ je omezená. □

Tvrzení 3.1.18. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $A \subset X$. Pak je A totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.

(b) Je-li $A \subset X$ totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.

(c) Je-li $\lambda \in \mathbb{F}$ a $A \subset X$ je totálně omezená, je i množina λA omezená.

(d) Jsou-li $A, B \subset X$ totálně omezené množiny, jsou i množiny $A + B$ a $A \cup B$ totálně omezené.

(e) Je-li A totálně omezená, jsou i množiny $\overline{A}$ a $\mathrm{b}(A)$ totálně omezené.

Důkaz. (a) Implikace $\implies$ je zjevná. Abychom dokázali $\Longleftarrow$, mějme $U \in \tau(0)$ dáno. Nalezneme symetrické $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$ a nechť $F \subset X$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Vybereme $a \in A$ libovolně. Pro každé $x \in F$ zvolme $a_x \in A \cap (x + V)$, pokud je tato množina neprázdná, v opačném případě pak položíme $a_x = a$. Pak $A \subset \bigcup_{x \in F}(a_x + U)$. Vskutku, nechť $y \in A$ je dáno. Vybereme $x \in F$ takové, že $y \in x + V$. Pak $(x + V) \cap A \neq \varnothing$, a tedy máme $a_x \in A \cap (x + V)$. Dostáváme

$$y - a_x \in (x + V) - (x + V) = V - V \subset U.$$

Tedy $A \subset \bigcup_{x \in F}(a_x + U)$ a A je totálně omezená.

Tvrzení (b) okamžitě odvodíme pomocí (a) z definice totální omezenosti.

(c) Zjevně můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Pak $\lambda^{-1}U \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + \lambda^{-1}U$. Pak

$$\lambda A \subset \lambda F + \lambda\lambda^{-1}U = \lambda F + U.$$

(d) Jsou-li A, B totálně omezené a $U \in \tau(0)$ je dáno, vezmeme $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Nalezneme konečné množiny $F, H \subset X$ takové, že $A \subset F + V$ a $B \subset H + V$. Pak

$$A + B \subset (F + H) + U \quad \text{a} \quad A \cup B \subset (F \cup H) + U.$$

(e) Je-li A totálně omezená a $U \in \tau(0)$ je dáno, zvolíme $V \in \tau(0)$ vyváženou splňující $V + V \subset U$. Nechť $F \subset X$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Jelikož $\overline{A} \subset A + V$ (viz Tvrzení 3.1.12(a)), dostáváme

$$\overline{A} \subset A + V \subset F + V + V \subset F + U.$$

Nyní si povšimneme, že platí

$$\mathrm{b}(F) = \phi(\overline{\mathbb{D}} \times F),$$

kde $\phi\colon \overline{\mathbb{D}} \times F \to X$ je definováno jako $\phi(\lambda, x) = \lambda x$, $(\lambda, x) \in \overline{\mathbb{D}} \times F$. Tedy $\mathrm{b}(F)$ je jakožto spojitý obraz kompaktní množiny kompaktní, a tedy totálně omezená. Proto existuje $H \subset \mathrm{b}(F)$ konečná taková, že $\mathrm{b}(F) \subset H + V$. Nechť nyní $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ je libovolné. Pak

$$\lambda A \subset \lambda(F + V) = \lambda F + \lambda V \subset \mathrm{b}(F) + V \subset H + V + V \subset H + U.$$

Proto

$$\mathrm{b}(A) = \bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{D}}} \lambda A \subset H + U.$$

□

Tvrzení 3.1.19. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $K_1, \dots, K_n \subset X$ jsou kompaktní konvexní množiny. Pak $\operatorname{co}(K_1 \cup \dots \cup K_n)$ je kompaktní.*

Důkaz. Nechť Δ_n je jako v Tvrzení 1.1.8. Pak je zobrazení

$$\phi\colon \Delta_n \times K_1 \times \dots \times K_n \to X,$$
$$(\lambda, x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

spojitá surjekce kompaktu $\Delta_n \times K_1 \times \dots \times K_n$ na $\operatorname{co}(K_1 \cup \dots \cup K_n)$, což dokazuje požadovné tvrzení. □

Tvrzení 3.1.20. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $V \in \tau(0)$. Pokud $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ a $r_n \to \infty$, pak $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.

(b) Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené, a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.

(c) Pokud $\delta_n \searrow 0$ a V je omezené okolí 0, pak $\{\delta_n V : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0.

Důkaz. (a) Nechť $x \in X$ je dáno. Nalezneme $t \in (0, \infty)$ takové, že $sx \in V$ kdykoliv $s \in [0, t]$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ splňuje $(r_n)^{-1} < t$. Pak $x \in r_n V$.

(b) Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina a $U \in \tau(0)$. Pak $K \subset \bigcup_{x \in K} (x + \operatorname{Int} U)$, a tedy díky kompaktnosti K nalezneme konečnou množinu $F \subset K$ splňující

$$K \subset \bigcup_{x \in F} (x + \operatorname{Int} U) \subset \bigcup_{x \in F} (x + U).$$

Nechť K je totálně omezená a $U \in \tau(0)$ je dáno. Vezmeme vyváženou množinu $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Nechť $F \subset K$ je konečná splňující $K \subset F + V$. Jelikož je F konečná, je též omezená, a existuje tak $s > 0$ splňující $F \subset sV$. Díky vyváženosti V můžeme předpokládat, že $s \geqslant 1$. (Je-li totiž $s' \geqslant s$, pak $sV \subset s'V$.) Důkaz tak zakončíme pomocí pozorování

$$K \subset F + V \subset sV + V \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU.$$

(c) Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme vyvážené $W \in \tau(0)$, které je podmnožinou U. Pak existuje $t > 0$ splňující $V \subset tW$. Je-li nyní $n \in \mathbb{N}$ zvoleno tak, že platí $t\delta_n < 1$, máme

$$V \subset tW \subset \frac{1}{\delta_n} W \subset \frac{1}{\delta_n} U.$$

Tedy $\delta_n V \subset U$ a tvrzení je dokázáno.

□

3.1.2 Lineární zobrazení

Věta 3.1.21. *Nechť X a Y jsou topologické lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) T je spojité,

(ii) T je spojité v 0,

(iii) T je stejnoměrně spojité (tj. pro každé $V \subset Y$ okolí 0 existuje U okolí 0 v X takové, že $Tx_1 - Tx_2 \in V$ kdykoliv $x_1, x_2 \in X$ splňují $x_1 - x_2 \in U$).

Důkaz. Zjevně (i) $\implies$ (ii). Pokud (ii) platí a $V \subset Y$ je dané okolí 0, existuje $U \subset X$ okolí 0 splňující $T(U) \subset V$. Splňují-li nyní prvky $x_1, x_2 \in X$ vztah $x_1 - x_2 \in U$, pak $Tx_1 - Tx_2 = T(x_1 - x_2) \in V$. Tedy (ii) $\implies$ (iii).

Nechť T je stejnoměrně spojité a $x_0 \in X$ je dáno. Nechť W je dané okolí Tx_0. Pak existuje $V \subset Y$ okolí 0 splňující $Tx_0 + V \subset W$. Nalezneme $U \subset X$ dle (iii). Pak pro $x \in x_0 + U$ platí

$$Tx = Tx_0 + T(x - x_0) \in Tx_0 + V \subset W.$$

Tedy T je spojité v x_0 a (iii) $\implies$ (i). □

Věta 3.1.22. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $T\colon X \to \mathbb{F}$ je nenulové lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) T je spojité.

(ii) Jádro $\operatorname{Ker} T$ je uzavřené.

(iii) Platí $\overline{\operatorname{Ker} T} \neq X$.

(iv) Zobrazení T je omezené na nějakém okolí 0 (tj. existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $T(U)$ je omezená množina v $\mathbb{F}$).

Důkaz. Zjevně (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii).

Pokud $\overline{\operatorname{Ker} T} \neq X$, nalezneme $x \in X$ a $V \in \tau(0)$ splňující $(x + V) \cap \operatorname{Ker} T = \emptyset$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že V je vyvážená množina. Pak $T(V)$ je vyvážená množina v $\mathbb{F}$ splňující $0 \notin Tx + T(V)$, což speciálně znamená, že $T(V) \neq \mathbb{F}$. Pokud by $T(V)$ byla neomezená, nalezli bychom body $\lambda_n \in T(V)$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $|\lambda_n| \to \infty$. Díky vyváženosti obsahuje $T(V)$ s každým svým bodem λ též kruh $B(0, |\lambda|)$ o středu 0 a poloměru $|\lambda|$. Tedy $T(V) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, |\lambda_n|) = \mathbb{F}$.

(iv) $\implies$ (i) Nechť $V \in \tau(0)$ a $M > 0$ splňují $|Tx| \leqslant M$ pro každé $x \in V$. Je-li nyní $\varepsilon > 0$ dáno, pak $U = \frac{\varepsilon}{M} V \in \tau(0)$ a $|Tx| < \varepsilon$ pro $x \in U$. Tedy T je spojité v 0. □

Definice 3.1.23. Nechť X a Y jsou topologické lineární prostory. Lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ nazveme izomorfizmem (do), pokud T je homeomorfizmus X na $\operatorname{Rng} T$. Je-li T na, nazveme T izomorfizmem X na Y.

3.1.3 Konečně dimenzionální prostory

Lemma 3.1.24. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $T\colon \mathbb{F}^n \to X$ je lineární ($\mathbb{F}^n$ uvažujeme s eukleidovskou normou). Pak T je spojité.*

Důkaz. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze $\mathbb{F}^n$. Pro $x \in \mathbb{F}^n$ nechť x_i, $i = 1, \dots, n$, jsou souřadnice x. Pak $Tx = \sum_{i=1}^n x_i T e_i$, $x \in \mathbb{F}^n$. Jelikož pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je zobrazení $x \mapsto x_i$ spojité na $\mathbb{F}^n$, je spojité i zobrazení $x \mapsto x_i T e_i$ z $\mathbb{F}^n$ do X. Tedy $x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i T e_i$ je jakožto součet spojitých zobrazení též spojité. □

Věta 3.1.25. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je jeho podprostor dimenze n. Pak každá lineární bijekce $T\colon \mathbb{F}^n \to Y$ je izomorfizmus a Y je uzavřený podprostor X.*

Důkaz. Krok 1. Ať $T\colon \mathbb{F}^n \to Y$ je lineární bijekce. Dle Lemmatu 3.1.24 je T spojité, a tak je $T(S_{\mathbb{F}^n})$ kompaktní podmnožina Y, která neobsahuje 0. Nalezneme $V \subset Y$ vyvážené okolí 0 takové, že $V \cap T(S_{\mathbb{F}^n}) = \emptyset$. Pak $T^{-1}(V)$ je vyvážená množina obsahující 0 a neprotínající $S_{\mathbb{F}^n}$. Z tohoto faktu dostáváme, že $T^{-1}(V) \subset U_{\mathbb{F}^n}$. (Kdyby totiž existoval prvek $x \in T^{-1}(V)$ o normě větší než 1, díky vyváženosti by platilo $\frac{x}{\|x\|} \in T^{-1}(V) \cap S_{\mathbb{F}^n}$, což by byl spor.) Tedy T^{-1} je omezené zobrazení na Y. Pro každý souřadnicový funkcionál $p_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, tak dostáváme z Věty 3.1.22 spojitost $p_i \circ T^{-1}$. Jelikož $T^{-1} = \sum_{i=1}^n p_i \circ T^{-1}$, je T^{-1} spojité. Dostáváme tak, že T je homeomorfizmus.

Krok 2. Ukažme nyní, že Y je uzavřený podprostor. Nechť $x \in \overline{Y}$ je dáno a V je množina zvolená v předešlém. Nechť $U \in \tau(0)$ je okolí 0 v X, které splňuje $U \cap Y \subset V$. Nalezneme $t > 0$ takové, že $x \in tU$. Protože platí $T^{-1}(tV) \subset tB_{\mathbb{F}^n}$, máme $tV \subset T(tB_{\mathbb{F}^n})$, přičemž $T(tB_{\mathbb{F}^n})$ je kompaktní podmnožina Y. Dohromady dostáváme

$$x \in \overline{Y \cap tU} \subset \overline{tV} \subset \overline{T(tB_{\mathbb{F}^n})} = T(tB_{\mathbb{F}^n}) \subset Y.$$

Tedy Y je uzavřený. □

Věta 3.1.26. *Je-li X lokálně kompaktní topologický vektorový prostor, je X konečně dimenzionální.*

Důkaz. Nechť V je relativně kompaktní prvek $\tau(0)$. Dle Tvrzení 3.1.20(b) je $\overline{V}$ omezená množina a navíc dle Tvrzení 3.1.20(c) systém $\mathcal{B} = \{2^{-n} V : n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi okolí 0. Díky kompaktnosti $\overline{V}$ nalezneme $x_1, \dots, x_m \in \overline{V}$ takové, že $\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i + \frac{1}{2} V)$. Položme $Y = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$. Dle Věty 3.1.25 je Y uzavřený. Rozmysleme si, že

$$\frac{1}{2} V \subset Y + \frac{1}{4} V. \tag{3.3}$$

Je-li totiž $x \in V$ dáno, existujen index $i \in \{1, \dots, m\}$ a $v \in V$ takové, že $x = x_i + \frac{1}{2}v$. Tedy

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{4}v \in Y + \frac{1}{4}V.$$

Nyní ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V \subset Y + 2^{-n}V$. Pro $n = 1$ díky (3.3)

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Předpokládáme-li nyní platnost tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, máme díky (3.3)

$$V \subset Y + 2^{-n}V = Y + 2^{-n+1}\frac{1}{2}V \subset Y + 2^{-n+1}(Y + \frac{1}{4}V) = Y + 2^{-n-1}V.$$

Jelikož je $\mathcal{B}$ báze okolí 0, Tvrzení 3.1.12(a) implikuje

$$V \subset \overline{Y} = Y.$$

Jelikož V je okolí 0, máme $X = Y$. □

3.1.4 Metrizovatelnost a omezenost

Věta 3.1.27. *Nechť (X, τ) je topologický lineární prostor se spočetnou bází okolí 0. Pak existuje zobrazení $p\colon X \to [0, \infty)$ takové, že*

(a) $p(\lambda x) \leqslant p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$ splňující $|\lambda| \leqslant 1$,

(b) pro každé $x, y \in X$ platí $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$,

(c) $p(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(d) Metrika $\rho(x, y) = p(x - y)$, $x, y \in X$, generuje τ.

Prostor (X, τ) je tak metrizovatelný.

Důkaz. Krok 1. Zvolíme bázi $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ vyvážených okolí 0 splňující

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Nechť $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ značí systém všech neprázdných, konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ konečnou položíme

$$V_F = \sum_{n \in F} V_n \quad \text{a} \quad p_F = \sum_{n \in F} 2^{-n}.$$

Nejprve si rozmyslíme, že funkce $q\colon \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$ definovaná jako $q(F) = p_F$ je prostá. To však ihned plyne z faktu, že $2^{-n} > \sum_{k=n+1}^{n+m} 2^{-k}$ pro každé $n, m \in \mathbb{N}$.

Ukážeme nyní, že kdykoliv dvě množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Navíc pak platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Důkaz provedeme induckí podle počtu prvků množiny F_2.

Mějme množiny $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a $F_2 = \{l\}$, kde $l \in \mathbb{N}$, dány. Pokud $l \notin F_1$, stačí položit $F = F_1 \cup F_2$.

Pokud by platilo $F_1 \cap [1, l] = \{1, \dots, l\}$, dostali bychom spor s nerovností $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$. Tedy lze definovat $j = \max(\{1, \dots, l\} \backslash F_1)$. Označíme

$$A_1 = F_1 \cap [1, \dots, j - 1], \quad A_2 = F_1 \cap [j + 1, l] = \{j + 1, \dots, l\} \quad \text{a} \quad A_3 = F_1 \cap [l + 1, \infty).$$

Položíme

$$F = A_1 \cup \{j\} \cup A_3.$$

Pak F má požadované vlastnosti.

Platí totiž

$$p_{F_1} + p_{F_2} = p_{A_1} + p_{\{j+1,\dots,l\}} + p_{A_3} = P_{\{l\}} = p_{A_1} + p_{\{j\}} + p_{A_3} = p_F.$$

Dále díky (3.4) máme

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{A_1} + V_{\{j+1,\dots,l\}} + V_{A_3} + V_{\{l\}} \subset V_{A_1} + V_{\{j\}} + V_{A_3} = V_F.$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je tvrzení ověřeno pro každou množinu $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a každou n-prvkovou množinu $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Nechť $F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ je má $n + 1$ prvků. Označme $m = \max\ F_2$. Pak $H = F_2 \backslash \{m\}$ má n prvků, a tedy podle indukčního předpokladu existuje množina $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_{F'} = p_{F_1} + p_H$ a $V_{F_1} + V_H \subset V_{F'}$. Na dvojici F' a $\{m\}$ nyní opět aplikujeme indukční předpoklad, a obdržíme tak množinu $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} \quad \text{a} \quad V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Pak

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_H + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_{F_2}$$

a

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{F_1} + V_H + V_{\{m\}} \subset V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Tím je důkaz existence F dokončen.

Díky prostotě funkce q je navíc F jednoznačně určena.

Krok 2. Ukážeme, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\colon p_F < 2^{-n} \implies n < \min F \implies V_F \subset V_n. \tag{3.5}$$

Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F. Nechť F je jednoprvková množina. Pišme $F = \{k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Pokud $p_F = 2^{-k} < 2^{-n}$, zjevně $n < k = \min F$. Tato nerovnost pak zřejmě implikuje $V_F = V_k \subset V_n$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou m-prvkovou podmnožinu $\mathbb{N}$. Nechť $F = \{k_1, \dots, k_{m+1}\}$, kde $k_1 < k_2 < \dots < k_{m+1}$ jsou čísla v $\mathbb{N}$, je dána. Nerovnost $p_F < 2^{-n}$ zjevně implikuje $n < \min F$. Předpokládejme nyní tuto nerovnost a označme $F' = \{k_2, \dots, k_{m+1}\}$. Pak $n + 1 \leqslant k_1 < \min F'$ a F' je m-prvková. Proto

$$V_F = V_{k_1} + \left(V_{k_2} + \dots + V_{k_{m+1}}\right) \subset V_{n+1} + V_{F'} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n.$$

Tím je (3.5) ověřeno.

Krok 3. Definujeme

$$p(x) = \begin{cases} \inf\{p_F \colon x \in V_F, F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}, & x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} V_F, \\ 1, & \text{jinak}. \end{cases} \qquad x \in X.$$

Ověříme nyní pro funkci p vlastnosti (a)–(d). Pokud $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ a $x \in X$, pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ platí $\lambda x \in V_F$, pokud $x \in V_F$. Tedy (a) platí.

Dále ověříme (b). Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou dány. Pokud $p(x_1) + p(x_2) > 1$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy opačnou nerovnost a zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon < 1$. Nechť nyní $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $x_i \in V_{F_i}$ a $p_{F_i} < p(x_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Jelikož $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje právě jedna množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Díky prvnímu kroku platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Tedy $x_1 + x_2 \in V_F$, a proto

$$p(x_1 + x_2) \leqslant p_F = p_{F_1} + p_{F_2} \leqslant p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.$$

Tím je vlastnost (b) ověřena.

Dále pro množiny

$$B_r = \{x \in X \colon p(x) \leqslant r\}, \quad r \in [0, \infty),$$

platí inkluze

$$B_{2^{-(n+1)}} \subset V_n \subset B_{2^{-n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Vskutku, inkluze $V_n \subset B_{2^{-n}}$ je zřejmá, neboť $p(x) \leqslant 2^{-n}$, kdykoliv $x \in V_n$. Pokud je však $p(x) \leqslant 2^{-(n+1)}$, existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F < 2^{-n}$ a $x \in V_F$. Pak $x \in V_n$ díky (3.5).

Z (3.6) nyní plyne vlastnost (c), neboť

$$x = 0 \iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \iff p(x) = 0, \quad x \in X.$$

Nakonec ověříme (d). Nechť τ_ρ značí topologii generovanou metrikou ρ. Z (3.6) pak plyne, že báze okolí 0 v τ_ρ, totiž systém $\{B_r \colon r > 0\}$, je též báze okolí 0 v τ. Z (3.6) však také plyne, že $\tau(0)$ je báza okolí 0 v τ_ρ. Jelikož je metrika ρ translančně invariantní, topologie τ a τ_ρ splývají.

□

Důsledek 3.1.28. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) X je metrizovatelný,

(ii) X je metrizovatelný translačně invariantní metrikou,

(iii) X má spočetnou bázi okolí 0.

Důkaz. Implikace (ii) $\implies$ (i) platí zjevně a (iii) $\implies$ (ii) dle předchozí věty. Implikace (i) $\implies$ (iii) platí v každém metrizovatelném prostoru. □

Věta 3.1.29. *Nechť X je topologický vektorový prostor s omezeným okolím 0. Pak X je metrizovatelný.*

Důkaz. Nechť V je omezené okolí 0. Dle Tvrzení 3.1.20(c) je systém $\{\frac{1}{n}V : n \in \mathbb{N}\}$ báze okolí 0. Věta 3.1.27 tedy implikuje metrizovatelnost X. $\square$

Tvrzení 3.1.30. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li d translačně invariantní metrika na X, pak $\rho(nx, 0) \leqslant n\rho(x, 0)$ pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

(b) Je-li X metrizovatelný a $\{x_n\}$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset (0, \infty)$ taková, že $\gamma_n \to \infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$.

Důkaz. (a) Pro dané $x \in X$ ověříme požadovanou nerovnost indukcí. Pro $n = 1$ zjevně platí. Předpokládáme-li její platnost pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pro přirozené číslo $n + 1$ máme

$$\rho((n+1)x, 0) \leqslant \rho((n+1)x, x) + \rho(x, 0) = \rho(nx, 0) + \rho(x, 0) \leqslant n\rho(x, 0) + \rho(x, 0) = (n+1)\rho(x, 0).$$

(b) Nechť ρ je translačně invariantní metrika na X kompatibilní s τ. Pak pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v X platí $x_n \to 0$ v τ právě tehdy, když $\rho(x_n, 0) \to 0$. Vezměme indexy $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ splňující $\rho(x_n, 0) \leqslant \frac{1}{k^2}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $n \geqslant n_k$. Položme

$$\gamma_n = k, \quad n_{k-1} \leqslant n < n_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $\gamma_n \to \infty$ a pro každé $k > 1$ a $n \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k-1} \leqslant n < n_k$ platí

$$\rho(\gamma_n x_n, 0) = \rho(kx_n, 0) \leqslant k\rho(x_n, 0) \leqslant \frac{k}{(k-1)^2}.$$

Tedy $\rho(\gamma_n x_n, 0) \to 0$, což dává $\gamma_n x_n \to 0$ v τ. $\square$

Tvrzení 3.1.31. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Množina A je omezená.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v A a posloupnost $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $V \in \tau(0)$ je dána, přičemž lze předpokládat, že je vyvážená. Nalezneme $t > 0$ splňující $A \subset tV$ a dále index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $|\gamma_n| t < 1$ pro $n \geqslant n_0$. Nechť $v_n \in V$ jsou prvky splňující $x_n = tv_n$. Pak

$$\gamma_n x_n = \gamma_n t v_n = (\gamma_n t) v_n \in V.$$

Tedy $\gamma_n x_n \to 0$.

(ii) $\implies$ (i) Není-li A omezená, existuje vyvážená $V \in \tau(0)$ takové, že $A \not\subset nV$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $x_n \in A \setminus nV$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{1}{n} \to 0$ a $\frac{x_n}{n} \notin V$. Tedy $\frac{x_n}{n} \nrightarrow 0$. $\square$

Věta 3.1.32. *Nechť X a Y jsou topologické lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme následující výroky:*

(i) T je spojité,

(ii) T je omezené (tj. T zobrazuje omezené množiny na omezené),

(iii) pokud $x_n \to 0$, pak množina $\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená,

(iv) pokud $x_n \to 0$, pak $Tx_n \to 0$.

Pak (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii). Je-li X metrizovatelný, pak (iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (i).

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Je-li $A \subset X$ omezená a $W \subset Y$ okolí 0, nechť $V \subset X$ je okolí 0 splňující $T(V) \subset W$. Nalezneme $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak $T(A) \subset T(tV) = tT(V) \subset tW$, a tedy $T(A)$ je omezená.

(ii) $\implies$ (iii) Pokud $\{x_n\}$ je posloupnost v X konvergující k 0, je množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ omezená. Tedy $\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená dle (ii).

Nechť nyní X je metrizovatelný. Dokažme (iii) $\implies$ (iv). Pokud posloupnost $\{x_n\}$ v X konverguje k 0, nalezneme pomocí Tvrzení 3.1.30 posloupnost $\{\gamma_n\}$ konvergující do nekonečna, která splňuje $\gamma_n x_n \to 0$. Pak $Tx_n = \frac{1}{\gamma_n} T(\gamma_n x_n) \to 0$ dle Tvrzení 3.1.31.

(iv) $\implies$ (i) Jelikož X je metrizovatelný, existuje $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ spočetná báze okolí 0. Můžeme přitom předpokládat, že $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$. Nechť T není spojité v 0. Existuje tedy $W \subset Y$ okolí 0 takové, že $T(V_n) \not\subset W$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme $x_n \in V_n$ splňující $Tx_n \notin W$. Pak $x_n \to 0$, ale $Tx_n \nrightarrow 0$. $\square$

Tvrzení 3.1.33. *Nechť X, Y jsou topologické lineární prostory,* $\dim Y < \infty$ *a $T\colon X \to Y$ je surjektivní lineární zobrazení. Pak T je otevřené, pokud platí jedna z následujících podmínek.*

(a) Prostor X je lokálně konvexní.

(b) Platí $\dim Y \leqslant 1$.

Důkaz. Zřejmě stačí uvažovat případ $Y \neq \{0\}$. Nechť tedy $\dim Y = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kanonická báze Y. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat na Y normu $\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$, $y \in Y$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ zvolíme $x_i \in X$ splňující $Tx_i = e_i$.

K ověření otevřenosti T stačí vzhledem k linearitě T ukázat, že $0 \in \operatorname{Int} T(U)$ pro každé $U \in \tau(0)$. Nechť tedy $U \in \tau(0)$ je dáno.

(a) V případě, že X je lokálně konvexní, zvolíme vyváženou konvexní množinu $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$. Nechť $t > 0$ je takové, že $sx_i \in V$ pro každé $s \in [0, t]$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Je-li $y \in B_Y$ nenulové, tj. pokud $0 < \sum_{i=1}^n |y_i| \leqslant 1$, pak

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|}{\|y\|} \|y\| \operatorname{sgn} y_i e_i \in \operatorname{co}\{\lambda e_i \colon |\lambda| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} tB_Y &\subset t \operatorname{co}\{\lambda e_i \colon |\lambda| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\} = \operatorname{co}\{t\lambda e_i \colon |\lambda| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\} \\ &= \operatorname{co}\{t\lambda T x_i \colon |\lambda| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\} = T\left(\operatorname{co}\{t\lambda x_i \colon |\lambda| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\}\right) \\ &\subset T(V) \subset T(U). \end{aligned}$$

(b) Pokud $Y = \mathbb{F}$, nalezneme $V \in \tau(0)$ vyvážené splňující $V \subset U$. Nechť $x_0 \in X$ je takové, že $Tx_0 = 1$. Nechť $t > 0$ splňuje $sx \in V$ pro každé $s \in [0, t]$. Pak

$$\begin{aligned} tB_{\mathbb{F}} &= t\{\lambda \colon |\lambda| \leqslant 1\} = \{t\lambda \colon |\lambda| \leqslant 1\} = \{t\lambda T x_0 \colon |\lambda| \leqslant 1\} \\ &= T\left(\{t\lambda x_0 \colon |\lambda| \leqslant 1\}\right) \subset T(V) \subset T(U). \end{aligned}$$

Důkaz je tak dokončen. □

Příklad 3.1.34. Nechť $X = C([0, 1]0$ s topologií τ_p bodové konveregence a $Y = C([0, 1])$ s topologií τ_λ konvergence v míře (viz Příklad 3.1.10). Nechť $I \colon X \to y$ je identické zobrazení. Pak platí následující tvrzení.

(a) Je-li $A \subset X$ omezené, je $I(A)$ omezená v Y.

(b) Zobrazení I je sekvenciálně spojité.

(c) Zobrazení I není spojité.

Důkaz. Nechť

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \min\{|f(x) - g(x)|, 1\}\, d\lambda(x), \quad f, g \in Y,$$

značí metriku generující topologii τ_λ.

(a) Předpokládejme, že A je omezená v X, ale není omezená v Y. Dle Tvrzení 3.1.31 existují posloupnosti $\{f_n\}$ v A a $\{\gamma_n\}$ v $(0, \infty)$ takové, že $\lim \gamma_n = 0$ a $\gamma_n f_n \not\to 0$ v Y. Z tohoto faktu plyne existence čísel $\varepsilon, \delta \in (0, \infty)$ takových, že pro množiny

$$A_n = \{x \in [0, 1] \colon |\gamma_n f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je množina těch indexů $n \in \mathbb{N}$, které splňují

$$\lambda(A_n) \geqslant \delta,$$

nekonečná. Pomocí přechodu k podposloupnosti můžeme předpokládat, že tato nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$A = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k.$$

Pak

$$\lambda(A) = \lim_{n \to \infty} \lambda\left(\bigcup_{k=n}^\infty A_k\right) \geqslant \delta.$$

Zvolíme-li $x \in A$, dostáváme bod $x \in [0, 1]$, pro který platí $|\gamma_n f_n(x)| \geqslant \delta$, $n \in \mathbb{N}$. Z omezenosti A v X plyne, že posloupnost $\{f_n(x)\}$ je omezená. Tato dvě fakta jsou však ve sporu.

(b) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konvergující k 0 v X, tj. $f_n(x) \to 0$ pro každé $x \in [0, 1]$. Pak jsou funkce $g_n(x) = \min\{|f_n(x)|, 1\}$, $x \in [0, 1]$, omezené konstantou 1 a bodově konvergují k 0. Proto

$$\rho(f_n, 0) = \int_0^1 \min\{|f_n(x)|, 1\}\, d\lambda(x) = \int_0^1 g_n(x)\, d\lambda(x) = 0,$$

tj. $f_n \to 0$ v Y.

(c) Pro libovolnou konečnou množinu $F \subset [0, 1]$ zkonstruujeme spojitou funkci $f_F \colon X \to [0, 1]$ takovou, že

$$f_F(x) = 1, \quad x \in F, \qquad \lambda\left(\{x \in [0, 1] \colon f_F(x) = 1\}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Pro systém $\mathcal{F}([0,1])$ konečných podmnožin $[0,1]$ uvažujeme uspořádání dané vztahem $F \leqslant F'$, pokud $F \subset F'$. Pak $\mathcal{F}([0,1])$ je nahoru usměrněná množina a systém $\{f_F\}$ je tak net v X. Zřejmě $\lim f_F = 0$ v X. Na druhou stranu však máme

$$\rho(f_F, 0) = \int_0^1 f_F(x)\, d\lambda(x) \geqslant \frac{1}{2}, \quad F \in \mathcal{F}([0,1]),$$

takže $\{f_F\}$ nekonverguje k 0 v Y. □

3.1.5 Pseudonormy a lokální konvexita

Definice 3.1.35. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující množina. Definujme $p_A \colon X \to [0,\infty)$ jako

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 \colon x \in tA\}, \quad x \in X.$$

(Povšimněme si, že p_A je dobře definované, neboť A je pohlcující.)

Zobrazení $p \colon X \to [0,\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in X$.

Poznámka 3.1.36. Je-li X normovaný lineární prostor a $A = B_X$, je $p_A(x) = \|x\|$, $x \in X$.

Tvrzení 3.1.37. *Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $p(0) = 0$ a $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y)$, $x, y \in X$.

(b) Množina $\operatorname{Ker} p$ *je podprostor,*

(c) Položíme-li $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$, pak A je konvexní, vyvážená, pohlcující a navíc platí $p = p_A$.

Důkaz. (a) Zvolme $x \in X$. Pak platí $p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0$. Dále pro $x, y \in X$ platí

$$p(x) \leqslant p(x-y) + p(y) \quad \text{a} \quad p(y) \leqslant p(y-x) + p(x) = p(x-y) + p(x),$$

což implikuje $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y)$.

(b) Pokud $x, y \in \operatorname{Ker} p$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, platí

$$0 \leqslant p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha|\, p(x) + |\beta|\, p(y) = 0,$$

a tedy $\operatorname{Ker} p$ je podprostor X.

(c) Je-li $x \in A$ a $\alpha \in \mathbb{F}$, přičemž $|\alpha| \leqslant 1$, platí $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) < 1$. Tedy A je vyvážená.

Pokud $x, y \in A$ a $\lambda \in [0,1]$, platí $p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) < 1$, a tedy A je konvexní.

Je-li $x \in X$ dáno, existuje $t > 0$ splňující $p(x) < t$. Pro $s \in [0, \frac{1}{t}]$ pak máme

$$p(sx) = sp(x) < \frac{t}{t} = 1,$$

a tedy $sx \in A$.

Ukážeme, že $p = p_A$. Nechť $x \in X$ je dáno a $t \in (p(x), \infty)$. Pak $x \in tA$, a tedy $p_A(x) \leqslant t$. Jelikož t bylo libovolné číslo větší než $p(x)$, je $p_A(x) \leqslant p(x)$.

Nyní ověříme, že $p(x) \leqslant p_A(x)$. Pokud $p(x) = 0$, nerovnost zjevně platí. V opačném případě označme $t = p(x)$.

Pak $p(\frac{x}{t}) = 1$, a tedy $x \notin tA$. Nechť $s \in (0,t]$ je libovolné. Pak $p(\frac{x}{s}) = \frac{t}{s} \geqslant 1$, a tedy $x \notin sA$. Tedy

$$(0,t] \cap \{u > 0 \colon x \in uA\} = \varnothing.$$

Proto

$$p_A(x) = \inf\{u > 0 \colon x \in uA\} \geqslant t = p(x).$$

□

Věta 3.1.38. *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je konvexní a pohlcující. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $p_A(x+y) \leqslant p_A(x) + p_A(y)$, $x, y \in X$.

(b) Platí $p_A(tx) = tp_A(x)$ pro $x \in X$ a $t \geqslant 0$.

(c) Pokud je A vyvážená, je p_A pseudonorma.

(d) Položíme-li $B = \{x \in X \colon p_A(x) < 1\}$ a $C = \{x \in X \colon p_A(x) \leqslant 1\}$, pak B i C jsou konvexní a pohlcující. Navíc platí $B \subset A \subset C$ a $p_A = p_B = p_C$.

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in X$ jsou dány a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezneme $t < p_A(x) + \varepsilon$ a $s < p_A(y) + \varepsilon$ takové, že $x \in tA$ a $y \in sA$. Pak

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t}\frac{x}{t} + \frac{s}{s+t}\frac{y}{s} \in A,$$

a tedy $x + y \in (s+t)A$. Tedy $p_A(x+y) \leqslant s + t < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$.

(b) Nechť $x \in X$ a $t \geqslant 0$. Pokud $t = 0$, máme $p_A(tx) = p_A(0) = 0 = 0p_A(x)$. Pro $t > 0$ počítejme

$$\begin{aligned} tp_A(x) &= t \inf\{s > 0 \colon x \in sA\} = \inf\{ts \colon s > 0, x \in sA\} \\ &= \inf\{ts \colon s > 0, tx \in tsA\} = \inf\{u > 0 \colon tx \in uA\} = p_A(tx). \end{aligned}$$

(c) Nechť $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{F}$ má normu 1. Jelikož $\alpha^{-1}A = A$, máme

$$\begin{aligned} p_A(\alpha x) &= \inf\{t > 0 \colon \alpha x \in tA\} = \inf\{t > 0 \colon x \in t\alpha^{-1}A\} \\ &= \inf\{t > 0 \colon x \in tA\} = p_A(x). \end{aligned}$$

Je-li $\alpha \in \mathbb{F}$ libovolné nenulové, máme

$$p_A(\alpha x) = p_A\left(|\alpha| \frac{\alpha}{|\alpha|} x\right) = |\alpha| \, p_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|} x\right) = |\alpha| \, p_A(x).$$

(d) Konvexitu B i C snadno ověříme ze sublinearity p_A. Jelikož p_A má konečné hodnoty, jsou obě množiny pohlcující. (Je-li $x \in X$ dáno, nalezneme $t > p_A(x)$. Pak pro $s \in [0\frac{1}{t}]$ platí $p_A(sx) = sp_A(x) < 1$, a tedy $sx \in B$.)

Zvolme $x \in B$. Pak existuje $t \in (0,1)$ takové, že $x \in tA$. Jelikož A je konvexní, platí $tA \subset A$. Tedy $x \in tA \subset A$, a proto $B \subset A$.

Je-li nyní $x \in A$, pak $x = 1x \in A$, tj. $p_A(x) \leqslant 1$. Proto $x \in C$, a tedy $A \subset C$.

Jelikož $B \subset A \subset C$, máme $p_B \geqslant p_A \geqslant p_C$. Nechť nyní $x \in X$ je libovolné a s, t jsou kladná čísla splňující $p_C(x) < s < t$. Jelikož $p_C(\frac{x}{s}) < 1$, máme z první části důkazu tvrzení (d) aplikované pro C v roli A fakt $\frac{x}{s} \in C$. Tedy $p_A(\frac{x}{s}) \leqslant 1$, a proto

$$p_A(\frac{x}{t}) = p_A(\frac{s}{t}\frac{x}{s}) = \frac{s}{t} p_A(\frac{x}{s}) < 1.$$

Z toho dostáváme $\frac{x}{t} \in B$, což implikuje $p_B(x) \leqslant t$. Ukázali jsme, že pro každé $t > p_C(x)$ platí $p_B(x) \leqslant t$. Z toho již plyne kýžená nerovnost $p_C(x) \geqslant p_B(x)$. □

Tvrzení 3.1.39. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je konvexní a pohlcující. Pak*

$$\operatorname{Int} A \subset \{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset \{x \in X : p_A(x) \leqslant 1\} \subset \overline{A}.$$

Důkaz. Krok 1. Nechť $x \in \operatorname{Int} A$. Pak $x \in A$, a tedy $p_A(x) \leqslant 1$. Pokud by platilo $p_A(x) = 1$, vezmeme posloupnost $\{t_k\}$ v $(0,1)$ splňující $t_k \nearrow 1$. Pak $x \notin t_k A$ (tj. $\frac{x}{t_k} \notin A$) a $\frac{x}{t_k} \to x$. Tedy $x \notin \operatorname{Int} A$, což je spor.

Krok 2. Nechť $p_A(x) \leqslant 1$. Pak pro každé $t > 1$ platí $x \in tA$. (Jelikož $p_A(\frac{x}{t}) < 1$, je $\frac{x}{t} \in A$ dle Věty 3.1.38(d).) Zvolme posloupnost $\{t_k\}$ v $(1, \infty)$ splňující $t_k \searrow 1$. Pak $\frac{x}{t_k} \in A$ a $\frac{x}{t_k} \to x$. Tedy $x \in \overline{A}$. □

Věta 3.1.40. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Nechť $\mathcal{B}$ je báze okolí 0 sestávající z konvexních otevřených a vyvážených množin. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $B \in \mathcal{B}$ platí $B = \{x \in X : p_B(x) < 1\}$.

(b) Pro každé $B \in \mathcal{B}$ je p_B spojitá pseudonorma a systém $\{p_B \colon B \in \mathcal{B}\}$ odděluje $X \setminus \{0\}$ a $\{0\}$ (tj. pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $B \in \mathcal{B}$ splňující $p_B(x) > 0$.)

Důkaz. (a) Je-li $x \in B$, pak $x \in \operatorname{Int} B$, a tedy $p_B(x) < 1$ dle Tvrzení 3.1.39. Předpokládejme nyní, že $x \notin B$. Platí-li $t < 1$ a $x \in tB$, pak $x \in tB \subset B$, což je spor. Tedy $\{t > 0 \colon x \in tB\} \cap [0,1) = \varnothing$, což implikuje $p_B(x) \geqslant 1$.

(b) Z Věty 3.1.38(c) víme, že p_B je pseudonorma. Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak εB je okolí 0 a pro $y \in x + \varepsilon B$ platí díky Větě 3.1.38(d) odhad

$$|p_B(y) - p_B(x)| \leqslant p_B(y - x) = \varepsilon p_B\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Tedy p_B je spojitá v x.

Je-li $x \in X \setminus \{0\}$, nalezneme $B \in \mathcal{B}$ splňující $x \notin B$. Pak $p_B(x) \geqslant 1$ dle (a). □

Důsledek 3.1.41. *Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak X je úplně regulární.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ a $F \subset X$ je neprázdná, uzavřená množina neobsahující x. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x = 0$. Nechť $B \in \tau(0)$ je konvexní, otevřená a vyvážená množina splňující $B \cap F = \emptyset$. Pak $p_B \geqslant 1$ na F. Nechť $g\colon [0, \infty) \to [0, 1]$ je funkce definovaná jako

$$g(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, \infty). \end{cases}$$

Pak $g \circ p_B \colon X \to [0, 1]$ je spojitá funkce, $p_B(x) = 1$ a $p_B = 0$ na F. □

Věta 3.1.42. *Nechť X je vektorový prostor. Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem oddělující $X\backslash\{0\}$ a $\{0\}$. Pro $p \in \mathcal{P}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme*

$$U_{p,n} = \{x \in X : p(x) < \frac{1}{n}\}. \tag{3.7}$$

Pak systém

$$\mathcal{U} = \{\bigcap_{i=1}^{k_l} U_{p_i,n_i} : l, k_l \in \mathbb{N} \text{ a pro } i = 1, \dots, k_l \text{ je } p_i \in \mathcal{P}, n_i \in \mathbb{N}\}.$$

generuje na X lokálně konvexní topologii τ takovou, že platí následující tvrzení.

(a) Systém $\mathcal{U}$ je báze $\tau(0)$ sestávající z konvexních otevřených vyvážených množin.

(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá,

(b) Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každé $p \in \mathcal{P}$,

(c) Net $\{x_i\}_{i\in I}$ konverguje v τ k x právě tehdy, když $p(x_i - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že systém $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 3.1.16.

Vskutku, je-li $x \in X\backslash\{0\}$, existuje $p \in \mathcal{P}$ splňující $p(x) > 0$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n} < p(x)$ platí $x \notin U_{p,n}$. Každá množina z $\mathcal{U}$ je zjevně vyvážená, konvexní a pohlcující (viz Tvrzení 3.1.37(c)). Konečně je-li U tvaru $\bigcap_{i=1}^{k_l} U_{p_i,n_i}$, pak množina $V = \bigcap_{i=1}^{k_l} U_{p_i,2n_i}$ splňuje $V + V \subset U$.

Systém $\mathcal{U}$ tedy $\mathcal{U}$ jednoznačně generuje topologii τ, ve které je X topologický lineární prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0. Jelikož $\mathcal{U}$ sestává z konvexních množin, je τ lokálně konvexní topologie na X. Tím je i ověřeno (a).

(b) Je-li $p \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$, platí pro $n \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n} < \varepsilon$, že $p(x) < \varepsilon$ pro každé $U_{p,n}$. Tedy p je spojitá v 0. Jelikož je p pseudonorma, plyne ze spojitosti v 0 spojitost na celém X (viz důkaz tvrzení (b) Věty 3.1.40).

Ze spojitosti každé pseudonormy p též plyne τ-otevřenost množin systému $\mathcal{U}$.

(c) Nechť A je τ-omezená a $p \in \mathcal{P}$ je dána. Pak existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU_{p,1}$. Pak pro $x \in A$ platí $\frac{x}{t} \in U_{p,1}$, a tedy $p(x) < t$.

Obráceně, nechť $p(A)$ je omezená pro každou pseudonormu $p \in \mathcal{P}$. Nechť $V \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme $U \in \mathcal{U}$ tvaru $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{p_i,n_i}$ splňující $U \subset V$. Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ nechť $M_i > 0$ splňuje $p_i \leqslant M_i$ na A. Pak pro

$$t > \max\{M_i n_i : i = 1, \dots, k\}$$

platí $A \subset tU \subset tV$. (Je-li totiž $x \in A$, platí $p_i(x) \leqslant M_i$, a proto $p_i(\frac{x}{t}) < \frac{1}{n_i}$, $i = 1, \dots, k$. Tedy $\frac{x}{t} \in U$.)

(d) Pokud $x_i \to x$ v τ, platí $p(x_i - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$ díky spojitosti všech p.

Obráceně, nechť $\{x_i\}_{i\in I}$ je net a $x \in X$ splňuje $p(x_i - x) \to 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ a $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\bigcap_{l=1}^{k} U_{p_l,n_l} \subset U.$$

Položme $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Nalezneme $i_0 \in I$ takové, že pro všechny $i \in I$, $i \geqslant i_0$, platí $p_l(x_i - x) < \frac{1}{m}$, $l = 1, \dots, k$. Pak pro $i \geqslant i_0$ platí

$$x_i - x \in \bigcap_{l=1}^{k} U_{p_l,n_l} \subset U,$$

a tedy $x_i \to x$ v τ.

□

Věta 3.1.43. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor a $\mathcal{B}$ je báze okolí 0 sestávající z otevřených, konvexních, vyvážených množin. Nechť σ je topologie generována systémem $\{p_B : B \in \mathcal{B}\}$. Pak $\sigma = \tau$.*

Důkaz. Jelikož $\{x \in X : p_B(x) < 1\} = \operatorname{Int}_\tau B = B \in \tau$, jsou množiny $U_{p_B,1}$ τ-otevřené. Tedy σ má bázi okolí 0 tvořenou τ-otevřenými množinami, a proto platí $\sigma \subset \tau$.

Obráceně, nechť $B \in \mathcal{B}$. Pak podle Věty 3.1.40(a) platí $B = U_{p_B,1}$, což je množina v σ. Tedy τ má bázi okolí 0 tvořenou σ-otevřenými množinami, a proto $\tau \subset \sigma$. □

Tvrzení 3.1.44. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je neprázdná. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li A omezená, je $\operatorname{co} A$ *omezená.*

(b) Je-li A totálně omezená, jsou množiny $\mathrm{b}(A)$ *a* $\operatorname{co} A$ *totálně omezené.*

Důkaz. (a) Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující topologii X (viz Věta 3.1.42). Pak množina je $\operatorname{co} A$ omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$. Mějme tedy $p \in \mathcal{P}$ dánu a nechť $M = \sup p(A)$. Je-li $x \in \operatorname{co} A$, je tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, kde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$ (viz Tvrzení 1.1.8) a $x_1, \dots, x_n \in A$. Pak

$$p(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p(x_i) \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = M,$$

a tedy $\operatorname{co} A$ je omezená množina.

(b) Nechť A je totálně omezená a $U \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme konvexní okolí $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset X$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Jelikož $\operatorname{co} F$ je kompaktní, a tedy totálně omezená množina (viz Tvrzení 3.1.19 a Tvrzení 3.1.20(b)), existuje $H \subset X$ konečná taková, že $\operatorname{co} F \subset H + V$. Pak díky Tvrzení 1.1.8(c) platí

$$\operatorname{co}(F + V) = \operatorname{co}\left(\bigcup_{x \in F} (x + V)\right) = \operatorname{co} F + V,$$

a tedy

$$\operatorname{co} A \subset \operatorname{co}(F + V) = \operatorname{co} F + V \subset H + V + V \subset H + U.$$

Tedy $\operatorname{co} A$ je totálně omezená množina. □

Tvrzení 3.1.45. *Nechť (X, τ) je Fréchetův prostor a $A \subset X$ je kompaktní. Pak $\overline{\operatorname{co}} A$ je kompaktní.*

Důkaz. Nechť ρ je translačně invariantní úplná metrika generující τ.

Krok 1. Nejprve ověříme, že množina $C \subset X$ je totálně omezená v (X, τ) právě tehdy, když C je totálně omezená v (X, ρ).

Předpokládejme nejprve, že C je τ-totálně omezená a $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak $U(0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(0, x) < \varepsilon\}$ je v $\tau(0)$, a tedy existuje $F \subset C$ konečná taková, že $C \subset F + U(0, \varepsilon)$. Tedy F je konečně ε-síť pro C.

Pokud C je totálně omezená v (X, ρ) a $U \in \tau(0)$ je dáno, existuje $\varepsilon > 0$ splňující $U(0, \varepsilon) \subset U$. Nechť $F \subset C$ je konečná ε-síť. Díky translační invariantnosti ρ platí $x + U(0, \varepsilon) = U(x, \varepsilon)$, z čehož plyne

$$C \subset \bigcup_{x \in F} U(x, r) = \bigcup_{x \in F} (x + U(0, r)) = F + U(0, r) \subset F + U.$$

Tedy C je τ-totálně omezená.

Krok 2. Nechť nyní $A \subset (X, \tau)$ je kompaktní. Pak je i ρ-kompaktní, a tedy ρ-totálně omezená. Dle předcházejícího kroku je i τ-totálně omezená, což dle Tvrzení 3.1.44 implikuje τ-totální omezenost $\operatorname{co} A$. Z prvního kroku opět máme ρ-totální omezenost $\operatorname{co} A$. Jelikož je v metrickém prostoru uzávěr totálně omezené množiny totálně omezený, je $\overline{\operatorname{co}}^{\rho} A$ ρ-totálně omezená množina. Vzhledem k úplnosti (X, ρ) je $\overline{\operatorname{co}}^{\rho} A$ ρ-kompaktní. Tedy je $\overline{\operatorname{co}}^{\tau} A = \overline{\operatorname{co}}^{\rho} A$ τ-kompaktní. □

Příklad 3.1.46. Nechť X je prostor $L^p([0, 1])$ z Příkladu 3.1.9 (tedy $p \in (0, 1)$). Pak platí následující tvrzení.

(a) Prostor X je lokálně omezený F-prostor.

(b) Je-li $A \subset X$ otevřená a konvexní, je buďto prázdná, nebo $A = X$.

(c) Pro duální prostor platí $X^* = \{0\}$.

Důkaz. (a) Označme $\|f\|_p = \int_0^1 |f|^p \, d\lambda$, $f \in X$. Pak $\|cf\|_p = |c|^p \|f\|_p$ a díky nerovnosti $(a + b)^p \leqslant a^p + b^p$, $a, b \in [0, \infty)$, platí $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, $f, g \in X$. Zobrazení $\rho(f, g) = \int_0^1 |f - g|^p \, d\lambda$, $f, g \in X$, je tak translačně invariantní metrika. Úplnost prostoru (X, ρ) se dokáže zcela analogicky jako u klasických L^q prostorů (tj. prostorů, kde $q \geqslant 1$).

Spojitost vektorových operací nyní snadno ověříme z nerovností

$$\rho(f_1 + f_2, g_1 + g_2) = \|f_1 - g_1 + f_2 - g_2\|_p \leqslant \|f_1 - g_1\|_p + \|f_2 - g_2\|_p$$

a

$$\rho(cf, dg) = \|cf - cg + cg - dg\|_p = \|c(f - g) + (c - d)g\|_p \leqslant |c| \, \|f - g\|_p + |c - d|^p \, \|g\|_p \, .$$

Báze okolí 0 je tvořena množinami

$$B_r = \{f \in X : \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < r\}, \quad r > 0.$$

Ukážeme, že B_1 je omezené okolí 0. Nechť tedy okolí tvaru B_r je dáno. Pro $f \in B_1$ pak platí $r^{\frac{1}{p}} f \in B_r$, a tedy $B_1 \subset r^{-\frac{1}{p}} B_r$. tedy je B_1 omezená.

(b) Stačí ukázat, že X nemá jiné otevřené, konvexní okolí 0 než X. Nechť tedy $U \in \tau(0)$ je konvexní. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(0,r) \subset U$. Nechť $f \in X$ je libovolná. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $n^{p-1} \int_0^1 |f|^p < r$.

Nyní nalezneme dělění $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|^p \, d\lambda = \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

To provedeme následujícím způsobem. Funkce $G(x) = \int_0^x |f| \, d\lambda$, $x \in [0,1]$, je neklesající, spojitá a splňuje $G(0) = 0$ a $G(1) = \int_0^1 |f|^p \, d\lambda$. Položíme

$$x_0 = 0 \quad \text{a} \quad x_i = \sup\left\{ t \in [0,1] \colon G(t) \leqslant \frac{i}{n} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda \right\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Množina $\{x_0, \dots, x_n\}$ je nyní hledané dělení.

Položme nyní

$$g_i = n f \chi_{(x_{i-1}, x_i]}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\int_0^1 |g_i|^p \, d\lambda = \int_{x_{i-1}}^{x_i} n^p |f|^p \, d\lambda = n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < r,$$

tj. $g_i \in B(0,r) \subset U$. Protože však

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g_i,$$

je $f \in U$. Tedy $U = X$. □

Příklad 3.1.47. Nechť $p \in (0,1)$ a $X = \ell^p$, tj. $X = \{x = (x_n) \colon \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ s metrikou $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p$, $x, y \in X$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Prostor X je lokálně omezený F-prostor.

(b) Zobrazení $\phi \colon \ell^\infty \to X^*$, které každému $y \in \ell^\infty$ přiřadí funkcionál

$$\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n, \quad x \in X,$$

je surjektivní lineární zobrazení.

(c) Existuje kompaktní množina $A \subset X$, jejíž konvexní obal není omezený.

Důkaz. (a) Důkaz faktu, že X je lokálně omezený F-prostor, se provede stejně jako v Příkladu 3.1.46.

(b) Nejprve ukážeme, že $\varphi_y \in X^*$ pro každé $y \in \ell^\infty$. Je-li totiž $y \in \ell^\infty$ a $x \in X$, nalezneme $M > \|x\|_\infty$. Pak všechny souřadnice vektoru $\frac{x}{M}$ mají modulus menší než 1, a tedy platí

$$\left| \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^\infty M \left| \frac{x_n}{M} y_n \right| \leqslant M \|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{x_n}{M} \right|^p = M^{1-p} \|y\|_\infty \|x\|_p < \infty.$$

Tedy φ_y je dobře definovný.

Nechť nyní $\{x^k\}$ je posloupnost v X konvergující k 0. Od jistého indexu $k_0 \in \mathbb{N}$ pak mají vektory x^k všechny souřadnice menší než 1. Proto platí

$$\left|\varphi_y(x^k)\right| \leqslant \|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \left|x_n^k\right| \leqslant \|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \left|x_n^k\right|^p = \|y\|_\infty \left\|x^k\right\|_p,$$

a tedy $\varphi_y(x^k) \to 0$. Funkcionál φ je tedy spojitý na X.

Nechť nyní $\varphi \in X^*$ je dáno. Položíme $y_n = \varphi(\chi_{\{n\}})$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{y_n\}$ je omezená posloupnost. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ taková, že $|y_{n_k}| \to \infty$. Nalezneme posloupnost kladných čísel $\{\gamma_k\}$, která konverguje k 0 a přitom $\gamma_k y_{n_k} \to \infty$. Pak $x^k = \gamma_k \chi_{\{n_k\}}$, $k \in \mathbb{N}$, jsou prvky X konvergující k 0 v ℓ^p, ale čísla

$$\left|\varphi(x^k)\right| = \gamma_k \left|\varphi_{\{n_k\}}\right| = \gamma_k \left|y_{n_k}\right|$$

k 0 nekonvergují. To je ovšem spor se spojitostí φ. Proto $y \in \ell^\infty$.

Nechť nyní $x \in X$ je libovolné. Označme $x^k = \sum_{n=1}^k x_n \chi_{\{n\}}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $x^k \to x$, a tedy

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x^k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k x_n \varphi(\chi_{\{n\}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k x_n y_n = \varphi_y(x).$$

Tedy φ je na.

(c) Zvolíme nerostoucí posloupnost kladných čísel $\{c_k\}$ konvergující k 0, která splňuje $\lim_{k\to\infty} k^{1-p} c_k^p = \infty$. (Stačí například položit $c_k = (1 + \log k)^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$.) Nechť

$$x^k = c_k \chi_{\{k\}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $\left\|x^k\right\|_p = c_k^p \to 0$, a tedy je množina $A = \{0\} \cup \{x^k : k \in \mathbb{N}\}$ kompaktní.

Položíme-li však

$$y^m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} x^k, \quad m \in \mathbb{N},$$

dostaneme prvky $\operatorname{co} A$, které splňují

$$\|y^m\|_p = \sum_{k=1}^m \left|\frac{1}{m} c_k\right|^p \geqslant m^{-p} \sum_{k=1}^m c_m^p = m^{1-p} c_m^p.$$

Díky volbě čísel c_m tak platí $\|y^m\| \to \infty$.

Ukážeme nyní, že $\operatorname{co} A \not\subset tB(0,1)$ pro každé $t \in (0,\infty)$. To je však zřejmé z předchozího, neboť $tB(0,1) \subset B(0, t^{-p})$. □

Věta 3.1.48. *Je-li (X,τ) lokálně konvexní prostor se spočetnou bází okolí 0, pak X je metrizovatelný translačně invariantní metrikou.*

Důkaz. Nechť $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0 tvořená otevřenými, konvexními a vyváženými množinami. Pak p_{B_n} jsou pseudonormy a

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \min\{p_{B_n}(x-y), 1\}, \quad x, y \in X,$$

je translačně invariantní metrika na X. (Pokud $\rho(x,y) = 0$, pak $x = y$, neboť systém $\{p_{B_n} : n \in \mathbb{N}\}$ odděluje $X\backslash\{0\}$ a $\{0\}$.)

Označme σ topologii generovanou ρ. Jelikož p_{B_n} jsou τ-spojité funkce, je $\rho\colon X \times X \to [0,\infty)$ spojitá funkce. Proto je každá σ-otevřená množina v τ.

Nechť nyní $W \in \tau(0)$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ splňující $\overline{B_k} \subset W$ (viz Tvrzení 3.1.11(b)). Pak $\{x \in X : p_{B_k}(x) \leqslant 1\} \subset \overline{B_k} \subset W$, a tedy $\{x \in X : \rho(x,0) < \frac{1}{2^k}\} \subset W$. (Máme-li totiž $x \in X$ splňující

$$\frac{1}{2^k} > \rho(x,0) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \min\{p_{B_n}(x), 1\},$$

platí $\frac{1}{2^k} \min\{p_{B_k}(x), 1\} < \frac{1}{2^k}$. Tedy $p_{B_k}(x) < 1$, což dává $x \in \overline{B_k} \subset W$.) Tedy $\tau \subset \sigma$. □

Příklad 3.1.49. Nechť K je lokálně kompaktní topologický prostor. Pro každý kompakt $L \subset K$ uvažujme pseudonormu

$$p_L(f) = \sup_{x\in L} |f(x)|, \quad f \in C(K).$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Systém $\mathcal{P} = \{p_L : L \subset K \text{ kompaktní}\}$ generuje na $C(K)$ lokálně konvexní topologii τ.

(b) Nechť dále K má spočetnou bázi.

(b1) Nechť $\{K_n\}$ je vyčerpání K zajištěné Tvrzením 9.1.48. Pak systém $\{p_{K_n} : n \in \mathbb{N}\}$ generuje též topologii τ, přičemž nezávisí na volbě vyčerpání.

(b2) Prostor $(C(K),\tau)$ je Fréchetův prostor.

Důkaz. (a) Topologie τ je lokálně konvexní díky Větě 3.1.42.

(b1) Pro dané vyčerpání $\{K_n\}$ prostoru K uvažujme topologii σ generovanou systémem $\mathcal{Q} = \{p_{K_n} : n \in \mathbb{N}\}$. To je opět lokálně konvexní topologie na $C(K)$, neboť systém $\mathcal{Q}$ odděluje body $C(K)$. Jelikož $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, je každá σ-otevřená množina τ-otevřená. Je-li nyní $U \in \tau(0)$ dáno, existují dle Věty 3.1.42 kompakty $L_1, \ldots, L_j$ v K a přirozená čísla $n_1, \ldots, n_j$ taková, že

$$\bigcap_{i=1}^j U_{p_{L_i}, n_i} \subset U,$$

kde $U_{p_{L_i},n_i}$ jsou množiny tvaru (3.7). Vzhledem k tomu, že $\{K_n\}$ je vyčerpání, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\bigcup_{i=1}^{j} L_i \subset K_m$. Položme $n = \max\{n_1, \dots, n_j\}$. Pak

$$U_{p_{K_m},n} \subset \bigcap_{i=1}^{j} U_{p_{L_i},n_i} \subset U,$$

a tedy je $\sigma(0)$ též báze okolí 0 vzhledem k topologii τ. Proto $\tau \subset \sigma$.

Vzhledem k tomu, že vyčerpání $\{K_n\}$ jsme volili libovolné, každá taková volba generuje topologii τ.

(b2) Nechť $\{K_n\}$ je vyčerpání K a nechť

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{p_{K_n}(f - g), 1\}, \quad f, g \in C(K).$$

Pak ρ je dobře definovaná metrika na $C(K)$, která generuje topologii τ (viz důkaz Věty 3.1.48). K dokončení důkazu stačí ověřit, že $(C(K), \rho)$ je úplný prostor. Nechť $\{f_j\}$ je ρ-cauchyovská posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak posloupnost $\{f_j|_{K_n}\}_{j=1}^{\infty}$ cauchyovská v $(C(K_n), \|\cdot\|_\infty)$. Tedy existuje funkce $f_n \in C(K_n)$ taková, že $f_j|_{K_n} \rightrightarrows f_n$ na K_n. Jelikož je posloupnost $\{K_n\}$ neklesající, nutně platí $f_{n+1}|_{K_n} = f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy existuje funkce $f \colon K \to \mathbb{F}$ taková, že $f_j|_{K_n} \rightrightarrows f|_{K_n}$ na každém kompaktu K_n.

Dokážeme, že $f \in C(K)$. Nechť $x \in K$ je dáno. Nechť U je lokálně kompaktní okolí bodu x a nechť $n \in \mathbb{N}$ splňuje $U \subset K_n$. Jelikož f je spojitá na K_n, je spojitá na U, a tedy i v x. Tedy f je spojitá v každém bodě K, tj. $f \in C(K)$.

Jelikož již víme, že $\lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j|_{K_n} - f|_{K_n}) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí $\rho(f_j, f) \to 0$. Prostor $(C(K), \rho)$ je tak úplný. □

Příklad 3.1.50. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$. Pro každý kompakt $L \subset \Omega$ uvažujme pseudonormu

$$p_L(f) = \sup_{x\in L} |f(x)| , \quad f \in \mathrm{Hol}(\Omega).$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Systém $\{p_L \colon L \subset \Omega \text{ kompaktní}\}$ generuje na $\mathrm{Hol}(\Omega)$ lokálně konvexní topologii τ.

(b) Nechť $\{K_n\}$ je vyčerpání Ω zajištěné Tvrzením 9.1.48. Pak systém $\{p_{K_n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ generuje též topologii τ, přičemž nezávisí na volbě vyčerpání.

(c) Prostor $(\mathrm{Hol}(\Omega), \tau)$ je Fréchetův prostor.

Důkaz. Důkaz je zcela analogický důkazu Příkladu 3.1.49, pouze je třeba využít faktu, že lokálně stejnoměrná limita posloupnosti holomorfních funkcí je také holomorfní funkce. □

Příklad 3.1.51. Nechť $X = \mathbb{F}^{[0,1]}$ s topologií bodové konvergence, tj. s topologií generovanou systémem pseudonorem

$$p_x(f) = |f(x)| , \quad f \in X, \qquad x \in [0, 1].$$

Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ v X konvergující k 0 taková, že $\gamma_n f_n \not\to 0$ pro každou posloupnost skalárů $\{\gamma_n\}$ v $(0, \infty)$ konvergující k nekonečnu.

Důkaz. Označíme

$$\Gamma = \{\{\gamma_n\} \colon \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \gamma_n \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)^{\mathbb{N}}.$$

Pak Γ má cardinalitu kontinua, a tedy existuje bijekce $\phi \colon \Gamma \to [0, 1]$ množiny Γ na $[0, 1]$. Definujme

$$f_n(x) = ((\phi^{-1}(x))_n)^{-1}, \quad x \in [0, 1].$$

Pro pevné $x \in [0, 1]$ pak $f_n(x) \to 0$, nicméně pro každou posloupnost $\{\gamma_n\} \in \Gamma$ platí

$$\gamma_n f_n(\phi(\{\gamma_n\})) = 1.$$

Tedy $\gamma_n f_n \not\to 0$. □

Věta 3.1.52. *Nechť (X, τ) je topologický lineární prostor. Pak X je normovatelný právě tehdy, když existuje omezené konvexní okolí 0.*

Důkaz. „$\Longleftarrow$“ Nechť V je omezené konvexní τ-otevřené okolí 0. Vezměme konvexní vyvážené otevřené $U \in \tau(0)$ a uvažujme p_U. Pak dostáváme pseudonormu, která je dokonce normou.

(Systém $\{\frac{1}{n}U \colon n \in \mathbb{N}\}$ je totiž báze okolí 0 dle Tvrzení 3.1.20. Pokud tedy $p_U(x) = 0$, platí $p_U(nx) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $x \in \frac{1}{n}U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $x = 0$.)

Nechť σ značí topologii generovanou p_U. Z τ-spojitosti p_U plyne, že $\sigma \subset \tau$. Obráceně, je-li V τ-okolí 0, existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n}U \subset V$. Tedy $\{x \in X : p_U(x) < \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n}U \subset V$. Tedy $\tau \subset \sigma$.

Dohromady tedy máme, že norma p_U generuje τ.

„$\implies$“ Je-li τ generována nějakou normou $\|\cdot\|$ na X, je $U = \{x \in X \colon \|x\| < 1\}$ τ-omezené konvexní okolí 0.

Vskutku, nechť $V \in \tau(0)$ je libovolné. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$V \supset \{x \in X \colon \|x\| < \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n}U.$$

Tedu $U \subset nV$, což znamená, že U je τ-omezené. □

Tvrzení 3.1.53. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina. Pak je množin $\operatorname{co} K$ je též kompaktní.*

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme

$$\Delta_m = \{\lambda \in [0,\infty)^m \colon \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$$

a nechť $\phi\colon K^{n+1} \times \Delta_{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení definované jako

$$\phi(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \quad (x,\lambda) \in K^{n+1} \times \Delta_{n+1}.$$

Díky kompaktnosti množiny $K^{n+1} \times \Delta_{n+1}$ bude tvrzení dokázáno, jakmile ověříme rovnost

$$\operatorname{co} K = \phi(K \times \Delta_{n+1}).$$

K důkazu této rovnosti stačí ukázat, že pokud $x = \sum_{i=1}^{m} x_i\lambda_i$ pro nějaké $m > n$ a $(x,\lambda) \in K^{m+1} \times \Delta_{m+1}$, lze x vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše m prvků z K. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Jelikož je $k > n$, lineární zobrazení $\psi\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ definované jako

$$\psi(\mu) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i\right), \quad \mu \in \mathbb{R}^{k+1},$$

má netriviální jádro. Existuje tak nenulové $\mu \in \mathbb{R}^{k+1}$ splňující

$$\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i x_i = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = 0.$$

Označme $I = \{i \in \{1, \ldots, k+1\} \colon \mu_i \neq 0\}$ a nechť $i_0 \in I$ je takové, že platí

$$\frac{\lambda_{i_0}}{|\mu_{i_0}|} = \min\{\frac{\lambda_i}{|\mu_i|} \colon i \in I\}.$$

Pak číslo $\mu = \operatorname{sgn} \mu_{i_0} \frac{\lambda_{i_0}}{|\mu_{i_0}|}$ splňuje

$$\mu\mu_{i_0} = \operatorname{sgn} \mu_{i_0} \frac{\lambda_{i_0}}{|\mu_{i_0}|} \mu_{i_0} = \lambda_{i_0}$$

a

$$|\mu\mu_i| \begin{cases} = \frac{\lambda_{i_0}}{|\mu_{i_0}|} |\mu_i| \leqslant \frac{\lambda_i}{|\mu_i|} |\mu_i| = \lambda_i, & i \in I, \\ = 0 \leqslant \lambda_i, & i \in \{1, \ldots, k+1\} \backslash I. \end{cases}$$

Koeficienty

$$\nu_i = \lambda_i - \mu\mu_i, \quad i \in \{1, \ldots, k+1\},$$

jsou nezáporné,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \nu_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i - \mu \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$$

a přitom $\nu_{i_0} = 0$. Navíc

$$\sum_{i=1}^{k+1} \nu_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i - \mu \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = x.$$

Tedy $(\nu_1, \ldots, \nu_{i_0-1}, \nu_{i_0+1}, \ldots, \nu_{k+1})$ jsou koeficienty konvexní kombinace nejvýš k vektorů, jejíž výsledek je x.

Jak bylo vysvětleno výše, důkaz je tímto dokončen. □

3.1.6 Prostor distribucí

Definice 3.1.54. Uvažujme otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a nechť $\mathscr{D}(\Omega)$ značí prostor z Definice 1.5.1. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní množina a nechť τ_K značí topologii generovanou metrikou ρ z Tvrzení 1.5.3. (Připomeňme, že pro $N \in \mathbb{N}_0$ máme

$$\|\varphi\|_N = \sup\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leqslant N\}, \quad \varphi \in \mathscr{D}_K(\omega)$$

a

$$\rho(f,g) = \sum_{N \in \mathbb{N}_0} 2^{-N} \min\{\|f-g\|_N, 1\}, \quad f,g \in \mathscr{D}(\Omega).)$$

Pak $(\mathscr{D}_K(\Omega), \tau_K)$ je Fréchetův prostor.

Věta 3.1.55. *Mějme objekty jako v Definici 3.1.54. Pak pseudonormy $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}_0$, generují na $\mathscr{D}_K(\Omega)$ topologii τ_K, v níž je $\mathscr{D}_K(\Omega)$ Fréchetův prostor, přičemž ρ je metrika generující topologii τ_K.*

Důkaz. Dle Věty 3.1.42 je $(\mathscr{D}_K(\Omega), \tau_K)$ lokálně konvexní prostor. Důkaz Věty 3.1.48 říká, že ρ generuje topologii τ_K. Dle Tvrzení 1.5.3(b) je $\mathscr{D}_K(\Omega)$ Fréchetův prostor.

$\square$

Definice 3.1.56. Mějme objekty jako v Definici 3.1.54 a uvažujme systémy

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathscr{D}(\Omega) \colon U \text{ vyvážená, konvexní, pohlcující}, U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\}.$$

Věta 3.1.57. *Uvažujme objekty jako v Definici 3.1.54 a 3.1.56. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém $\mathcal{U}$ splňuje předpokladu Věty 3.1.16.

(b) Je-li τ topologie generovaná systémem $\mathcal{U}$, je $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ lokálně konvexní prostor s následujícími vlastnostmi.

(b1) Platí $\tau|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} = \tau_K$.

(b2) Je-li $E \subset (\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ omezená, existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $E \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$.

(b3) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$ dle Definice 1.5.1 právě tehdy, když $\varphi_n \to \varphi$ v τ.

Důkaz. (a) Prvky systému $\mathcal{U}$ jsou vyvážené, konvexní a pohlcující z definice. Pokud $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, pak $U_1 \cap U_2$ je též v $\mathcal{U}$, neboť pak pro každý kompakt $K \subset \Omega$ platí $U_1 \cap U_2 \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \tau_K(0)$.

Je-li $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nenulové, položme

$$W = \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) \colon \|\psi\|_0 < \|\varphi\|_0\}.$$

Jelikož je $\|\cdot\|_0$ pseudonorma, je W konvexní množina. Zřejmě se též jedná o vyváženou a pohlcující množinu. Je-li $K \subset \Omega$ kompakt, je $\|\cdot\| : \mathscr{D}_K(\Omega) \to [0,\infty)$ spojitá funkce, a tedy je $W \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ prvek $\tau_K(0)$. Zřejmě pak platí $\varphi \notin W$.

Nechť nyní $U \in \mathcal{U}$ je dáno. Pak je $V = \frac{1}{2}U$ prvek $\mathcal{U}$ a díky konvexitě U platí

$$V + V = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subset U.$$

Tím jsou ověřeny požadavky (1), (2) a (3) Věty 3.1.16.

(b) Dle (a) tedy systém $\mathcal{U}$ určuje jednoznačným způsobem lokálně konvexní topologii τ na $\mathscr{D}(\Omega)$.

Ověříme nyní vlastnost (b1). Jsou-li $G \in \tau$ a $\varphi \in G \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ dány, existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $\varphi + U \subset G$. Pak platí

$$\varphi + (U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) = (\varphi + U) \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \subset (\varphi + G) \cap \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Jelikož máme $U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \tau_K(0)$, je $(\varphi + G) \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ τ_K-okolí φ v $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Množina $G \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ je proto τ_K otevřená.

Pokud $G \in \tau_K$ je libovolná neprázdná, množina

$$U = \bigcup \{V \in \tau \colon V \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \subset G\}$$

je τ-otevřená a

$$U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) = G. \tag{3.8}$$

Vskutku, nechť $\varphi \in G$ je dáno. Pak existuje $M \in \mathbb{N}_0$ a $r_0, \ldots, r_M \in (0,\infty)$ takové, že τ_K-okolí 0 dané předpisem

$$B = \{\psi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \colon \|\psi\|_N < r_N, N \in \{0, \ldots, M\}\}$$

splňuje $\varphi + B \subset G$. Uvažujme množinu

$$C = \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) \colon \|\psi\|_N < r_N, N \in \{0, \ldots, M\}\}.$$

Pak C náleží do $\mathcal{U}$, a tedy 0 leží ve vnitřku množiny C vzhledem k topologii τ. Proto je množina $V = \varphi + \operatorname{Int}_\tau C$ v τ. Jelikož

$$V \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \subset (\varphi + C) \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \subset B,$$

platí $V \subset U$. Proto $\varphi \in U$. Ukázali jsme tak inkluzi „$\supset$" v (3.8). Jelikož obrácená inkluze je zjevná, je rovnost (3.8) ověřena. Důkaz (b1) je tak zakončen.

(b2) Předpokládejme, že τ-omezená množina $E \subset \mathscr{D}(\Omega)$ neleží v žádném prostoru $\mathscr{D}_K(\Omega)$, kde K je libovolný kompakt v Ω. Pak exsitují body $x_m \in \Omega$ a funkce $\varphi_m \in \mathscr{D}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, takové, že posloupnost $\{x_m\}$ nemá hromadný bod v Ω a $\varphi_m(x_m) \neq 0$. Položme

$$V = \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \colon\ |\varphi(x_m)| < \frac{1}{m} |\varphi_m(x_m)|, m \in \mathbb{N}\}.$$

Pak $V \in \mathcal{U}$. Vskutku, je-li $K \subset \Omega$ kompakt, existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_m \notin K$ pro každé $m > m_0$. Tedy

$$V \cap \mathscr{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \colon\ |\varphi(x_m)| < \frac{1}{m} |\varphi_m(x_m)|, m \in \{1, \dots, m_0\}\},$$

což je τ_K-otevřená množina.

Nyní však vidíme, že $\varphi_m \notin mV$ pro každé $m \in \mathbb{N}$, tj. E není τ-omeznená. Tento spor dokazuje požadované tvrzení.

(b3) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ konvergující k nějakému $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Zjevně můžeme předpokládat, že $\varphi = 0$.

Nechť nejprve $\varphi_n \to 0$ v $\mathscr{D}(\Omega)$. Pak existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{spt} \varphi_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$, a $\|\varphi_n\|_N \to 0$ pro každý index $N \in \mathbb{N}_0$. Pak zjevně platí $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Dle Věty 3.1.16 tvoří systém $\mathcal{U}$ bázi okolí 0. Lze tedy předpokládat, že $U \in \mathcal{U}$. Pak $U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \tau_K(0)$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varphi_n \in U$ pro $n \geqslant n_0$. Tedy $\varphi_n \to 0$ v τ.

Obráceně, nechť $\varphi_n \to 0$ v τ. Pak je množina $E = \{\varphi_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ τ-omezená, což dle (b2) zaručuje existenci kompaktu $K \subset \Omega$ splňujícího $\operatorname{spt} \varphi_n \subset K$, $m \in \mathbb{N}$. Je-li nyní $V \in \tau_K(0)$ dáno, existuje dle (b1) otevřená množina $W \in \tau(0)$ splňující $W \cap \mathscr{D}_K(\Omega) = V$. Z definice konvergentní posloupnosti dostáváme, že až na konečně mnoho členů leží prvky posloupnosti $\{\varphi_n\}$ v množině W. Tedy $\varphi_n \to 0$ v τ_K. Vzhledem k Tvrzení 1.5.3(c) konverguje posloupnost $\{\varphi_n\}$ k 0 v $\mathscr{D}(\Omega)$.

□

Věta 3.1.58. *Nechť $\Lambda \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Zobrazení Λ je τ-spojité.

(ii) Zobrazení Λ je τ-omezené.

(iii) Pokud $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ konvergující v τ k 0, platí $\Lambda(\varphi_n) \to 0$.

(iv) Zobrazení Λ je distribuce ve smyslu Definice 1.5.1.

(v) Pro každý kompakt $K \subset \Omega$ je restrikce $\Lambda|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ τ_K-spojité zobrazení.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) dle Věty 3.1.32.

(ii) $\implies$ (iii) Ukážeme nejprve, že pro libovolný kompakt $K \subset \Omega$ platí, že $\{\Lambda\varphi_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ je omezená množina, kdykoliv $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathscr{D}_K(\Omega)$ τ_K-konvergující k 0. Pro takovou posloupnost však platí, že konvergujek 0 i v τ, a tedy je její obraz omeznená posloupnost díky (ii).

Nechť nyní $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ konvergující k 0 v τ. Pak je množina $E = \{\varphi_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ τ-omezená, a tedy dle Věty 3.1.57(b3) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $E \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$. Jelikož jsme ověřili podmínku (iii) Věty 3.1.32 pro prostor $\mathscr{D}_K(\Omega)$ a zobrazení $\Lambda|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ a prostor $\mathscr{D}_K(\Omega)$ je metrizovatelný, platí $\Lambda\varphi_n \to 0$.

(iii) $\implies$ (iv) Posloupnost $\{\varphi_n\}$ v $\mathscr{D}(\Omega)$ konverguje k 0 v τ právě tehdy, když konverguje k 0 v $\mathscr{D}(\Omega)$ (viz Věta 3.1.57(b3)). Tedy Λ je distribuce dle Definice 1.5.1.

Implikace (iv) $\implies$ (v) je dokázána ve Větě 1.5.4.

(v) $\implies$ (i) Nechť $V \subset \mathbb{F}$ je vyvážené, konvexní okolí 0. Pak $U = \Lambda^{-1}(V)$ je vyvážená, konvexní, pohlcující množina v $\mathscr{D}(\Omega)$, která obsahuje 0. Dále pro každý kompakt $K \subset \Omega$ díky předpokladu (v) platí

$$U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \colon \lambda\varphi \in V\} = \left(\Lambda|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}\right)^{-1}(V) \in \tau_K(0).$$

Tedy $U \in \mathcal{U}$, tj. U je τ-okolí 0. Proto je Λ τ-spojité zobrazení. □

3.1.7 Hahnovy-Banachovy věty

Definice 3.1.59. Nechť X je topologický lineární prostor. Označme

$$X^{\#} = \{\varphi : X \to \mathbb{F} \colon \varphi \text{ je lineární}\} \quad \text{a} \quad X^{*} = \{\varphi : X \to \mathbb{F} \colon \varphi \text{ je spojité a lineární}\}.$$

Zjevně jsou $X^{\#}$ a X^{*} s operacemi definovanými bodově vektorové prostory. Prostor $X^{\#}$ nazýváme algebraickým duálem a X^{*} topologickým duálem (či jenom duálem).

Věta 3.1.60. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Jsou-li A, B disjunktní konvexní neprázdné množiny v X, pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $\varphi \in X^{*}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, že $\operatorname{Re} \varphi(a) < \alpha \leqslant \operatorname{Re} \varphi(b)$ pro každé $a \in A$ a $b \in B$.

(b) Je-li X lokálně konvexní prostor, A kompaktní a B uzavřené množiny v X, existuje $\varphi \in X^{*}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, že $\operatorname{Re} \varphi(a) < \alpha < \beta < \operatorname{Re} \varphi(b)$ pro každé $a \in A$ a $b \in B$.

Důkaz. Nejprve si povšimneme, že díky Lemmatu 1.2.3 můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat X nad $\mathbb{R}$.

(a) Zvolme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$. Označme $x_0 = -a_0 + b_0$ a $C = x_0 + A - B$. Pak $0 \in C$ a C je konvexní otevřená množina. Nechť p_C je Minkovského funkcionál množiny C. Jelikož $A \cap B = \emptyset$, máme $x_0 \notin C$, a platí tak $p_C(x_0) \geqslant 1$ (viz Věta 3.1.40(a)).

Definujme $f \colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ jako $f(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak $f \leqslant p_C$ na $\operatorname{span}\{x_0\}$. Je-li totiž $t \in \mathbb{R}$, máme

$$\begin{aligned} f(tx_0) &= t \leqslant t p_C(x_0) = p_C(tx_0), \quad t \in [0, \infty), \\ f(tx_0) &= t < 0 \leqslant p_C(tx_0), \quad t \in (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Pomocí algebraické verze Hahnovy-Banachovy věty (viz Věta 1.2.2) nalezneme $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ splňující $\varphi \leqslant p_C$ na X a $\varphi = f$ na $\operatorname{span}\{x_0\}$. Pak máme $\varphi \leqslant p_C \leqslant 1$ na C, což znamená, že $\varphi \geqslant -1$ na $-C$. Proto $|\varphi| \leqslant 1$ na $C \cap (-C)$. Protože $C \cap (-C)$ je okolí 0, je φ spojité dle Věty 3.1.22.

Mějme prvky $a \in A$ a $b \in B$ dány. Pak $a - b + x_0 \in C$, což implikuje

$$\varphi(a) - \varphi(b) + 1 = \varphi(a) - \varphi(b) + \varphi(x_0) \leqslant p_C(a - b + x_0) < 1.$$

Tedy $\varphi(a) < \varphi(b)$. Položíme-li $\alpha = \sup\{\varphi(a) \colon a \in A\}$ dostáváme požadované číslo díky Tvrzení 3.1.33.

(b) Nechť nyní K je kompaktní a B uzavřená. Jelikož je X lokálně konvexní prostor, existuje díky Tvrzení 3.1.11 otevřené konvexní okolí $V \in \tau(0)$ splňující $(A + V) \cap B = \emptyset$. Nalezneme dle (a) funkcionál $\varphi \in X^{*}$ splňující $\sup \varphi(A + V) \leqslant \inf \varphi(B)$. Jelikož je $\varphi(A)$ kompaktní a $\varphi(A + V)$ otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ (viz Věta 3.1.33, je existence požadovaných čísel α, β nabíledni. □

Důsledek 3.1.61. *Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Prostor X^{*} odděluje body X.

(b) Je-li $M \subset\subset X$ a $x_0 \notin \overline{M}$, pak existuje $\varphi \in X^{*}$ takové, že $\varphi(x_0) \neq 0$ a $M \subset \operatorname{Ker} \varphi$.

(c) Je-li $M \subset\subset X$ a $\varphi \in M^{*}$, pak existuje $\psi \in X^{*}$ rozšiřující φ.

Důkaz. (a) Je-li $x \in X \backslash \{0\}$ dáno, použitím Věty 3.1.60 pro $A = \{0\}$ a $B = \{x\}$ obdržíme požadovaný funkcionál.

(b) Položme $A = \{x_0\}$ a $B = \overline{M}$. Opět dle Věty 3.1.60 existuje $\varphi \in X^{*}$ splňující $\operatorname{Re} \varphi(x_0) < \inf \operatorname{Re} \varphi(\overline{M})$. Pak je $(\operatorname{Re} \varphi)|_{\overline{M}}$ zdola omezený funckionál na vektorovém prostoru $\overline{M}$, a tedy je na $\overline{M}$ nulový.

(c) Nechť $\varphi \in M^{*}$ je dáno. Zjevně lze předpokládat, že je nenulové. Nalezneme $x_0 \in M$ splňující $\varphi(x_0) = 1$. Pak $x_0 \notin \overline{\operatorname{Ker} \varphi}^{X}$ (index X značí, že uzávěr uvažujeme v celém prostoru X), a tedy existuje dle (b) funkcionál $\psi \in X^{*}$ splňující $\psi(x_0) = 1$ a $\psi = 0$ na $\overline{\operatorname{Ker} \varphi}^{X}$. Pak $\psi = \varphi$ na M.

Je-li totiž $x \in M$ libovolné, platí $x = (x - \varphi(x)x_0) + \varphi(x)x_0$, přičemž $x - \varphi(x)x_0 \in \operatorname{Ker} \varphi$. Tedy

$$\psi(x) = \psi\left((x - \varphi(x)x_0) + \varphi(x)x_0\right) = \varphi(x)\psi(x_0) = \varphi(x).$$

□

Věta 3.1.62. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $B \subset X$ je konvexní, vyvážená a uzavřená. Je-li $x_0 \in X \backslash B$, existuje $\varphi \in X^{*}$ splňující $|\varphi| \leqslant 1$ na B a $\varphi(x_0) > 1$.*

Důkaz. Položme $A = \{x_0\}$. Použitím Věty 3.1.60 nalezneme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\psi \in X^{*}$ splňující $\sup(\operatorname{Re} \psi)(B) < \alpha < (\operatorname{Re} \psi)(x_0)$. Nechť $b \in B$ je libovolné. Pišme $\psi(b) = re^{it}$ pro $r \geqslant 0$ a $t \in [0, \infty)$. Pak $e^{-it}b \in B$, a tedy

$$\alpha > \operatorname{Re} \psi(e^{-it}b) = \operatorname{Re}\left(e^{-it}re^{it}\right) = r = |\psi(b)|.$$

(Speciálně platí $\alpha > 0$.)

Nechť $\psi(x_0) = re^{it}$ pro $r \geqslant 0$ a $t \in [0, \infty)$. Definujme $\varphi(x) = \frac{e^{-it}}{\alpha}\psi(x)$, $x \in X$. Protože

$$\alpha < \operatorname{Re}\psi(x_0) = r\cos t \leqslant r,$$

platí

$$\varphi(x_0) = \frac{e^{-it}}{\alpha} re^{it} = \frac{r}{\alpha} > 1.$$

Jelikož máme

$$|\varphi(b)| = \left|\frac{e^{-it}}{\alpha}\psi(b)\right| \leqslant 1,\ b \in B,$$

je důkaz dokončen. □

Příklad 3.1.63. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Pak existují dvě disjunktní konvexní množiny $G_1, G_2 \subset X$, ketré jsou v X husté.

Důkaz. Zvolíme nespojitý lineární funkcionál $f: X \to \mathbb{F}$ (viz **??**) a položíme $G_1 = \operatorname{Ker} f$. Nechť $x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ je libovolné a $G_2 = x_0 + G_1$. Pak G_1 a G_2 jsou konvexní množiny, které jsou dokonce disjunktní. (Je-li totiž $x \in G_1 \cap G_2$, platí $x = x_0 + y$, kde $x, y \in \operatorname{Ker} f$. To je však nemožné.) Množina G_1 je hustá díky nespojitosti f (viz Věta 3.1.22). Jelikož jsou posuny na X homeomorfizmy, je i množina G_2 hustá. □

Příklad 3.1.64. Nechť $X = L^2([0,1])$. Definujeme

$$G_\alpha = \{f \in X \cap C([0,1]) : f(0) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Každá množina G_α je neprázdný hustý podprostor X.

(b) Pro $\alpha \neq \beta$ jsou množiny G_α a G_β disjunktní.

(c) Pro $\alpha \neq \beta$ nelze množiny G_α a G_β oddělit prvkem X^*.

Důkaz. (a) Stačí dokázat hustotu každé množiny G_α. Vzhledem k Větě **??** stačí dokázat, že $\mathscr{D}((0,1)) \subset \overline{G_\alpha}$. Je-li však $f \in \mathscr{D}((0,1))$ dána, platí $\operatorname{spt} f \subset (0,1)$ a snadno zkonstruujeme funkce $f_n \in G_\alpha$ takové, že $f_n = f$ na $\operatorname{spt} f$, $f_n(0) = \alpha$ a $|f_n| \leqslant \max\{|\alpha|, |f|\}$. Pak $f_n \to f$ dle Lebesgueovy věty.

Tvrzení (b) je zřejmé a (c) plyne z (a). □

3.1.8 Banachova limita

Věta 3.1.65. *Nechť ℓ^∞ značí prostor všech omezených reálných posloupností se supremovou normou. Nechť je operátor $t: \ell^\infty \to \ell^\infty$ definován jako*

$$t: (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad x = \{x_n\} \in \ell^\infty.$$

Pak existuje zobrazení $\Lambda: \ell^\infty \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \ell^\infty$

(a) $\Lambda(t(x)) = \Lambda x$,

(b) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \Lambda x \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $\Lambda_n: \ell^\infty \to \ell^\infty$

$$\Lambda_n x = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad x \in \ell^\infty.$$

Nechť

$$Y = \{x \in \ell^\infty : \text{existuje } \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x\}.$$

Nakonec uvažujme $p: \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definované jako

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

Zjevně je Y podprostor X a zobrazení $\lambda: Y \to \mathbb{R}$ definované jako

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x, \quad x \in Y,$$

je lineární funkcionál na Y splňující $\lambda \leqslant p$. Dle Hahnovy–Banachovy věty 1.2.2 existuje lineární zobrazení $\Lambda: \ell^\infty \to \mathbb{R}$ splňující $\Lambda = \lambda$ na Y a $\Lambda \leqslant p$ na ℓ^∞. Ověříme nyní, že pro $x \in \ell^\infty$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{3.9}$$

Vskutku, pro dané $c > \limsup_{n\to\infty} x_n$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n < c$ pro každé $n \geqslant n_0$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n)\\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{n_0}) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_{n_0+1} + \cdots + x_n)\\ &\leqslant 0 + \limsup_{n\to\infty} \frac{c(n-n_0)}{n} = \limsup_{n\to\infty} c\Big(1 - \frac{n_0}{n}\Big) = c.\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (3.9) ověřena.

Z ní ovšem okamžitě dostáváme vlastnost (b), neboť pro $x \in \ell^\infty$ máme

$$\Lambda x \leqslant p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots = x_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$$

a

$$\Lambda(-x) \leqslant p(-x) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n,$$

z čehož dostáváme $\Lambda x \geqslant \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Abychom ověřili vlastnost (a), uvažujme libovolné $x \in \ell^\infty$ a položme

$$y = x - t(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots).$$

Pak

$$\begin{aligned}\Lambda(x - t(x)) = \lambda y \leqslant p(y) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}))\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) = 0\end{aligned}$$

a podobně

$$\Lambda(t(x) - x) \leqslant p(-y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}((x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n)) = 0.$$

Tím je dokončen důkaz nejen vlastnosti (a), ale i celé věty. □

3.1.9 Konstrukce a komplementy

Definice 3.1.66. Nechť X_i, $i \in I$, jsou topologické lineární prostory a $X = \Pi_{i\in I} X_i$. Součin prostorů X_i, $i \in I$ je pak prostor (X, τ), kde τ je topologie bodové konvergence. (Topologie τ je tedy projektivně dána projekcemi $p_i \colon X \to X_i$, $i \in \mathbb{I}$, což znamená, že báze otevřených množin v X sestává z množin tvaru

$$\Pi_{i\in I} U_i, \quad U_i \in \tau_i, \{i \in I \colon U_i \neq X_i\} \text{ je konečná.}$$

Suma $\sum_{i\in I} X_i$ prostorů X_i, $i \in I$ je prostor

$$\sum_{i\in I} X_i = \{x = (x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} X_i \colon \{i \in I \colon x_i \neq 0\} \text{ je konečná}\}$$

uvažovaný jako podprostor $\Pi_{i\in I} X_i$.

Tvrzení 3.1.67. *Nechť X_i, $i \in I$ jsou topologické lineární prostory. Pak $\Pi_{i\in I} X_i$ a $\sum_{i\in I} X_i$ jsou topologické lineární prostory. Pokud jsou X_i, $i \in I$, lokálně konvexní, jsou i prostory $\Pi_{i\in I} X_i$ a $\sum_{i\in I} X_i$ lokálně konvexní.*

Důkaz. Nechť X značí součin $\Pi_{i\in I} X_i$. Uvažujme systém

$$\Pi_{i\in I} U_i, \quad U_i \in \tau_i(0) \text{ vyvážená}, \{i \in I \colon U_i \neq X_i\} \text{ je konečná.} \tag{3.10}$$

Dle Věty 3.1.16 stačí ověřit, že systém množin daných (3.10) splňuje předpoklady (1)-(3) této věty. Zjevně je každá množina z těchto množin vyvážená. Je-li $x = (x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} X_i$, nechť $t_i \in (0, \infty)$, $i \in F$, jsou zvoleny tak, že $s_i x_i \in U_i$ pro každé $s \in [0, t_i]$ a $i \in F$. Pak pro $t = \min\{t_i \colon i \in F\}$ je $sx \in U$ pro $s \in [0, t]$. Množina U je tedy pohlcující.

Máme-li dány množiny $U = \Pi_{i\in I} V_i$ a $V = \Pi_{i\in I} V_i$, kde $F_U = \{i \in I \colon x_i \neq 0\}$ a $F_V = \{i \in I \colon x_i \neq 0\}$ jsou konečné, nalezneme pro $i \in F_U \cup F_V$ množiny $W_i \in \tau_i(0)$ vyvážené takové, že $W_i \subset U_i \cap V_i$. Pak $W = \Pi_{i\in I} W_i \subset U \cap V$. Tedy předpoklad (1) je ověřen.

Nechť $x \in X$ je nenulové. Zvolíme $j \in I$ takové, že $x_j \neq 0$ a nalezneme $U_j \in \tau_j(0)$ vyvážené, které splňuje $x_i \notin U_j$. Pak $x \notin U_j \times \Pi i \in I \backslash \{j\} X_i$, což je množina tvaru (3.10). Tedy předpoklad (2) je ověřen.

Konečně nechť $U = \Pi_{i\in I}U_i$, kde U_i jsou vyvážené a $F = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ je dáno. Pro indexy $j \in F$ nalezneme $V_j \in \tau_j(0)$ vyvážené, které splňují $V_j + V_j \subset U_j$. Pak množina $V = \Pi_{j\in F}V_j \times \Pi_{i\in I\setminus F}X_i$ splňuje $V + V \subset U$. Tím je ověřen i předpoklad (3).

Dle Věty 3.1.16 tak existuje na X právě jedna topologie σ, se níž je X topologický lineární prostor a pro kterou množiny tvaru (3.10) tvoří bázi okolí 0. Ukažme, že $\tau = \sigma$. Nechť $U \subset X$ je dána.

Je-li G τ-otevřená a $x \in U$ je libovolné, existuje množina U tvaru $\Pi_{i\in I}U_i$, kde $U_i \subset X_i$ jsou τ_i-otevřené a $F = \{i \in I : U_i \neq X_i\}$ je konečná, která splňuje $x \in U \subset G$. Nalezneme $V_i \in \tau_i(0)$ vyvážené splňující $x + V_i \subset U_i$, $i \in F$. Pak $V = \Pi_{j\in F}V_j \times \Pi_{i\in I\setminus F}X_i$ je σ-okolí 0 a $x + V \subset U$. Tedy G je σ-otevřená.

Předpokládáme-li, že G je σ-otevřená a $x \in G$ je libovolné, existuje U tvaru $\Pi_{i\in I}U_i$, kde $U_i \in \tau_i(0)$ jsou otevřené a $F = \{i \in I : U_i \neq X_i\}$ je konečná, která splňuje $x + U \subset G$. Pak $U = \Pi_{j\in F}(x_j + U_j) \times \Pi_{i\in I\setminus F}X_i$ je τ-otevřená množina splňující $x \in U \subset G$. Tedy G je τ-otevřená. Dohromady máme $\tau = \sigma$.

Jsou-li navíc prostory X_i, $i \in I$, lokálně konvexní, vezmeme za bázi okolí 0 v topologii τ množiny tvaru (3.10), kde U_i jsou navíc konvexní. Výsledná topologie pak bude lokálně konvexní.

Vzhledem k tomu, že $\sum_{i\in I} X_i$ má topologii zděděnou ze součinu $\Pi_{i\in I}X_i$, je tvrzení dokázáno. □

Definice 3.1.68. Nechť X je topologický vektorový prostor a $N \subset\subset X$ je uzavřený. Uvažujme faktorprostor X/N a kvocientové zobrazení $q \colon X \to X/N$. Definujme topologii σ na X/N takto: Množina $U \subset X/N$ je σ-otevřená právě tehdy, když $q^{-1}(U)$ je τ-otevřená. Prostor $(X/N, \sigma)$ je faktorprostorem X podle N.

Tvrzení 3.1.69. *Nechť N je uzavřený podprostor topologického lineárního prostoru (X, τ).*

(a) Faktorprostor X/N je topologický lineární prostor. Pokud X je lokálně konvexní, je i X/N lokálně konvexní.

(b) Je-li X normovaný lineární prostor, je topologie X/N generována normou prostoru X/N.

Důkaz. (a) Označme $Y = X/N$ a $\mu = \{V \subset Y : q^{-1}(V) \in \tau\}$. Pak μ je zjevně topologie na Y.

Krok 1. Zobrazení $q \colon X \to Y$ je otevřené. Je-li totiž $U \subset X$ τ-otevřená množina, je množina $q^{-1}(q(U)) = N + U$ τ-otevřená. Množina $q(U)$ je tedy μ-otevřená.

Krok 2. Uvažujme systém $\mathcal{V} = \{q(U) : U \in \tau(0)\ \tau\text{-otevřená, vyvážená}\}$. Pak $\mathcal{V}$ splňuje předpoklady (1)-(3) Věty 3.1.16. Vskutku, podmínky (1) a (3) jsou splněny triviálně. Je-li $[x] \in Y\setminus\{0\}$ dáno, je množina $x + N$ τ-uzavřená. Existuje tedy vyvážená, otevřená množina $U \in \tau(0)$ splňující $U \cap (x + N) = \emptyset$. Pak $q(U) \in \mathcal{V}$ neobsahuje $[x]$. Tedy i předpoklad (2) je ověřen.

Označme ν lineární topologii na Y danou systémem $\mathcal{V}$.

Krok 3. Ukážeme nyní, že $\mu = \nu$. Nechť $V \subset Y$ je dána. Předpokládejme nejprve, že je μ-otevřená, tj. $q^{-1}(V) \in \tau$. Mějme $[x] \in V$ dáno. Pak existuje $U \in \tau(0)$ otevřená a vyvážené, které splňuje $x + U \subset q^{-1}(V)$. Pak $[x] + q(U)$ je ν-okolí $[x]$ splňující $[x] + q(U) \subset V$. Tedy U je ν-otevřená.

Pokud předpokládáme, že V je ν-otevřená a $x \in q^{-1}(V)$ je dáno, nechť $U \in \tau(0)$ je otevřená a vyvážená množina splňující $[x] + q(U) \subset V$. Pak $x + N + U$ je τ-otevřená množina v X, pro kterou platí $x + N + U \subset q^{-1}(V)$. Tedy $q^{-1}(V)$ je τ-otevřená, což znamená, že V je μ-otevřená.

Tíme je důkaz (a) dokončen pro případ, kdy X je topologický lineární prostor. Je-li X dokonce lokálně konvexní, generuje systém

$$\{q(U) : U \in \tau(0) \text{ otevřená, vyvážená a konvexní}\}$$

též topologii μ, která je tím pádem lokálně konvexní.

(b) Nechť $\|\cdot\|_Y$ značí kanonickou normu prostoru Y. Systém $\{\frac{1}{n}U_X : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0 topologie τ prostoru X a $\{\frac{1}{n}U_Y : n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0 prostoru $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Systém $\{q\left(\frac{1}{n}U_X\right) : n \in \mathbb{N}\}$ generuje díky důkazu tvrzení (a) také topologii σ z Definice 3.1.68. Jelikož $q\left(\frac{1}{n}U_X\right) = \frac{1}{n}U_Y$ dle Věty 1.1.20(c1), je topologie σ totožná s topologií danou normou $\|\cdot\|_Y$. □

Tvrzení 3.1.70. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $F \subset\subset X$ uzavřený podprostor a $N \subset\subset X$ má konečnou dimenzi, pak $F + N$ je uzavřený podprostor.*

Důkaz. Uvažujme faktorprostor X/F a kvocientové zobrazení $q \colon X \to X/F$. Jelikož $q(N)$ je konečně dimenzionální prostor v X/F, je podle Věty **??** $q(N)$ uzavřený podprostor. Tedy $F + N = q^{-1}(q(N))$ je uzavřený. □

Tvrzení 3.1.71. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset\subset X$.*

(a) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

  (i) Existuje spojitá projekce X na A.

  (ii) Existuje $B \subset\subset X$ takové, že $J \colon A \times B \to X$ dané předpisem $J(a, b) = a + b$, $(a, b) \in A \times B$, je izomorfizmus $A \times B$ na X.

(b) Je-li P spojitá projekce X na A a $B = \operatorname{Ker} P$, je $J \colon A \times B \to X$ dané předpisem $(a, b) \to a + b$, $(a, b) \in A \times B$, je izomorfizmus $A \times B$ na X.

Důkaz. (a) (i) $\implies$ (ii) Nechť $P\colon X \to A$ je spojitá projekce X na A. Položme $B = \operatorname{Ker} P$. Pak $X = A \oplus B$ dle Tvrzení 1.1.22. Tedy zobrazení $I\colon A \times B \to X$ je lineární bijekce $A \times B$ na X. Jelikož operace $+\colon X \times X \to X$ je spojitá operace, je zobrazení J spojité. Inverzní zobrazení k J, které je dáno předpisem $x \mapsto (Px, x - Px)$, $x \in X$, je pak spojité díky spojitosti P.

(ii) $\implies$ (i) Předpokládejme nyní, že J je izomorfizmus $A \times B$ na X. Pak zřejmě $A + B = X$ a pokud $x \in A \cap B$, pak $J(x, 0) = J(0, x) = x$ implikuje díky prostotě J, že $x = 0$. Tedy $X = A \oplus B$. Nechť $P_A\colon A \times B \to A$ je kanonická projekce (tj. $P_A(a, b) = a$ pro každé $(a, b) \in A \times B$). Pak $P = P_A \circ J^{-1}$ je spojitá projekce X na A.

(b) Je-li P spojitá projekce, důkaz implikace (i) $\implies$ (ii) tvrzení (a) dokazuje (b). $\square$

Definice 3.1.72. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset\subset X$. Řekneme, že A je komplementovatelný, pokud splňuje podmínku (i) Tvrzení 3.1.71.

Tvrzení 3.1.73. *Nechť X je topologický vektorový prostor a P je spojitá projekce na X. Pak P je otevřené zobrazení.*

Důkaz. Nechť $A = \operatorname{Rng} P$ a $B = \operatorname{Ker} P$. Pak $J\colon A \times B \to X$ je izomorfozmus $A \times B$ na X a $P = P_A \circ J^{-1}$, kde $P_A\colon A \times B \to A$ je kanonická projekce. Jelikož báze okolí 0 je dána množinami tvaru $U_A \times U_B$, kde $U_A \in \tau_A(0)$ a $U_b \in \tau_B(0)$, je P_A otevřené zobrazení. Tedy i P je otevřené zobrazení. $\square$

Tvrzení 3.1.74. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $Y \subset\subset X$. Pak F je komplementovatelný, je-li splněna jedna z následujících podmínek.*

(a) Prostor Y je konečné dimenze.

(b) Prostor Y je uzavřený a konečné kodimenze.

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Tvrzení 1.2.9.

(a) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze Y. Definujme funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na Y pomocí předpisu

$$f_j\Big(\sum_{i=1}^n c_i e_i\Big) = c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Protože Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na Y. Lze je tedy rozšířit na spojité funkcionály $g_1, \dots, g_n$ na X. Pak zobrazení

$$Px = \sum_{j=1}^n g_j(x) e_j, \quad x \in X,$$

je spojitá projekce X na Y.

(b) Nechť $\dim(X/Y) = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ jsou vybrány tak, že $\{[e_1], \dots, [e_n]\}$ je báze X/Y. Vezmeme funkcionály $f_1, \dots, f_n \in (X/Y)^*$ takové, že

$$f_j([e_i]) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Položme

$$g_j(x) = f_j([x]), \quad x \in X, j = 1, \dots, n.$$

Pak $g_1, \dots, g_n$ jsou spojité funkcionály na X. Zobrazení

$$Px = \sum_{j=1}^n g_j(x) e_j, \quad x \in X,$$

je pak spojitá projekce na $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, která je nulová na Y. Pak $Q = I - P$ je projekce X na Y. Pro $x \in X$ a $j = 1, \dots, n$ totiž platí

$$f_j([Qx]) = g_j(Qx) = g_j\Big(x - \sum_{i=1}^n g_i(x) e_i\Big) = g_j(x) - g_j(x) = 0.$$

Tedy $f_j([Qx]) = 0$ pro $j = 1, \dots, n$, a tedy $[Qx] = 0$. To ale neříká nic jiného, než že $Qx \in Y$. Protože $Q = I$ na Y, je $\operatorname{Rng} Q = Y$. $\square$

3.1.10 Úplné prostory

Definice 3.1.75. Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) Řekneme, že net $\{x_i\}_{i\in I}$ je cauchyovský, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $i_0 \in I$ takové, že $x_i - x_j \in U$ pro každé $i, j \in I$ splňující $i_0 \leqslant i, j$.

(b) Množina $A \subset X$ je úplná, pokud je každý cauchyovský net v A konvergentní.

(c) Nechť $\mathcal{F}$ je báze filtru v X. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je cauchyovská, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F - F \subset U$.

Lemma 3.1.76. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak X je úplný právě tehdy, když každá cauchyovská báze filtru je konvergentní.*

Důkaz. $\Longrightarrow$ Nechť X je úplný a $\mathcal{F}$ je cauchyovská báze filtru. Nechť $\{x_F\}$ je net zkonstruovaný dle Tvrzení 9.1.11(a). Pak $\{x_F\}$ je cauchyovský. Je-li totiž $U \in \tau(0)$ dáno, nechť $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F - F \in U$. Pak pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ splňující $F_1, F_2 \subset F$ platí

$$x_{F_1} - x_{F_2} \subset F_1 - F_2 \subset F - F \subset U.$$

Proto existuje $x \in X$ takové, že $x = \lim x_F$. Nechť nyní $U \in \tau(0)$ je dáno. Hledáme $F \in \mathcal{F}$ takové, že $F \subset x + U$. Předpokládejme, že takové F neexistuje. Pak lze zvolit prvky $y_F \in F \backslash (x + U)$. Jako výše pak ověříme, že net $\{y_F\}$ je cauchyovský, a tedy konvergentní k nějakému $y \in X$. Pak $x \neq y$. Zvolíme nyní $V \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \in \mathcal{F}$ je takové, že $x_H \in x + V$ a $y_H \in y + V$ pro každé $H \in \mathcal{F}$ splňující $H \subset F$. Dále nalezneme $F' \in \mathcal{F}$ splňující $F' - F' \subset V$. Uvažujme nyní množinu $H = F \cap F'$ a příslušné prvky x_H, y_H. Pak

$$y_H = (y_H - x_H) + x_H \in (F' - F') + (x + V) \subset x + V + V \subset x + U,$$

což je spor. Proto $x = \lim \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$ je konvergentní.

$\Longrightarrow$ Předpokládejme, že je každá báze cauchyovská báze filtru konvergentní a nechť je cauchyovský net $\{x_i\}$ v X dán. Pak je systém $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$, kde $F_i = \{x_j : j \geqslant i\}$, báze filtru, která je navíc cauchyovská. Je-li totiž $U \in \tau(0)$ dáno a $i_0 \in I$ je volena tak, že $x_i - x_j \in U$ kdykoliv $i, j \geqslant i_0$, pak množina F_{i_0} splňuje $F_{i_0} - F_{i_0} \subset U$. Je-li nyní $x \in X$ limita $\mathcal{F}$, platí $x = \lim x_i$. Pro dané $U \in \tau(0)$ totiž nalezneme vyvážené $V \in \tau(0)$ obsažené v U a zvolíme $i_0 \in I$ takové, aby $x_i - x_j \in V$ kdykoliv $i, j \geqslant i_0$. Nechť $i_1 \in I$ splňuje $F_{i_1} \subset x + V$. Nechť $i_2 \in I$ splňuje $i_2 \geqslant i_0, i_1$. pak pro $i \geqslant i_2$ platí

$$x_i = (x_i - x_{i_2}) + x_{i_2} \in V + F_{i_2} \subset V + F_{i_1} \subset x + V + V \subset x + U.$$

Tím je důkaz dokončen.

$\square$

Tvrzení 3.1.77. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Každý konvergentní net je cauchyovský.

(b) Je-li $A \subset X$ úplná, je uzavřená.

(c) Je-li $A \subset X$ úplná a $B \subset A$ uzavřená, je B úplná.

(d) Nechť $A \subset X$. Pak A je kompaktní právě tehdy, když A je úplná a totálně omezená.

Důkaz. Důkaz tvrzení(a),(b) a (c) je zcela přímočarý.

(d) $\Longrightarrow$ Nechť A je kompaktní. Díky Tvrzení 3.1.20(b) stačí ověřit úplnost A. Nechť tedy $\{x_i\}_{i\in I}$ je net v A. Vzhledem ke kompaktnosti A existuje indexová množina J a zobrazení $\phi\colon J \to I$ takové, že prvky $y_j = x_{\phi(j)}$ tvoří konvergentní podnet $\{x_i\}$. Nechť $x \in A$ je limita $\{y_j\}$ a nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Zvolíme $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$ a vybereme index $i_0 \in I$ takový, že $x_i - x_{i'} \in V$ pro každé $i, i' \geqslant i_0$. Nechť $j_1 \in J$ splňuje $\phi(j) \geqslant i_0$ pro každé $j \geqslant j_1$ a nechť $j_2 \in J$ je takové, že $y_j - x \in V$ pro každé $j \in J$ splňující $j \geqslant j_2$. Zvolme $j_0 \geqslant j_1, j_2$.

Uvažujme nyní libovolné $i \geqslant \phi(j_0)$. Pak $\phi(j_0) \geqslant i_0$, a tedy

$$x_i - x = x_i - x_{\phi(j_0)} + x_{\phi(j_0)} - x = (x_i - x_{\phi(j_0)}) + (y_{j_0} - x) \in V + V \subset U.$$

Tedy $x_i \to x$.

$\Longleftarrow$ Nechť nyní A je úplná a totálně omezená. K ověření kompaktnosti A použijeme Tvrzení 9.1.35. Nechť tedy $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(X)$ je systém uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností. Pak systém $\mathcal{G} = \{\bigcap \mathcal{F}' : \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ konečná$\}$ je báze filtru, a dle Tvrzení 9.1.12 existuje ultrafiltr $\mathcal{H}$ obsahující $\mathcal{G}$.

Ukážeme, že

$$\text{pro každou množinu } U \in \tau(0) \text{ existuje } H \in \mathcal{H} \text{ splňující } H - H \subset U. \tag{3.11}$$

Pro dané $U \in \tau(0)$ totiž nalezneme $V \in \tau(0)$ takové, že $V - V \subset U$. Díky totální omezenosti A existuje $D \subset A$ konečná taková, že $A \subset D + V$. Pak existuje alespoň jeden bod $x \in D$takový, že pro každé $H \in \mathcal{H}$ platí $(x + \overline{V}) \cap H \neq \varnothing$.

V opačném případě bychom totiž měli množiny $H_x \in \mathcal{H}$, $x \in D$, takové, že $(x + \overline{V}) \cap H_x = \varnothing$. Máme-li nyní libovolné $y \in \bigcap_{x \in D} H_x$, existuje $x \in D$ takové, že $y \in x + \overline{V}$. Pak ale $y \in (x + \overline{V}) \cap H_x$. Tedy $\bigcap_{x \in D} H_x = \varnothing$, což je spor.

Z maximality $\mathcal{H}$ nyní plyne, že $x + V \in \mathcal{H}$. Pokud by tomu totiž tak nebylo, systém

$$\mathcal{C} = \{C \subset A \colon \exists H \in \mathcal{H} \text{ splňující } C \supset H \cap (x + V)\}$$

by byl filtr obsahující $\mathcal{H}$, který by navíc splňoval $\mathcal{A} \neq \mathcal{H}$.

Proto

$$(x + V) - (x + V) = V - V \subset U.$$

Tím je tvrzení (3.11) ověřeno.

Systém $\mathcal{H}$ nyní uvažujme uspořádaný inkluzí, tj. $H_1 \leqslant H_2$ pokud $H_1 \supset H_2$. Pak $(\mathcal{H}, \leqslant)$ je nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina. Pro každé $H \in \mathcal{H}$ zvolíme $x_H \in H$. Pak $\{x_H\}_{H \in \mathcal{H}}$ je cauchyovský net. Vskutku, je-li $U \in \tau(0)$ dáno, nalezneme $H \in \mathcal{H}$ splňující $H - H \subset U$. Pak pro $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ takové, že $H_1, H_2 \subset H$, platí

$$x_{H_1} - x_{H_2} \in H_1 - H_2 \subset H - H \subset U.$$

Existuje proto $x \in A$ takové, že $\lim x_H = x$. Nyní stačí jen ukázat, že $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

Nechť $F \in \mathcal{F}$ je libovolná. Mějme $U \in \tau(0)$ dáno. Pak existuje $H \in \mathcal{H}$ takové, že $x_{H'} \in U$ kdykoliv $H' \in \mathcal{H}$ splňuje $H' \subset H$. Pak $F \cap H \in \mathcal{H}$, a tedy

$$F \cap U \supset (F \cap H) \cap U \neq \varnothing.$$

Tedy $x \in \overline{F}$. Jelikož F je uzavřená, máme $x \in F$. Důkaz je tak hotov. □

Tvrzení 3.1.78. *Nechť (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou úplné topologické vektorové prostory. Pak $\prod_{i \in I} X_i$ je též úplný.*

Důkaz. Nechť $X = \prod_{i \in I} X_i$ a $p_i \colon ZX \to X_i$ jsou kanonické projekce. Nechť $\mathcal{F}$ je cauchyovská báze filtru v X. Pak pro každé $i \in I$ je $p_i(\mathcal{F})$ je cauchyovská báze filtru v X_i. Tedy existuje $x_i \in X_i$ takové, že $x_i = \lim p_i(\mathcal{F})$. Označme $x = \{x_i\}$. Nyní satčí ověřit, že $x = \lim \mathcal{F}$.

Nechť tedy $U \subset X$ je okolí 0. Z definice topologie na X plyne existence vyvážených množin $U_i \in \tau_i(0)$ takových, že $\prod_{i \in I} U_i \subset U$ a přitom množina $J = \{i \in I \colon U_i \neq X_i\}$ je konečná. Nalezneme $F_j \in \mathcal{F}$ takové, že $p_j(F_j) \subset x_j + U_j$, $j \in J$. Nechť $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F \subset \bigcap_{j \in J} F_j$. Pak $F \subset x + U$.

Vksutku, je-li $y = \{y_i\} \in F$, pro $j \in J$ platí $y \in F_j$, a tedy $y_j \in p_j(F_j) \subset x_j + U_j$. Dostáváme tak

$$y_j - x_j \in U_j, \quad j \in J, \qquad y_i - x_i \in U_i = X_i, \quad i \in I \backslash J.$$

Tedy $y \in x + U$.

Proto $x = \lim \mathcal{F}$ a důkaz je hotov. □

Definice 3.1.79. Nechť $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou topologické vektorové prostory a $f \colon X \to Y$ je zobrazení. Pak f je stejnoměrně spojité, pokud pro každé $V \in \sigma(0)$ existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $f(x_1) - f(x_2) \in V$ kdykoliv $x_1 - x_2 \in U$, $x_1, x_2 \in X$.

Tvrzení 3.1.80. *Nechť $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou topologické vektorové prostory . Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $f \colon X \to Y$ je zobrazení. Pak platí následující tvrzení.

  (a1) Pokud je f stejnoměrně spojité, je spojité.

  (a2) Pokud je f spojité a lineární, je stejnoměrně spojité.

  (a3) Pokud je f stejnoměrně spojité a $\{x_i\}$ je cauchovský net v X, je $\{f(x_i)\}$ cauchyovský net v Y.

(b) Je-li $M \subset\subset X$ hustý podprostor, Y je úplný a $g \colon M \to Y$ je stejnoměrně spojité, existuje právě jedno stejnoměrně spojité zobrazení $h \colon X \to Y$ rozšiřující g.

(c) Je-li $M \subset\subset X$ hustý podprostor, Y je úplný a $g \colon M \to Y$ je spojité a lineární, existuje právě jedno spojité, lineární zobrazení $h \colon X \to Y$ rozšiřující g.

Důkaz. Tvrzení (a1) a (a3) jsou zřejmá a (a2) plyne z Věty 3.1.21.

(b) Je-li stejnoměrně spojité $g \colon M \to Y$ dáno, pro každé $x \in X$ položíme

$$\mathcal{F}_x = \{(x + U) \cap M \colon U \in \tau(0)\}.$$

Pak $\mathcal{F}_x$ je báze filtru taková, že $g(\mathcal{F}_x)$ je cauchyovská báze filtru. Je-li totiž $V \in \sigma(0)$ dáno, nalezneme $U \in \tau(0)$ takové, že $g(x_1) - g(x_2) \in V$ kdykoliv $x_1, x_2 \in M$ splňují $x_1 - x_2 \in U$. Pak

$$g((x + U) \cap M) - g((x + U) \cap M) \subset V,$$

a tedy $g(\mathcal{F}_x)$ je cauchyovský.

Vzhledem k úplnosti prostoru Y tak můžeme definovat

$$h(x) = \lim g(\mathcal{F}_x), \quad x \in X.$$

Všimněme si, že díky spojitosti g platí $h = g$ na M. Pro dané $x \in M$ a $V \in \sigma(0)$ nalezneme vyvážené $V' \in \sigma(0)$ takové, že $V' + V' \subset V$. Nechť $U \in \tau(0)$ je takové, že $g((x + U) \cap M) \subset g(x) + V'$. Z definice limity báze filtru nyní dostáváme existenci množiny $W \in \tau(0)$ takové, že $g((x + W) \cap M) \subset h(x) + V'$. Pak pro $z \in (x + U \cap W) \cap M$ platí

$$g(x) - h(x) = (g(x) - g(z)) + (g(z) - h(x)) \in V' + V' \subset V.$$

Jelikož V bylo libovolné, $g(x) = h(x)$.

Ověříme nyní stejnoměrnou spojitost h. Nechť $V \in \sigma(0)$ je libovolné. Zvolíme vyvážené okolí $V_1 \in \sigma(0)$ splňující $V_1 + V_1 + V_1 \subset V$. Nechť $U_1 \in \tau(0)$ je vyvážené okolí takové, že $g(U_1 \cap M) - g(U_1 \cap M) \subset V_1$. Nalezneme vyvážené $U_2 \in \tau(0)$ tak, aby platilo $U_2 + U_2 + U_2 \subset U_1$. Nechť $x_1, x_2 \in X$ splňují $x_1 - x_2 \in U_2$. Z definice limity báze filtru nalezneme vyvážené $U_3\tau(0)$ takové, že

$$g((x_i + U_3) \cap M) \subset h(x_i) + V_1, \quad i = 1, 2.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $U_3 \subset U_2$. Vybereme nyní $z_i \in (x_i + U_3) \cap M$, $i = 1, 2$. Pak

$$z_1 - z_2 = (z_1 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - z_2) \in U_3 + U_2 + U_3 \subset U_2 + U_2 + U_2 \subset U_1.$$

Tedy $g(z_1) - g(z_2) \in V_1$. Dostáváme tak

$$h(x_1) - h(x_2) = (h(x_1) - g(z_1)) + (g(z_1) - g(z_2)) + (g(z_2) - h(x_2)) \in V_1 + V_1 + V_1 \subset V.$$

Funkce h je tak stejnoměrně spojitá.

(c) Nechť lineární, spojité zobrazení $g\colon M \to Y$ je dáno. Dle (b) je stejnoměrně spojité, a tedy díky (c) existuje jeho stejnoměrně spojité rozšíření $h\colon X \to Y$. To však je již lineární. Mějme totiž $x_1, x_2 \in X$ dány. Nechť $V \in \sigma(0)$ je libovolné. Zvolíme vyvážené $V_1 \in \sigma(0)$ splňující. Nalezneme vyvážené $U_1 \in \tau(0)$ takové, že $h(x_1 + x_2 + U_1) \subset h(x_1 + x_2) + V_1$. Nechť $U_2 \in \tau(0)$ je vyvážené okolí splňující $U_2 + U_2 \subset U_1$ a

$$h(x_i + U_2) \subset h(x_i) + V_1, \quad i = 1, 2.$$

Zvolíme $z_i \in (x_i + U_2) \cap M$, $i = 1, 2$. Pak

$$h(z_1 + z_2) - h(z_1) - h(z_2) = g(z_1 + z_2) - g(z_1) - g(z_2) = 0$$

a

$$z_1 + z_2 = (z_1 - x_1) + (z_2 - x_2) + (x_1 + x_2) \in x_1 + x_2 + U_2 + U_2 \subset x_1 + x_2 + U_1.$$

Tedy dostáváme

$$\begin{aligned} h(x_1 + x_2) - (h(x_1) + h(x_2)) &= (h(x_1 + x_2) - h(z_1 + z_2)) + (h(z_1 + z_2) - h(z_1) - h(z_2)) \\ &\quad + (h(z_1) - h(x_1)) + (h(z_2) - h(x_2)) \in V_1 + V_1 + V_1 \subset V. \end{aligned}$$

Jelikož V bylo libovolné, $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$.

Obdobně se ověří rovnost $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ platná pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$. Nechť totiž $V \in \sigma(0)$ je dáno. Zvolíme vyvážené $V_1 \in \sigma(0)$ splňující $V_1 + \lambda V_1 \subset V$. Nechť vyvážené $U_1, U_2 \in \tau(0)$ splňují

$$h(x + U_1) \subset h(x_1) + V_1 \quad \text{a} \quad h(\lambda x + U_2) \in h(\lambda x) + V_1.$$

Zvolíme dále $U_3 \subset U_1 \cap \lambda^{-1} U_2$ a $z \in (x + U_3) \cap M$. Pak

$$\lambda z \in (\lambda x + \lambda U_3) \cap M \subset (\lambda x + U_2) \cap M$$

a

$$h(\lambda z) = g(\lambda z) = \lambda g(z) = \lambda h(z).$$

Proto platí

$$h(\lambda x) - \lambda h(x) = (h(\lambda x) - h(\lambda z)) + (h(\lambda z) - \lambda h(z)) + \lambda\,(h(z) - h(x)) \in V_1 + \lambda V_1 \subset V.$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Věta 3.1.81. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Existuje úplný topologický vektorový prostor Y a lineární zobrazení $\phi\colon X \to Y$ takové, že ϕ je homeomorfizmus X na $\phi(X)$ a $\phi(X)$ je hustý v Y.*

(b) *Pokud topologický vektorový prostor Z a zobrazení $\psi\colon X \to Z$ splňují (a), existuje izomorfizmus $\omega\colon Y \to Z$ prostoru Y na Z takový, že $\omega(\phi(x)) = \psi(x)$, $x \in X$.*

Pokud X je lokálně konvexní, Y lze též zkonstruovat jako lokálně konvexní.

Důkaz. (a) Konstrukci prostoru Y provedeme následovně. Uvažujme systém

$$\mathscr{F} = \{\mathcal{F}\colon \mathcal{F} \text{ je cauchyovská báze filtru v } X\}.$$

Označme $\mathcal{F}_0 = \{F \subset X\colon 0 \in F, F \text{ omezená}\}$. Na množině $\mathscr{F}$ definujeme operace $+\colon \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ a $\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ jako

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 &= \{F_1 + F_2\colon F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}, \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathscr{F},\\ \lambda\mathcal{F} &= \{\lambda F\colon F \in \mathcal{F}\}, \quad \lambda \in \mathbb{F}\backslash\{0\}, \mathcal{F} \in \mathscr{F},\\ 0\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{F} \in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

Přímočarým způsobem se nyní ověří, že tyto operace jsou dobře definované.

Krok 1. Definujeme relaci $\sim$ na $\mathscr{F}$ jako

$$\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2 \quad \text{pokud} \quad \lim(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) = 0.$$

Ověříme, že $\sim$ je relace ekvivalence na $\mathscr{F}$. Je-li $\mathcal{F} \in \mathscr{F}$ a $U \in \tau(0)$, existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F - F \subset U$. Tím jsme ověřili, že $\lim(\mathcal{F} - \mathcal{F}) = 0$, tj $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}$.

Pokud $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ a $U \in \tau(0)$ je dáno, nalezneme vyvážené $V \in \tau(0)$ obsažené v U. Pokud $F_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, splňují $F_1 - F_2 \subset V$, platí pro ně též $F_2 - F_1 \subset V \subset U$. Tedy $\mathcal{F}_2 \sim \mathcal{F}_1$.

Pokud $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ a $\mathcal{F}_2 \sum \mathcal{F}_3$ a $U \in \tau(0)$ je dáno, zvolíme vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Nechť $F_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3$, splňují $F_1 - F_2 \subset V$ a $F_2 - F_3 \subset V$, pak

$$F_1 - F_3 \subset (F_1 - F_2) + (F_2 - F_3) \subset V + V \subset U.$$

Tedy $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_3$.

Dále je $\sim$ invariantní vzhledem k operacím $+$ a $\cdot$, tj. pokud $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ a $\lambda \in \mathbb{F}$ a $\mathcal{F}_3 \in \mathscr{F}$ jsou libovolné, platí $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3 \sim \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \sim \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1$ a $\lambda\mathcal{F}_1 \sim \lambda\mathcal{F}_2$.

Krok 2. Uvažujme množinu $Y = \mathscr{F}/\sim$. Díky vlastnostem $\sim$ je tato množina s operacemi

$$[\mathcal{F}_1] + [\mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2] \quad \text{a} \quad \lambda[\mathcal{F}_1] = [\lambda\mathcal{F}_1], \qquad \lambda \in \mathbb{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathscr{F},$$

vektorový prostor.

Vskutku, $+$ je komutativní, jelikož $[\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1]$ pro každé $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathscr{F}$. Asociativita se ověří přímočaře. Třída $[\mathcal{F}_0]$ je nulový element Y a je-li $[\mathcal{F}] \in Y$, je $[-\mathcal{F}]$ inverzní prvek k $[\mathcal{F}]$. Snadno se též ověří asociativita násobení a distributivita.

Krok 3. Definujeme topologii σ na Y následujícím způsobem. Pro každé vyvážené okolí $U \in \tau(0)$ definujeme množinu $S_U \subset Y$ takto:

$$[\mathcal{F}] \in S_U \iff \exists \mathcal{H} \in [\mathcal{F}]\ \exists H \in \mathcal{H}\colon H \subset U.$$

Ukážeme, že systém $\mathcal{S} = \{S_U\colon U \in \tau(0) \text{ vyvážené}\}$ splňuje podmínky (1), (2) a (3) z Věty 3.1.16.

Každé S_U je vyvážené. Platí-li totiž pro nějaké $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}]$ a $H \in \mathcal{H}$ inkluze $H \subset U$, máme $\lambda H \in \lambda\mathcal{H} \in [\lambda\mathcal{F}]$ a $\lambda H \subset \lambda U \subset U$. Tedy $\lambda[\mathcal{F}] \in S_U$ kdykoliv $[\mathcal{F}] \in S_U$.

Každé S_U je pohlcující. Nechť $U \in \tau(0)$ vyvážené a $[\mathcal{F}] \in Y$ jsou dány. Zvolíme $V \in \tau(0)$ vyvážené, které splňuje $V + V \subset U$. Nechť $F \in \mathcal{F}$ je nalezeno tak, aby $F - F \subset V$. Zvolíme libovolné $x \in F$. Pak

$$F - x \subset F - F \subset V,$$

tj. $F \subset x + V$. Nechť $s \geqslant 1$ je takové, že $x \in sV$. Pak

$$F \subset x + V \subset sV + V \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU.$$

Nechť $r \in [0, s^{-1}]$ je libovolné. Pak $rF \in r\mathcal{F} \in r[\mathcal{F}]$ a $rF \subset rsU \subset U$. Tedy $r[\mathcal{F}] \in S_U$ pro každé $r \in [0, s^{-1}]$, tj. S_U je pohlcující.

Systém $\mathcal{S}$ je báze filtru. To plyne ze snadno ověřitelné inkluze $S_{U_3} \subset S_{U_1} \cap S_{U_2}$ platné pro každé vyvážené $U_1, U_2, U_3 \in \tau(0)$ splňující $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

Pro každé nenulové $[\mathcal{F}] \in Y$ existuje S_U bod $[\mathcal{F}]$ neobsahující. Nechť nenulové $[\mathcal{F}] \in Y$ je dáno. Pak není pravda, že $\lim \mathcal{F} = 0$, a tedy existuje vyvážené $U \in \tau(0)$ takové, že pro každé $F \in \mathcal{F}$ platí $F \not\subset U$. Zvolme vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Pak $[\mathcal{F}] \notin S_V$.

Vskutku, kdyby existovalo $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}]$ a $H \in \mathcal{H}$ splňující $H \subset V$, z faktu $\lim(\mathcal{F} - \mathcal{H}) = 0$ bychom nalezli $H' \in \mathcal{H}$ a $F' \in \mathcal{F}$ splňující $F' - H' \subset V$. Nechť $H'' \in \mathcal{H}$ splňuje $H'' \subset H \cap H'$. Pak by platilo

$$F' \subset (F' - H'') + H'' \subset (F' - H') + H \subset V + V \subset U,$$

což by byl spor.

Pro každé S_U existuje S_V splňující $S_V + S_V \subset S_U$. Je-li dáno $U \in \tau(0)$ vyvážené, nalezneme vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Pak $S_V + S_V \subset S_U$. Vskutku, nechť $[\mathcal{F}_1], [\mathcal{F}_2] \in S_V$. Pak pro $i = 1, 2$ existují $\mathcal{H}_i \in \mathscr{F}$ a $H_i \in \mathcal{H}_i$ takové, že $\mathcal{H}_i \in [\mathcal{F}_i]$ a $H_i \subset V$. Pak $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \in [\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2]$ a $H_1 + H_2 \subset V + V \subset U$. Tedy $[\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2] \in S_U$.

Dle Věty 3.1.16 tedy existuje jednoznačně určená topologie σ na Y, se kterou je Y topologický vektorový prostor a $\mathcal{S}$ je báze okolí 0.

Krok 4. Uvažujme zobrazení $\phi\colon X \to Y$ definované jako

$$\phi(x) = [\mathcal{F}_x], \quad x \in X \backslash \{0\},$$

kde $\mathcal{F}_x = \{F \subset X : x \in F\}$.

Zobrazení ϕ je dobře definované, neboť $\mathcal{F}_x \in \mathscr{F}$ pro každé $x \in X$. Navíc $\mathcal{F}_{x_1} + \mathcal{F}_{x_2} = \mathcal{F}_{x_1 + x_2}$, $x_1, x_2 \in X$, a $\mathcal{F}_{\lambda x} = \lambda \mathcal{F}_x$ pro $\lambda \in \mathbb{F}$ a $x \in X$. Z těchto vztahů tedy plyne, že ϕ je lineární.

Zobrazení ϕ je dokonce spojité. K tomu stačí ověřit jeho spojitost v 0. Pro dané vyvážené $U \in \tau(0)$ uvažujme množinu S_U. Pak zjevně $\phi(U) \subset S_U$, tj. ϕ je spojité v 0.

Krok 5. Ukažme, že Y je úplný prostor. Nechť $\mathfrak{A}$ je cauchyovská báze filtru v Y. Nechť $\mathfrak{B}$ značí systém všech vyvážených prvků $\tau(0)$. Uvažujme množinu $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ s uspořádáním definovaným jako $(A, U) \leqslant (A', U')$, pokud $A \supset A'$ a $U \supset U'$. Pak $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ je nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina. Pro každé $y \in Y$ zvolíme $\mathcal{F}_y \in \mathscr{F}$ takové, že $y = [\mathcal{F}_y]$. Pro každé $(A, U) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ vybereme $y_A \in A$ a zvolíme $F_{(A,U)} \in \mathcal{F}_y$ splňující $F_{(A,U)} - F_{(A,U)} \subset U$. Nyní vybereme libovolné $x_{(A,U)} \in F_{(A,U)}$.

Systém $\{x_{(A,U)}\}$ je nyní cauchyovský net v X. Vskutku, nechť $U \in \mathfrak{B}$ je dáno. Zvolíme $V \in \mathfrak{B}$ splňující

$$V + V + V + V + V + V + V + V \subset U$$

a dále nechť pro $A_0 \in \mathfrak{A}$ platí $A_0 - A_0 \subset S_V$. Nechť $(A_1, V_1) \geqslant (A_0, V_0)$. Pro $i = 0, 1$ pak platí $F_{(A_i,V_i)} - F_{(A_i,V_i)} \subset V$.

Jelikož $A_1 \subset A_0$, máme

$$[\mathcal{F}_{y_{A_0}} - \mathcal{F}_{y_{A_1}}] = [\mathcal{F}_{y_{A_0}}] - [\mathcal{F}_{y_{A_1}}] = y_{A_0} - y_{A_1} \in S_V.$$

Dle definice tedy existují $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}_{y_{A_0}} - \mathcal{F}_{y_{A_1}}]$ a $H \in \mathcal{H}$ takové, že $H \subset V$. Jelikož $\lim(\mathcal{H} - (\mathcal{F}_{y_{A_0}} - \mathcal{F}_{A_1})) = 0$, existují množiny $F_0 \in \mathcal{F}_{y_{A_0}}$ a $F_1 \in \mathcal{F}_{y_{A_1}}$ takové, že $H - (F_0 - F_1) \subset V$. Nalezneme množiny $F_0' \in \mathcal{F}_{y_{A_0}}$ a $F_1' \in \mathcal{F}_{y_{A_1}}$ takové, že $F_i' \subset F_{(A_i,V_i)} \cap F_i$, $i = 0, 1$. Vybereme $x_i' \in F_i'$. Pak

$$x_1' - x_0' \in F_0' - F_1' \subset F_0 - F_1 \subset ((F_0 - F_1) - H) + H \subset V + V.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} x_{(A_1,V_1)} - x_{(A_0,V_0)} &= \big(x_{(A_1,V_1)} - x_1'\big) + \big(x_1' - x_0'\big) + \big(x_0' - x_{(A_0,V_0)}\big) \in \big(F_{(A_1,V_1)} - F_1'\big) + (V + V) + \big(F_0' - F_{(A_0,V_0)}\big) \\ &\subset \big(F_{(A_1,V_1)} - F_{(A_1,V_1)}\big) + (V + V) + \big(F_{(A_0,V_0)} - F_{(A_0,V_0)}\big) \subset V + V + V + V. \end{aligned}$$

Máme-li tedy libovolné prvky (A_2, V_2), (A_1, V_1) množiny $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, které majorizují (A_0, V_0), platí

$$x_{(A_2,V_2)} - x_{(A_1,V_1)} = \big(x_{(A_2,V_2)} - x_{(A_0,V_0)}\big) + \big(x_{(A_0,V_0)} - x_{(A_1,V_1)}\big) \in V + V + V + V + V + V + V + V \subset U.$$

Tedy net $\{x_{(A,U)}\}$ je cauchyovský.

Pro každé $(A, U) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ položme

$$H_{(A,U)} = \{x_{(A',U')} : (A', U') \geqslant (A, U)\}$$

a uvažujme bázi filtru

$$\mathcal{H} = \{H_{(A,U)} : (A, U) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}.$$

Snadno se ověří, že $\mathcal{H}$ je cauchyovská.

Nyní zbývá dokázat, že $[\mathcal{H}] = \lim \mathfrak{A}$. Mějme tedy $U \in \mathfrak{B}$ libovolné. Hledáme $A \in \mathfrak{A}$ splňující $A \subset [\mathcal{H}] + S_U$. Zvolíme $V \in \mathfrak{B}$ takové, že $V + V + V + V \subset U$. Nechť $A_0 \in \mathfrak{A}$ splňuje $A_0 - A_0 \subset S_V$. Nechť $(A, W) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ splňuje

$$x_{(A',V')} - x_{(A'',V'')} \in V, \quad (A', U'), (A'', U'') \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \text{ majorizují } (A, W).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \subset A_0$ a $W \subset V$. Ukážeme, že A je hledaná množina.

Nechť $y \in A$ je libovolné. Pak

$$[\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_{y_A}] = [\mathcal{F}_y] - [\mathcal{F}_{y_A}] = y - y_A \in A_0 - A_0 \subset S_V.$$

Tedy existuje $\mathcal{C} \in [\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_{y_A}]$ a $C_1 \in \mathcal{C}$ takové, že $C_1 \subset V$. Jelikož $\lim(\mathcal{C} - (\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_{y_A})) = 0$, existují $C_2 \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{F}_y$ a $F_A \in \mathcal{F}_{y_A}$ takové, že $(F - F_A) - C_2 \subset V$. Pak pro $C_3 \in \mathcal{C}$ splňující $C_3 \subset C_1 \cap C_2$ máme

$$F - F_A \subset (F - F_A) - C_3 + C_3 \subset (F - F_A) - C_2 + C_1 \subset V + V.$$

Uvažujme množinu $H_{(A,W)}$. Pak pro libovolné $x \in F$ a $x_{(A',W')}$, kde $(A', W') \geqslant (A, W)$ zvolíme $z \in F_A \cap F_{(A,W)}$. Pak

$$\begin{aligned} x - x_{(A',W')} &= (x - z) + \big(z - x_{(A,W)}\big) + \big(x_{(A,W)} - x_{(A',W')}\big) \in (F - F_A) + \big(F_{(A,W)} - F_{(A,W)}\big) + V \\ &\subset V + V + W + V \subset V + V + V + V \subset U. \end{aligned}$$

Tedy $F - H_{(A,W)} \in \mathcal{F}_y - \mathcal{H}$ a $F - H_{(A,W)} \subset U$. To znamená, že $[\mathcal{F}_y - \mathcal{H}] \in S_U$. Proto

$$y - [\mathcal{H}] = [\mathcal{F}_y] - [\mathcal{H}] = [\mathcal{F}_y - \mathcal{H}] \in S_U,$$

čili

$$y \in [\mathcal{H}] + S_U.$$

Tím je ověřen fakt $[\mathcal{H}] = \lim \mathfrak{A}$.

Prostor $\phi(X)$ je hustý v Y. Nejprve si povšimneme, že $\phi(X)$ protíná každé $S_U \in \mathcal{S}$. Máme-li totiž nějaké S_U dáno, zvolíme libovolné $x \in U$. Okamžitě je pak vidět z definice, že $\phi(x) = [\mathcal{F}_x] \in S_U$.

Nechť nyní $y \in Y$ a $S_U \in \mathcal{S}$ jsou dány. Nalezneme $x_1 \in S_U \cap \phi(X)$. Pak $x_1 - y \in S_U$, a tedy existuje $S_V \in \mathcal{S}$ splňující $x_1 - y + S_V \subset S_U$. Nalezneme $x_2 \in S_V$. Pak

$$x_1 + x_2 - y \in x_1 - y + S_V \subset S_U.$$

Tedy $x_1 + x_2 \in (y + S_U) \cap \phi(X)$, a tedy je $\phi(X)$ hustý v Y.

Konstrukce pro lokálně konvenxí prostor. Předpokládejme, že X je navíc lokálně konvexní. Pak uvažujeme systém

$$\mathcal{S} = \{S_U : U \in \tau(0) \text{ vyvážená, konvexní}\}$$

a provedeme konstrukci Y jako výše. K důkazu lokální konvexity pak stačí ukázat, že množiny S_U jsou konvexní. Nechť tedy $[\mathcal{F}_1], [\mathcal{F}_2] \in S_U$ a $\lambda \in [0,1]$ jsou dány. Pak pro $i = 1,2$ existují $\mathcal{H}_i \in \mathfrak{F}$ a $H_i \in \mathcal{H}_i$ takové, že $\mathcal{H}_i \in [\mathcal{F}_i]$ a $H_i \subset U$. Pak

$$\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 \in \lambda \mathcal{H}_1 + (1-\lambda)\mathcal{H}_2 \in [\lambda \mathcal{F}_1 + (1-\lambda)\mathcal{F}_2] = \lambda[\mathcal{F}_1] + (1-\lambda)[\mathcal{F}_2]$$

a

$$\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 \subset U.$$

Tedy $\lambda[\mathcal{F}_1] + (1-\lambda)[\mathcal{F}_2] \in S_U$.

(b) Ukážeme nyní jednoznačnost prostoru Y. Nechť Y_i a $\phi_i \colon X \to Y_i$, $i = 1,2$, jsou objekty splňující (a). Označme $\alpha \colon \phi_1(X) \to \phi_2(X)$ definované jako $\alpha = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$. Pak α je spojité lineární zobrazení, a tedy je stejnoměrně spojité. Dle Tvrzení 3.1.80 existují spojitá, lineární zobrazení $\psi_1 \colon Y_1 \to Y_2$ a $\psi_2 \colon Y_2 \to Y_1$ splňující $\psi_1 = \alpha$ na $\phi_1(X)$ a $\psi_2 = \alpha^{-1}$ na $\phi_2(X)$.

Ukážeme, že ψ_1 je bijekce Y_1 na Y_2, jejíž inverze je rovna ψ_2. Nechť nejprve $y_2 \in Y_2$ je dáno. Nalezneme net $\{x_i\}$ takový, že $\phi_2(x_i) \to y_2$. Pak je net $\{\alpha^{-1}(\phi_2(x_i))\}$ cauchyovský, a tedy konverguje k nějakému $y_1 \in Y_1$. Pak

$$\psi_1(y_1) = \lim \psi_1(\alpha^{-1}(\phi_2(x_i))) = \lim \psi_1(\phi_1(x_i)) = \lim \phi_2(x_i) = y_2.$$

Tedy ψ_1 je surjektivní.

Nechť nyní $y_1 \in Y_1$ je dáno. Ukážeme, že $y_1 = \psi_2(\psi_1(y_1))$. Označíme $y_2 = \psi_1(y_1)$. Zvolíme net $\{x_i\}$ v X takový, že $y_1 = \lim \phi_1(x_i)$. Pak

$$y_2 = \psi_1(y_1) = \lim \psi_1(\phi_1(x_i)) = \lim \alpha(\phi_1(x_i)) = \lim \phi_2(x_i).$$

Proto máme

$$\psi_2(y_2) = \lim \psi_2(\phi_2(x_i)) = \lim \alpha^{-1}(\phi_2(x_i)) = \lim \phi_1(x_i) = y_1.$$

Tedy ψ_1 je požadovaný izomorfizmus Y_1 na Y_2. □

3.1.11 Slabé topologie

Lemma 3.1.82. *Nechť X je vektorový prostor a $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon X \to \mathbb{F}$ jsou lineární zobrazení Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Platí $\varphi \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

(ii) Existuje $C > 0$ takové, že $|\varphi(x)| \leqslant C \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |\varphi_i(x)|$, $x \in X$.

(iii) Platí $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}\varphi_i \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$ pro nějaké $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Pak

$$|\varphi(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |c_i|\right)\left(\max_{i=1,\dots,n} |\varphi_i(x)|\right), \quad x \in X.$$

Tedy $C = \sum_{i=1}^n |c_i| + 1$ je požadovaná konstanta.

(ii) $\implies$ (iii) Je-li $C \in (0, \infty)$ dáno předpokladem (ii) a $x \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}\varphi_i$, platí

$$|\varphi(x)| \leqslant C \cdot \max_{i=1,\dots,n} |\varphi_i(x)| = 0,$$

tj. $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Tedy (iii) platí.

(iii) $\implies$ (i) Uvažujme $r\colon X \to \mathbb{F}^n$, kde $r(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, $x \in X$. Pak r je lineární zobrazení X do $\mathbb{F}^n$ splňující $\operatorname{Ker} r = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}\varphi_i \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Existuje tedy lineární zobrazení $s\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ splňující $\varphi = s \circ r$. (Toto zobrazení sestrojíme takto: Definujeme $s'\colon \operatorname{Rng} r \to \mathbb{F}$ pomocí vzorce $s'(r(x)) = \varphi(x')$, kde $x' \in r^{-1}(x)$ je libovolné, a to rozšíříme na lineární zobrazení s na celé $\mathbb{F}^n$.) Existují tedy čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ splňující $s(y) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$, $y \in \mathbb{F}^n$. Tedy pro $x \in X$ máme $\varphi(x) = s(r(x)) = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)$. $\square$

Definice 3.1.83. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset\subset X^\#$ odděluje body X. Pak $\sigma(X, M)$ je topologie na X daná systémem pseudonorem $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$, $x \in X$, kde $\varphi \in M$.

Věta 3.1.84. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset\subset X^\#$ odděluje body. Pak $(X, \sigma(X, M))$ je lokálně konvexní prostor a $(X, \sigma(X, M))^* = M$.*

Důkaz. Z Věty 3.1.42 plyne, že topologií $\sigma(X, M)$ je X lokálně konvexní prostor.

Je-li $\varphi \in M$ dáno, je dle Věty 3.1.42 pseudonorma p_φ $\sigma(X, M)$-spojitá. Jelikož $\operatorname{Ker} p_\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$, je podle Věty 3.1.22 zobrazení φ $\sigma(X, M)$-spojité.

Nechť je nyní dáno $\sigma(X, M)$-spojité zobrazení $\varphi \in X^\#$. Pomocí Věty 3.1.22 nalezneme $\sigma(X, M)$-okolí U bodu 0, na kterém je φ omezené. Pak existuje množina V splňující $V \subset U$, přičemž

$$V = \{x \in X\colon |\varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon_i, i = 1, \dots, n\},$$

kde pro $i \in \{1, \dots, n\}$ je $\varphi \in M$ a $\varepsilon_i > 0$.

Nechť nyní $x \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}\varphi_i$ je libovolné. Pak

$$\operatorname{span}\{x\} \subset \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}\varphi_i \subset V \subset U.$$

Jelikož je $\varphi(U)$ omezená množina, dostáváme $\varphi(x) = 0$, tj. $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Dle Lemmatu 3.1.82 je $\varphi \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset M$. $\square$

Definice 3.1.85. (a) Nechť X je lokálně konvexní prostor. Topologie $\sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (w-topologií) na X.

(b) Je-li X topologický vektorový prostor, uvažujeme X^* a X jako podmnožinu $(X^*)^\#$. Pak $\sigma(X^*, X)$ se nazývá slabou* topologií (w^*-topologií) na X^*.

Poznámka 3.1.86. Definice těchto topologií je korektní, neboť X^* odděluje body X (viz Důsledek 3.1.61) a X odděluje body X^* z definice.

Důsledek 3.1.87. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li X lokálně konvexní, pak $\sigma(X, X^*) \subset \tau$ a platí $(X, w)^* = X^*$.

(b) Platí $(X^*, w^*)^* = X$.

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 3.1.84. $\square$

Věta 3.1.88. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $\overline{A} = \overline{A}^{\sigma(X, X^*)}$,

(b) Množina A je w-uzavřená právě tehdy, když A je uzavřená.

(c) Je-li X metrizovatelný a $x_n \to x$ slabě, pak existují $y_n \in \operatorname{co}\{x_i : i \geqslant n\}$ takové, že $y_n \to x$.

Důkaz. (a) Nechť τ značí topologii na X. Protože zjevně platí $\sigma(X, X^*) \subset \tau$, máme $\overline{A}^{\tau} \subset \overline{A}^{\sigma(X,X^*)}$.

Pro důkaz obrácené inkluze vezměme $x \notin \overline{A}^{\tau}$. Pak dle Věty 3.1.60 existuje $\varphi \in X^*$ splňující $\operatorname{Re}\varphi(x) < \inf \operatorname{Re}\varphi(\overline{A}^{\tau})$, z čehož plyne, že $x \notin \overline{A}^{\sigma(X,X^*)}$.

(b) Tvrzení plyne z (a).

(c) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v X slabě konvergující k x. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x \in \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}^w \subset \overline{\operatorname{co}\{x_k : k \geqslant n\}}^w = \overline{\operatorname{co}\{x_k : k \geqslant n\}}.$$

Nechť ρ je metrika kompatibilní z topologií X. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $y_n \in \operatorname{co}\{x_k : k \geqslant n\}$ splňující $\rho(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Pak $y_n \to x$ a důkaz je hotov.

□

Věta 3.1.89. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když A je slabě omezená.*

Důkaz. Nechť τ značí původní topologii X a τ_w topologii slabou. Vzhledem k tomu, že $\tau_w(0) \subset \tau(0)$, je každá τ-omezená množina τ_w-omezená.

Předpokládejme nyní, že A je τ_w-omezená. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Nalezneme vyvážené konvexní otevřené okolí $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$ a uvažujeme Minkowského funcionál p_V. Nechť $Y = X/\operatorname{Ker} p_V$ je vektorový prostor daný faktorizací X podle $\operatorname{Ker} p_V$ (viz Tvrzení 3.1.37). Je snadné ověřit, že vzorec

$$\|[y]\| = p_V(x), \quad x \in [y], [y] \in Y,$$

definuje normu na Y. Dále je kvocientové zobrazení $q \colon X \to Y$ spojité, neboť

$$q^{-1}(U_Y) = \operatorname{Ker} p_V + \{x \in X : p_V(x) < 1\} = \operatorname{Ker} p_V + V$$

je τ-otevřená množina.

Je-li nyní $y^* \in Y^*$ libovolný prvek, je $y^* \circ q \in X^*$. Dle předpokladu je $(y^* \circ q)(A)$ omezená množina v $\mathbb{F}$. Z Věty **??** plyne, že $q(A)$ $\|\cdot\|$-omezená v Y, tj. existuje $t > 0$ takové, že

$$p_V(a) = \|q(a)\| < t, \quad a \in A.$$

Z tohot faktu již plyne $A \subset tU$. Vskutku, je-li $x \in A$ dáno, $p_V(x) = \|[x]\|_Y < t$, a tedy $p_V(\frac{x}{t}) < 1$. Proto $\frac{x}{t} \in V$, což znamená $x \in tV \subset tU$. Množina A je tak τ-omezená. □

3.1.12 Poláry

Definice 3.1.90. Nechť X je topologický vektorový prostor, a nechť $A \subset X$ a $B \subset X^*$ jsou neprázdné. Definujeme (absolutní) poláry jako

$$A^\circ = \{x^* \in X^* : |x^*(x)| \leqslant 1, x \in A\} \quad \text{a} \quad B_\circ = \{x \in X : |x^*(x)| \leqslant 1, x^* \in B\}.$$

Poznámky 3.1.91. Nechť X je lokálně konvexní prostor.

(a) Je-li $Y = (X^*, w^*)$, pak $Y^* = X$ a pro $B \subset Y$ máme „$B^\circ = B_\circ$“.

(b) Je-li $A \subset X$, pak „druhá polára“ A by se měla nacházet v druhém duálu k X. Vzhledem k tomu, že jediná topologie na X, kterou jsme zatím uvedli, je w^*-topologie a $(X^*, w^*)^* = X$, nemáme zatím rozumný koncept druhého duálu, a tedy ani druhé poláry.

Tvrzení 3.1.92 (Polární kalkulus). *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je neprázdná. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Množina A° je vyvážená, konvexní a w^*-uzavřená.

(b) Je-li $A \subset\subset X$, platí $A^\circ = A^\perp$.

(c) Platí $\{0\}^\circ = X^*$ a $X^\circ = \{0\}$.

(d) Pro $c \in (0, \infty)$ platí $(cA)^\circ = \frac{1}{c}A^\circ$.

(e) Pro neprázdné množiny A_i, $i \in I$, v X platí $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap A_i^\circ$.

Důkaz. (a) Vyváženost i konvexita A° je zřejmá. Jelikož je pro každé $x \in X$ množina $\{x^* \in X^* : |x^*(x)| \leqslant 1\}$ w^*-uzavřená, je množina

$$A^\circ = \bigcap_{x\in A} \{x^* \in X^* : |x^*(x)| \leqslant 1\}$$

w^*-uzavřená.

(b) Zjevně $A^\perp \subset A^\circ$. Nechť $x^* \in A^\circ$ je dáno. Pak pro každé $x \in A$ a $t \in \mathbb{F}$ platí $tx \in A$, a tedy $|t|\,|x^*(x)| = |x^*(tx)| \leqslant 1$. Proto $x^*(x) = 0$ a $x^* \in A^\perp$.

(c) Tvrzení je zřejmé.

(d) Nechť $c \in (0,\infty)$ je dáno. Pak pro $x^* \in X^*$ platí

$$x^* \in (cA)^\circ \iff \forall x \in A\colon\ |x^*(cx)| \leqslant 1 \iff \forall x \in A\colon\ |(cx^*)(x)| \leqslant 1 \iff cx^* \in A^\circ \iff x^* \in \frac{1}{c}A^\circ.$$

(e) Je-li $x^* \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$, pak pro každé $i \in I$ a $x \in A_i$ platí $|x^*(x)| \leqslant 1$, tj. $x^* \in A_i^\circ$. Opačná inkluze se dokáže obdobně. □

Věta 3.1.93 (O bipoláře)**.** *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je neprázdná. Pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{bco} A}^w$ $(= \overline{\operatorname{bco} A})$.*

Důkaz. Přímočarým ověřením z definice dostaneme $A \subset (A^\circ)_\circ$. Z Tvrzení 3.1.92(a) plyne, že $\overline{\operatorname{bco} A}^w \subset (A^\circ)_\circ$.

Nechť $x \in X \setminus \overline{\operatorname{bco} A}^w$ je dáno. Díky Větě 3.1.62 existuje $\varphi \in X^*$ takové, že $\varphi(x) > 1$ a $|\varphi(y)| \leqslant 1$ pro $y \in \overline{\operatorname{bco} A}^w$. Tedy $\varphi \in A^\circ$, a přitom $\varphi(x) > 1$. Tedy $x \notin (A^\circ)_\circ$. □

Věta 3.1.94 (Goldstine)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor, platí $\overline{\varepsilon(B_x)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ značí kanonické vnoření. Označíme-li $Y = (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$, platí díky Větě 3.1.84 vztahy $Y^* = X^*$. Poláry v této dualitě označíme $A^\bullet$. V rámci tohoto značení pak máme

$$\begin{aligned} A^\bullet &= A_\circ, \quad A \subset (Y, \sigma(Y, Y^*)) = (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)),\\ B_\bullet &= B^\circ, \quad B \subset (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) = (X^*, \sigma(X^*, X^{**})). \end{aligned}$$

Použijeme Větu 3.1.93 v rámci duality prostoru Y a jeho duálu Y^* a dostaneme tak

$$((\varepsilon(B_X))_\circ)^\circ = \big((\varepsilon(B_X))^\bullet\big)_\bullet = \overline{\operatorname{bco}\varepsilon(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} = \overline{\varepsilon(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} = \overline{\varepsilon(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)}. \tag{3.12}$$

(Předposlední rovnost platí, jelikož B_X je konvexní vyvážená množina.)

Jelikož

$$(\varepsilon(B_X))_\circ = \{x^* \in X^*\colon\ |\varepsilon_x(x^*)| \leqslant 1, x \in B_X\} = \{x^* \in X^*\colon\ |x^*(x)| \leqslant 1, x \in B_X\} = (B_X)^\circ = B_{X^*},$$

platí

$$((\varepsilon B_X)_\circ)^\circ = (B_{X^*})^\circ = B_{X^{**}}. \tag{3.13}$$

Kombinací (3.13) a (3.12) dostáváme požadovanou rovnost

$$B_{X^{**}} = ((\varepsilon(B_X))_\circ)^\circ = \overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*}.$$

Tím je důkaz proveden. □

Věta 3.1.95 (Banach-Alaoglu)**.** *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li U okolí 0, pak U° je w^*-kompaktní množina.

(b) Je-li X separabilní a U je okolí 0, pak U° je metrizovatelná w^*-kompaktní množina.

Důkaz. (a) Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Pro každé $x \in X$ nalezneme $\gamma_x > 0$ splňující $x \in \gamma(x)U$. Uvažujme kompaktní podmnožinu D_x v $\mathbb{F}$ definovanou jako $D_x = \{\alpha \in \mathbb{F}\colon\ |\alpha| \leqslant \gamma_x\}$. Díky Tichonovově větě **??** je množina $P = \Pi_{x\in X} D_x$ kompaktní v topologii τ_p, což je topologie zděděná z $\mathbb{F}^X$ (což je topologie bodové konvergence). Množinu U° uvažujme jako podmnožinu P.

Krok 1. Platí $(U^\circ, w^*) = (U, \tau_p)$.

Vskutku, nechť $x^* \in U^\circ$ je dáno. Systém okolí okolí x^* v (X^*, w^*) je pak generován množinami

$$U_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{y^* \in X^*\colon\ |x^*(x_i) - y^*(x_i)| < \varepsilon, i = 1,\dots,n\}, \quad n \in \mathbb{N}, x_1,\dots,x_n \in X, \varepsilon > 0, \tag{3.14}$$

a systém okolí x^* v $(\mathbb{F}^X, \tau_p)$ je generován množinami

$$V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{f \in X^{\mathbb{F}}\colon\ |x^*(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1,\dots,n\}, \quad n \in \mathbb{N}, x_1,\dots,x_n \in X, \varepsilon > 0. \tag{3.15}$$

Zjevně platí, že je-li $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in X$ a $\varepsilon > 0$, platí $U_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \cap U^\circ = V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \cap U^\circ$

Krok 2. Dále platí, že U° je τ_p-uzavřená podmnožina P. Je-li prvek $f \in \overline{U^\circ}^{\tau_p}$ libovolný, je funkce $f\colon X \to \mathbb{F}$ linární. Máme-li totiž dány $x, y \in X$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, pro libovolné $\varepsilon > 0$ nalezneme $x^* \in U^\circ$ takové, že

$$|f(x) - x^*(x)| < \varepsilon, |f(y) - x^*(y)| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |f(\alpha x + \beta y) - x^*(\alpha x + \beta y)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned}|f(\alpha x+\beta y)-(\alpha f(x)+\beta f(y))| &= |f(\alpha x+\beta y)-x^*(\alpha x+\beta y)+x^*(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x)-\beta f(y)|\\ &\leqslant |f(\alpha x+\beta y)-x^*(\alpha x+\beta y)|+|\alpha x^*(x)-\alpha f(x)|+|\beta x^*(y)-\beta f(y)|\\ &\leqslant \varepsilon+|\alpha|\,\varepsilon+|\beta|\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Dále pro $x \in U$ platí $|f(x)| \leqslant 1$. Pro $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $x^* \in U^\circ$ splňující $|f(x) - x^*(x)| < \varepsilon$. Pak

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - x^*(x)| + |x^*(x)| \leqslant \varepsilon + 1.$$

Tedy $f\colon X \to \mathbb{F}$ je lineární zobrazení omezené na okolí 0, tedy je prvkem X^* (viz Věta 3.1.22).

Krok 3. Jelikož je U° uzavřená podmnožina (P, τ_p), je U° τ_p-kompaktní. Díky Kroku 1. je U° w^*-kompaktní množina.

(b) Je-li nyní X separabilní, existuje spočetná množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, která je hustá v X. Uvažujme na X^* topologii σ generovanou pseudonormami $p_{x_n}(x^*) = |x^*(x_n)|$, $x^* \in X^*$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak je σ hausdorffovská lokálně konvexní topologie na X^*, která je díky Větě 3.1.28 metrizovatelná. Jelikož je slabší než w^*-topologie a U° je w^*-kompaktní, σ na U° splývá s w^*. Prostor (U°, w^*) je tak metrizovatelný. □

Věta 3.1.96. *Je-li X Banachův prostor, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) X je reflexivní.

(ii) Jednotková koule B_X je w-kompaktní.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Je-li X reflexivní, kanonické vnoření ε splňuje $\varepsilon(B_X) = B_{X^{**}}$. Navíc je zobrazení $\varepsilon\colon (B_X, w) \to (B_{X^{**}}, w^*)$ (surjektivní) homeomorfizmus. Z Věty 3.1.95 plyne slabá kompaktnost B_X.

(ii) $\implies$ (i) Předpokládejme, že B_X je slabě kompaktní. Jelikož je zobrazení $\varepsilon\colon (B_X, w) \to (\varepsilon(B_X), w^*)$ homeomorfizmus, je $\varepsilon(B_X)$ w^*-uzavřená podmnožina $B_{X^{**}}$. Z Věty 3.1.94 dostáváme $B_{X^{**}} = \overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = \varepsilon(B_X)$. Z této rovnosti již reflexivita X okamžitě plyne. □

Věta 3.1.97. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak lze z každé omezené posloupnosti v X vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Ukážeme nejprve, že je-li Y separabilní reflexivní prostor, je (B_X, w) metrizovatelný kompaktní prostor. Díky reflexivitě je Y^{**} též separabilní, a tedy i Y^* je separabilní. Jelikož B_{Y^*} je okolí 0, je dle Věty 3.1.95 prostor $(B_{Y^{**}}, w^*)$ kompaktní a metrizovatelný. Jelikož je $\varepsilon\colon (B_Y, w) \to (B_{Y^{**}}, w^*)$ homeomorfizmus, je (B_Y, w) kompaktní metrizovatelný prostor.

Nechť nyní $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v prostoru X. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vektory x_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou obsaženy v B_X. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dle Věty 1.2.27(d) je Y reflexivní prostor, který je zřejmě separabilní. Posloupnost $\{x_n\}$ je obsažena v B_Y, což je dle přecházející úvahy slabě kompaktní metrizovatelný prostor. Lze tedy vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $x \in B_Y$ takové, že $x_{n_k} \to x$ v $\sigma(Y, Y^*)$. Zjevně pak $x_{n_k} \to x$ slabě v X. □

Lemma 3.1.98. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je jeho hustý podprostor. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak w^*-topologie splývá na U° s topologií $\sigma(X^*, Y)$.*

Speciálně, je-li Y hustý podprostor normovaného lineárního prostoru X, na B_{X^*} splývá $\sigma(X^*, Y)$ s w^*-topologií.

Důkaz. Dle Věty 3.1.95 je U° w^*-kompaktní množina. Díky hustotě Y je topologie $\sigma(X^*, Y)$ na U° Hausdorffova, přičemž každá $\sigma(X^*, Y)$-otevřená množina je též w^*-otevřená. Zobrazení $\mathrm{id}\colon (U^\circ, w^*) \to (U^\circ, \sigma(X^*, Y))$ je tedy spojité, prosté zobrazení kompaktního prostoru do Hausdorffova prostoru. Jedná se tedy o homeomorfizmus, což znamená, že tyto topologie splývají.

□

Příklad 3.1.99. Nechť X je topologický vektorový prostor, jehož duál odděluje body X. Pak (X^*, w^*) je metrizovatelný právě tehdy, když X má spočetnou algebraickou bázi.

Důkaz. Pro prvek $x \in X$ označme $\varepsilon_x \in (X^*)^\#$ funkcionál definovaný jako $\varepsilon_x(x^*) = x^*(x)$, $x^* \in X^*$. Nechť p_x značí pseudonormu na X^* danou vektorem $x \in X$ (viz Definice 3.1.85).

„ $\implies$ “ Nechť $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze X a $\mathcal{P} = \{p_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Uvažujme topologii σ generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$. Ta je metrizovatelná dle Věty 3.1.42 a 3.1.48. Ukážeme, že $\sigma = \sigma(X^*, X)$. Zjevně platí $\sigma \subset \sigma(X^*, X)$. K důkazu obrácené nerovnosti stačáí ukázat, že pro každé $U_{p_x,1}$, kde $x \in X$, existuje $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon >$ takové, že

$$\bigcap_{p_{x_1},\dots,p_{x_n},\varepsilon} \subset U_{p_x,1}.$$

Jelikož $X = \operatorname{span}\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, existuje $n \in \mathbb{N}$ a koeficienty $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ splňující $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$. Pak pro $\varepsilon < (1 + \sum_{i=1}^n |c_i|)^{-1}$ a $x^* \in U_{p_{x_1},\dots,p_{x_n},\varepsilon}$ platí

$$|x^*(x)| = \left|\sum_{i=1}^n c_i x^*(x_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |c_i|\, |x^*(x_i)| < 1.$$

Tedy $x^* \in U_{p_x,1}$. Tím je důkaz první implikace dokončen.

„$\Longleftarrow$“ Předpokládejme nyní, že je w^*-topologie (značíme τ_{w^*}) na X^* je metrizovatelná. Pak existuje spočetná báze $\tau_{w^*}(0)$. Vzhledem k Větě 3.1.42 existuje množina $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset X$ taková, že pseudonormy p_{x_n} na X^* generují pomocí množin tvaru (3.7) topologii τ_{w^*}. Nechť nyní $x \in X$ je libovolný vektor. Pak $U_{p_x,1}$ je w^*-okolí 0, a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$U_{p_{x_1},\dots,p_{x_k},m} \subset U_{p_x,1}.$$

Z tohoto faktu dostáváme

$$\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} \varepsilon_{x_i} \subset \operatorname{Ker} \varepsilon_x,$$

a tedy $\varepsilon_x \in \operatorname{span}\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_k}\}$. Jelikož dle předpokladu X^* odděluje body X, platí $x \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$. Proto $X = \operatorname{span}\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$.

□

Příklad 3.1.100. Nechť $p \in (0, \infty)$ a $X = \ell^p$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Je-li $p \in (1, \infty)$, posloupnost bázových vektorů $\{e_n\}$ konverguje k 0 slabě, ne však v normě.

(b) Je-li $p = 1$, každá slabě konvergentní posloupnost je normově konvergentní, ale slabá topologie nesplývá s normovou.

(c) Je-li $p \in (0, 1)$, je B_X slabě omezená, avšak neomezená množina.

(d) Pro $p \in (0, 1)$ nechť τ_p označuje w^*-topologii na ℓ^∞ danou pomocí standardní duality. Pro $0 < p < q \leqslant 1$ pak platí $\tau_p \neq \tau_q$ na ℓ^∞, i když tyto splývají na omezených množinách ℓ^∞.

Důkaz. (a) Nechť $p \in (1, \infty)$ je libovolné. Jelikož $\|e_n\| = 1$, posloupnost $\{e_n\}$ nekonverguje v normě k 0. Užijeme nyní dualitu z Věty **??**(c). Pro libovolné $y \in \ell^q$, kde q je exponent sdružený k p, však platí $f_y(e_n) = y_n \to 0$. Tedy $e_n \to 0$ slabě.

(b) Stačí dokázat, že každá posloupnost slabě konvergující k 0 konverguje k 0 normově. Budeme postupovat sporem a předpokládat tak existenci posloupnosti $\{x_k\}$ v ℓ^1 slabě konvergující k 0, která však splňuje $\|x_k\| > \delta$, $k \in \mathbb{N}$, pro nějaké kladné číslo δ.

Induktivně nyní nalezneme indexy $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ a $1 = k_1 < k_2 < \cdots$ splňující

- $\sum_{i=1}^{n_j - 1} \left|x_{k_j}(i)\right| > \delta$ a $\sum_{i=n_j}^{\infty} \left|x_{k_j}(i)\right| < 2^{-3}\delta$, $j \geqslant 1$,
- $\sum_{i=1}^{n_j} |x_k(i)| < 2^{-3}\delta$, $k \geqslant k_j$, $j \geqslant 2$.

V prvním kroce indukce nalezneme $n_1 > 1$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1 - 1} |x_{k_1}(i)| > \delta$ a $\sum_{i=n_1}^{\infty} |x_{k_1}(i)| < 2^{-3}\delta$. Jelikož druhá podmínka po indexu $k_1 = 1$ nepožaduje nic, je první krok za námi.

Předpokládejme nyní, že indexy $1 = n_1 < \cdots < n_j$ a $1 = k_1 < \cdots < k_j$ splňující požadované vlastnosti máme pro nějaké $j \in \mathbb{N}$ již nalezeny. Jelikož $x_k \to 0$ slabě, pro každou souřadnici $i \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} x_k(i) = 0$. Proto existuje $k_{j+1} > k_j$ takové, že pro každé $k \geqslant k_{j+1}$ platí $\sum_{i=1}^{n_j} |x_k(i)| < 2^{-3}\delta$. Dále zvolíme $n_{j+1} > n_j$ splňující $\sum_{i=1}^{n_{j+1}-1} \left|x_{k_{j+1}}(i)\right| > \delta$ a $\sum_{i=n_{j+1}}^{\infty} \left|x_{k_{j+1}}(i)\right| < 2^{-3}\delta$. Tím je konstrukce dokončena.

Uvažujme nyní prvek $y \in \ell^\infty$ definovaný jako

$$y(i) = \operatorname{sgn} x_{k_j}(i), \quad n_{j-1} \leqslant i < n_j, j \in \mathbb{N}.$$

Chápeme-li vektor y jako funkcionál $\psi_y \in (\ell^1)^*$, dostáváme pro každé $j \geqslant 2$ odhad

$$\begin{aligned}
\left|\psi_y(x_{k_j})\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n_{j-1}-1} y(i)x_{k_j}(i) + \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} y(i)x_{k_j}(i) + \sum_{i=n_j}^{\infty} y(i)x_{k_j}(i)\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} y(i)x_{k_j}(i)\right| - \sum_{i=1}^{n_{j-1}-1} \left|x_{k_j}(i)\right| - \sum_{i=n_j}^{\infty} \left|x_{k_j}(i)\right| \\
&= \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} \left|x_{k_j}(i)\right| - \sum_{i=1}^{n_{j-1}-1} \left|x_{k_j}(i)\right| - \sum_{i=n_j}^{\infty} \left|x_{k_j}(i)\right| \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n_j-1} \left|x_{k_j}(i)\right| - 2\sum_{i=1}^{n_{j-1}-1} \left|x_{k_j}(i)\right| - \sum_{i=n_j}^{\infty} \left|x_{k_j}(i)\right| \\
&\geqslant \delta - 2 \cdot 2^{-3}\delta - 2^{-3}\delta = \frac{5}{8}\delta.
\end{aligned}$$

To je však spor s předpokladem $x_{k_j} \to 0$ slabě.

Slabá topologie na ℓ^1 však nesplývá s normovou, což plyne z Příkladu 3.1.99 následujícím způsobem. Uvažujeme v něm prostor $X = (\ell^\infty, w^*)$. Pak $(X^*, \sigma(X^*, X)) = (\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty))$. Dle Příkladu 3.1.99 je (X^*, w^*) metrizovatelný pouze tehdy, když $X = \ell^\infty$ má spočetnou algebraickou bázi. Tak tomu však rozhodně není.

(c) Neomezenost B_X plyne z Příkladu 3.1.47(c), slabá omezenost pak z duality dané tvrzením (b) tohoto příkladu. Je-li totiž $y \in \ell^\infty$, máme

$$|\varphi_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \leqslant \|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n| \leqslant \|y\|_\infty \|x\|_p \leqslant \|y\|_\infty, \quad x \in B_X.$$

(Zde používáme odhad $a < a^p$ platný pro $a \in (0,1]$.)

(d) Nejprve si povšimneme, že $\ell^p \subset \ell^q$. Vskutku, je-li $x \in B_{\ell^p}$, platí pro každou souřadnici $n \in \mathbb{N}$ odhad $|x_n|^q \leqslant |x_n|^p$. Tedy $x \in B_{\ell^q}$. Z tohoto faktu nyní plyne, že $\tau_p \subset \tau_q$.

Krok 1. Vezmeme nyní $x \in \ell^q \backslash \ell^p$. Prvek $y \in \ell^\infty$ nyní budeme ztotožňovat s φ_y daným Příkladem 3.1.47(b). Podobně budeme chápat prvky ℓ^p jako funkcionály na ℓ^∞ generující τ_p. Položíme

$$U = \{y \in \ell^\infty \colon\ |y(x)| < 1\}.$$

Pak $U \in \tau_q(0)$, ale $U \notin \tau_p(0)$. V opačném případě by totiž existovali prvky $x_1, \ldots x_n \in \ell^p$ takové, že

$$V = \{y \in \ell^\infty \colon\ |y(x_i)| < 1, i = 1, \ldots, n\}$$

je množina obsažená v U. Pro každé $y \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} x_i$ však platí $ty \in V$, $t \in \mathbb{F}$, z čehož plyne $ty \in U$ pro každé $t \in \mathbb{F}$. Proto $y \in \operatorname{Ker} x$. Z Lemmatu 3.1.82 nyní plyne $x \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \ell^p$, což je spor. Proto $\tau_p \neq \tau_q$.

Krok 2. Ověříme nyní, že B_{ℓ^∞} je τ_p-kompaktní množina. K tomu stačí ukázat, že $B_{\ell^\infty} = (B_{\ell^p})^\circ$. Inkluze „$\subset$“ je jasná. Pokud je $y \in (B_{\ell^p})^\circ$, pak

$$|y_n| = |y(e_n)| \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Zde e_n opět značí n-tý bázový vektor.) Proto je $y \in B_{\ell^\infty}$.

Dle Věty 3.1.95 je tak B_{ℓ^∞} kompaktní v topologii τ_p

Krok 3. Je-li nyní $A \subset \ell^\infty$ (normově) omezená množina, existuje $r > 0$ takové, že $A \subset rB_{\ell^\infty}$. Na základě druhého kroku tak víme, že rB_{ℓ^∞} je τ_p i τ_q-kompaktní. Jelikož jsou to obě hausdorffovské topologie a $\tau_p \subset \tau_q$, na rB_{ℓ^∞} tyto topologie splývají. Proto splývají i na A.

□

Příklad 3.1.101. Nechť $X = L^\infty([0,1])$ s dualitou $(L^1([0,1])^* = X$ a uvažujme $Y = C([0,1])$ jakožto podprostor X. Pak $\overline{Y}^{\|\cdot\|} = Y$ a $\overline{Y}^{w^*} = X$.

Důkaz. Pro každý prvek $f \in Y$ platí $\|f\|_{C([0,1])} = \|f\|_{L^\infty([0,1])}$. Proto je Y normově uzavřený v X. Předpokládáme-li však $\overline{Y}^{w^*} \neq X$, existuje dle Věty 3.1.61(b) nenulová funkce $g \in L^1([0,1])$ taková, že $\int_{[0,1]} fg \, d\lambda = 0$ pro každé $f \in Y$. Distribuce $\Lambda_g \in \mathscr{D}'((0,1))$ je tak nulová, což znamená, že $g = 0$ (viz Lemma **??**). To je však spor. □

Příklad 3.1.102. Nechť $X = \ell^2$ a e_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou standardní bázové vektory. Uvažujme množinu

$$A = \{\sqrt{n} e_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Pak $0 \in \overline{A}^w$, ale neexistuje posloupnost z A slabě konvergující k 0.

Důkaz. Krok 1. Nechť U je libovolné slabé okolí 0. Pak existují $x_1, \ldots, x_k \in \ell^2$ takové, že

$$V = \{x \in \ell^2 \colon\ |\langle x, x_i \rangle| < 1, i = 1, \ldots, k\} \subset U.$$

Uvažujme vektor $y \in \ell^2$ se souřadnicemi

$$y(n) = \sum_{i=1}^k |x_i(n)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Množina

$$N = \{n \in \mathbb{N} \colon\ |y(n)|^2 < \frac{1}{n}\}$$

je nekonečná, neboť $y \in \ell^2$. Jelikož

$$|x_i(n)|^2 \leqslant |y(n)|^2 < \frac{1}{n}, \quad n \in N,$$

pro každé $n \in N$ vektor $\sqrt{n}e_n$ splňuje

$$\left|\langle \sqrt{n}e_n, x_i\rangle\right| = \left|\sqrt{n}x_i(n)\right| < 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Tedy

$$\varnothing \neq V \cap A \subset U \cap A.$$

Krok 2. Libovolná posloupnost v množině A je buďto od jistého indexu konstantní, nebo neomezená. Z Věty 3.1.89 tak plyne, že žádná posloupnost z A nekonverguje slabě k 0. Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 3.1.103. Nechť X je metrizovatelný topologický vektorový prostor nekonečné dimenze. Pak je (X^*, w^*) první kategorie.

Důkaz. Vezměme systém otevřených vyvážených množin $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, který je bází $\tau(0)$. Dle Věty 3.1.95 jsou množiny $(V_n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$, w^*-kompaktní, a tedy w^*-uzavřené a w^*-omezené.

Ukážeme, že

$$X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n)^\circ.$$

Nechť $x^* \in X^*$ je dáno. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ a $M > 0$ takové, že $|x^*(x)| \leqslant M$ pro $x \in V_{n_1}$ (viz Věta 3.1.22). Nechť $n_2 \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $V_{n_2} \subset \frac{1}{M} V_{n_1}$. Pak pro každé $x \in V_{n_2}$ platí $|x^*(x)| \leqslant 1$, tj. $x^* \in (V_{n_2})^\circ$.

Nyní ověříme, že každá množina $(V_n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$, má prázdný vnitřek ve w^*-topologii. Pokud by tomu tak nebylo, nalezneme $n \in \mathbb{N}$, $x_0^* \in X^*$ a $x_1, \dots, x_k \in X$ takové, že

$$U = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < 1\}$$

splňuje $x_0^* + U \subset (V_n)^\circ$. Jelikož je X nekonečné dimenze, $X \neq \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, a proto existuje $x \in X$ splňující $\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} x_i \not\subset \operatorname{Ker} x$ (viz Lemma 3.1.82). Zvolíme $x^* \in \left(\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} \varepsilon_{x_i}\right) \setminus \operatorname{Ker} \varepsilon_x$. Pak

$$x_0^* + \operatorname{span}\{x^*\} \subset x_0^* + U \subset (V_n)^\circ.$$

Jelikož je $(V_n)^\circ$ w^*-omezená, je množina

$$\{x_0^*(x) + x^*(tx) : t \in \mathbb{F}\}$$

omezená v $\mathbb{F}$. To však není možné, neboť $x^*(x) \neq 0$.

□

3.2 Bochnerův integrál

3.2.1 Měřitelné funkce

Úmluva 3.2.1. *V této sekci bude X značit Banachův prostor a (Ω, Σ, μ) bude měřitelný prostor s konečnou, úplnou mírou.*

Definice 3.2.2. Uvažujme $f : \Omega \to X$. Říkáme, že f je jednoduchá, pokud $\operatorname{Rng} f$ je konečná množina, tj. existují $x_1, \dots, x_n \in X$ a $E_1 \dots, E_n \in \Sigma$ takové, že $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$.

Funkce f se nazývá μ-měřitelná, pokud existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí, která splňuje, že $\lim_{n\to\infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$ pro μ-skoro všechna $\omega \in \Omega$.

Funkce f se nazývá slabě μ-měřitelná, pokud skalární funkce $\omega \mapsto x^*(f(\omega))$ je μ-měřitelná pro každé $x^* \in X^*$.

Tvrzení 3.2.3. *Nechť $f, g : \Omega \to X$ jsou funkce a $c \in \mathbb{F}$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li f jednoduchá, je f μ-měřitelná a je-li f μ-měřitelná, je f slabě μ-měřitelná.

(b) Jsou-li f a g jednoduché (μ-měřitelné, slabě μ-měřitelné), jsou jednoduché (μ-měřitelné, slabě μ-měřitelné) i funkce $f + g$ a cf.

(c) Je-li f μ-měřitelná, je skalární funkce $\omega \to \|f(\omega)\|$ měřitelná.

Důkaz. (a) První tvrzení je zřejmé a druhé plyne z faktu, že normová konvergence implikuje slabou konvergenci.

(b) Tvrzení okamžitě plyne z definic.

(c) Pokud f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou jednoduché a konvergují μ-skoro všude k f, platí $\|f_n(\omega)\| \to \|f(\omega)\|$ pro μ-skoro všechny $\omega \in \Omega$. Funkce $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ je tak měřitelná. □

Lemma 3.2.4. *Nechť $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je hustá podmnožina Banachova prostoru X. Nechť $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ je podmnožina S_{X^*} splňující $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $x \in X$ platí $\|x\| = \sup\{|x_n^*(x)| : n \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ je dáno. Zřejmě platí $\sup\{|x_n^*(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \|x\|$. Pro důkaz obrácené nerovnosti zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je vybráno tak, že $\|x - x_n\| < \varepsilon$. Pak

$$\|x\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n\| \leqslant \varepsilon + |x_n^*(x_n)| \leqslant \varepsilon + |x_n^*(x)| + |x_n^*(x_n - x)| \leqslant |x_n^*(x)| + 2\varepsilon.$$

Tedy $|x_n^*(x)| \geqslant \|x\| - 2\varepsilon$, a důkaz je tak dokončen. $\square$

Věta 3.2.5 (Pettis). *Nechť $f\colon \Omega \to X$ je funkce. Pak f je μ-měřitelná právě tehdy, když platí následující podmínky:*

(1) Funkce f má esenciálně separabilní obor hodnot, tj. existuje $E \in \Sigma$ splňující $\mu(\Omega\backslash\Sigma) = 0$ a $f(E)$ je separabilní podmnožina X.

(2) Funkce f je slabě μ-měřitelná.

Důkaz. Nechť f je μ-měřitelná. Nalezneme posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí takovou, že množina $N = \{\omega \in \Omega\colon \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \nrightarrow 0\}$ má míru 0. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega\backslash N)$ je separabilní podmnožina X a

$$f(\Omega\backslash N) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega\backslash N)}.$$

Tedy f má esenciálně separabilní obor hodnot.

Je-li nyní $x^* \in X^*$, platí $x^*(f_n(\omega)) \to x^*(f(\omega))$ pro $\omega \in \Omega\backslash N$. Tedy $x^* \circ f$ je μ-skoro všude bodovou limitou μ-měřitelných funkcí $x^* \circ f_n$ (toto jsou funkce s konečným oborem hodnot), a proto je μ-měřitelná. Funkce f je tedy slabě μ-měřitelná.

Nechť nyní f splňuje vlastnosti (1) a (2). Nechť $N \in \Sigma$ je taková, že $f(\Omega\backslash N)$ je separabilní podmnožina X.

Krok 1. Nechť $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá množina v $f(\Omega\backslash N)$ a $x_n^* \in S_{X^*}$ jsou zvoleny tak, aby $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu (2) jsou funkce $x_n^* \circ f$ μ-měřitelné, a proto je funkce

$$\sup\{|x_n^*(f(\omega))| : n \in \mathbb{N}\}, \quad \omega \in \Omega\backslash N,$$

μ-měřitelná na $\Omega\backslash N$. Dle Lemmatu 3.2.4 platí

$$\|f(\omega)\| = \sup\{|x_n^*(f(\omega))| : n \in \mathbb{N}\}, \quad \omega \in \Omega,$$

a tedy je funkce $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ měřitelná na $\Omega\backslash N$. Podobně odvodíme, že funkce $\omega \mapsto \|f(\omega) - x_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné na $\Omega\backslash N$.

Krok 2. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $E_n = \{\omega \in \Omega\backslash N\colon g_n(\omega) < \varepsilon\}$. Položme $E_0 = \varnothing$ a definujme funkci $g\colon \Omega \to X$ jako

$$g(\omega) = \begin{cases} x_n, & \omega \in E_n\backslash \bigcup_{m=0}^{n-1} E_m, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Pak pro $\omega \in \Omega\backslash N$ platí $\|g(\omega) - f(\omega)\| < \varepsilon$.

Vskutku, je-li $\omega \in \Omega\backslash N$ dáno, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f(\omega) - x_n\| < \varepsilon$, tj. $g_n(\omega) < \varepsilon$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je nejmenší s touto vlastností. Pak $\omega \in B_{n_0}\backslash_{m=0}^{n_0-1} B_m$, a tedy $g(\omega) = x_n$. Proto $\|f(\omega) - g(\omega)\| = \|f(\omega) - x_n\| < \varepsilon$.

Krok 3. V Kroku 2. jsme ukázali, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná funkce $g_\varepsilon\colon \Omega\backslash N \to X$ s hodnotami v množině $C = \{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, která splňuje $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$ na $\Omega\backslash N$. Nalezneme tak posloupnost $\{g_k\}$ měřitelných funkcí s hodnotami v $\{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, která splňuje $\|f - g_k\| < 2^{-k}$ na $\Omega\backslash N$.

Položme $g_0 = 0$ a nechť

$$h_k(\omega) = g_k(\omega) - g_{k-1}(\omega), \quad \omega \in \Omega\backslash N, k \in \mathbb{N}.$$

Protože

$$\|g_k - g_{k-1}\| \leqslant \|g_k - f\| + \|f - g_{k-1}\| < 2^{-k} + 2^{-k+1} \leqslant 2 \cdot 2^{-k+1} = 2^{-k+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

platí $\|h_k\| < 2^{-k+2}$. Dále $\operatorname{Rng} h_k \subset D$, kde $D = C - C$ je spočetná. Očíslujme množinu D jako $D = \{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujme

$$h_{k,j}(\omega) = \begin{cases} z_l, & h_k(\omega) = z_l, j \in \{1, \ldots, j\}, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases} \qquad j \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\backslash N.$$

Pak $h_{k,j} \to h_k$ a $\|h_{k,j}\| < 2^{-k+2}$, $j \in \mathbb{N}$. Položme

$$u_j = \sum_{i=1}^{j} h_{i,j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Pak u_j jsou jednoduché funkce, které bodově konvergují k f na $\Omega\backslash N$.

Abychom tento fakt ověřili, vezměme $\omega \in \Omega \backslash N$ a $\varepsilon > 0$. Nechť $k_0 \in \mathbb{N}$ je vybráno tak, že $\sum_{i=k_0}^{\infty} 2^{-i+2} < \varepsilon$. Nechť $j_0 \in \mathbb{N}$ splňuje

$$\|h_i(\omega) - h_{i,j}(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{k_0}, \quad i \in \{1, \dots, k_0\}, j \geqslant j_0.$$

Pak pro $j > \max\{j_0, k_0\}$ platí

$$\begin{aligned}
\|f(\omega) - u_j(\omega)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\omega) - \sum_{i=1}^{k} h_{i,j}(\omega) \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k_0} (h_i(\omega) - h_{i,j}(\omega)) \right\| + \left\| \sum_{i=k_0+1}^{\infty} h_i(\omega) \right\| + \left\| \sum_{i=k_0+1}^{j} h_{i,j}(\omega) \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_0} \|(h_i(\omega) - h_{i,j}(\omega))\| + \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \|h_i(\omega)\| + \sum_{i=k_0+1}^{j} \|h_{i,j}(\omega)\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{k_0} + \sum_{i=k_0+1}^{\infty} 2^{-i+2} + \sum_{i=k_0+1}^{\infty} 2^{-i+2} \\
&\leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $u_j \to f$ na $\Omega \backslash N$. Dodefinujeme-li u_j na množině N hodnotou 0, získáme posloupnost jednoduchých funkcí, která konverguje k f μ-skoro všude. $\square$

Důsledek 3.2.6. *Nechť $f\colon \Omega \to X$ je funkce. Pak f je μ-měřitelná právě tehdy, když f existuje posloupnost $\{g_n\}$ μ-měřtielných funkcí na Ω, které mají separabilní obor hodnot a stejnoměrně konvergují k f na množině plné míry.*

Důkaz. Je-li f μ-měřitelná, důkaz předcházející věty implikuje existenci požadované posloupnosti.

Předpokládáme-li existenci takovéto posloupnosti, ihned obdržíme, že f má esenciálně separabilní obor hodnot a je slabě μ-měřitelná. $\square$

Tvrzení 3.2.7. *Nechť $\dim X = n$ a $f = (f_1, \dots f_n)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Funkce f je μ-měřitelná právě tehdy, když f je slabě μ-měřitelná.

(b) Funkce f je μ-měřitelná právě tehdy, když všechny souřadnicové funkce jsou měřitelné (tj. $f_i^{-1}(U) \in \Sigma$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $U \subset \mathbb{F}$ otevřenou).

(c) Funkce f je μ-měřitelná právě tehdy, když $f^{-1}(U) \in \Sigma$ pro každou $U \subset X$ otevřenou.

Důkaz. (a) Implikace zleva doprava je obsahem Tvrzení 3.2.3(a) a obrácená implikace plyne z Věty 3.2.5 a separability X.

(b) Pokud f je μ-měřitelná a $i \in \{1, \dots, n\}$, uvažujme souřadnicový funkcionál $p_i\colon X \to \mathbb{F}$. Pak $f_i = p_i \circ f$ je měřitelná dle Věty 3.2.5.

Jsou-li nyní všechny souřadnicové funkce měřitelné a $x^* \in X^*$, vyjádříme x^* jako $x^* = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i$, kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ jsou vhodná čísla. Pak

$$x^* \circ f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

je měřitelná funkce, a tedy f je slabě μ-měřitelná. Dle (a) je μ-měřitelná.

(c) Pokud f je μ-měřitelná a $U \subset X$ je daná otevřená množina, nalezneme otevřené obdélníky $O_k = \Pi_{i=1}^{n} O_{k,i}$, kde $O_{k,i} \subset \mathbb{F}$ jsou otevřená koule, takové, že $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$. Pak

$$F^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(O_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(O_{k,i})$$

je měřitelná množina.

K důkazu obrácené implikace uvažme opět souřadnicové funkcionály p_i, $i = 1, \dots, n$. Pak $f_i = p_i \circ f$ je měřitelná funkce, neboť

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(U)) \in \Sigma, \quad U \subset \mathbb{F} \text{ otevřená.}$$

$\square$

Příklad 3.2.8. Nechť $\Omega = [0,1]$ s Lebesgueovou mírou λ a $X = \ell^2([0,1])$. Uvažujme funkci

$$f(t) = e_t, \quad t \in [0,1],$$

kde $e_t = \chi_{\{t\}}$.

Pak f je slabě měřitelná funkce, která není měřitelná.

Důkaz. Nechť $x^* \in \ell^2([0,1])$ je dáno. Dle Věty 1.2.17 existuje $y \in \ell^2([0,1])$ takové, že

$$x^*(x) = \sum_{s\in[0,1]} x(s)\overline{y(s)}, \quad x \in \ell^2([0,1]).$$

Jelikož platí $\sum_{s\in[0,1]} |y(s)|^2 < \infty$, množina $C = \{s \in [0,1] : y(s) \neq 0\}$ je spočetná. Proto je

$$(x^* \circ f)(t) = \overline{y(t)}, \quad t \in [0,1],$$

skalární měřitelná funkce.

Pro každou množinu $E \subset [0,1]$ však platí, že množina $f([0,1]\backslash E)$ je separabilní právě tehdy, když $[0,1]\backslash E$ is countable. Dle Věty 3.2.5 tak f není měřitelná. □

3.2.2 Bochnerův integrál

Definice 3.2.9 (Bochnerův integrál)**.** Nechť $g\colon \Omega \to X$ je jednoduchá funkce tvaru $g = \sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}$. Definujme pro $E \in \Sigma$ Bochnerův integrál g přes množinu E jako

$$\int_E g\,d\mu = \sum_{i=1}^n x_i\mu(E_i \cap E).$$

Nechť $f\colon \Omega \to X$ je funkce. Řekneme, že je bochnerovsky integrovatelná, pokud existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\|\,d\mu = 0$.

Pro každou množinu $E \in \Sigma$ pak definujeme Bochnerův integrál f přes množinu E jako

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Úmluva 3.2.10. *V následujícím textu budeme často používat pouze termín „integrovatelná“ funkce.*

Věta 3.2.11. *(a) Je-li $g\colon \Omega \to X$ jednoduchá funkce a $E \in \Sigma$, hodnota $\int_E g\,d\mu$ nezáleží na vyjádření funkce g. Navíc platí*

$$\left\|\int_E g\,d\mu\right\| \leqslant \int_E \|g\|\,d\mu.$$

(b) Jsou-li $g_1, g_2\colon \Omega \to X$ jednoduché funkce a $c \in \mathbb{F}$, platí

$$\int_\Omega (g_1 + g_2)\,d\mu = \int_\Omega g_1\,d\mu + \int_\Omega g_2\,d\mu \quad a \quad \int_\Omega (cg)\,d\mu = c\int_\Omega g\,d\mu.$$

(c) Je-li $f\colon \Omega \to X$ integrovatelná funkce, platí následující tvrzení.

(c1) Funkce f μ-měřitelná.

(c2) Pro každé $E \in \Sigma$ je integrál $\int_E f\,d\mu$ dobře definován a nezáleží na volbě aproximující posloupnosti.

(d) Jsou-li $g_1, g_2\colon \Omega \to X$ integrovatelné funkce a $c \in \mathbb{F}$, jsou funkce $g_1 + g_2$ a cg_1 též integrovatelné a platí

$$\int_\Omega (g_1 + g_2)\,d\mu = \int_\Omega g_1\,d\mu + \int_\Omega g_2\,d\mu \quad a \quad \int_\Omega (cg)\,d\mu = c\int_\Omega g\,d\mu.$$

Důkaz. (a) Nechť $E \in \Sigma$ a $g\colon \Omega \to X$ je jednoduchá funkce. Přechodem k prostoru $(E, \Sigma|_E, \mu|_E)$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $E = \Omega$. Předpokládejme, že $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ jsou konečné systémy v Σ a vektory $x_E \in X$, $E \in \mathcal{E}$, $y_F \in X$, $F \in \mathcal{F}$, jsou takové, že splňují

$$g = \sum_{E\in\mathcal{E}} x_E\chi_E = \sum_{F\in\mathcal{F}} y_F\chi_F.$$

Vezměme konečné disjunktní pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru Ω sestávajícího z množin Σ, které splňuje

$$\forall A \in \mathcal{E} \cup \mathcal{F}\ \forall G \in \mathcal{G}\colon\ (G \cap A \neq \varnothing \implies G \subset A)\,.$$

(Existence takovéhoto systému se snadno dokáže například indukcí.)

Pak pro $G \in \mathcal{G}$ a $\omega \in G$ platí

$$g(\omega) = \sum_{E\in\mathcal{E}} x_E\chi_E(\omega) = \sum_{\{E\in\mathcal{E}\colon E\cap G\neq\varnothing\}} x_E = \sum_{\{E\in\mathcal{E}\colon G\subset E\}} x_E \quad \text{a}$$

$$g(\omega) = \sum_{F\in\mathcal{F}} y_F\chi_F(\omega) = \sum_{\{F\in\mathcal{F}\colon F\cap G\neq\varnothing\}} y_F = \sum_{\{F\in\mathcal{F}\colon G\subset F\}} y_F.$$

Označme jako z_G tuto společnou hodnotu.

Počítejme nyní

$$\sum_{E\in\mathcal{E}} x_E\mu(E) = \sum_{E\in\mathcal{E}} x_E \left(\sum_{\{G\in\mathcal{G}\colon G\subset E\}} \mu(G) \right) = \sum_{\{(E,G)\in\mathcal{E}\times\mathcal{G}\colon G\subset E\}} x_E\mu(G)$$
$$= \sum_{G\in\mathcal{G}} \mu(G) \left(\sum_{\{E\in\mathcal{E}: G\subset E\}} x_E \right) = \sum_{G\in\mathcal{G}} z_G\mu(G).$$

Podobně odvodíme, že $\sum_{F\in\mathcal{F}} y_F\mu(F) = \sum_{G\in\mathcal{G}} z_G\mu(G)$. Tím je první část tvrzení (a) dokázána.

Druhá část pak plyne z trojúhelníkové nerovnosti. Lze totiž dle první části důkazu předpokládat, že g je tvaru $\sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}$, kde systém $\{E_i\colon i\in\{1,\ldots,n\}\}$ je disjunktní. Pak

$$\left\| \int_E g\,d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i\mu(E_i\cap E) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^n \mu(E_i\cap E)\,\|x_i\| = \int_E \|g\|\,d\mu.$$

(b) Tvrzení plyne ihned z definic.

(c1) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí splňující $\int_\Omega \|f-f_n\|\,d\mu \to 0$. Tedy jsou funkce

$$g_n(\omega) = \|f(\omega) - f_n(\omega)\|, \quad \omega\in\Omega,$$

měřitelné a $\int_\Omega g_n\,d\mu \to 0$. Existuje tedy vybraná podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $g_{n_k}\to 0$ μ-skoro všude. Tedy f_{n_k}, $k\in\mathbb{N}$, jsou jednoduché funkce splňující $\|f(\omega)-f_{n_k}(\omega)\|\to 0$ pro μ-skoro všechny ω, tj. f je μ-měřitelná.

(c2) Nechť $\{f_n\}$ je aproximující posloupnost a $E\in\Sigma$. Pak

$$\left\| \int_E (f_n - f_m)\,d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f_n - f_m\|\,d\mu \leqslant \int_E \|f_n - f\|\,d\mu + \int_E \|f - f_m\|\,d\mu,$$

a tedy posloupnost $\{\int_E f_n\,d\mu\}$ je cauchyovská. Její limita tudíž existuje, což jsme měli dokázat.

Jsou-li nyní $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ dvě aproximující posloupnosti, platí

$$\left\| \int_E f_n\,d\mu - \int_E g_n\,d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f_n - g_n\|\,d\mu \leqslant \int_E \|f_n - f\|\,d\mu + \int_E \|f - g_n\|\,d\mu,$$

a tedy $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu$.

(d) Tvrzení ihned plyne z definic. □

Věta 3.2.12. *Nechť $f\colon\Omega\to X$ je μ-měřitelná funkce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Funkce f je integrovatelná.

(ii) Platí $\int_\Omega \|f\|\,d\mu < \infty$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\{f_n\}$ je aproximující posloupnost pro f daná Definicí 3.2.9. Dle Tvrzení 3.2.3(c) je funkce $\omega\mapsto\|f(\omega)\|$ měřitelná a navíc platí

$$\int_\Omega \|f\|\,d\mu \leqslant \int_\Omega \|f-f_n\|\,d\mu + \int_\Omega \|f_n\|\,d\mu < \infty.$$

(ii) $\implies$ (iii) Jelikož je f μ-měřitelná, je i $\omega\mapsto\|f(\omega)\|$ měřitelná (viz Tvrzení 3.2.3(c)). Dle Důsledku 3.2.6 existují μ-měřitelné funkce f_n, $n\in\mathbb{N}$, se spočetným oborem hodnot takové, že $\|f_n - f\| < \frac{1}{n}$ μ-skoro všude. Jelikož $\|f_n\|\leqslant\|f\|+\frac{1}{n}$ μ-skoro všude, dostáváme $\int_\Omega\|f_n\|\,d\mu<\infty$ Pišme pro každé $n\in\mathbb{N}$ funkci f_n jako $f_n=\sum_{i=1}^\infty x_{n,i}\chi_{E_{n,i}}$, kde $x_{n,i}\in X$ a $\{E_{n,i}\colon i\in\mathbb{N}\}$ je disjunktní systém v Σ. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ nalezneme $p_n\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\int_{\bigcup_{i=p_n+1}^\infty E_{n,i}} \|f_n\|\,d\mu < \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Položíme-li

$$g_n = \sum_{i=1}^{p_n} x_{n,i}\chi_{E_{n,i}}, \quad n\in\mathbb{N},$$

dostáváme jednoduché funkce splňující

$$\int_\Omega \|f-g_n\|\,d\mu \leqslant \int_\Omega \|f-f_n\|\,d\mu + \int_\Omega \|f_n - g\|\,d\mu \leqslant \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_\Omega \left\| \sum_{i=p_n+1}^\infty x_{n,i}\chi_{E_{n,i}} \right\| d\mu$$
$$= \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_{\bigcup_{i=p_n+1}^\infty E_{n,i}} \|f_n\|\,d\mu \leqslant \frac{2\mu(\Omega)}{n}.$$

Tedy f je integrovatelná. □

Důsledek 3.2.13. *Nechť K je kompaktní topologický prostor s Radonovou mírou μ, X je Banachův prostor a nechť $f\colon K \to X$ je spojitá. Pak f je integrovatelná.*

Důkaz. Jelikož je f spojitá, je $f(K)$ kompaktní podmnožina X, a tedy má f separabilní obor hodnot. Vezmeme-li nyní libovolné $x^* \in X^*$, je funkce $x^* \circ f$ spojitá, a tedy měřitelná. Funkce f je tedy μ-měřitelná dle Věty 3.2.13. Jelikož je funkce $k \mapsto \|f(k)\|$ omezená na K, je $\int_K \|f\|\, d\mu$ konečný. Tvrzení tak plyne z Věty 3.2.12. □

Věta 3.2.14. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $f\colon \Omega \to X$ je integrovatelná. Je=li $T \in L(X, Y)$, je funkce $T \circ f\colon \Omega \to Y$ integrovatelná a pro každé $E \in \Sigma$ platí*

$$T\left(\int_E f\, d\mu\right) = \int_E T \circ f\, d\mu.$$

Důkaz. Nechť $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$, jsu jednoduché funkce splňující $\int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu \to 0$. Pak $\{Tf_n\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí s hodnotami v Y taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|Tf - Tf_n\|\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|T\|\,\|f - f_n\|\, d\mu = \|T\| \int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu = 0.$$

Dle Definice 3.2.9 je tak $T \circ f$ integrovatelná a pro každé $E \in \Sigma$ je $\int_E T \circ f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E T \circ f_n\, d\mu$. Jelikož

$$\int_E T \circ f_n\, d\mu = T\left(\int_E f_n\, d\mu\right) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu,$$

dostáváme požadovanou rovnost $\int_E T \circ f\, d\mu = T\left(\int_E f\, d\mu\right)$. □

Věta 3.2.15. *Nechť $f\colon \Omega \to X$ je integrovatelná. Pak*

$$\left\|\int_E f\, d\mu\right\| \leqslant \int_E \|f\|\, d\mu, \quad E \in \Sigma.$$

Důkaz. Nechť $x^* \in S_{X^*}$ je zvoleno tak, že $x^*\left(\int_E f\, d\mu\right) = \left\|\int_E f\, d\mu\right\|$ (viz Věta 1.2.6). Dle Věty 3.2.14 máme

$$\left\|\int_E f\, d\mu\right\| = x^*\left(\int_E f\, d\mu\right) = \int_E (x^* \circ f)\, d\mu \leqslant \int_E |x^* \circ f|\, d\mu \leqslant \int_E \|x^*\|\,\|f\|\, d\mu = \int_E \|f\|\, d\mu.$$

□

Věta 3.2.16 (Lebesgueova věta). *Nechť $f_n \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$, jsou integrovatelné funkce. Nechť $f\colon \Omega \to X$ je funkce a $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce. Předpokládejme, že $f_n \to f$ $\mu 0$skoro všude a $\|f_n\| \leqslant g$ μ-skoro všude. Pak f je integrovatelná a pro každé $E \in \Sigma$ platí*

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Důkaz. Krok 1. Ukážeme nejprve, že f je μ-měřitelná. Nechť $N \in \Sigma$ je množina míry 0 taková, že $\cup_{n=1}^\infty f_n(\Omega\backslash N)$ je separabilní. Protože

$$f(\Omega\backslash N) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^\infty f_n(\Omega\backslash N)},$$

má f esennciálně separabilní obor hodnot.

Dále pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^* \circ f_n \to x^* \circ f$ μ-skoro všude, takže $x^* \circ f$ je měřitelná. Pomocí Věty 3.2.5 dokončíme důkaz μ-měřitelnosti f.

Krok 2. Jelikož $\|f_n\| \to \|f\|$ μ-skoro všude a $\|f_n\| \leqslant g$ μ-skoro všude, $\|f\| \leqslant g$ μ-skoro všude, a tedy $\int_\Omega \|f\|\, d\mu < \infty$. Tedy f je integrovatelná dle Věty 3.2.12.

Krok 3. Pro každé $E \in \Sigma$ nyní počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\int_E f\, d\mu - \int_E f_n\, d\mu\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E \|f - f_n\|\, d\mu = 0,$$

neboť lze použít klasická Lebesgueova věta s majorantou $2g$ (platí $\|f - f_n\| \leqslant 2g$ μ-skoro všude). □

Věta 3.2.17. *Nechť $f\colon \Omega \to X$ je integrovatelná. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f\, d\mu = 0$.

(b) Pokud $\{E_n\}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin Σ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}$, je suma $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu$ absolutně konvergentní a platí

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

(c) Definujme zobrazení

$$F(E) :: \Sigma \to X,$$
$$E \mapsto \int_E f\,d\mu, \quad E \in \Sigma.$$

Pak F je vektorová míra na Σ (tj. $F(\varnothing) = 0$ a F je spočetně aditivní) konečné variace, tj. pro každé $E \in \Sigma$ je

$$|F|(E) = \sup\{\sum_{P\in\mathcal{P}} \|F(P)\| : \mathcal{P} = \{P_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma \textit{ je dělení } E\} < \infty$$

a platí

$$|F|(E) = \int_E \|f\|\,d\mu.$$

Navíc F je absolutně spojitá vzhledem k μ, tj. pokud $\mu(E) = 0$ pro nějakou $E \in \Sigma$, $|F|(E) = 0$.

Důkaz. (a) Jelikož

$$\left\|\int_E f\,d\mu\right\| \leqslant \int_E \|f\|\,d\mu,$$

požadované tvrzení ihned plyne ze své skalární verze.

(Předpokládejme, že $g \in L^1(\mu)$ a existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $E \in \Sigma$ splňující $\int_E |g|\,d\mu > \varepsilon$. Nalezneme tak posloupnost $\{E_n\}$ v Σ takovou, že $\mu(E_n) < 2^{-n}$ a $\int_{E_n} |g|\,d\mu > \varepsilon$. Pak množiny $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, tvoří nerostoucí posloupnost množin v Σ a splňující $\mu(F_k) \leqslant 2^{-k+1}$. Proto $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ má míru 0. Funkce $g_k = |g|\,\chi_{F_k}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergují μ-skoro všude k 0 a jsou majorizovány integrovatelnou funkcí $|g|$. Tedy máme

$$\varepsilon \leqslant \int_{E_k} |g|\,d\mu \leqslant \int_{F_k} |g|\,d\mu = \int_\Omega g_k\,d\mu,$$

přičemž pravá strana konverguje k 0. Tím je tvrzení ověřeno.)

(b) Položíme-li $f_k = f\chi_{\bigcup_{n=1}^k E_n}$, $k \in \mathbb{N}$, platí $\|f_k\| \leqslant \|f\|$, tedy díky Lebesgueově větě máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\int_{E_n} f\,d\mu\right\| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\|\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{E_n} \|f\|\,d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=1}^k E_n} \|f\|\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E \|f_k\|\,d\mu \\ &= \int_E \|f\|\,d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Řada $\{\int_{E_n} f\,d\mu\}$ je proto absolutně konvergentní a

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=1}^k E_n} f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{E_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

Tím je důkaz tvrzení (b) dokončen.

(c) Nechť $E \in \Sigma$ je dáno. Uvažujme libovolné dělení $\mathcal{P}$ množiny E. Pak

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} \left\|\int_P f\,d\mu\right\| \leqslant \sum_{P\in\mathcal{P}} \int_P \|f\|\,d\mu = \int_E \|f\|\,d\mu.$$

Tedy $|F|(E) < \infty$ a navíc $|F|(E) \leqslant \int_E \|f\|\,d\mu$.

Nechť $E \in \Sigma$ je dáno. Uvažujme nyní posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí, která splňuje $\int_\Omega \|f - g_n\|\,d\mu$. Každou funkci f_n pišme jako $g_n = \sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} x_Q \chi_Q$, $n \in \mathbb{N}$, kde $\mathcal{Q}_n \subset \Sigma$ je dělení Ω. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $\mathcal{P}_n = \{Q \cap E : Q \in \mathcal{Q}_n$ a pro $P \in \mathcal{P}_n$ položme $x_P = x_Q$, kde $Q \in \mathcal{Q}_n$ splňuje $P = Q \cap E$. Funkce $f_n = g_n\chi_E = \sum_{P\in\mathcal{P}_n} x_P \chi_P$, $n \in \mathbb{N}$, jsou pak také jednoduché.

Platí

$$\int_E \|f - f_n\|\,d\mu = \int_E \|f - g_n\|\,d\mu \leqslant \int_\Omega \|f - g_n\|\,d\mu. \tag{3.16}$$

Dále máme

$$\left|\int_E \|f_n\|\,d\mu - \int_E \|f\|\,d\mu\right| = \left|\int_E \|g_n\|\,d\mu - \int_E \|f\|\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f - f_n|\,d\mu \leqslant \int_\Omega \|f - g_n\|\,d\mu, \tag{3.17}$$

a

$$\left\|\int_P f_n\,d\mu\right\| = \left\|\int_P x_P\,d\mu\right\| = \|\mu(P)x_P\| = \mu(P)\,\|x_P\| = \int_P \|f_n\|\,d\mu. \tag{3.18}$$

Použitím (3.16) a (3.18) dostáváme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \int_E \|f_n\|\,d\mu\right| &= \left|\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\int_P \|f_n\|\,d\mu\right| = \left|\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f_n\,d\mu\right\|\right| \\ &\leqslant \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left|\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \left\|\int_P f_n\,d\mu\right\|\right| \leqslant \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu - \int_P f_n\,d\mu\right\| \\ &\leqslant \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\int_P \|f - f_n\|\,d\mu = \int_E \|f - f_n\|\,d\mu.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Pišme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \int_E \|f\|\,d\mu\right| &= \left|\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\int_P \|f\|\,d\mu\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left\|\int_P f\,d\mu\right\| - \int_E \|f_n\|\,d\mu\right| + \left|\int_E \|f_n\|\,d\mu - \int_E \|f\|\,d\mu\right| \to 0.\end{aligned}$$

Díky (3.16), (3.17) a (3.19) je tak důkaz dokončen. □

Věta 3.2.18. *Nechť $f, g\colon \Omega \to X$ jsou integrovatelné funkce a $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ pro všechny $E \in \Sigma$. Pak $f = g$ μ-skoro všude.*

Důkaz. Položme $F(E) = \int_E (f - g)\,d\mu$, $E \in \Sigma$. Pak $F = 0$ na Σ, což implikuje $|F| = 0$ na Σ. Dle Věty 3.2.17 je pak

$$0 = |F|\,(\Omega) = \int_\Omega \|f - g\|\,d\mu,$$

z čehož tvrzení plyne. □

Věta 3.2.19. *Nechť $f, g\colon \Omega \to X$ jsou μ-měřitelné. Pokud $x^* \circ f = x^* \circ g$ μ-skoro všude pro každé $x^* \in X^*$, platí $f = g$ μ-skoro všude.*

Důkaz. Vezměme $n \in \mathbb{N}$ a položme

$$E_n = \{\omega \in \Omega\colon\ \max \|f(\omega)\|, \|g(\omega)\| \leqslant n\}.$$

Dostali jsme tak neklesající posloupnost měřitelných množin, která splňuje $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Funkce $f\chi_{E_n}$ a $g\chi_{E_n}$ jsou integrovatelné dle Věty 3.2.12. Nechť $E \in \Sigma$ je libovolné.

Pro každé $x^* \in X^*$ platí

$$x^*\left(\int_{E\cap E_n} f\,d\mu\right) = \int_{E\cap E_n} x^* \circ f\,d\mu = \int_{E\cap E_n} x^* \circ g\,d\mu = x^*\left(\int_{E\cap E_n} g\,d\mu\right).$$

Tedy

$$\int_E f\chi_{E_n}\,d\mu = \int_{E\cap E_n} f\,d\mu = \int_{E\cap E_n} g\,d\mu = \int_E g\chi_{E_n}\,d\mu.$$

Podle Věty 3.2.18 máme $f\chi_{E_n} = g\chi_{E_n}$ μ-skoro všude. Tedy $f = g$ μ-skoro všude. □

Věta 3.2.20. *Nechť $f\colon \Omega \to X$ je integrovatelná. Pak pro každé $E \in \Sigma$ kladné míry platí*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu \in \overline{\mathrm{co}}(f(E)).$$

Důkaz. Předpokládejme, že závěr neplatí, tj. $x = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}}(f(E))$. Díky Větě 3.1.60 existuje $x^* \in X^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{Re} x^*(x) < \alpha \leqslant \operatorname{Re} x^*(f(\omega)), \quad \omega \in E.$$

Pak máme

$$\alpha > \operatorname{Re} x^*(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E (x^* \circ f) \, d\mu \right) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E (\operatorname{Re} x^* f(\omega)) \, d\mu \geqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E \alpha \, d\mu = \alpha.$$

Tento spor zakončuje důkaz. □

Příklad 3.2.21. Nechť $\Omega = [-\pi, \pi]$ uvažovaný s Lebesgueovou mírou λ, $X = c_0$ a $\varphi \in L^1([-\pi, \pi])$. Nechť $f \colon [-\pi, \pi] \to c_0$ je definovaná jako

$$f(t)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak f je bochnerovsky integrovatelná funkce a $\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 0$.

Důkaz. Krok 1. Ukážeme nejprve, že $f(t) \in c_0$ pro každé $t \in [0, 1]$. Vzhledem k tomu, že toto je zjevné pro $t = 0$, můžeme bez újmu na obecnosti uvažovat $t \in [-\pi, \pi] \backslash \{t\}$. Pro takovéto pevné t definuje formule

$$(T\varphi)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

zobrazení z $L^1([-\pi, \pi])$ do ℓ^∞. Ověříme, že $\operatorname{Rng} T \subset c_0$. Je-li totiž $\varphi \in \mathscr{D}((-\pi, \pi))$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned} |T\varphi(n)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx) \, dx \right| = \left| \frac{-1}{nt} \left[\varphi(x) \cos(ntx) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{nt} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x) \cos(ntx) \, dx \right| \\ &\leqslant \frac{1}{nt} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \varphi'(x) \right| \, dx. \end{aligned}$$

Tedy $T(\mathscr{D}((-\pi, \pi)) \subset c_0$. Jelikož $\mathscr{D}((-\pi, \pi))$ je hustý v $L^1([-\pi, \pi])$, platí $\operatorname{Rng} T \subset c_0$.

Krok 2. V tomto kroku ověříme slabou měřitelnost f. Nechť tedy $a \in \ell^1$ je libovolné a ψ_a je prvek $(c_0)^*$ jemu odpovídající. Pak pro každé $t \in [-\pi, \pi]$ platí díky odhadu

$$\left| \varphi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ntx) \right) \right| \leqslant |\varphi(x)| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

rovnost

$$\begin{aligned} \psi_a(f(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(t)(n) a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx) \, dx \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ntx) \right) \, dx. \end{aligned}$$

Jelikož je funkce

$$t \mapsto \varphi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ntx) \right)$$

spojitá pro každé $x \in [-\pi, \pi]$, je i funkce $t \mapsto \psi_a(f(t))$ spojitá na $[-\pi, \pi]$. Jest tedy λ-měřitelná.

Krok 2. Pro každé $t \in [-\pi, \pi]$ a $n \in \mathbb{N}$ máme nerovnost

$$|f(t)(n)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)| \, dx = \|\varphi\|_{L^1([0,1])},$$

což znamená, že funkce $t \mapsto \|f(y)\|_{c_0}$ je λ-integrovatelná.

Integrál $\int_{[-\pi,\pi]} f \, d\lambda$ nyní vypočteme. Vezmeme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a bázový vektor $e_n \in \ell^1$. Pak

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi,\pi]} f \, d\lambda \right)(n) &= \psi_{e_n} \left(\int_{-\pi,\pi]} f \, d\lambda \right) = \int_{[-\pi,\pi]} f(t)(n) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx) \, dx \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ntx) \, dt \right) dx. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ntx)\,dt = \begin{cases} \left[\frac{-\cos(ntx)}{nx}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0, & x \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dostáváme

$$\left(\int_{-\pi,\pi]} f\,d\lambda\right)(n) = 0.$$

Proto platí $\int_{[-\pi,\pi]} f\,d\lambda = 0$. □

Příklad 3.2.22. Nechť $\Omega = [0,1]$ s Lebesgueovou mírou λ a nechť $\varphi \in L^\infty([0,1])$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Funkce $\Phi(y) = \int_0^y \varphi(x)\,dx$, $y \in [0,1]$, je absolutně spojitá funkce na $[0,1]$ a funkce $y \mapsto \frac{1}{y}\Phi(y)$, $y \in (0,1)$, je spojitá omezená funkce.

(b) Nechť $X = C([0,1])$. Pak funkce $f\colon [0,1] \to X$ definovaná jako

$$f(t)(x) = \int_0^x \varphi(ts)\,ds, \quad x \in [0,1], t \in [0,1],$$

je integrovatelná na $[0,1]$ a

$$\left(\int_{[0,1]} f\,d\lambda\right)(x) = \int_0^x \frac{1}{y}\Phi(y)\,dy, \quad x \in [0,1]. \tag{3.20}$$

(c) Nechť $Y = L^p([0,1])$ pro nějaké $p \in [1,\infty]$ a funkce $f\colon [0,]1 \to Y$ je definována jako v (b). Pak f je integrovatelná a platí (3.20).

Důkaz. (a) Jelikož je $\varphi \in L^1([0,1])$, je Φ absolutně spojitá na $[0,1]$. Z Lebesgueovy věty odvodíme, že funkce $y \mapsto \frac{1}{y}\Phi(y)$ je spojitá v každém bodě intervalu $(0,1]$. Dále

$$\limsup_{y\to 0_+} \frac{1}{y}\Phi(y) \leqslant \limsup_{y\to 0_+} \frac{1}{y}\int_0^y |\varphi(x)|\,dx \leqslant \|\varphi\|_\infty$$

a podobně $\liminf_{y\to 0_+} \frac{1}{y}\Phi(y) \geqslant -\|\varphi\|_\infty$. Tedy je funkce $y \mapsto \frac{1}{y}\Phi(y)$ omezená na $(0,1)$.

(b) Nejprve ověříme, že $f(t) \in X$ pro každé $t \in [0,1]$. To ale plyne z odhadu

$$|f(t)(x_2) - f(t)(x_1)| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} |\varphi(ts)|\,ds \leqslant \|\varphi\|_\infty (x_2 - x_1)$$

platného pro každé body $x_1 < x_2$ z intervalu $[0,1]$.

Nyní ověříme slabou měřitelnost f. Nechť tedy $\mu \in M([0,1])$ je libovolná Radonova míra a ψ_μ je prvek X^* jí příslušející. Pak

$$\begin{aligned}(\psi_\mu \circ f)(t) &= \int_{[0,1]} f(t)(x)\,d\mu(x) = \int_{[0,1]} \left(\int_0^x \varphi(ts)\,ds\right) d\mu(x) \\ &= \int_{[0,1]} \frac{1}{t}\left(\int_0^{tx} \varphi(s)\,ds\right) d\mu(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{t}\Phi(tx)\,d\mu(x) \\ &= \frac{1}{t}\int_{[0,1]} \Phi(tx)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Jelikož je Φ omezená spojitá funkce, je funkce $t \mapsto \psi_\mu(f(t))$ spojitá na $(0,1)$. Jest tedy λ-měřitelná.

Protože je X separabilní prostor, je f měřitelná. Jelikož máme

$$\|f(t)\|_X = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \int_0^x \|\varphi\|_\infty\,dx \leqslant \|\varphi\|_\infty,$$

je funkce $t \mapsto \|f(t)\|_X$ λ-integrovatelná na $[0,1]$. Proto je f bochnerovsky integrovatelná.

Uvažujme nyní Diracovu míru ε_x, kde $x \in [0,1]$ je jakékoliv. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\psi_{\varepsilon_x}\left(\int_{[0,1]} f\,d\lambda\right) &= \int_{[0,1]} \psi_{\varepsilon_x}(f(t))\,d\lambda(t) = \int_{[0,1]} f(t)(x)\,d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_0^x \varphi(ts)\,ds\right) d\lambda(t) = \int_{[0,1]} \frac{1}{t}\left(\int_0^{tx} \varphi(s)\,ds\right) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t}\Phi(tx)\,d\lambda(t) = \int_0^x \frac{x}{s}\Phi(s)\frac{1}{x}\,ds \\ &= \int_0^x \frac{1}{s}\Phi(s)\,ds.\end{aligned}$$

Tím je ověřena formule (3.20).

(c) Nechť nyní $Y = L^p([0,1])$ pro libovolné $p \in [1,\infty]$. Jelikož je však prostor $X = C([0,1])$ spojitě vnořen do Y, přímo z definice Bochnerova integrálu vidíme, že f je integrovatelná a že platí (3.20). $\square$

3.2.3 Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

Definice 3.2.23. Nechť (Ω, Σ, μ) je měřitelný prostor s konečnou, úplnou mírou μ, X je Banachův prostor a $p \in [1,\infty)$. Nechť $f\colon \Omega \to X$ je μ-měřitelná funkce. Řekneme, že f je v $L^p(\mu, X)$, pokud $\omega \mapsto \|f(\omega)\|^p$ je v $L^p(\mu)$.

Funkce f je v $\mathscr{L}^\infty(\Omega, X)$, pokud $\omega \to \|f(\omega)\|$ je v L^∞.

Věta 3.2.24. *(a) Nechť $p \in [1,\infty]$. Pak $L^p(\mu, X)$ s normou $\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ pro $p < \infty$ a $\|f\|_\infty =$ $\operatorname{esssup}\{\omega \mapsto \|f(\omega)\|\}$ pro $p = \infty$ je po ztotožnění funkcí rovající se μ-skoro všude Banachův prostor.*

(b) Prostor $L^1(\mu, X)$ je roven prostoru všech integrovatelných funkcí na Ω.

(c) Platí

$$L^p(\mu, X) \subset L^1(\mu, X), \quad p \in [1,\infty].$$

(d) Je-li H Hilbertův prostor a $p = 2$, je $L^2(\mu, H)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mu,H)} = \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega)\rangle_H \, d\mu(\omega), \quad f, g \in L^2(\mu, H).$$

Důkaz. (a) Pomocí Minkowského nerovnosti a vlastností Lebesgueova integrálu vidíme, že $L^p(\mu, X)$ je normovaný lineární prostor.

Ukážeme, že se jedná o úplné prostory. *Případ $p \in [1,\infty)$* Nechť nejprve $p \in [1,\infty)$. Nechť $\{f_n\}$ je absolutně konvergentní řada v $L^p(\mu, X)$. Položme

$$g_n(\omega) = \|f_n(\omega)\|, \quad \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad g(\omega) = \sum_{n=1}^\infty \|f_n(\omega)\|_X, \quad \omega \in \Omega.$$

Pak g_n, a tedy i g jsou měřitelné funkce a platí

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|g_n\|_{L^p(\mu)} = \sum_{n=1}^\infty \|f\|_{L^p(\mu,X)} < \infty.$$

Tedy g je konečná až na nulovou množinu N. Tedy $\sum_{n=1}^\infty f_n(\omega)$ je absolutně konvergentní řada v X pro $\omega \in N$, a tedy $f(\omega) = \sum_{n=1}^\infty f_n(\omega)$ je dobře definovaná funkce na $\Omega \backslash N$. Dodefinujme ji 0 na N. Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že $\bigcup_{n=1}^\infty f_n(\Omega\backslash N)$ je separabilní množina.

Funkce f je μ-měřitelná. Platí totiž, že

$$f(\Omega\backslash N) \subset \overline{\operatorname{span}}\left(\bigcup_{n=1}^\infty f_n(\Omega\backslash N)\right),$$

a tedy f má esenciálně separabilní obor hodnot. Dále pro $x^* \in X^*$ platí

$$x^*(f(\omega)) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k x^*(f_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega\backslash N,$$

a tedy $x^* \circ f$ je měřitelná. Z Věty 3.2.5 plyne μ-měřitelnost f.

Dále je $f \in L^p(\mu, X)$. Platí totiž

$$\|f\|_{L^p(\mu,X)} \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{L^p(\mu,X)} < \infty.$$

Nakonec pak ověříme, že $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ v $L^p(\mu, X)$, a to pomocí odhadu

$$\left\| f - \sum_{n=1}^k f_n \right\|_{L^p(\mu,X)} = \left\| \sum_{n=k+1}^\infty f_n \right\|_{L^p(\mu,X)} \leqslant \sum_{n=k+1}^\infty \|f_n\|_{L^p(\mu,X)},$$

což ukončuje důkaz pro případ $p \in [1,\infty)$.

Případ $p = \infty$ Je-li $p = \infty$ a $\sum_{n=1}^\infty f_n$ je absolutně konvergentní řada v $L^\infty(\mu, X)$, nechť funkce g_n, $n \in \mathbb{N}$, a g jsou definovány jako výše. Pak jako v předchozí části dostaneme

$$\|g\|_{L^\infty(\mu)} < \infty,$$

a tedy je funkce $f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ dobře definovaná pro μ-skoro všechna $\omega \in \Omega$. Opět ověříme, že f je μ-měřitelná a důkaz dokončíme jako výše.

(b) Tvrzení plyne z Věty 3.2.12.

(c) Je=li $p \in (1, \infty)$, Nechť q je sdružený exponent k p. Pak pro $f \in L^p(\mu, X)$ platí díky Hö lderově nerovnosti

$$\|f\|_{L^1(\mu,X)} = \int_\Omega \|f\| \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega \|f\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega 1^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

a $f \in L^1(\mu, X)$ dle Věty 3.2.12.

Případ $p = \infty$ je zřejmý.

(d) Nechť f, g jsou jednoduché funkce, tj. mají tvar $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ a $g = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{F_j}$. Pak

$$\langle f(\omega), g(\omega) \rangle_H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle x_i, y_j \rangle_H \chi_{E_i}(\omega) \chi_{F_j}(\omega)$$

Tedy funkce $\omega \mapsto \langle f(\omega), g(\omega) \rangle_H$ je měřitelná na Ω.

Nechť $f, g \in L^2(\mu, H)$. Jelikož $f, g \in L^1(\mu, H)$, existují jednoduché funkce f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$, splňující $\int_\Omega \|f - f_n\|_H \, d\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|g - g_n\|_H \, d\mu \to 0$. Pak $f_n \to f$ a $g_n \to g$ μ-skoro všude. Tedy funkce $\omega \mapsto \langle f_n(\omega), g_n(\omega) \rangle_H$ pro skoro všechny $\omega \in \Omega$ splňují

$$\langle f_n(\omega), g_n(\omega) \rangle_H \to \langle f(\omega), g(\omega) \rangle_H .$$

Funkce $\omega \mapsto \langle f(\omega), g(\omega) \rangle_H$ je proto měřitelná na Ω.

Dále platí

$$\begin{aligned} \left| \langle f, g \rangle_{L^2(\mu,H)} \right| &= \left| \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega) \rangle_H \, d\mu(\omega) \right| \leqslant \int_\Omega \left| \langle f(\omega), g(\omega) \rangle_H \right| \, d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega \|f(\omega)\|_H \, \|g(\omega)\|_H \, d\mu(\omega) \\ &\leqslant \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_H^2 \, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \|g(\omega)\|_H^2 \, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\mu,H)} \, \|g\|_{L^2(\mu,H)} . \end{aligned}$$

Tedy zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon L^2(\mu, H) \times L^2(\mu, H) \to \mathbb{F}$ je dobře definováno a vlastnosti požadované definicí skalárního součinu se přímočaře ověří.

Konečně norma prostoru $L^2(\mu, H)$ splňuje

$$\|f\|_{L^2(\mu,H)}^2 = \int_\Omega \|f(\omega)\|_H \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle f(\omega), f(\omega \rangle_H \, d\mu(\omega) = \langle f, g \rangle_{L^2(\mu,H)} .$$

Tím je důkaz dokončen. ☐

Věta 3.2.25. *Nechť $p \in [1, \infty)$ a X Banachův prostor.*

(a) Jednoduché funkce jsou husté v $L^p(\mu, X)$.

(b) Je-li X i $L^p(\mu)$ separabilní, je $L^p(\mu, X)$ také separabilní.

Důkaz. (a) Nechť $f \in L^p(\mu, X)$ je dána.

Krok 1. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \|f(\omega)\| \leqslant n, \\ ), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak f_n jsou μ-měřitelné, $f_n \to f$ a $\|f_n\| \leqslant \|f\|$. Tedy

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\|^p \leqslant (\|f_n(\omega)\| + \|f(\omega)\|)^p \leqslant (2 \|f(\omega)\|)^p , \quad \omega \in \Omega,$$

a $\omega \mapsto \|f(\omega)\|^p$ je v $L^1(\mu)$. Z Lebesgueovy věty tak máme

$$\|f - f_n\|_{L^p(\mu,X)}^p = \int_\Omega \|f(\omega) - f_n(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \to 0.$$

Ukázali jsme tak, že omezené (μ-měřitelné) funkce jsou husté v $L^p(\mu, X)$.

Krok 2. Nechť nyní f je omezená μ-měřitelná funkce. Nechť $M > 0$ splňuje $\|f(\omega)\| < M$ pro $\omega \in \Omega$. Nalezneme jednoduché funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, splňující $\int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu \to 0$. Modifikujeme funkce f_n na jednoduché funkce g_n následujícím způsobem:

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \|f(\omega)\| < M, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak g_n jsou též omezené M a $g_n \to f$ μ-skoro všude. Jelikož $\|f(\omega) - g_n(\omega)\|^p \leqslant (2M)^p$, z Lebesgueovy věty dostáváme $\int_\Omega \|f - g_n\|^p \to 0$.

(b) Předpokládejme nyní, že $L^p(\mu)$ je separabilní. Nechť q je sdružený exponent k q. Pokud $p = 1$, interpretujeme $\frac{p}{q}$ jako 0. Máme $\{\chi_E : E \in \Sigma\} \subset L^p(\mu)$, a tedy existuje spočetná množina $\Gamma \subset \Sigma$ taková, že $\{\chi_E : E \in \Gamma\}$ je hustá v $\{\chi_E : E \in \Sigma\}$ v normě prostoru $L^p(\mu)$. Nechť $D \subset X$ je spočetná, hustá podmnožina X.

Pak je systém

$$\{h : \Omega \to X : h = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}, n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \in \Gamma, x_1, \dots, x_n \in D\}$$

spočetný a hustý v $L^p(\mu, X)$. Abychom toto ověřili, stačí dle (a) ukázat, že tento systém je hustý v jednoduchých funkcích. Nechť $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$ je daná jednoduché funkce. Nechť $M > 1$ splňuje $\max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \leqslant M$.

Nalezneme prvky $y_1, \dots, y_n \in D$ a $F_1, \dots, F_n \in \Gamma$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n (\mu(\Omega) \|x_i - y_i\|^p) < \frac{\varepsilon}{n^{1+\frac{p}{q}}}, \qquad \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\chi_{E_i} - \chi_{F_i}|^p \, d\mu < \frac{\varepsilon}{M^p n^{1+\frac{p}{q}}}. \tag{3.21}$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí díky (3.21) odhad

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\|^p \, d\mu &= \int_{E_i \setminus F_i} \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\|^p \, d\mu + \int_{F_i \setminus E_i} \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\|^p \, d\mu \\
&\quad + \int_{E_i \cap F_i} \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\|^p \, d\mu \\
&\leqslant (2M)^p \int_{E_i \setminus F_i} 1 \, d\mu + (2M)^p \int_{F_i \setminus E_i} 1 \, d\mu + \int_\Omega \|x_i - y_i\|^p \, d\mu \\
&= (2M)^p \int_{E_i \setminus F_i} |\chi_{E_i} - \chi_{F_i}|^p \, d\mu + (2M)^p \int_{F_i \setminus E_i} |\chi_{E_i} - \chi_{F_i}|^p \, d\mu + \int_\Omega \|x_i - y_i\|^p \, d\mu \quad (3.22) \\
&\leqslant 2(2M)^p \int_\Omega |\chi_{E_i} - \chi_{F_i}|^p \, d\mu + \frac{\varepsilon}{n^{1+\frac{p}{q}}} \\
&\leqslant \varepsilon \left(\frac{2(2M)^p}{M^p n^{1+\frac{p}{q}}} + \frac{1}{n^{1+\frac{p}{q}}} \right) \\
&= \varepsilon \left(\frac{2^{p+1} + 1}{n^{1+\frac{p}{q}}} \right).
\end{aligned}$$

Položme

$$g = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{F_i}.$$

Dostáváme pak použitím (3.22) odhad

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^p_{L^p(\mu, X)} &= \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n (x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}) \right\|^p d\mu \leqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\| \right)^p d\mu \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\|^p \right) \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^{\frac{p}{q}} d\mu \\
&= n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \|x_i\chi_{E_i} - y_i\chi_{F_i}\|^p \, d\mu \\
&\leqslant \varepsilon n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2^{p+1} + 1}{n^{1+\frac{p}{q}}} \right) \\
&= \varepsilon(2^{p+1} + 1).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

3.3 Banachovy algebry

Úmluva 3.3.1. *V této části budeme uvažovat všechny vektorové prostory nad $\mathbb{C}$.*

3.3.1 Základní vlastnosti

Definice 3.3.2. (a) Nechť A je vektorový prostor, na kterém je definována operace násobení $\cdot A \times A \to A$, která je

- asociativní, tj. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $ab, c \in A$,
- distributivní, tj. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, $a, b, c \in A$,
- a platí $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$, $a, b \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Pak A se nazývá algebrou. Pokud násobení splňuje $a \cdot b = b \cdot a$, $a, b \in A$, je A komutativní algebra.

(b) Existuje-li prvek $e \in A$ splňující $a = ea$ pro každé $a \in A$, nazýváme tenot prvek levou jednotkou. Analogicky se definuje prvaá jednotka.

Existuje-li prvek $e \in A$ splňující $a \cdot e = e \cdot a = a$, $a \in A$, nazývá se tento prvek jednotkou.

(c) Normovaná algebra A je algebra s normou $\|\cdot\|$, se kterou je A normovaný lineární prostor a která splňuje

$$\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \, \|b\| \,, \quad a, b \in A.$$

Je-li A s touto normou úplná, nazývý se A Banachovou algebrou.

Úmluva 3.3.3. *V dalším budeme znak $\cdot$ pro násobení vynechávat.*

Tvrzení 3.3.4. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra.*

(a) Platí $0x = x0 = 0$, $x \in A$.

(b) Má-li A levou i pravou jednotku, pak se rovnají a A má jednotku.

(c) Má-li A jednotku e a $A \neq \{0\}$, pak

- *e je jednoznačně určena,*
- *platí $\|e\| \geqslant 1$.*

(d) Násobení $\cdot A \times A \to A$ je spojité.

Důkaz. (a) Tvrzení plyne z rovností $0x = (1 - 1)x = 1x - 1x = x - x = 0$, $x \in A$.

(b) Je-li e_1 levá a e_2 pravá jednotka, platí $e_1 = e_1 e_2 = e_2$. Zjevně je pak $e = e_1$ jednotka v A.

(c) Jsou-li e_1, e_2 dvě různé jednotky, platí $e_1 = e_1 e_2 = e_2$. Dále platí $\|e\| = \left\|e^2\right\| \leqslant \|e\| \, \|e\|$. Tedy buď $\|e\| = 0$, tj. $e = 0$, což ale dle (a) implikuje $A = \{0\}$, anebo $\|e\| \geqslant 1$.

(d) Pokud $x_n \to x$ a $y_n \to y$, je posloupnost $\{x_n\}$ omezená, a tak dostáváme

$$\|x_n y_n - xy\| \leqslant \|x_n y_n - x_n y\| + \|x_n y - xy\| \leqslant \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0.$$

Tím je spojitost násobení ověřena. □

Úmluva 3.3.5. *V dalším textu budeme uvažovat pouze netriviální algebry A, tj. algebry splňující $A \neq \{0\}$.*

Tvrzení 3.3.6. *Nechť A je algebra. Položme $A_e = A \oplus_1 \mathbb{C}$, kde definujeme násobení pomocí vzorce*

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha, \beta), \quad a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

(a) Pak A_e je algebra s jednotkou $(0, 1)$ a A je její podalgebra.

(b) Je-li A s normou $\|\cdot\|$ normovaná algebra, je A_e s normou

$$\|(a, \alpha)\|_{A_e} = \|a\|_A + |\alpha| \,, \quad (a, \alpha) \in A_e,$$

též normovaná algebra.

(c) Je-li A s touto normou Banachova algebra, je i A_e Banachova algebra.

Důkaz. Axiomy algebry se pro A_e snadno ověří z definice, stejně jako fakt, že A_e je normovaný lineární prostor (jedná se o součet normovaných linárních prostorů A a $\mathbb{C}$ se součtovou normou, viz Věta 1.1.20(b)). Úplnost A_e v případě úplnosti A také plyne z Věty 1.1.20(b).

Dále

$$(0, 1)(a, \alpha) = (a, \alpha) = (a, \alpha)(0, 1), \quad a \in A, \alpha \in \mathbb{C},$$

a tedy $(0, 1)$ je jednotka.

Nerovnost pro normu pak plyne z výpočtu

$$\begin{aligned} \|(a, \alpha)(b, \beta)\| &= \|(ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)\| = \|ab + \beta a + \alpha b\| + |\alpha\beta| \\ &\leqslant \|ab\| + |\beta| \, \|a\| + |\alpha| \, \|b\| + |\alpha| \, |\beta| \\ &\leqslant \|a\| \, \|b\| + |\beta| \, \|a\| + |\alpha| \, \|b\| + |\alpha| \, |\beta| \\ &= (\|a\| + |\alpha|)(\|b\| + |\beta|) \\ &= \|(a, \alpha)(b, \beta)\| \end{aligned}$$

platného pro každou dvojici $(a, \alpha), (b, \beta) \in A_e$. □

Tvrzení 3.3.7. *Algebra A je normovaná algebra s jednotkou e a normou $\|\cdot\|$ taková, ža $(A, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor s parciálně spojitým násobením. Pak existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ na A taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je Banachova algebra a $|||e||| = 1$.*

Důkaz. Krok 1. Definujme zobrazení $I\colon A \to L(A)$, kde pro $x \in A$ je $I_x \in L(A)$ definován jako

$$I_x(a) = xa, \quad a \in A.$$

Pak I je dobře definované, neboť

$$I_x(a + b) = x(a + b) = xa + xb = I_x(a) + I_x(b) \quad \text{a} \quad I_x(\alpha a) = x(\alpha a) = \alpha(xa) = \alpha I_x(a)$$

a $I_x\colon A \to A$ je spojité pro každé $x \in A$ díky spojitosti násobení zprava.

Dále je I homomorfizmus (tj. zachovává algebraické operace), jelikož

$$\begin{aligned} &I_{x+y}(a) = (x + y)a = xa + ya = I_x(a) + I_y(a), \quad I_{\alpha x}(a) = (\alpha x)a = \alpha(xa) = \alpha I_x(a) \quad \text{a} \\ &I_{xy}(a) = (xy)(a) = x(ya) = I_x(ya) = I_x(I_y(a)). \end{aligned}$$

Krok 2. Množina $\widetilde{A} = \{I_x : x \in A\}$ je tedy subalgebra A. Navíc vidíme z odhadu

$$\|x\|_A = \|xe\|_A = \|I_x e\|_A \leqslant \|I_x\|_{L(A)} \|e\|_A ,$$

že I je zdola omezený operátor, a tedy je prostý a má spojitou inverzi $I^{-1}\colon \widetilde{A} \to A$. (To plyne z odhadu

$$\left\|I^{-1}(I_x)\right\|_A = \|x\|_A \leqslant \|I_x\|_{L(A)} \|e\|_A .)$$

Krok 3. Ukážeme, že $\widetilde{A}$ je uzavřená podalgebra A. K tomuto účelu vezměme $\{x_n\}$ v A a $T \in L(A)$ takové, že $I_{x_n} \to T$. Pak pro každé $y \in A$ platí díky předpokladu spojitosti násobení zleva

$$Ty = \lim_{n\to\infty} I_{x_n}(y) = \lim_{n\to\infty} x_n y = \lim_{n\to\infty} (x_n e)y = \lim_{n\to\infty} I_{x_n}(e)y = (Te)(y) = I_{Te}(y).$$

(Předposlední rovnost platí díky tomu, že $I_{x_n}(e) \to Te$, a tedy $(I_{x_n}(e))y \to (Te)y$.) Tedy $Ty = I_{Te}$ a $T \in \widetilde{A}$.

Krok 4. Zobrazení I^{-1} je tak spojitá lineární bijekce Banachova prostoru $\widetilde{A}$ na Banachův prostor A, a tedy se jedná o izomorfizmus, viz Věta 1.3.7. Položme nyní

$$|||x||| = \|I_x\|_{L(A)} , \quad x \in A.$$

Pak $(A, |||\cdot|||)$ je Banachův prostor a díky Lemmatu 1.1.30 se jedná dokonce o Banachovu algebru. Jelikož je I izomorfizmus, je tato nová norma ekvivalentní s normou původní. Důkaz zakončíme pozorováním

$$|||e||| = \|I_e\|_{L(A)} = \|\mathrm{id}\|_{L(A)} = 1.$$

(Zde id značí identický operátor.) □

Úmluva 3.3.8. *V dalším textu budeme vždy předpokládat, že má-li Banachova algebra $(A, \|\cdot\|))$ jednotku e, platí $\|e\| = 1$.*

Příklad 3.3.9. (a) Je-li K kompaktní topologický prostor, je algebra $C(K)$ všech spojitých funkcí na K s bodovým násobením a supremovou normou komutativní Banachova algebra. Konstantní funkce 1 je pak jednotka této algebry.

(b) Nechť K je lokálně kompaktní topologický prostor. O spojité funkci f na K řekneme, že má 0 v nekonečnu, pokud platí

$$\forall\varepsilon > 0\colon \text{množina } \{x \in K\colon\ |f(x)| \geqslant \varepsilon\} \text{ je kompaktní.}$$

Prostor

$$C_0(K) = \{f\colon K \to \mathbb{C}\colon f \text{ spojité a má 0 v nekonečnu}\}$$

se supremovou normou a bodovým násobením je komutativní Banachova algebra. Tato algebra má jednotku právě tehdy, když K je kompaktní.

(Na prostor $C_0(K)$ se můžeme dívat následovně. Uvažujme αK jednobodovou kompaktifikaci K, kde $\{\infty\}$ značí kompaktifikující bod. Pak

$$C_0(K) = \{f \in C(\alpha K)\colon f(\infty) = 0\}.)$$

(c) Označíme-li jako $C_c(K)$ systém všech funkcí z $C_0(K)$, které mají kompaktní nosič, obdržíme normovanou algebru, která je hustá v $C_0(K)$.

Důkaz. (a), (b) Vše je zřejmé kromě tvrzení o jednotce. Nechť K je lokálně kompaktní prostor a Nechť $C_0(K)$ má jednotku e. Ukážeme, že pak $e(x) = 1$ pro každé $x \in K$.

Nechť tedy $x \in K$ je dáno. Nalezneme otevřené okolí U bodu x, jehož uzávěr je kompaktní. Nechť G je libovolná otevřená nadmnožina $\overline{U}$. Dle Urysohnova lemmatu **??** existuje spojitá funkce $f\colon K \to \mathbb{C}$ taková, že $f = 1$ na U a $f = 0$ na $K\backslash G$. Pak platí

$$1 = f(x) = f(x)e(x) = e(x).$$

Jelikož je funkce $e = 1$ prvkem prostoru $C_0(K)$ pouze tehdy, když je K kompaktní, je důkaz hotov.

(c) Dokážeme hustotu $C_c(K)$ v $C_0(K)$. K tomuto účelu vezměme $f \in C_0(K)$ a $\varepsilon > 0$. Pak $L = \{x \in K\colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ je kompaktní podmnožina K, a tedy dle Lemmatu 9.1.42 existuje $g \in C_c(K)$ splňující $\operatorname{Rng} g \subset [0, 1]$ a $g = 1$ na L. Pak $fg \in C_c(K)$ a $\|fg - f\| \leqslant \varepsilon$. □

Lemma 3.3.10. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $E \in L(X)$ je operátor komutující se všemi prvky $F(X)$. Pak $E \in \operatorname{span} I$.*

Důkaz. Pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$ uvažujme $F_{x,x^*} \in F(X)$ definovaný jako

$$F_{x,x^*}(y) = x^*(y)x, \quad y \in X.$$

Předpokládejme, že $E \neq 0$ a $y \in X\backslash \operatorname{Ker} E$. Pak platí

$$\forall x \in X \ \forall x^* \in X^*: x^*(y)Ex = EF_{x,x^*}y = F_{x,x^*}Ey = x^*(Ey)x.$$

Nechť $x \in X\backslash\{0\}$. Jelikož $Ey \neq 0$, z Hahnovy-Banachovy věty 1.2.6 plyne, že Ex je nenulový násobek x. Označme tento skalár jako α_x.

Pak platí

$$\forall x, y \in X\backslash\{0\} \ \forall x^* \in X^*: x^*(y)\alpha_x x = x^*(y)Ex = x^*(Ey)x = x^*(y)\alpha_y x.$$

Tedy

$$\forall x, y \in X\backslash\{0\} \ \forall x^* \in X^*: x^*(y)(\alpha_x - \alpha_y)x = 0.$$

Z tohoto faktu dostáváme, že $\alpha_x = \alpha_y$ pro každou dvojici $x, y \in X\backslash\{0\}$. Označíme-li tuto společnou hodnotu α, máme $E = \alpha I$. □

Příklad 3.3.11. Nechť X je Banachův prostor dimenze alespň 2.

(a) Nechť $A = L(X)$, kde násobení je skládání a norma je operátorová. Pak A je nekomutativní Banachova algebra s jednotkou.

(b) Je-li $A = K(X) = \{K \in L(X)\colon K \text{ kompaktní}\}$, dostáváme uzavřenou, nekomutativní podalgebru $L(X)$. V tomto případě má A jednotku právě tehdy, když $\dim X < \infty$.

(c) Je-li $A = F(X)$ prostor všech konečně dimenzionálních operátorů na X, je A normovaná, nekomutativní podalgebra $K(X)$. V tomto případě má též A jednotku právě tehdy, když $\dim X < \infty$. Algebra A dále nemusí být uzavřená, příkladem je třeba $F(\ell^2)$.

Důkaz. (a) Jediné, co je třeba ověřit, je nekomutativita $L(X)$. Nechť $Y = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, kde e_1, e_2 jsou dva lineárně nezávislé vektory v X. Podle Tvrzení 1.2.9 existuje spojitá projekce $P\colon X \to Y$. Jelikož algebra $L(Y) = M_2(\mathbb{C})$ komutativní není, existují dva navzájem nekomutující operátory $S_1, S_2 \in L(Y)$. Pak $T_i = S_i \circ P$, $i = 1, 2$, jsou prvky $L(X)$, které spolu nekomutují.

(b) Uzavřenost $K(X)$ v $L(X)$ plyne z Věty 1.4.17(c). Nekomutativitu $K(X)$ odvodíme stejně jako v (a).

Je-li X konečné dimenze, má $K(X) = L(X)$ jednotku. K důkazu obrácené implikace použijeme Lemma 3.3.10. Je-li totiž $E \in K(X)$ jednotka, komutuje E se všemi operátory z $F(X)$. Tedy $E = I$, což dle Věty 1.4.27(c) implikuje $\dim X < \infty$.

(c) Tvrzení se dokáže podobně jako v (b). Na prostoru ℓ^2 uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ operátor $F_n x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} x_i e_i$, $x = \{x_i\} \in \ell^2$. Pak F_n leží v $F(X)$, ale jejich limita $Kx = \sum_{i=1} \frac{1}{i^2} x_i e_i$, $x \in \ell^2$, nikoliv. □

Příklad 3.3.12. Nechť G je lokálně kompaktní topologická komutativní grupa (tj. G má topologii τ, ve které jsou operace $\cdot\colon G \times G \to G$ a $^{-1}\colon G \to G$ spojité). Pak existuje právě jedna (až na konstantu) translačně invariantní Radonova míra μ na G.

(Nezáporná míra μ je Radonova, pokud je úplná, borelovské množiny jsou μ-měřitelné a platí

(1) $\mu(K) < \infty$ pro každý kompakt $K \subset G$,

(2) $\mu(E) = \inf\{\mu(U)\colon U \supset E \text{ otevřená}\}$, E je μ-měřitelná,

(3) $\mu(E) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset E \text{ kompaktní}\}$, $E \subset G$ otevřená nebo $E \subset G$ splňující $\mu(E) < \infty$.

Je-li prostor G σ-kompaktní, vlastnost (3) platí pro každou μ-měřitelnou množinu.)

(a) Uvažujme prostor $L^1(G)$ daný touto mírou. Definujme na něm násobení pomocí operace konvoluce, tj.

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(x-y)\,d\mu(y), \quad f, g \in L^1(G).$$

Prostor $L^1(G)$ je pak komutativní Banachova algebra, která má jednotku právě tehdy, když G je diskrétní.

(b) Nechť $M(G)$ značí prostor všech komplexních Radonových měr, tj. měr, jejichž totální variace je Radonova míra na G. Operaci násobení definujeme též pomocí konvoluce, přesněji

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \times \nu)\left(\{(x,y) \in G \times G \colon x + y \in B\}\right), \quad B \subset G \text{ borelovská},$$

anebo ekvivalentně lze tuto operaci popsat pomocí Rieszovy věty **??** vzorcem

$$(\mu * \nu)(g) = \int_G \int_G g(x+y)\,d\mu(x)\,d\mu(y), \quad g \in C_c(G).$$

Prostor $M(G)$ je pak komutativní banachova algebra s jednotkou ε_e (zde ε_e značí Dirakovu míru v jednotce e).

(c) Příklady grup tohoto typu jsou:

(1) konečná grupa $(\mathbb{Z}_n, +)$ s počítací mírou a diskrétní topologií,

(2) $(\mathbb{R}, +)$ s obvyklou topologií a Lebesgueovou mírou,

(3) $(\mathbb{T}, \cdot)$ s obvyklou toologií a Lebesgueovou mírou μ, tj. mírou danou $\int_{\mathbb{T}} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt$, $f \in C(\mathbb{T})$,

(4) $(\mathbb{Z}, +)$ s diskrétní toologií a počítací mírou,

(5) $((0,\infty), \cdot)$ s obvyklou topologií a Lebesgueovou mírou,

(6) $2^{\mathbb{N}} = \Pi_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ se součinovými operacemi a součinovou mírou.

Příklad 3.3.13. (a) Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní podmnožina. Pak $A(K) = \{f \in C(K) \colon f \in \operatorname{Hol}(\operatorname{Int} K)\}$ s bodovým násobením a supremovou normou je komutativní Banachova algebra. Speciálním případem je $A(\overline{\mathbb{D}})$, kde $K = \overline{\mathbb{D}}$ a $\mathbb{D}$ je otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{C}$.

(b) Prostor $H^\infty(\mathbb{D})$ všech omezených holomorfních funkcí na $\mathbb{D}$ s bodovým násobením a supremovou normou je komutativní Banachova algebra.

Příklad 3.3.14. Nechť $A = AC(\mathbb{T})$ je prostor všech spojitých funkcí f na $\mathbb{T}$, jejichž Fourierovy koeficienty $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jsou v $\ell^1(\mathbb{Z})$. (Připomeňme, že

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}\mathbb{Z}.)$$

Pak je A s bodovým násobením a normou $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ komutativní Banachova algebra.

Příklady 3.3.15. (a) Nechť $A = C([0,1])$ a $B = \{f \in A \colon f(0) = 0\}$. Pak A má jednotku a B je uzavřená podalgebra A bez jednotky.

(b) Nechť $A = C([0,1] \cup [2,3])$ a $B = \{f \in A \colon \operatorname{spt} f \subset [0,1]\}$. Pak A i B mají jednotku, ale jsou různé.

Důkaz. (a) Nechť $g \in B$ splňuje $gf = f$ pro každou $f \in B$. Nalezneme posloupnost $\{f_n\}$ v B splňující $f_n \to \chi_{(0,1]}$. Pak

$$\chi_{(0,1]} = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} gf_n = g\chi_{(0,1]}.$$

Tedy $g = 1$ na $(0,1]$, což je spor s faktem $g \in B$.

(b) Funkce $\chi_{[0,1]}$ je zjevně jednotka B. ☐

Definice 3.3.16. Nechť A je algebra s jednotkou e a $x \in A$.

- Prvek $a \in A$ nazveme levou inverzí k x, pokud $ax = e$. Podobně je $b \in A$ pravou inverzí k x, platí-li $e = xb$.
- Prvek $c \in A$ nazveme inverzí k x, pokud $cx = xc = e$.

Lemma 3.3.17. *Nechť A je algebra s jednotkou e a $x \in A$. Má-li x levou i pravou inverzi, pak se rovnají. Tedy inverze k x je jednoznačně určena.*

Důkaz. Je-li a levá inverze k x a b pravá, platí

$$a = ae = a(xb) = (ax)b = eb = b.$$

Pokud $a, b \in A$ jsou inverze k x, dle předchozího se rovnají. ☐

Definice 3.3.18. (a) Nechť A je algebra s jednotkou e. Má-li $x \in A$ inverzi (tj. je invertovatelný), je tato jednoznačně určena a označíme je x^{-1}. Položme $G(A) = \{x \in G\colon x^{-1} \text{ existuje}\}$.

Pro $x \in A$ dále definujme spectrum x jako

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda e - x \notin G(A)\}$$

a spektrální poloměr jako

$$r_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dále definujeme rezolventní množinu x jako

$$\rho_A(x) = \mathbb{C}\backslash\sigma(x).$$

Na $\rho_A(x)$ pak definujeme rezolventní funkci jako

$$\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

(b) Nemá-li A jednotku, definujeme pro $x \in A$ spektrum a rezolventní množinu jako $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ a $\rho_A(x) = \rho_{A_e}(x)$.

Úmluva 3.3.19. *Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme v dalším textu psát místo $\sigma_A(x)$ pouze $\sigma(x)$ (a podobně s $r(x)$ a $\rho(x)$).*

Tvrzení 3.3.20. *Nechť A je algebra a jednotkou u a B její podalgebra neobsahující u. Nechť $C = \operatorname{span}(B \cup \{u\})$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení $\phi\colon C \to B_e$ definované jako

$$\phi(x + \lambda u) = (x, \lambda), \quad x \in B, \lambda \in \mathbb{C},$$

je algebraický izomorfizmus C a B_e. Dále pro každé $x \in B$ platí $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_C(x)$.

(b) Pokud B je ideál v A, tj. $ab \in B$ a $ba \in B$ kdykoliv $a \in A$ a $b \in B$, pak $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$.

Důkaz. (a) Linearita a multiplikativita ϕ se snadno ověří. Tedy $\phi(G(C)) = G(B_e)$, z čehož druhá část tvrzení ihned plyne.

(b) Dle (a) stačí ukázat, že $\sigma_C(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$. Zjevně $\sigma_A(x) \subset \sigma_C(x)$. Nechť $\lambda \in \rho_A(x)$ je dáno, tedy existuje $y \in A$ splňující $y(\lambda u - x) = (\lambda u - x)y = u$. Pokud $\lambda = 0$, platí $u = yx \in B$, což je spor. Tedy $\lambda \neq 0$. Položme $z = yx$, což je prvek B. Pak

$$u = \lambda y - yx = \lambda - z \implies y = \frac{u}{\lambda} - \frac{z}{\lambda} \in B,$$

a tedy y je inverze k $\lambda u - x$ v C. □

Příklady 3.3.21. (a) Nechť $A = C(K)$, kde K je kompaktní topologický prostor. Pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng} f$, $f \in A$.

(b) Nechť $A = C(K)$, kde K je lokálně kompaktní nekompaktní topologický prostor. Pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng} f \cup \{0\}$.

(c) Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní a $A = A(K)$. Pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng}(f)$, $f \in A$.

(d) Nechť X je nekonečně dimenzionální Banachův prostor. Pak $\sigma_{K(X)}(T) = \sigma_{L(X)}(T)$ pro každé $T \in K(X)$.

Důkaz. (a) Pokud $\lambda \in \mathbb{C}\backslash \operatorname{Rng} f$, je $(\lambda - f)^{-1}$ inverze k $\lambda - f$. Je-li $\lambda \in \operatorname{Rng} f$, pak žádné $g \in A$ nesplňuje $g(\lambda - f) = 1$ v bodě, kde f nabývá hodnoty λ.

Tvrzení (b) a (c) se dokáží obdobně. (V důkazu (b) se využije faktu, že $0 \in \overline{\operatorname{Rng} f}$.)

(d) Algebra $K(X)$ je ideál v $L(X)$ a nemá jednotku. Dle Tvrzení 3.3.20(b) tedy pro $T \in K(X)$ platí

$$\sigma_{K(X)}(T) = \sigma_{(K(X))_e} = \sigma_{L(X)}(T).$$

□

Tvrzení 3.3.22. *(a) Nechť A je algebra s jednotkou e.*

(a1) Množina $G(A)$ je s operacemi $\cdot\colon G(A) \times G(A) \to G(A)$ a ${}^{-1}\colon G(A) \to G(A)$ grupa a pro každé $x, y \in G(A)$ platí $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $(x^{-1})^{-1} = x$.

(a2) Jsou-li $x_1, \dots, x_n$ navzájem komutující prvky A, prvek $x_1 \cdots x_n$ je invertovatelný právě tehdy, když $x_1, \dots, x_n \in G(A)$.

(a3) Pro každé $x \in A$ platí $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$.

(a4) Pro každé $x \in A$ a $\mu \in \mathbb{C}$ a $\nu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ platí $\sigma(\mu e - \nu x) = \{\mu\} + \nu\sigma(x)$.

(b) Pokud algebra A nemá jednotku, pro každé $x \in A$ platí $0 \in \sigma(x)$.

Důkaz. (a1) Pokud $x, y \in G(A)$, pak

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}y = e = xx^{-1} = x(yy^{-1})x = (xy)(y^{-1}x^{-1}$$

a

$$x^{-1}x = e = xx^{-1},$$

z čehož tvrzení v (a1) plynou.

(a2) Implikace zprava doleva plyne z (a1). Pokud má $x_1 \cdots x_n$ inverzi y, platí

$$(yx_2 \cdots x_n)x_1 = y(x_1 \cdots x_n) = e = (x_1 \cdots x_n)y = x_1(x_2 \cdots x_n y).$$

Prvek x_1 tak má levou i pravou inverzi, a tedy leží v $G(A)$. Podobně dokážeme invertovatelnost i ostatních prvků.

(a3) Označme $u = (0, 1)$ jednotku A_e a nechť $x \in A$ je dáno.

Krok 1. Ukážeme že $e - x \in G(A)$ právě tehdy, když $u - x \in G(A_e)$.

„$\Longrightarrow$“ Označme $\widetilde{z} = (e - x)^{-1} \in A$. Položme $z = \widetilde{z} - e$, pak $(e - x)^{-1} = z + e$. Dostáváme pak

$$\begin{aligned}(u - x)(z + u) &= uz + u - xz - x = u + z - xz - x = u + (e - x)(z + e - e) - x \\ &= u + (e - x)(z + e) - (e - x)e - x = u + e - e + x - x = u\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(z + u)(u - x) &= zu + -zx + u - ux = u + z - zx - x = u + (z + e - e)(e - x) - x \\ &= u + (z + e)(e - x) - e(e - x) - x = e + e - e + x - x = u.\end{aligned}$$

Tedy $z + u = (u - x)^{-1}$ a $(u - x) \in G(A_e)$.

„$\Longleftarrow$“ Nechť $(u - x)^{-1} = (z, \alpha)$ pro nějaké $z \in A$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak $\alpha = 1$, neboť $u - x = (-x, 1)$, a tedy

$$u = (0, 1) = (z, \alpha)(-x, 1) = (-zx + z - \alpha x, \alpha).$$

Navíc

$$(-xz - x + z, 1) = (-x, 1)(z, 1) = (0, 1) = (z, 1)(-x, 1) = (-zx + z - x, 1),$$

a tedy

$$-xz - x + z = 0 = -zx + z - x.$$

Z tohoto faktu dostáváme

$$(e - x)(z + e) = z + e - xz - x = e = z - zx + e - x = (z + e)(e - x),$$

tj. $(e - x)^{-1} = z + e$.

Krok 2. Nechť nyní $x \in A$ je dáno. Pokud $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, pak

$$\lambda e - x \in G(A) \Longleftrightarrow \lambda(e - \frac{x}{\lambda}) \in G(A) \Longleftrightarrow e - \frac{x}{\lambda} \in G(A) \Longleftrightarrow u - \frac{x}{\lambda} \in G(A_e) \Longleftrightarrow \lambda u - x \in G(A_e).$$

Tedy

$$\lambda \in \sigma_A(x) \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma_{A_e}(x).$$

Vzhledem k tomu, že $(x, 0) \notin G(A_e)$, $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Tím je (a3) dokázáno.

(a4) Jelikož pro $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$(\lambda e - (\mu e - \nu x)) = \nu \left(\frac{\lambda - \mu}{\nu} e - x \right),$$

dostáváme

$$\lambda \in \sigma(\mu e - \nu x) \Longleftrightarrow \frac{\lambda - \mu}{\nu} \in \sigma(x) \Longleftrightarrow \lambda \in \{\mu\} + \nu\sigma(x).$$

(b) Tvrzení ihned plyne z faktu, že $(x, 0)$ nemá inverzi v A_e.

$\square$

Věta 3.3.23. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e.*

(a) Pokud $x \in U_A$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolutně konverguje a $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. (Jedná se o tzv. Neumannovu řadu).

(b) Nechť $x \in G(A)$ a $h \in A$ splňuje $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Pak $x + h \in G(A)$ a

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leqslant 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.$$

Důkaz. (a) Jelikož $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$, je $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolutně konvergentní a $x^k \to 0$. Výpočtem pak dostáváme

$$(e-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \lim_{k\to\infty}(e-x)\sum_{n=0}^{k} x^n = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} x^n - \sum_{n=1}^{k+1} x^n\right) = \lim_{k\to\infty}(e-x^{k+1}) = e \quad \text{a}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)(e-x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} x^n\right)(e-x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} x^n - \sum_{n=1}^{k+1} x^n\right) = \lim_{k\to\infty}\left(e-x^{k+1}\right) = e.$$

(b) Jelikož $x+h = x(e+x^{-1}h)$ a $\|x^{-1}h\| \leqslant \|x^{-1}\|\,\|h\| < \frac{1}{2}$, máme díky (a) a Tvrzení 3.3.22(a) $x+h \in G(A)$. Dále si povšimněme, že pro $y \in U_A$ platí

$$\left\|(e+y)^{-1} - e + y\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n - e + y\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n y^n\right\| \leqslant \frac{\|y\|^2}{1-\|y\|}.$$

Z tohoto odhadu pak dostáváme

$$\begin{aligned}\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| &= \left\|\left((e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\right)x^{-1}\right\| \\ &\leqslant \left\|x^{-1}\right\| \frac{\left\|x^{-1}h\right\|^2}{1-\left\|x^{-1}h\right\|^2} \leqslant 2\left\|x^{-1}\right\|^3 \|h\|^2.\end{aligned}$$

□

Definice 3.3.24. Nechť X je Banachův prostor. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$ a $f\colon \Omega \to X$ je funkce. Řekneme, že f je holomorfní na Ω, pokud pro každé $\lambda_0 \in \Omega$ existuje

$$f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{1}{\lambda}\left(f(\lambda_0+\lambda) - f(\lambda_0)\right).$$

Věta 3.3.25. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e.*

(a) Množina $G(A)$ je otevřená a je to topologická grupa.

(b) Pro každé $x \in A$ je funkce $f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$, $\lambda \in \rho(x)$, holomorfní na $\rho(x)$ a

$$f'(\lambda_0) = \left((\lambda_0 e - x)^{-1}\right)^2, \quad \lambda_0 \in \rho(x).$$

(c) Pro každé $x \in A$ je $\sigma(x) \neq \varnothing$ a je to kompaktní množina obsažená v $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant \|x\|\}$.

(d) Pro každé $x \in A$ platí

$$r(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

(Gelfandův–Beurlingův vzorec).

Důkaz. (a) Otevřenost množiny $G(A)$ plyne z Věty 3.3.23(b). Spojitost násobení na $G(A)\times G(A)$ je ověřena v Tvrzení 3.3.4(c). Spojitost inverze pak plyne z odhadu

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\right\| \leqslant \left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| + \left\|x^{-1}hx^{-1}\right\| \leqslant 2\left\|x^{-1}\right\|^3\|h\|^2 + \left\|x^{-1}\right\|^2\|h\|,$$

který platí díky Větě 3.3.23(b) na vhodném okolí bodu $x \in G(A)$.

(b) Díky (a) je $\rho(x)$ otevřená podmnožina $\mathbb{C}$. Označme $f(\lambda) - (\lambda e - x)^{-1}$, $\lambda \in \rho(x)$, a nechť $\lambda_0 \in \rho(x)$ je dáno. Protože

$$f(\lambda_0+\lambda) = (\lambda_0 e - x + \lambda e)^{-1} - (\lambda_0 e - x)^{-1},$$

pomocí Věty 3.3.23(b) použité pro $\lambda_0 x$ a λe dostáváme

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\lambda}(f(\lambda_0+\lambda) - f(\lambda_0)) + \left((\lambda_0 e - x)^{-1}\right)^2\right\| &= \left\|\frac{1}{\lambda}(f(\lambda_0+\lambda) - f(\lambda_0)) - \frac{1}{\lambda}(\lambda_0 e - x)^{-1}\lambda e(\lambda_0 e - x)^{-1}\right\| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| 2\left\|(\lambda_0 e - x)^{-1}\right\|^3 \|\lambda e\|^2 \\ &= |\lambda|\, 2\left\|(\lambda_0 e - x)^{-1}\right\|^3 \|e\|^2.\end{aligned}$$

Jelikož pravá strana konverguje pro $\lambda \to 0$ k 0, je důkaz tvrzení (b) dokončen.

(c) Nechť $x \in A$ je dáno. Splňuje-li $\lambda \in \mathbb{C}$ nerovnost $|\lambda| > \|x\|$, je prvek $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$ invertovatelný dle Věty 3.3.23(a). Spetrum $\sigma(x)$ je uzavřené, neboť $G(A)$ je otevřená.

Ukážeme nyní neprázdnost $\sigma(x)$. Předpokládejme pro spor, že $\sigma(x) = \varnothing$, tj. $\rho(x) = \mathbb{C}$.

Nechť $\varphi \in A^*$ je libovolné. Dle (b) je funkce $f_\varphi \colon \lambda \mapsto \varphi((\lambda e - x)^{-1})$ holomorfní na $\rho(x)$, a navíc pro $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $|\lambda| > \|x\|$ platí

$$\begin{aligned}\left|\varphi((\lambda e - x)^{-1})\right| &= \left|\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right)\right| \leqslant \|\varphi\| \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n \\ &= \|\varphi\| \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \|\varphi\| \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}.\end{aligned}$$

Funkce f_φ má tedy v nekonečnu limitu 0. Pak f_φ je omezená, holomorfní funkce na $\mathbb{C}$, a tedy je dle Liouvilleovy věty konstantní. Jelikož $\lim_{\lambda\to\infty} f_\varphi(\lambda) = 0$, je $f_\varphi = 0$ na $\mathbb{C}$.

Tedy jsme obdrželi

$$\forall \varphi \in A^* \colon f_\varphi = 0.$$

Z Hahnovy-Banachovy věty tak plyne, že funkce

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{C} &\to G(A), \\ \lambda &\mapsto (\lambda e - x)^{-1}, \end{aligned}$$

je nulová na $\rho(x)$. To je však kýžený spor, neboť 0 není invertovatelný prvek.

(d) *Krok 1.* Ukážeme nejprve, že $r(x) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Je-li totiž $\lambda \in \sigma(x)$ a $n \in \mathbb{N}$ libovolné, je díky rovnosti

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \cdots \lambda x^{n-2} + x^{n-1})$$

a Tvrzení 3.3.22(a) číslo λ^n v $\sigma(x^n)$. Tedy z tvrzení (c) máme $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leqslant \|x^n\|$, tj. $|\lambda| \leqslant \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Tím dostáváme

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Krok 2. Ukážeme, že $r(x) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Nechť $r > r(x)$ je libovolné. Nechť $\varphi \in A^*$ je též libovolné. Funkce

$$f_\varphi(\lambda) = \varphi((\lambda e - x)^{-1}), \quad \lambda \in \rho(x),$$

je holomorfní a díky jednoznačnosti Laurentovy řady platí

$$f_\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(x^n)}{\lambda^n}, \quad |\lambda| > r(x).$$

Pro $\lambda = r$ speciálně platí $\varphi\left(\frac{x^n}{r^n}\right) \to 0$.

Ukázali jsme, že pro každé $\varphi \in A^*$ je množina $\{\varphi(x^n)r^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ omezená. Dle Věty 1.3.2 je množina $\{x^n r^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ omezená. Zvolme $C > 0$ splňující $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^n r^{-n}\| < C$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|x^n\| \leqslant Cr^n$, tj. $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant C^{\frac{1}{n}} r$. Proto

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} (C^{\frac{1}{n}} r) = r.$$

Jelikož $r > \rho 9x)$ bylo libovolné, máme požadovanou nerovnost dokázanou.

Krok 3. Spojíme-li nyní výše dokázané vztahy dohromady, dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(x) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Tvrzení 3.3.26. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Nechť $x \in A$ splňuje $r(x) < 1$. Pak $e - x$ je invertibilní a platí $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

Důkaz. Nalezneme $\eta < 1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geqslant n_0$ platí $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < \eta$. Pak je řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolutně konvergentní a zopakováním výpočtu z důkazu Věty 3.3.23 dostaneme $(e - x)^{-1} = \sum -n = 0^\infty x^n$. □

Věta 3.3.27 (Gelfand–Mazur)**.** *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Pokud $G(A) = A\backslash\{0\}$, pak A je izometricky izomorfní s $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $G(A) = A\backslash\{0\}$. Pro každé $x \in A$ nalezneme $\lambda_x \in \sigma(x)$. Pak $\lambda_x e - x = 0$, tj. $x = \lambda_x e$. Pak $\sigma(x) = \{\lambda_x\}$ a funkce $\psi \colon \mathbb{C} \to A$ zobrazující λ na λe je bijekce. Zjevně je to algebraický homomorfizmus a též platí $\|\psi(\lambda)\| = \|\lambda e\| = |\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Tedy ψ je izometrie.

□

3.3.2 Vlastnosti spektra

Lemma 3.3.28. *Nechť A je Banachova algebra a B je její uzavřená podalgebra. Nechť $x \in B$ a $\sigma_A(x)$ a $sigma_B(X)$ značí spektra x vzhledem k příslušným algebrám. Pokud A má jednotku e a $e \in B$, platí*

(a) $G(A) \cap B \supset G(B)$

(b) *a pro $x \in B$ máme $\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x)$.*

Důkaz. Důkaz ihned plyne z definic. ☐

Lemma 3.3.29. *Nechť X je topologický prostor a U, V jsou jeho otevřené podmnožiny. Nechť $U \subset V$ a $\partial U \cap V = \emptyset$. Pak*

$$U = \bigcup\{C : C \text{ je komponenta souvislosti } V \text{ protínající } U\}.$$

Důkaz. $\subset$ je-li $x \in U$, je i ve V, a tedy stačí vzít komponentu souvislosti V prvek x obsahující.

$\supset$ Nechť C je komponenta souvislosti V, která protíná U. Jelikož

$$X = U \cup \partial U \cup (X \backslash \overline{U}),$$

platí dle předpokladu $V \subset U \cup (X \backslash \overline{U})$. Množina C proto musí být obsažena v U, neboť v opačném případě by množiny $C \cap U$ a $C \cap (X \backslash \overline{U})$ tvořily rozklad C na dvě disjunktní obojetné množiny. ☐

Lemma 3.3.30. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Pokud $\{x_n\}$ jsou prvky $G(A)$ a $x_n \to x$, kde $x \in \partial G(A)$, pak $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.*

Důkaz. Kdyby závěr tvrzení neplatil, eventuálním přechodem k podposloupnosti bychom obdrželi $C > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ invertovatelných prvků, která konverguje k nějakému $x \in \partial G(A)$ a přitom platí $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|x_n^{-1}\right\| \leqslant C$. Pak

$$\left\|e - x_n^{-1}x\right\| = \left\|x_n^{-1}(x_n - x)\right\| \leqslant C\,\|x_n - x\| \to 0,$$

a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $\left\|e - x_n^{-1}x\right\| < 1$. Pak

$$x_n^{-1}x = e - (e - x_n^{-1}x) \in G(A),$$

a tedy i $x = x_n(x_n^{-1}x) \in G(A)$. A to je spor. ☐

Věta 3.3.31. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a B je její uzavřená podalgebra obsahující e. Pak platí následující tvrzení. Nechť $e \in B$ a $e \in A \subset B$.*

(a) *Platí $G(B) = \bigcup\{C\colon C \text{ komponenta souvislosti } G(A) \cap B \text{ protínající } G(B)\}$.*

(b) *Je-li $x \in B$ a $\mathcal{C}$ je systém všech komponent souvislosti množiny $\rho_A(x)$, pak existuje systém $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ takový, že $\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cup \bigcup \mathcal{C}'$. Navíc platí $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.*

(c) *Je-li $x \in B$ a $\rho_A(x)$ je souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

(d) *Je-li $x \in B$ a $\sigma_B(x)$ má prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Důkaz. (a) Víme z Lemmatu 3.3.28(a), že $G(B) \subset G(A) \cap B$. Uvažujme Lemma 3.3.29 pro $X = B$, $U = G(B)$ a $V = G(A) \cap B$. Ověříme, že $\partial U \cap V = \emptyset$.

Nechť $y \in \partial U$ je dáno. Pak existují posloupnost $\{y_n\}$ ležící v $G(B)$, která splňuje $y_n \to y$. Pokud by y bylo obsaženo ve V, od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ by prvky y_n byly též ve V. Jelikož je zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ spojité na $G(A)$, platí $y_n^{-1} \to y^{-1}$ v A, což implikuje omezenost posloupnosti $\{\left\|y_n^{-1}\right\|_A\}$. Jelikož platí $\left\|y_n^{-1}\right\|_B = \left\|y_n^{-1}\right\|_A$, dostáváme spor s Lemmatem 3.3.30.

(b) Nechť $x \in B$ je dáno. Pak $\rho_B(x) \subset \rho_A(x)$ a jsou to otevřené podmnožiny $\mathbb{C}$. V Lemmatu 3.3.29 položíme $X = \mathbb{C}$, $U = \rho_B(x)$ a $V = \rho_A(x)$. Opět chceme ověřit, že $\partial U \cap V = \emptyset$. Máme však

$$\lambda \in \partial U \implies \lambda e - x \in \partial G(B) \implies \lambda e - x \notin G(A) \implies \lambda \notin \rho_A(x) \implies \lambda \notin V.$$

Vezměme

$$\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C}\colon C \cap U = \emptyset\} \quad \text{a} \quad \mathcal{C}'' = \{C \in \mathcal{C}\colon C \cap U \neq \emptyset\}.$$

Pak $\rho_B(x) = \bigcup \mathcal{C}''$ a

$$\mathbb{C} = \sigma_A(x) \cup \rho_A(x) = \sigma_A(x) \cup \bigcup \mathcal{C}' \cup \bigcup \mathcal{C}''.$$

Tedy

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cup \bigcup \mathcal{C}'.$$

Tím je důkaz první části dokončen.

Ukážeme nyní inkluzi $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$. Nechť $\lambda \in \partial\sigma_B(x)$ je dáno. Pokud $\lambda \in \sigma_A(x)$, je díky inkluzi $G(B) \subset G(A)$ číslo λ i v $\partial\sigma_A(x)$.

Není-li λ v $\sigma_A(x)$, tj. je v $\rho_A(x)$, existuje komponenta souvislosti C množiny $\rho_A(x)$ obsahující λ. Jelikož je $\mathbb{C}$ lokálně souvislý prostor, je C otevřená. Jelikož je $C \subset \sigma_B(x)$, je λ prvek otevřené podmnožiny $\sigma_B(x)$, a tedy není v $\partial\sigma_B(x)$, což je spor.

Tvrzení (c) plyne z (b), neboť $\sigma_B(x)$ nemůže obsahovat neomezenou množinu. Podobně (d) plyne z (b), neboť komponenty souvislosti $\rho_A(x)$ jsou otevřené. □

Věta 3.3.32. *Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení $\sigma\colon x \mapsto \sigma(x)$ je „usco" zobrazení, tj. jedná se o zobrazení s neprázdnými kompaktními hodnotami a pro každé $x \in A$ a každou otevřenou množinu V v $\mathbb{C}$ obsahující $\sigma(x)$ existuje otevřená množina $U \subset A$, která obsahuje x a splňuje $\sigma(U) = \bigcup_{y \in U} \sigma(y) \subset V$.

(b) Funkce $r\colon x \mapsto r(x)$ je shora polospojitá funkce, tj. $r(x) \geqslant \limsup_{n\to\infty} r(x_n)$, pro každé $x \in A$ a každou posloupnost $\{x_n\}$ v A konvergující k x.

Důkaz. (a) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku e. Nechť $x \in A$ a $V \supset \sigma(x)$ otevřená jsou dány. Pokud požadované okolí U bodu x neexistuje, nalezneme prvky $x_n \in A$ a $\lambda_n \in \sigma(x_n)\backslash V$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $x_n \to x$. Jelikož je posloupnost $\{x_n\}$ omezená, jsou i spektra $\sigma(x_n)$ stejně omezená, a tedy můžeme po eventuálním přechodu k podposloupnosti předpokládat, že $\lambda_n \to \lambda$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak $\lambda \notin V$, a tedy $\lambda \in \rho(x)$. Pak ale máme $\lambda_n e - x_n \to \lambda e - x$ a prvky $\lambda_n e - x_n \notin G(A)$. To je však spor s otevřeností $G(A)$.

(b) Mějme $x \in A$ a posloupnost $\{x_n\}$ v A konvergující k x dány. Nechť $s > r(x)$ je libovolné. Pak $V = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < s\}$ je otevřená množina v $\mathbb{C}$ obsahující $\sigma(x)$, a tedy dle (a) existuje okolí U obsahující x, pro které platí $\sigma(U) \subset V$. Tedy pro x_n splňující $x_n \in U$ platí $\sigma(x_n) \subset V$,z čehož plyne odhad $r(x_n) \leqslant s$. Jelikož $s > r(x)$ bylo libovolné, je tvrzení ověřeno. □

Příklad 3.3.33. Nechť $A = C(\mathbb{T})$ a $B = A(\overline{\mathbb{D}})$. Uvažujme operátor restrikce $r\colon B \to A$, $r(f)(z) = f(z)$, kde $z \in \mathbb{T}$ a $f \in B$. Vzhledem k Principu maxima modulu je r izometrický homomorfizmus B na $r(B) \subset A$. Pak $\sigma_{r(B)}(r(\mathrm{id})) = \overline{\mathbb{D}}$ a $\sigma_A(r(\mathrm{id})) = \mathbb{T}$.

Důkaz. Dle Příkladu 3.3.21 platí $\sigma_A(r(\mathrm{id})) = \mathrm{id}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Na druhou stranu $\sigma_{r(B)}(r(\mathrm{id})) = \sigma_B(\mathrm{id}) = \overline{\mathbb{D}}$ dle Příkladu 3.3.21(c).

□

3.3.3 Holomorfní kalkulus

Definice 3.3.34. (a) Je-li X topologický prostor, spojité zobrazení $\gamma\colon [a,b] \to X$ se nazývá křivkou. Označme $\gamma^* = \gamma([a,b])$. Pokud $\gamma(a) = \gamma(b)$, hovoříme o uzavřené křivce.

(b) Nechť $X = \mathbb{C}$. Křivku, která má po částech spojitou derivaci budeme nazývat cestou. Uzavřená cesta je uzavřená křivka, která je současně cestou.

(c) Nechť $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ jsou cesty a $K = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$. Označme $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{h} \gamma_n$ a definujme

$$\int_\Gamma f(x)\,dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\,dz, \quad f \in C(K).$$

Takto definované formální součty se nazývají řetězce. Označme $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$.

Pokud každá cesta γ_i je uzavřená, nazýváme Γ cyklem. Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $K \subset \Omega$, je Γ řetězec v Ω.

(d) Je-li Γ cykl a $\alpha \notin \Gamma^*$, položíme

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-\alpha}\,dz.$$

(e) Je-li Γ řetězec, značíme $-\Gamma$ řetězec vzniklý z Γ nahrazením příslušných křivek křivkami k nim opačným. Pak $\int_{-\Gamma} f(x)\,dz = -\int_\Gamma f(x)\,dz$ pro $f \in C(\Gamma^*)$.

Věta 3.3.35 (Cauchy)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f je holomorfní funkce na Ω a Γ je cykl v Ω, který splňuje*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0, \quad \alpha \notin \Omega.$$

Pak platí

$$f(\alpha)\cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz, \quad \alpha \in \Omega\backslash\Gamma^*,$$

a

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Jsou-li Γ_1 a Γ_2 cykly v Ω takové, že

$$\mathrm{Int}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha), \quad \alpha \notin \Omega,$$

platí

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Věta 3.3.36. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je kompaktní a neprázdná. Pak existuje cykl Γ v Ω takový, že*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in K, \\ 0, & \alpha \notin \Omega, \end{cases}$$

a tedy pro každou holomorfní funkci f na Ω platí

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz, \quad z \in K.$$

Definice 3.3.37. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je kompaktní a neprázdná. Pokud cykl Γ v Ω splňuje

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in K, \\ 0, & \alpha \notin \Omega, \end{cases}$$

řekneme, že ohraničuje K v Ω.

Definice 3.3.38. Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina. Pak $\mathrm{Hol}(K)$ značí systém všech holomorfních funkcí, jejichž definiční obor $\mathrm{Dom}(f)$ je otevřený a splňuje $K \subset \mathrm{Dom}(f)$.

Definice 3.3.39. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a x je prvek A. Označme

$$R_\lambda = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Lemma 3.3.40 (Rezolventní identita)**.** *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a $x \in A$. Pak pro každé $\mu, \nu \in \rho(x)$ platí $R_\mu - R_\nu = (\nu - \mu)R_\nu R_\mu$.*

Důkaz. Nechť $\mu, \nu \in \rho(x)$ jsou dány. Protože $\mu e - x$ komutuje s $\nu e - x$, komutuje R_ν^{-1} s R_μ. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\nu &= R_\nu R_\nu^{-1} R_\mu - R_\nu R_\mu R_\mu^{-1} = R_\nu R_\mu R_\nu^{-1} - R_\nu R_\mu R_\mu^{-1} \\ &= R_\nu R_\mu (R_\nu^{-1} - R_\mu^{-1}) = R_\nu R_\mu (\nu - \mu) e = (\nu - \mu) R_\nu R_\mu. \end{aligned}$$

□

Definice 3.3.41 (Funkční kalkulus)**.** Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a x je prvek A. Je-li $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(x))$, nalezneme cykl Γ ohraničující $\sigma(x)$ v $\mathrm{Dom}(f)$ a položíme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\,d\lambda.$$

Věta 3.3.42. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a x je prvek A. Je-li $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(x))$, pak prvek $f(x)$ je dobře definován a nezáleží na volbě Γ.*

Důkaz. Je-li γ prvek cyklu Γ, je zobrazení $t \mapsto R_\lambda f(\gamma(t))\gamma'(t)$ spojité na $\mathrm{Dom}(\gamma)$, a tedy $\int_\gamma R_\lambda f(\lambda)\,d\lambda$ existuje dle Důsledku 3.2.13.

Nechť Γ_1, Γ_2 jsou dva cykly ohraničující $\sigma(x)$ v $\mathrm{Dom}(f)$. Nechť $\varphi \in A^*$ je libovolné. Pak je zobrazení $\lambda \mapsto \varphi(f(\lambda)R_\lambda)$ holomorfní na $\rho(x)$. Položme $\Omega = \mathrm{Dom}(f) \backslash \sigma(x)$. Pak platí

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in \sigma(x), \\ 0, & \alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Dom}(f). \end{cases}$$

Podle Cauchyovy věty tedy platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \varphi(f(\lambda)R_\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \varphi(f(\lambda)R_\lambda)\,d\lambda.$$

Jelikož φ bylo libovolné,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda$$

dle Věty 3.2.14. □

Lemma 3.3.43. *Nechť A je Banachova algebra, (Ω, Σ, μ) je měřitelný prostor s konečnou, úplnou mírou μ a $f\colon \Omega \to A$ je integrovatelná funkce. Pak pro každé $x \in A$ platí*

$$x\left(\int_\Omega f(\omega)\,d\omega\right) = \int_\Omega xf(\omega)\,d\omega \quad a \quad \left(\int_\Omega f(\omega)\,d\omega\right)x = \int_\Omega f(\omega)x\,d\omega.$$

Důkaz. Daný prvek $x \in A$ interpretujeme jako operátor levého, respektive pravého násobení, tj. uvažujeme operátory $L_x\colon y \mapsto xy$ a $R_x\colon y \mapsto yx$. Věta 3.2.14 pak dává

$$x\left(\int_\Omega f(\omega)\,d\omega\right) = L_x\left(\int_\Omega f(\omega)\,d\omega\right) = \int_\Omega L_x(f(\omega))\,d\omega = \int_\Omega xf(\omega)\,d\omega.$$

Obdobně odvodíme druhou rovnost. □

Věta 3.3.44. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a x je prvek A. Zobrazení $\Phi\colon \operatorname{Hol}(\sigma(x)) \to A$ definované v Definici 3.3.41 má následující vlastnosti. (Píšemm $f(x) = \Phi(f)$ pro $f \in \operatorname{Hol}(\sigma(x))$.)*

(a) Je to algebraický homomorfizmus algebry $\operatorname{Hol}(\sigma(x))$ do A, který splňuje $\Phi(1) = e$ a $\Phi(\mathrm{id}) = x$.

(b) Pokud $\{f_n\}$ je posloupnost v $\operatorname{Hol}(\sigma(x))$ lokálně stejnoměrně konvergující k $f \in \operatorname{Hol}(\sigma(x))$, platí $f_n(x) \to f(x)$.

(c) Prvek $f(x)$ je invertibilní právě tehdy, když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$.

(d) Platí $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).

(e) Pokud $g \in \operatorname{Hol}(\sigma(f(x)))$, platí $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(f) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak komutuje i s $f(x)$.

Důkaz. (a) Nechť $\Gamma = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $R > \|x\|$. Pak Γ ohraničuje $\sigma(x)$ v $\operatorname{Dom}(1) = \mathbb{C}$ a pro každé $\varphi \in A^*$ platí

$$\begin{aligned}\varphi((1)(x)) &= \varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda\,d\lambda\right) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \varphi(R_\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(x^n)}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^\infty \varphi(x^n)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda = \varphi(e).\end{aligned}$$

Jelikož φ bylo libovolné, máme požadovanou identitu $(1)(x) = e$.

Podobně pro funkci $f(\lambda) = \lambda$ dostaneme pro $\varphi \in A^*$ podobným výpočtem

$$\varphi((\mathrm{id})(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\lambda R_\lambda)\,d\lambda = \sum_{n=0}^\infty \varphi(x^n)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda = \varphi(x).$$

Tím je druhá část tvrzení (a) ověřena.

Linearita Φ je zjevná. Nechť $f, g \in \operatorname{Hol}(\sigma(x))$ jsou dány a nechť jsou definovány na otevřené množině Ω obsahující $\sigma 9x)$. Nalezneme otevřenou množinu $U \subset \mathbb{C}$ splňující $\sigma(x) \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$. Dále nechť Γ je cyklus ohraničující $\sigma(x)$ v U a nechť Υ je cyklus ohraničující $\overline{U}$ ve Ω. Označíme-li

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon g(\mu)R_\mu\,d\mu$$

a interpretujeme-li y jako operátor násobení zprava na A, tj. $M_y(z) = zy$, $z \in A$, dostaneme prvek $L(A)$. Použijeme pak (dvakrát) Lemma 3.3.43 a Lemma 3.3.40 a obdržíme Pak platí

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon g(\mu)R_\mu\,d\mu\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda\right)y \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda y\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\int_\Upsilon f(\lambda)g(\mu)R_\lambda R_\mu\,d\mu\right)d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Upsilon f(\lambda g(\mu)\frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda}\right)d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda\left(\int_\Upsilon \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\,d\mu\right) - \int_\Gamma\int_\Upsilon \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}g(\mu)R_\mu\,d\mu\,d\lambda\right).\end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\int_\Upsilon \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}g(\mu)R_\mu\,d\mu\,d\lambda &= \int_\Upsilon g(\mu)\left(\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}\,d\lambda\right)R_\mu\,d\mu \\ &= \int_\Upsilon g(\mu)\left(-f(\mu)\operatorname{Ind}_\Gamma(\mu)\right)R_\mu\,d\mu = 0\end{aligned}$$

a

$$\int_{\Upsilon} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu = (2\pi i) g(\lambda),$$

platí

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda) g(\lambda) R_\lambda \, d\lambda = (fg)(x).$$

(b) Pokud $f_n \overset{\mathrm{loc}}{\rightrightarrows} f$, pak pro cykl Γ ohraničující $\sigma(x)$ v $\mathrm{Dom}(f)$ platí

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \left\| \int_{\Gamma} (f_n(\lambda) - f(\lambda)) R_\lambda \, d\lambda \right\| \leqslant \int_{\mathrm{Dom}(\Gamma)} \|f_n - f\|_\infty \left\| R_{\Gamma(t)} \right\| \left| \Gamma'(t) \right| \, dt,$$

a tedy $f_n(x) \to f(x)$.

(c) „$\Longrightarrow$" Nechť $f(\lambda_0) = 0$ pro nějaké $\lambda_0 \in \sigma(x)$. Pak lze psát $f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda) g(\lambda)$, kde $g \in \mathrm{Hol}(\sigma(x))$. Pak

$$(\lambda_0 e - x) g(x) = \Phi((\lambda_0 - \mathrm{id}) g) = \Phi(f) = \Phi(g(\lambda_0 - \mathrm{id})) = g(x)(\lambda_0 e - x).$$

Dle Tvrzení 3.3.22(a2) tak $f(x)$ není invertovatelný, neboť $(\lambda_0 e - x)^{-1}$ neexistuje.

„$\Longleftarrow$" Je-li f nenulové na $\sigma(x)$, je funkce $\frac{1}{f} \in \mathrm{Hol}(\sigma(x))$. Díky (a) pak máme

$$e = f(x) \left(\frac{1}{x} \right) (x) = \left(\frac{1}{f} \right) (x) f(x),$$

a prvek $f(x)$ je proto invertovatelný.

(d) Tvrzení plyne použitím (c) z následujících ekvivalencí:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \in \sigma(f(x)) &\Longleftrightarrow \lambda_0 e - f(x) \text{ nemá inverzi} \Longleftrightarrow (\lambda_0 1 - f)(x) \text{ nemá inverzi} \\ &\Longleftrightarrow \exists \mu_0 \in \sigma(x) \colon \lambda_0 - f(\mu_0) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 \in \sigma(f(x)). \end{aligned}$$

(e) Nechť Ω_0, Ω_1 jsou omezené, otevřené množiny takové, že

- $\sigma(x) \subset \Omega_0$, f holomorfní na Ω_0 a $\mathrm{Dom}(f) = \Omega_0$,
- $f(\sigma(x)) \subset \Omega_1$ a g je holomorfní na Ω_1,
- $g \circ f$ je holomorfní na Ω_0.

Nalezneme otevřenou množinu U splňující $f(\sigma(x)) \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega_1$ a cykl Γ_1 ohraničující $\overline{U}$ v Ω_1. Označíme-li $W = f^{-1}(U)$, dostaneme otevřenou množinu splňující $\sigma(x) \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega_0$. Nechť Γ_0 je cykl ohraničující $\overline{W}$ v Ω_0.

Pro $\nu \in \Gamma_1^*$ je funkce $\lambda \mapsto \frac{1}{\nu - f(\lambda)}$ holomorfní na W a platí

$$(\nu e - f(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\nu - f(\lambda)} R_\lambda \, d\lambda.$$

Dále platí

$$g(f(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\nu) (\nu e - f(x))^{-1} \, d\nu.$$

Kombinací těchto rovností dostaneme

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\nu) \left(\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\nu - f(\lambda)} R_\lambda \right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{g(\nu)}{\nu - f(\lambda)} \, d\nu \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda)) R_\lambda \, d\lambda = (g \circ f)(x). \end{aligned}$$

(f) Nechť y komutuje s x. Pak y komutuje i se všemi R_λ, $\lambda \in \rho(x)$, a tedy použitím Lemmatu 3.3.43 dostáváme

$$y f(x) = \int_{\Gamma} f(\lambda) y R_\lambda \, d\lambda = \int_{\Gamma} f(\lambda) R_\lambda y \, d\lambda = f(x) y.$$

□

Věta 3.3.45 (Runge)**.** *Nechť S značí jednobodovou kompaktifikaci $\mathbb{C}$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a nechť $A \subset S \backslash \Omega$ obsahuje po jednom bodu z každé komponenty souvislosti $S \backslash \Omega$. Nechť f je holomorfní na Ω. Pak existuje posloupnost $\{R_n\}$ racionálních funkcí s póly pouze v množině A taková, že $R_n \overset{\mathrm{loc}}{\rightrightarrows} f$ na Ω.*

Věta 3.3.46. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a x je prvek A. Pokud zobrazení $\widetilde{\Phi} \colon \mathrm{Hol}(\sigma(x)) \to A$ splňuje (a) a (b) předchozí věty, platí $\widetilde{\Phi} = \Phi$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(x))$ je libovolná funkce. Označme $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$. Dle Rungeovy věty existuje posloupnost racionálních funkcí $\{R_n\}$ s póly mimo množinu Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně k f na Ω. Jelikož $\widetilde{\Phi}$ splňuje (a) a je to algebraický homomorfizmus, $\widetilde{\Phi}(R_n) = \Phi(R_n)$. Použitím vlstnosti (b) dostaneme $\widetilde{\Phi}(f) = \Phi(f)$. □

Věta 3.3.47. *Nechť A Banachova algebra s jednotkou* e *a* x *je prvek* A*. Pokud* $\sigma(x)$ *neodděluje* 0 *od* ∞*,* x *má v* A *logaritmus a odmocniny všech řádů.*

Důkaz. Dle předpokladu leží 0 v neomezené komponentě množiny $\rho(x)$. Existuje tak jednoduše souvislá otevřená množina $\Omega \supset sigma(x)$ a holomorfní funkce f na Ω, která splňuje $\lambda \exp(f(\lambda))$ pro $\lambda \in \Omega$. Pak $\exp(f(x)) = x$ a prvek $y = f(x)$ je tak hledaný element.

Uvažujeme-li pro $n \in \mathbb{N}$ prvek $y_n = \exp\left(\frac{y}{n}\right)$, máme nalezenu n-tou odmocninu. □

3.3.4 Ideály a homomorfizmy

Definice 3.3.48. Nechť A a je algebra a $I \subset A$ je podprostor. Pak I je levý ideál, pokud $xi \in I$ pro každé $x \in A$ a $i \in I$. Obdobně se definuje pravý ideál. Pokud je I pravý i levý ideál, nazýváme ho oboustranným ideálem (či jenom ideálem) Ideál je vlastní, pokud není roven A. Maximální ideál je takový ideál, který není striktně obsažen v žádném vlastním ideálu.

Úmluva 3.3.49. *V dalším budeme uvažovat pouze vlastní ideály.*

Lemma 3.3.50. *Nechť* A *je algebra s jednotkou a* I *je ideál v* A*. Pak faktorprostor* A/I *s násobením* $[x][y] = [xy]$*,* $x, y \in A$*, je algebra a kvocientové zobrazení* $q\colon A \to A/I$ *je homomorfizmus.*

Důkaz. Násobení je dobře definováno, neboť

$$[x][y] = (x + I)(y + I) = xy + xI + Iy + II = xy + I.$$

Druhá část tvrzení je zjevná. □

Tvrzení 3.3.51. *Nechť* A *je Banachova algebra a* I *je uzavřený ideál v* A*. Pak* A/I *je Banachova algebra.*

Důkaz. Vzhledem k Větě 1.1.20 stačí ověřit nerovnost $\|[x_1][x_2]\| \leqslant \|[x_1]\|\,[x_2]$. Máme-li tedy $x_1, x_2 \in A$ dány, pro $\varepsilon > 0$ nalezneme $i_1, i_2 \in I$ takové, že $\|x_j + i_j\| \leqslant \|[x_j]\| + \varepsilon$, $j = 1, 2$. Pak

$$\|[x_1 x_2]\| = \|[x_1 x_2]\| \leqslant \|(x_1 + i_1)(x_2 + i_2)\| \leqslant \|x_1 + i_1\|\,\|x_2 + i_2\| \leqslant (\|[x_1]\| + \varepsilon)(\|[x_2]\| + \varepsilon).$$

□

Věta 3.3.52. *Nechť* A *je algebra s jednotkou* e*. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Každý ideál je obsažen v maximálním ideálu.

(e) Je-li A *Banachova algebra a* I *je ideál v* A*,* $\overline{I}$ *je ideál a každý maximální ideál je uzavřený.*

Důkaz. (a) Položme

$$\mathcal{J} = \{J \subset A\colon J \supset I \text{ je ideál}, e \notin J\}.$$

Pak $I \in \mathcal{J}$ (ideál I je vlastní, a tedy $e \notin I$) a $\mathcal{J}$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu. (Snadno se ověří, že je-li $\mathcal{R} \subset \mathcal{J}$ řetězec, je $\bigcup \mathcal{R}$ horní závora $\mathcal{R}$ v $\mathcal{J}$.)

Existuje tedy maximální prvek $J \in \mathcal{J}$. Ukažme, že je maximální. Nechť $M \supset J$ je ideál. Zjevně $e \notin M$, a tedy M není vlastní. Z maximality J v $\mathcal{J}$ plyne $M = J$, a tedy J je maximální ideál.

(b) Přímočarým způsobem se ověří, že $\overline{I}$ je ideál. Je třeba ukázat, že je vlastní. K tomuto účelu postačí ukázat, že $I \cap G(A) = \varnothing$. Vskutku, pokud $x \in I$ je invertovatelný, platí $e = x^{-1}x \in I$. Pak $y = ye \in I$ pro každé $y \in A$, tj. $I = A$, což je spor. □

Definice 3.3.53. Nechť A je algebra. Zobrazení $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ nazveme multiplikativním funkcionálem, pokud se jedná o algebraický homomorfizmus, tj. φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in A$.

Množinu všech nenulových multiplikativních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.

Příklad 3.3.54. Nechť K je kompaktní topologický prostor a $A = C(K)$. Nechť $\mathcal{I}$ značí systém všech uzavřených ideálů v A a $\mathcal{F}$ systém všech neprázdných, uzavřených podmnožin K. Označme

$$F_I = \bigcap \{f^{-1}(0)\colon f \in I\}, \quad I \in \mathcal{I}, \qquad \text{a} \qquad I_F = \{f \in A\colon f = 0 \text{ an } F\}, \quad F \in \mathcal{F}.$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Zobrazení $\Phi\colon \mathcal{I} \to F_I$ je bijekce $\mathcal{I}$ na $\mathcal{F}$.

(b) Pro každý maximální ideál I existuje právě jedno $x \in K$ splňující $I = I_{\{x\}}$.

Důkaz. (a) Je-li $F \subset K$ uzavřená, neprázdná množina, je zjevně I_F uzavřený ideál. Jelikož $1 \notin I_F$, platí $I_F \neq A$.

Nechť I je uzavřený ideál v A a $F = F_I$. Pak zjevně $I \subset F_I$.

Krok 1. Ukážeme, že každé $g \in C(K)$ splňující $\operatorname{spt} g \cap F = \emptyset$ je v I.

Mějme tedy takové g dáno. Nalezneme otevřenou množinu $U \subset K$ splňující $\operatorname{spt} g \subset U \subset \overline{U} \subset K \backslash F$. Pro každé $x \in \overline{U}$ nalezneme $f_x \in I$ a okolí U_x obsahující x takové, že $f_x \neq 0$ na U_x. Díky kompaktnosti $\overline{U}$ nalezneme $C \subset \overline{U}$ konečnou, pro kterou platí $\overline{U} \subset \bigcup_{x \in C} U_x$. Jelikož pro každé $x \in \overline{U}$ platí $|f_x|^2 = \overline{f_x} f_x \in I$, funkce

$$h = \sum_{x \in C} |f_x|^2$$

též náleží do I. Navíc je $h > 0$ na $\overline{U}$. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \backslash \overline{U}, \\ \frac{g(x)}{h(x)}, & x \in \overline{U}. \end{cases}$$

Jelikož je $\operatorname{spt} g \subset U$ a $h > 0$ na $\overline{U}$, leží f v $C(K)$. Dále máme $g = fh$, a tedy $g \in I$.

Speciálně tak dostáváme, že $F \neq \emptyset$. V opačném případě by totiž $C(K) \subset I$, což je spor.

Krok 2. Nechť $f \in I_F$ je libovolné. Chceme dokázat, že $f \in I$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Vezměme libovolné $\varepsilon \in (0, \|f\|)$ a položme $L = \{x \in K : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Dostali jsme tak neprázdnou, kompaktní podmnožinu K disjunktní s F. Dle Lemmatu 9.1.42 existuje $g \in C(K)$ s hodnotami v $[0,1]$, která splňuje $g = 1$ na L, $g = 0$ na F a $\operatorname{spt} g \cap F = \emptyset$. Pak $\operatorname{spt}(fg) \cap F = \emptyset$, a tedy dle prvního kroku platí $fg \in I$. Jelikož $\|fg - f\| \leqslant \varepsilon$, dostáváme z uzavřenosti I, že $f \in I$.

Dohromady tedy máme $I = I_F$.

Krok 3. Nechť nyní $F \subset K$ je neprázdná uzavřená množina. Položme $I = I_F$ a $H = \Phi(I)$. Pak pro $x \in F$ a $f \in I$ platí $f(x) = 0$, a tedy $F \subset H$. Abychom ověřili obrácenou inkluzi, vezměme $x \in K \backslash H$ (pokud $F = K$, inkluze $H \subset F$ platí triviálně). Dle Lemmatu 9.1.42 existuje $f \in C(K)$ splňující $f(x) = 1$ a $f = 0$ na F. Pak $f \in I$, ale $f(x) \neq 0$. Tedy $x \notin H$. Proto $F = H$.

Tvrzení (a) je tak dokázáno.

(b) Zjevně pro každé $x \in K$ platí

$$I_{\{x\}} = \operatorname{Ker} \varepsilon_x,$$

kde $\varepsilon_x \in A^*$ je definován jako $\varepsilon_x(f) = f(x)$, $f \in A$. Ideál $I_{\{x\}}$ má tedy kodimenzi 1, a proto je maximální.

Obráceně, je-li I maximální ideál v A, existuje uzavřená neprázdná množina F v K, pro kterou platí $I = I_F$. Pokud by F obsahovala dva různé body, řekněme x a y, ideál $I_{\{x\}}$ by pak byl ideál striktně obsahující I, což by byl spor s maximalitou I. Množina F je proto jednobodová, a důkaz je tak hotov. ☐

Tvrzení 3.3.55. *Nechť A je algebra. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Má-li A jednotku e, pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ platí $\varphi(e) = 1$.

(a) Každý prvek $\varphi \in \Delta(A)$ má jednoznačné rozšíření na $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$.

(b) Platí $\Delta(A_e) = \{\widetilde{\varphi} : \varphi \in \Delta(A)\} \cup \{\varphi_\infty\}$, kde $\varphi_\infty(x, \lambda) = \lambda$, $(x, \lambda) \in A_e$.

Důkaz. (a) Jelikož $\varphi(e) = \varphi(e^2) = (\varphi(e))^2$, platí $\varphi(e) = 0$, nebo $\varphi(e) = 1$. V prvním případě pak máme

$$\varphi(x) = \varphi(ex) = \varphi(e)\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathcal{A},$$

což je ve sporu s nenulovostí φ.

(b) Je-li φ prvek $\Delta(A)$, položíme $\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$, $(x, \lambda) \in A_e$. Přímočaře se ověří, že $\widetilde{\varphi}$ je homomorfizmus. (Pro $(x, \alpha), (y, \beta) \in A_e$ totiž platí

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}((x,\alpha)(y,\beta)) &= \widetilde{\varphi}((xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)) = \varphi(xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta = \varphi(x)\varphi(y) + \beta\varphi(x) + \alpha\varphi(y) + \alpha\beta \\ &= (\varphi(x) + \alpha)(\varphi(y) + \beta) = \widetilde{\varphi}(x, \alpha)\widetilde{\varphi}(y, \beta).) \end{aligned}$$

Jelikož

$$\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(xe) = \widetilde{\varphi}(x)\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in A,$$

je $\widetilde{\varphi}$ dokonce nenulový na A. Tedy $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$.

Pokud $\psi \in \Delta(A_e)$ je též rozšíření φ na A_e, máme $\psi(e) = 1$ dle (a). Tedy $\psi = \widetilde{\varphi}$.

(c) Pokud máme $\psi \in \Delta(A_e)$, pak $\varphi = \psi|_A$ je homomorfizums na A. Pokud $\varphi \neq 0$, je $\varphi \in \Delta(A)$, a tedy $\psi = \widetilde{\varphi}$. V opačném případě je $\psi = 0$ na A, což ale díky nenulovosti ψ znamená $\psi = \varphi_\infty$. ☐

Tvrzení 3.3.56. *Nechť A je Banachova algebra. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$ platí $|\varphi(x)| \leqslant r(x)$.

(b) *Pokud A má jednotku e, pak $\varphi \neq 0$ na $G(A)$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$.*

(c) *Pro každé $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$ platí $\varphi(x) \subset \sigma(x)$.*

(d) *Platí $\Delta(A) \subset B_{A^*}$.*

(e) *Pokud A má jednotku e, pak $\Delta(A) \subset S_{A^*}$.*

Důkaz. (a) Nechť $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$.

Krok 1. Předpokládejme nejprve, že A má jednotku e. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ splňuje $|\lambda| > r(x)$. Pak

$$r\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|\lambda|} \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = |1|\,|\lambda| r(x) < 1,$$

a tedy $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda}) \in G(A)$.

Pak platí $\lambda e - x \neq 0$. Vskutku, v opačném případě bychom totiž dostali

$$\varphi(e) = \varphi((\lambda e - x)(\lambda e - x)^{-1}) = 0,$$

což implikuje, že $\varphi = 0$ na A.

Tedy $\varphi(x) \neq \lambda$. Proto $|\varphi(x)| \leqslant r(x)$.

Krok 2. Pokud A nemá jednotku, uvažujme A_e a $\widetilde{\varphi}$. Pak

$$|\varphi(x)| = |\widetilde{\varphi}(x,0)| \leqslant r_{A_e}(x,0) = r_A(x).$$

(b) Pokud $\varphi(x) = 0$ pro nějaký invertovatelný prvek $x \in A$, máme

$$\varphi(e) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 0,$$

což je spor s Tvrzením 3.3.55(a).

(c) Nechť $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$ jsou dány.

Krok 1. Nechť nejprve A má jednotku e. Uvažujme libovolné $\lambda \in \rho(x)$. Pak $\lambda e - x \in G(A)$, a tedy $\varphi(x) \neq \lambda$ dle (b). Proto $\varphi(x) \in \sigma(x)$.

Krok 2. Nemá-li A jednotku, uvažujme algebru A_e a $\widetilde{\varphi}$. Z prvního kroku již víme, že

$$\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x,0) \in \sigma_{A_e}(x).$$

Jelikož $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ dle definice, je tvrzení dokázáno.

(d) Jelikož $r(x) \leqslant \|x\|$, pro $\varphi \in \Delta(A)$ platí dle (a)

$$|\varphi(x)| \leqslant r(x) \leqslant \|x\|.$$

Tedy $\|\varphi\| \leqslant 1$.

(e) Dle Tvrzení 3.3.55(a) je $\|\varphi\| \geqslant |\varphi(e)| = 1$. ☐

Lemma 3.3.57. *Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou e a $x \in A$ není invertovatelný. Pak xA je ideál v A.*

Důkaz. Pro každé $y \in A$ a $a \in A$ platí

$$y(xa) = x(ya) = x(ay) = (xa)y \in xA,$$

a tedy je xA ideál. Dále $xA \cap G(A) = \varnothing$, neboť v opačném případě by pro prvek $z \in xA \cap G(A)$ tvaru $z = xa$ platilo, že x i a jsou invertovatelné (viz Tvrzení 3.3.22(a)), což je spor. ☐

Věta 3.3.58. *Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou e. Pak zobrazení $\Phi\colon \varphi \mapsto \operatorname{Ker}\varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a maximálními ideály.*

Důkaz. Krok 1. Mějme nejprve $\varphi \in \Delta(A)$ dáno. Pak $\operatorname{Ker}\varphi$ je ideál kodimenze 1, a tedy je maximální.

Splňují-li nyní dva prvky $\varphi, \psi \in \Delta(A)$ vztah $I = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$, pak existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že $\psi = c\varphi$ (viz Lemma 3.1.82). Jelikož $\varphi(e) = \psi(e) = 1$ a $A = I \oplus \operatorname{span}\{u\}$, platí $\varphi = \psi$.

Krok 2. Nechť M je maximální ideál. Dle Věty 3.3.52 je M uzavřený. Tedy $B = A/M$ je komutativní Banachova algebra a kvocientové zobrazení $q\colon A \to B$ je homomorfizmus. Ukážeme, že každý nenulový prvek v B je invertovatelný. Pro spor předpokládejm, že $[x] \in B\backslash\{0\}$ není invertovatelné. Pak $C = [x]B$ je vlastní ideál v B dle Lemmatu 3.3.57. Pak $q^{-1}(C)$ je ideál, který neobsahuje e a striktně obsahuje M (platí $x \in q^{-1}(C)\backslash M$). To je však spor s maximalitou M.

Tedy $G(B) = B\backslash\{0\}$, což dle Banachovy-Mazurovy věty 3.3.27 znamená, že B je homomorfní s $\mathbb{C}$. Označíme-li $j\colon B \to \mathbb{C}$ tento homomorfizmus, je $\varphi = i \circ q$ prvek $\Delta(A)$ splňující $M = \operatorname{Ker}\varphi$. ☐

Příklad 3.3.59. Nechť K je lokálně kompaktní topologický prostor a $A = C_0(K)$. Nechť $\varepsilon\colon K \to \Delta(A)$ značí zobrazení přiřazující každému $x \in K$ funkcionál ε_x, tj. Dirakovu míru v bodě x. Pak ε je homeomorfizmus K a $\Delta(A)$.

Důkaz. Krok 1. Zjevně platí $\varepsilon(K) \subset \Delta(A)$.

Krok 2. Nechť nejprve K je kompaktní, tj. $A = C(K)$. Máme-li $\varphi \in \Delta(A)$, je dle Věty 3.3.58 jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ maximální ideál v A. Za pomoci Příkladu 3.3.54 existuje bod $x \in K$ splňující

$$\operatorname{Ker}\varphi = I_{\{x\}} = \{f \in A\colon f(x) = 0\} = \operatorname{Ker}\varepsilon_x.$$

Dle Lemmatu 3.1.82 existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že $\varphi = c\varepsilon_x$. Jelikož φ je multiplikativní, platí $c = 1$, tj. $\varphi = \varepsilon_x$.

Není-li K kompaktní, nechť αK je jednobodová kompaktifikace K. Pak A je uzavřená podalgebra $C(\alpha K)$. Uvažujme algebru A_e a zobrazení $\Psi\colon C(\alpha K) \to A_e$ definované jako

$$\Psi(f) = (f - f(\alpha), f(\alpha)), \quad f \in C(K).$$

Pak Ψ je izomorfizmus $C(K)$ a A_e, a tedy lze prvek $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$ uvažovat jako prvek $\Delta(C(K))$. Jako výše použijeme Příklad 3.3.54 k nalezení bodu $x \in \alpha K$ splňujícího $\widetilde{\varphi} = \varepsilon_x$. Jelikož $\widetilde{varphi}$ je nenulové na A, platí $x \in K$.

Krok 2. Ukážeme, že ε je homeomorfizmus. Nechť $\{x_i\}$ je net v K konvergující k nějakému x v K. Pak pro každou $f \in A$ platí

$$\varepsilon_{x_i}(f) = f(x_i) \to f(x) = \varepsilon_x(f),$$

tj. $\varepsilon_{x_i} \xrightarrow{w^*} \varepsilon_x$. Zobrazení ε je tedy spojité.

Obráceně, nechť $\varepsilon_{x_i} \xrightarrow{w^*} \varepsilon_x$, kde $\{\varepsilon_{x_i}\}_{i \in I}$ je net v $\Delta(A)$ a $\varepsilon_x \in \Delta(A)$. Nechť U je libovolné okolí x. Nalezneme otevřenou množinu V splňující $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Použitím Lemmatu 9.1.42 sestrojíme funkci $f\colon K \to [0,1]$, jejíž nosič je obsažen ve V, a která splňuje $f(x) = 1$. Jelikož

$$W = \{x^* \in A^*\colon |x^*(f) - \varepsilon_x(f)| < \frac{1}{4}\}$$

je w^*-otevřené okolí ε_x, existuje index $i_0 \in I$ takový, že $|\varepsilon_{x_i}(f) - \varepsilon_x(f)| < \frac{1}{4}$ pro $i \geqslant i_0$. Pak pro tato i platí $|f(x_i)| \neq 0$, a tedy $x_i \in V$. Proto $x_i \to x$ a zobrazení ε^{-1} je též spojité. Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 3.3.60. Nechť $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ a $A = L(X)$, kde $\dim X = n$. Pak $\Delta(A) = \varnothing$.

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ je pevné. Pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$ označme jako e_{ij} matici, která má hodnotu 1 na pozici (i, j) a 0 jinak. Nechť e značí jednotkovou matici a 0 nulovou matici. Pak platí

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{i,j}, & i = j = k = l, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

a $\{e_{ij}\colon i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ je báze prostoru $L(X)$.

Nechť $\varphi \in \Delta(A)$. Pak existují čísla $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, taková, že $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij}$, kde $x \in L(X)$ je vyjádřeno jako $x = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}e_{ij}$. Jelikož pro $i \neq j$ platí

$$c_{ij}c_{ij} = \varphi(e_{ij}0\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij}e_{ij}) = \begin{cases} c_{ii}, & i = j, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

dostáváme $c_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Dále pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $e_{i,n}e_{n,i} = e_{i,i}$, a tedy

$$c_{ii} = \varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{in}e_{ni}) = \varphi(e_{in})\varphi(e_{ni}) = c_{in}c_{ni} = 0.$$

Nakonec rovnost $e_{n1}e_{1n} = e_{nn}$ implikuje

$$c_{nn} = \varphi(e_{nn}) = \varphi(e_{n1})\varphi(e_{1n}) = c_{n1}c_{1n} = 0.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 3.3.61. *Nechť A je komutativní Banachova algebra. Uvažujme $\Delta(A)$ jako podmnožinu (B_{A^*}, w^*). Pak platí následující tvrzení.*

(a) Prostor $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní.

(b) Má-li A jednotku, je $\Delta(A)$ kompaktní.

(c) *Označme* $\widetilde{\Delta}(A) = \{\widetilde{\varphi}\colon \varphi \in \Delta(A)\}$. *Pak platí, že* $\Delta(A_e) = \widetilde{\Delta}(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ *a je to jednobodová kompaktifikace* $\widetilde{\Delta}(A)$. *Navíc je zobrazení* $\Phi\colon \Delta(A) \to \Delta(A_e)$, *kde* $\Phi(\varphi) = \widetilde{\varphi}$, *homeomorfizmus.*

Důkaz. (a) Ukážeme, že $\overline{\Delta(A)}^{w^*} \subset \Delta(A) \cup \{0\}$. To však snadno plyne z faktu, že prvek $\overline{\Delta(A)}^{w^*}$ je též multiplikativní funkcionál. Je tedy buď obsažen v $\Delta(A)$, anebo je nulový.

Z tohoto pozorování již plyne lokální kompaktnost $\Delta(A)$. Je-li totiž $\varphi \in \Delta(A)$ dáno, nalezneme jeho w^*-kompaktní okolí U v B_{A^*}, které neobsahuje 0. Pak $U \cap \Delta(A)$ je w^*-kompaktní okolí φ v $\Delta(A)$.

(b) Je-li e jednotka A, pak $\Delta(A) \subset \{x^* \in B_{A^*} : x^*(e) = 1\}$, což je w^*-uzavřená množina neobsahující 0. Z (a) nyní plyne $\overline{\Delta(A)}^{w^*} = \Delta(A)$,a tedy je $\Delta(A)$ kompaktní.

(c) Ukážeme, že Φ je homeomorfizmus. Zjevně je zobrazení Φ^{-1} spojité, neboť $\Phi(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi}|_A = \varphi$, $\varphi \in \Delta(A)$. Je-li nyní $\{\varphi_i\}$ net v $\Delta(A)$ konvergující k $\varphi \in \Delta(A)$, pro $(x, \alpha) \in A_e$ platí

$$\widetilde{\varphi}_i(x, \alpha) = \varphi_i(x) + \alpha \to \varphi(x) + \alpha = \widetilde{\varphi}(x, \alpha).$$

Zobrazení Φ je tedy také spojité. Jedná se proto o homeomorfizmus.

Jelikož

$$\overline{\widetilde{\Delta}(A)}^{w^*} \subset \overline{\Delta(A_e)}^{w^*} = \Delta(A_e) = \widetilde{\Delta}(A) \cup \{\varphi_\infty\},$$

argumentací analogickou té v tvrzení (a) ověříme lokální kompaktnost prostoru $\widetilde{\Delta}(A)$ a fakt, že $\Delta(A_e)$ je jeho jednobodová kompaktifikace.

□

3.3.5 Gelfandova reprezentace

Definice 3.3.62. (a) Nechť A je komutativní Banachova algebra. Zobrazení

$$\Gamma_A\colon A \to C_0(\Delta A),$$
$$x \mapsto \varepsilon_x|_{\Delta(A)},$$

se nazývá Gelfandova transformace A. Prvek Γx se někdy značí jako $\widehat{x}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát pouze Γ místo Γ_A.

(b) Radikál A je definován jako

$$\operatorname{Rad}(A) = \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi\colon \varphi \in \Delta(A)\} \quad (= \bigcap\{I\colon I \text{ maximální modulární ideál v } A\}.$$

Algebra A se nazývá polojednoduchá, pokud $\operatorname{Rad} A = \{0\}$.

Věta 3.3.63. *Nechť A je komutativní Banachova algebra a $x \in A$.*

$$\sigma_A(x)\backslash\{0\} \subset \operatorname{Rng}\widehat{x} \subset \sigma_A(x).$$

Pokud A má jednotku e, platí $\sigma_A(x) = \operatorname{Rng}\widehat{x}$.

Důkaz. Krok 1. Nechť nejprve A má jednotku e. Pak $\varphi(x) \subset \sigma(x)$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ dle Tvrzení 3.3.56(c). Pokud $\lambda \in \sigma(x)$ je dáno, prvek $\lambda e - x$ není invertovatelný. Dle Lemmatu 3.3.57 je $(\lambda e - x)A$ vlastní ideál, který lze podle Věty 3.3.52(d) vložit do nějakého maximálního ideálu (každý ideál v A je modulární díky Větě 3.3.52(a)). Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ splňující $\varphi = 0$ na $(\lambda e - x)A$ (viz Věta 3.3.58). Pak platí

$$0 = \varphi(\lambda e - x) \cdot 1 = \varphi(\lambda e - x)\varphi(e) = \varphi(\lambda e - x) = \lambda - \varphi(x).$$

Tedy $\varphi(x) = \lambda$. Dohromady máme, že $\operatorname{Rng}\widetilde{x} = \sigma(x)$.

Krok 2. Nechť nyní A nemá jednotku. Pak použitím prvního kroku dostáváme

$$\sigma_A(x)\backslash\{0\} = \sigma_{A_e}(x)\backslash\{0\} = (\Gamma_{A_e}x)(\Delta(A_e))\backslash\{0\} \subset (\Gamma_{A_e}x)(\Delta(A_e)) = \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x).$$

Jelikož $\Delta(A_e) = \widetilde{\Delta}(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ (viz Věta 3.3.61(c)), platí pro $\psi \in \Delta(A_e)$

$$(\Gamma_{A_e}x)(\psi) = \begin{cases} \varphi(x), & \psi = \widetilde{\varphi} \text{ pro nějaké } \varphi \in \Delta(A), \\ 0, & \psi = \varphi_\infty. \end{cases}$$

Dostáváme proto, že množiny $\operatorname{Rng}\Gamma_{A_e}x$ a $\operatorname{Rng}\Gamma_A x$ se liší nejvýše o číslo 0. Z tohoto faktu již plyne požadovaný závěr. □

Důsledek 3.3.64. *Nechť A je komutativní Banachova algebra a $x \in A$, pak $\widehat{x} = 0$ právě tehdy, když $r(x) = 0$.*

Důkaz. Plyne ihned z Věty 3.3.63. □

Věta 3.3.65. *Nechť A je komutativní Banachova algebra. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $\Gamma(A) \subset \mathcal{C}_0(\Delta(A))$, $\|\Gamma\| \leqslant 1$ a $\|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(A))} = r(x)$ pro každé $x \in A$.

(b) Zobrazení Γ je algebraický homomorfizmus A do $C_0(\Delta(A))$ a $\Gamma(A)$ separuje body $\Delta(A)$.

(c) Nechť

$$r = \inf\{\frac{\|x^2\|_A}{\|x\|_A^2} : x \in A\backslash\{0\}\} \quad a \quad s = \inf\{\frac{\|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(A))}}{\|x\|_A} : x \in A\backslash\{0\}\}.$$

Pak $s^2 \leqslant r \leqslant s \leqslant 1$.

(d) Zobrazení Γ je izometrie právě tehdy, když $\|x^2\| = \|x\|^2$, $x \in A$.

(e) Algebra A je polojednoduchá a $\Gamma(A)$ je uzavřená právě tehdy, když existuje $K > 0$ takové, že $\|x\|^2 \leqslant K\|x^2\|$, $x \in A$.

Důkaz. (a) Jelikož je ε_x spojitá funkce na (B_{A^*}, w^*), je $\widehat{x}$ spojitá funkce na $\Delta(A)$. Dále $\varepsilon_x(0) = 0$, přičemž 0 je kompaktifikující bod $\Delta(A)$ (viz Věta 3.3.61(a)). Tedy $\widehat{x} \in C_0(\Delta(A)$. Dále máme dle Důsledku 3.3.63 odhad

$$\|\widehat{x}\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \Delta(A)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{Rng}\widehat{x}\} \leqslant r(x) \leqslant \|x\|, \quad x \in A.$$

Tedy $\|\Gamma\| \leqslant 1$. Poslední tvrzení plyne z Věty 3.3.63.

(b) Zjevně je Γ lineární. Dále pro $x, y \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$ platí

$$\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \widehat{x}(\varphi)\widehat{y}(\varphi),$$

což znamená, že Γ zachovává násobení.

Pokud φ_1, φ_2 jsou dva různé elementy v $\Delta(A)$, existuje $x \in A$ splňující $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Tedy $\widehat{x}$ separuje φ_1 od φ_2.

(c) Zřejmě platí $s \leqslant 1$. Dále máme

$$\|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(A))} \geqslant s\|x\|,$$

a tedy

$$\|x^2\|_A \geqslant \left\|\widehat{x^2}\right\|_{C_0(\Delta(A))} = \|(\widehat{x})^2\|_{C_0(\Delta(A))} = \|\widehat{x}\|^2_{C_0(\Delta(A))} \leqslant s^2\|x\|_A^2.$$

Tedy $s^2 \leqslant r$.

Konečně platí $r \leqslant s$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme z nerovnosti $\|z^2\|_A \geqslant r\|z\|^2$ platné pro každé $z \in A$ odhad

$$\left\|x^{2^n}\right\|_A \geqslant r^{2^n - 1}\|x\|_A^{2^n}.$$

Úpravou odvodíme

$$\left\|x^{2^n}\right\|_A^{\frac{1}{2^n}} \geqslant r^{1-2^{-n}}\|x\|_A,$$

což díky Větě 3.3.25(d) znamená $r(x) \geqslant r\|x\|_A$. Díky (a) pak máme

$$\|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(A))} = r(x) \geqslant r\|x\|_A,$$

z čehož nerovnost $r \leqslant s$ plyne.

(d) Dle (c) platí

$$\Gamma \text{ je izometrie } \Longleftrightarrow \forall x \in A\colon \|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(A))} = \|x\|_A \Longleftrightarrow s = 1 \Longleftrightarrow r = 1 \Longleftrightarrow \forall x \in A\colon \|x^2\|_A = \|x\|_A^2.$$

(e) „ $\Longrightarrow$ “ Dle předpokladu je $\Gamma\colon A \to \Gamma(A)$ spojité, prosté zobrazení Banachova prostoru A na Banachův prostor $\Gamma(A)$, a tedy je dle Věty 1.3.7(a) invertovatelné. Existuje tedy $C > 0$ takové, že $\|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(A))} \geqslant C\|x\|$ pro každé $x \in A$. To znamená, že $s > 0$. Proto i $r > 0$, takže konstanta $k = \frac{1}{r}$ splňuje požadovnou nerovnost.

„$\Longleftarrow$“ Dle předpokladu je $r > 0$, což znamená, že také $s > 0$. Jinými slovy máme, že Γ je zdola omezený operátor. Dle Lemmatu 1.4.10 je Γ prosté zobrazení a jeho obor hodnot je uzavřený. Proto je A polojednoduchá. □

Lemma 3.3.66. *Nechť A, B jsou komutativní Banachovy algebry, které jsou algebraicky izomorfní. Pak $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Důkaz. Nechť $T\colon A \to B$ je algebraický izomorfizmus. Pak algebraicky duální operátor

$$\begin{aligned} T^{\#}\colon \Delta(B) &\to \Delta(A), \\ T^{\#}\psi(a) &= \psi(Ta), \quad \psi \in \Delta(B), a \in A, \end{aligned}$$

indukuje bijekci mezi $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$. Označme ji Υ, tj. $\Upsilon\psi = T^{\#} \circ \psi$ pro $\psi \in \Delta(B)$. Dále platí, že

$$\Upsilon \text{ spojité } \iff \forall a \in A\colon \varepsilon_a \circ T^{\#} \circ \text{ spojité na } \Delta(B).$$

Ale to je zřejmé, neboť pro net $\{\psi_i\}$ v $\Delta(B)$ konvergující k $\psi \in \Delta(B)$ máme

$$(\varepsilon_a \circ T^{\#}))(\psi_i) = \psi_i(Ta) \to \psi(Ta) = (\varepsilon_a \circ T^{\#})\psi.$$

Podobně ukážeme, že Υ^{-1} je spojité. □

Věta 3.3.67. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Banachovy algebry $\mathcal{C}_0(X)$ a $\mathcal{C}_0(Y)$ jsou algebraicky izometricky izomorfní.

(ii) Algebry $\mathcal{C}_0(X)$ a $\mathcal{C}_0(Y)$ jsou algebraicky izomorfní.

(iii) Topologické prostory X a Y jsou homeomorfní.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) je zřejmé.

(ii) $\implies$ (iii) Nechť $C_0(X)$ je algebraicky izomorfní s $C_0(Y)$ pomocí zobrazení $T^{\#}$. Dle Lemmatu 3.3.66 jsou prostory $\Delta(C_0(X))$ a $\Delta(C_0(Y))$ homeomorfní. Použitím Příkladu 3.3.59 tak dostáváme, že X je homeomorfní s Y.

(ii) $\implies$ (iii) Je-li $\varphi\colon X \to Y$ homeomorfizmus, je $T\colon g \mapsto g \circ \varphi$ algebarický izometrický izomorfizmus $C_0(Y)$ na $C_0(X)$. □

Věta 3.3.68. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry, přičemž B je polojednoduchá a komutativní. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $\psi\colon A \to B$ je homomorfizmus. Pak ψ je spojité.

(b) Nechť $\|\cdot\|_n$ je norma na B, se kterou je B Banachova algebra. Pak $\|\cdot\|_n$ je ekvivalentní s původní normou.

Důkaz. (a) Ověříme, že ψ je uzavřené zobrazení. Nechť tedy posloupnost $\{a_n\}$ v A konverguje k nějakému $a \in A$ a $\psi(a_n) \to b$ pro nějaké $b \in B$. Vezměme libovolné $\varphi \in \Delta(B)$. Pak $\varphi \circ \psi \in \Delta(A) \cup \{0\}$, a tedy je $\varphi \circ \psi \in A^*$ (viz Tvrzení 3.3.56(d)). Proto

$$\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\psi(a_n)) = \lim_{n\to\infty} (\varphi \circ \psi)(a_n) = (\varphi \circ \psi)(a) = \varphi(\psi(a)).$$

Tedy $\varphi(b) = \varphi(\psi(a))$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Jelikož je B polojednoduchá, $b = \psi(a)$.

Použitím Věty 1.3.9 tak důkaz zakončíme.

(b) Je-li $\|\cdot\|$ původní norma na B, splňuje identické zobrazení $I\colon (B, \|\cdot\|_n) \to (B, \|\cdot\|)$ předpoklady tvrzení (a). Je tedy I spojité, což znamená, že se jedná o izomorfizmus (viz Věta 1.3.7). □

3.3.6 C^*-algebry

Definice 3.3.69. Nechť A je algebra. Zobrazení $*\colon A \to A$ se nazývá involuce, pokud má následující vlastnosti:

- $(a + b)^* = a^* + b^*$, $a, b \in A$,
- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $(ab)^* = b^* a^*$, $a, b \in A$,
- $(a^*)^* = a$, $a \in A$.

Definice 3.3.70. Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Prvek x se nazývá

- normální, pokud $xx^* = x^*x$,
- samoadjungovaný (hermitovský), pokud $x^* = x$,
- nilpotentní, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x^n = 0$.

Pokud A má jednotku e, prvek x je unitární, splňuje-li $x^*x = xx^* = e$.

Definice 3.3.71. Nechť A je Banachova algebra s involucí. Pak A je C^*-algebra, pokud platí C^*-identita

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, \quad x \in A. \tag{3.23}$$

Příklady 3.3.72. (a) Je-li K libovolná množina, je $\ell^\infty(K)$ s bodovým násobením a involucí $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $x \in K$, $f \in \ell^\infty(K)$, C^*-algebra. Každá její uzavřená podalgebra, jež je uzavřená na involuci, je též C^*-algebra.

(b) Je-li K lokálně kompaktní topologický prostor, je Banachova algebra $C_0(K)$ s involucí $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $x \in K$, $f \in C_0(K)$, C^*-algebra.

(c) Je-li H Hilbertův prostor, je Banachova algebra $\mathcal{L}(H)$ s involucí danou $T \mapsto T^*$ (viz Defince 1.4.4) je C^*-algebra.

(d) Je-li H Hilbertův prostor, je Banachova algebra $K(H)$ s involucí zděděnou s $L(H)$ též C^*-algebra.

(e) Na Banachově algebře $A(\overline{\mathbb{D}})$ (viz Příklad 3.3.13) je zobrazení dané jako $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, involuce. Algebra A nicméně není C^*-algebra.

(f) Nechť G je lokálně kompaktní, abelovská topologická grupa a A je Banachova algebra $L^1(G)$ (viz Příklad 3.3.12). Pak je zobrazení $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in G$, $f \in L^1(G)$, involuce na A, se kterou je A C^*-algebra právě tehdy, když $G = \{e\}$.

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) jsou zřejmá.

(c) Vlastnosti involuce pro $L(H)$ plynou z Věty 1.4.5. Rovnost (3.23) plyne též z Věty 1.4.5, neboť

$$\|TT^*\| \leqslant \|T\| \, \|T^*\| = \|T\|^2$$

a

$$\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \sup_{x \in B_H} \|T^*x\|^2 = \sup_{x \in B_H} |\langle T^*x, T^*x \rangle| = \sup_{x \in B_H} |\langle TT^*x, x \rangle| \leqslant \sup_{x \in B_H} \|TT^*x\| \, \|x\| = \|TT^*\| \,.$$

(d) Tvrzení plyne z Věty 1.4.20 a 1.4.3.

(e) Je-li f holomorfní na $\mathbb{D}$, přímočaře se pomocí Cauchyovo–Riemannovo podmínek ověří, že f^* je téže holomorfní. Tato involuce nicméně nesplňuje (3.23). Uvažujme funkce $f(z) = \exp(iz)$, $z \in \mathbb{C}$. Pak $f^*(z) = \overline{\exp(i\overline{z})}$ a pro $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, platí

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\exp(iz)| = |\exp(ia - b)| = |\exp(ia)| \, |\exp(-b)| = \exp(-b) \quad \text{a} \\ |f^*(z)| &= \left|\overline{\exp(i\overline{z})}\right| = |\exp(ia + b)| = |\exp(ia)| \, |\exp(b)| = \exp(b). \end{aligned}$$

Tedy

$$|f(z) f^*(z)| = |f(z)| \, |f^*(z)| = \exp(-b) \exp(b) = 1, \quad z = a + ib \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Na druhou stranu pro $z = -i$ máme $|f(-i)| = \exp(1)$. Tedy C^*-identita pro tuto funkci f neplatí.

(f) Zobrazení $^*\colon f \to f^*$ je zjevně involuce. Zbývající část tvrzení bude ukázána v Sekci 3.4 □

Tvrzení 3.3.73. *Nechť A je normovaná algebra s involucí, která splňuje $\|xx^*\| \geqslant \|x^2\|$. Pak norma na A splňuje* (3.23) *a pro každé $x \in A$ platí*

$$\|x\| = \|x^*\| \quad a \quad \|xx^*\| = \|x\| \, \|x^*\| = \|x^*x\| \,.$$

Důkaz. Jelikož $\|x\|^2 \leqslant \|xx^*\| \leqslant \|x\| \, \|x^*\|$, máme $\|x\| \leqslant \|x^*\|$. Dále platí $\|x^*\| \leqslant \|(x^*)^*\| \leqslant \|x\|$, tedy $\|x\| = \|x^*\|$. Proto $\|xx^*\| \leqslant \|x\| \, \|x^*\| = \|x\|^2$ a (3.23) je splněna.

Druhá část tvrzení plyne z rovností

$$\|x^*x\| = \|x^*(x^*)^*\| = \|x^*\|^2 = \|x\|^2 \,.$$

□

Tvrzení 3.3.74. *Nechť A je C^*-algebra bez jednotky. Pak na A_e existuje involuce rozšiřující involuci z A. Dále lze normu A rozšířit na A_e takovým způsobem, že A_e je C^*-algebra, e má normu* 1 *a tato norma je ekvivalentní s dřívější normou na A_e definovanou v Tvrzení 3.3.6.*

Důkaz. Položíme-li

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}), \quad (a, \lambda) \in A_e,$$

obdržíme požadovanou involuci na A_e.

Každý prvek $(a, \lambda) \in A_e$ lze chápat jako operátor $L_{(a,\lambda)}$ levého násobení na A, tj.

$$T_{(a,\lambda)}(b) = (a, \lambda)(b, 0) = ab + \lambda b, \quad b \in A.$$

Definujme novou normu $\|\cdot\|_n$ na A_e jako

$$\|(a, \lambda)\|_n = \left\|L_{(a,\lambda)}\right\|_{L(A)} .$$

Krok 1. Je třeba ověřit, že $\|(a, \lambda)\|_n = 0$ právě tehdy, když $(a, \lambda) = 0$. Předpokládejme, že $ab + \lambda b = 0$ pro každé $b \in A$. Pokud $\lambda \neq 0$, platí pro $u = -\frac{a}{\lambda}$ formule

$$\forall b \in A \colon b = ub,$$

tj. u je levá jednotka v A. Jelikož

$$u^* = uu^* = (u^*)^* u^* = (uu^*)^* = (u^*)^* = u,$$

platí

$$\forall b \in B\colon bu = bu^* = (ub^*)^* = (b^*)^* = b,$$

tj. u je i pravá jednotka. Prvek u je proto jednotka A, což je spor s předpokladem.

Proto $\lambda = 0$. V tomto případě pak ale dostáváme $ab = 0$ pro každé $b \in A$, což speciálně znamená $0 = \|aa^*\| = \|a\|^2$. Element a je proto nulový a $\|\cdot\|_n$ je vskutku norma na A_e.

Krok 2. Jelikož pro $a \in A$ nenulové platí

$$\|(a,0)\|_n = \sup_{b \in B_A} \|ab\| \leqslant \|a\|$$

a

$$\|(a,0)\|_n \geqslant \left\| a \frac{a^*}{\|a\|} \right\| = \frac{1}{\|a\|} \|aa^*\| = \|a\|,$$

platí $\|(a,0)\|_n = \|a\|$, tj. $\|\cdot\|_n$ rozšiřuje normu z A.

Krok 3. Dále pro $(a,\lambda) \in A_e$ platí

$$\begin{aligned}
\|(a,\lambda)(a^*,\overline{\lambda})\|_n &= \|(aa^* + \overline{\lambda}a + \lambda a^*, \lambda\overline{\lambda})\|_n = \sup_{b \in B_A} \|aa^*b + \overline{\lambda}ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda}\lambda b\| \\
&\geqslant \sup_{b \in B_A} \left(\|b^*\| \, \|aa^*b + \overline{\lambda}ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda}\lambda b\|\right) \\
&= \sup_{b \in B_A} \|b^*aa^*b + \overline{\lambda}b^*ab + \lambda b^*a^*b + \overline{\lambda}\lambda b^*b\| \\
&= \sup_{b \in B_A} \|(b^*a^* + \overline{\lambda}b^*)(ab + \lambda b)\| = \sup_{b \in B_A} \|(ab + \lambda b)^*)(ab + \lambda b)\| \\
&= \sup_{b \in B_A} \|ab + \lambda b\|^2 = \sup_{b \in B_A} \|L_{(a,\lambda)}(b)\| = \|(a,\lambda)\|_n^2 .
\end{aligned}$$

Jelikož je $x \mapsto L_x$ algebraický homomorfizmus A_e do $L(A)$ (viz důkaz Tvrzení 3.3.7), je $(A, \|\cdot\|_n)$ normovaná algebra. Dle Tvrzení 3.3.73 splňuje $\|\cdot\|_n$ identitu (3.23).

Krok 4. Pro jednotku A_e platí

$$\|(0,1)\|_n = \sup_{b \in B_A} \|b\| = 1.$$

Krok 5. Prostor $X = (A_e, \|\cdot\|_n)$ je úplný. Prostor $(A, \|\cdot\|_n)$ je totiž v X jakožto úplný prostor uzavřený a má konečnou kodimenzi. Je tedy komplementovatelný (viz Tvrzení 1.2.9(b)), což znamená, že $X = A \oplus_t \operatorname{Ker} P$, kde P je projekce na A. Jelikož $\operatorname{Ker} P$ je úplný (viz Věta **??**), je prostor $A \times \operatorname{Ker} P$ úplný dle Věty 1.1.20(b). Prostor X je však izomorfní s $A \times \operatorname{Ker} P$ dle Tvrzení 3.1.71(b), a tedy je úplný. ☐

Tvrzení 3.3.75. *Nechť A je Banachova algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Prvky $x + x^*$, $i(x^* - x)$ a xx^* jsou hermitovské.

(b) Existují jednoznačně určené hermitovské prvky $u, v \in A$ splňující $x = u + iv$.

(c) Pokud A má jednotku e, je e hermitovská.

(d) Nechť A má jednotku e. Pak $x \in G(A)$ právě tehdy, když $x^* \in G(A)$. V tomto případě pak platí $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$,

(e) Pro komplexní číslo λ platí $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Důkaz. (a) Platí

$$(x + x^*)^* = x^* + (x^*)^* = x^* + x = x + x^*, \quad (i(x^* - x))^* = -i(x - x^*) = i(x^* - x) \quad \text{a}$$
$$(xx^*)^* = (x^*)^* x^* = xx^*.$$

(b) Položíme-li $u = \frac{1}{2}(x + x^*)$ a $v = \frac{1}{2i}(x - x^*) = \frac{i}{2}(x^* - x)$, dostaneme dle (a) hermitovské prvky, které splňují

$$x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i\frac{i}{2}(x^* - x) = u + iv.$$

Pokud $a + ib = c + id$, kde a, b, c, d jesou hermitovské, platí též $a - ib = c - id$. Sečtením těchto rovností dostaneme $a = c$, jejich odečtením $b = c$.

(c) Máme

$$e = (e^*)^* = (ee^*)^* = ee^* = e^*.$$

(d) Pokud x^{-1} existuje, platí

$$(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = e^* = e \quad \text{a} \quad x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = e^* = e.$$

Tedy $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

Pokud $(x^*)^{-1}$ existuje, platí dle předchozího $x = (x^*)^* \in G(A)$ a pro $y = x^*$ platí

$$x^{-1} = (y^*)^{-1} = (y^{-1})^* = ((x^*)^{-1})^*.$$

(e) Pokud A má jednotku e, platí dle (d)

$$\lambda \in \rho(x) \iff \lambda e - x \in G(A) \iff (\lambda e - x)^* \in G(A) \iff \overline{\lambda} e - x^* \in G(A) \iff \overline{\lambda} \in \rho(x^*).$$

Pokud A nemá jednotku, pak

$$\lambda \in \sigma_A(x) \iff \lambda \in \sigma_{A_e}(x) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_{A_e}(x^*) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_A(x^*).$$

□

Tvrzení 3.3.76. *Nechť A je komutativní, polojednoduchá Banachova algebra. Pak je na A každá involuce spojitá.*

Důkaz. Nechť $*$ je involuce na A. Díky Větě o uzavřeném grafu 1.3.9 stačí ukázat, že se jedná o uzavřené zobrzení. Nechť tedy $x_n \to x$ a $x_n^* \to y$, kde $x_n, x, y \in A$. Vezmeme libovolný prvek $\varphi \in \Delta(A)$ a položíme $\psi(x) = \overline{\varphi(x^*)}$, $x \in A$. Pak ψ je homomorfizmus A do $\mathbb{C}$, a tedy se jedná a spojité zobrazení (viz Tvrzení 3.3.56(d)). Proto

$$\overline{\varphi(x^*)} = \psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi(x_n^*)} = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi(y)}.$$

Jelikož je A polojednoduchá, dostáváme $x^* = y$ a důkaz je hotov. □

Definice 3.3.77. Nechť A je algebra s involucí. Řekneme, že $x \in A$ je nezáporný (značíme $x \geqslant 0$), pokud x je hermitovský a $\sigma(x) \subset [0, \infty)$.

Věta 3.3.78 (Gelfand–Naimark)**.** *Nechť A je komutativní C^*-algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický $*$-izomorfizmus A na $\mathcal{C}_0(\Delta(A))$. Navíc pro každé $x \in A$ platí $\Gamma x \geqslant 0$, kdykoliv $x \geqslant 0$.*

Důkaz. Již víme, že Γ je homomorfizmus o normě 1.

Krok 1. Nechť $x \in A$ je hermitovský. Ukážeme, že $\widehat{x}$ je rálná funkce na $\Delta(A)$. Nechť nejprve A má jednotku e. Pro libovolné $\varphi \in \Delta(A)$ položíme $\varphi(x) = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ označme $x_t = x + ite$. Pak

$$x_t x_t^* = (x + ite)(x^* - ite)(x + ite)(x - ite) = x^2 + t^2 e.$$

Dostáváme tak

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\alpha + i(\beta + t)|^2 = |\varphi(x_t)|^2 \leqslant \|x_t\|^2 = \|x_t x_t^*\| \leqslant \|x\|^2 + t^2.$$

Tedy platí

$$\forall t \in \mathbb{R}\colon \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leqslant \|x\|^2,$$

což implikuje $\beta = 0$.

Pokud A nemá jednotku, je prvek $(x, 0)$ hermitovský v A_e. Je-li $\varphi \in \Delta(A)$, je jeho rozšíření $\widetilde{\varphi}$ v $\Delta(A_e)$ (viz Tvrzení 3.3.55). Tedy $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x, 0) \in \mathbb{R}$.

Krok 2. Nechť $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$. Ukážeme, že $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$. Rozložíme-li x na dva hermitvské prvky jako $x = u + iv$, platí pak $x^* = u - iv$, a tedy

$$\varphi(x) = \varphi(u) + i\varphi(v) \quad \text{a} \quad \varphi(x^*) = \varphi(u) - i\varphi(v).$$

Vhledem k prvnímu kroku platí požadovaná rovnost.

Krok 3. Systém $\Gamma(A) = \{\widehat{x}\colon x \in A\}$ je podpalgebra $C_0(\Delta(A))$, která odděluje body a je komplexně sdružená. Dle Stoneovy-Weierstrassovy věty platí $\overline{\Gamma(A)} = C_0(\Delta(A))$.

Krok 4. Zbývá ověřit, že Γ je izometrie. Je-li $x \in A$ dán, je $y = x^* x$ hermitovský a dle (3.23) pro něj platí

$$\left\| y^{2^n} \right\| = \|y\|^{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dle Věty 3.3.25(d) platí

$$\|y\|_A = r(y) = \|\widehat{y}\|_{C_0(\Delta(A))}.$$

Proto díky rovnosti $\widehat{y} = \widehat{x^* x} = \overline{\widehat{x}}\widehat{x}$ platí

$$\|\widehat{x}\|^2_{C_0(\Delta(A))} = \left\| \overline{\widehat{x}}\widehat{x} \right\|_{C_0(\Delta(A))} = \|\widehat{y}\|_{C_0(\Delta(A))} = \|y\|_A = \|x^* x\|_A = \|x\|_A^2.$$

Krok 5. Nyní již vidíme, že $\Gamma(A)$ je uzavřený podprostor $C_0(\Delta(A))$, což díky třetímu kroku znamená, že Γ je surjektivní.

Krok 6. Pokud x je nezáporný prvek A, platí

$$\operatorname{Rng}\Gamma x = \sigma_{C_0(\Delta(A))}\Gamma x = \sigma_A x \subset [0,\infty).$$

Tedy Γx je nezáporná funkce. □

Věta 3.3.79. *Nechť A a B jsou komutativní C^*-algebry. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.

(ii) Existuje izometrický $*$-izomorfizmus A na B.

(iii) Algebra A je algebraicky izomorfní s B.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\varphi\colon \Delta(A) \to \Delta(B)$ je homeomorfizmus. Pak jsou prostory $C_0(\Delta(B))$ a $C_0(\Delta(A))$ izometricky $*$-izomorfní pomocí zobrazení $g \mapsto g\circ\varphi$, $g \in C_0(\Delta(B))$. Jelikož je A izometricky $*$-izomorfní s $C_0(\Delta(A))$ a podobně B je izometricky $*$-izomorfní s $C_0(\Delta(B))$, tvrzení (ii) platí.

Zřejmě (ii) $\implies$ (iii) a (iii) $\implies$ (i) díky Lemmatu 3.3.66. □

Věta 3.3.80 (Gelfand–Naimark–Segal)**.** *Nechť A je C^*-algebra, pak ji lze izometrickým $*$-izomorfizmem vnořit do $L(H)$ pro vhodný Hilbertův prostor H.*

Důkaz. Bez důkazu. □

Příklad 3.3.81. Existuje konečně dimenzionální komutativní Banachova algebra s involucí taková, že Gelfandova reprezentace je $*$-homomorfizmus, $\Delta(A)$ je kompaktní a A nemá jednotku.

Důkaz. Uvažujme dvoubodovou množinu $\{x_1, x_2\}$ s operací násobení, které je definováno jako

$$x_1 = x_1^2 = x_1x_2 = x_2x_1 = x_2^2.$$

Nechť A sestává z formálních sum tvaru $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$, $\lambda_1, \lambda \in \mathbb{C}$, přičemž vektorové operace jsou definovány po souřadnicích, tj.

$$(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) + (\mu_1x_1 + \mu_2x_2) = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + (\lambda_2 + \mu_2)x_2, \quad \lambda(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = (\lambda\lambda_1)x_1 + (\lambda\lambda_2)x_2,$$

násobení je definováno jako

$$(\sum_{i=1}^{2}\lambda_ix_i)(\sum_{j=1}^{2}\mu_jx_j) = \sum_{i,j=1}^{2}\lambda_i\mu_jx_ix_j = (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)x_1 + 0x_2.$$

a involuce jako

$$(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)^* = \overline{\lambda_1}x_1 + \overline{\lambda_2}x_2.$$

Pak A je komutativní algebra s involucí. Algebra A_e je pak též konečně dimenzionální prostor. Uvažujme na A_e libovolnou normu. Pak A_e je Banachův prostor a násobení na A_e je parciálně spojité. Existuje tak na A_e dle Věty 3.3.7 norma, ve které je A_e Banachova algebra. Proto je i A Banachova algebra.

Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je libovolné. Označme $a_1 = 1x_1 + 0x_2$ a $a_2 = 0x_1 + 1x_2$ Pak $a_1^2 = a_1$ a $a_1a_2 = a_2$. Tedy

$$\varphi(a_1)^2 = \varphi(a_1) \quad \text{a} \quad \varphi(a_1)\varphi(a_2) = \varphi(a_1).$$

Jelikož $\varphi \neq 0$, $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 1$. Tedy $\Delta(A)$ je jednobodová množina, a tudíž je kompaktní.

Dále, libovolný prvek a algebry A lze vyjádřit jako $a = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2$, a tedy

$$\varphi(a^*) = \varphi(\sum_{i=1}^{2}\overline{\lambda_i}a_i)\sum_{i=1}^{2}\overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^{2}\lambda_i} = \overline{\varphi(a)},$$

tj. Gelfandova transformace zachovává involuci.

Zjevně však A nemá jednotku. Byl-li by totiž prvek $a = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 \in A$ jednotka, platí

$$a_1 = aa_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 \quad \text{a} \quad a_2 = aa_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)a_1.$$

Tedy $1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, což je spor. □

3.3.7 Čechova–Stoneova kompaktifikace

Věta 3.3.82. *Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Existuje kompaktní prostor Y a homeomorfní zobrazení $\varepsilon\colon X \to \operatorname{Rng}\phi \subset Y$ takové, že $\operatorname{Rng}\varepsilon$ je hustý v Y a pro každou $f \in C^b(X)$ existuje právě jedna funkce $g \in C(Y)$ taková, že $f(x) = g(\varepsilon(x))$, $x \in X$.

(b) Pokud Y_1, Y_2 jsou kompaktní prostory splňující (a), přičemž $\phi_i\colon X \to Y_i$, $i = 1, 2$, je příslušná vnoření, existuje surjektivní homeomorfizmus $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ takový, že $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$, $x \in X$.

Důkaz. (a) Uvažujme komutativní C^*-algebru s jednotkou $A = C^b(X)$. Pak $Y = \Delta(A)$ je kompaktní prostor a $\Gamma\colon A \to C(Y)$ je izometrický $*$-izomorfizmus. Uvažujme zobrazení $\varepsilon\colon X \to Y$ definované jako

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x \colon f \mapsto f(x), \quad f \in A, quadx \in X.$$

Pak ε je požadované zobrazení.

Vskutku, nechť $\{x_i\}$ je net v X. Pokud konverguje k x, pak pro každé $f \in A$ platí $f(x_i) \to f(x)$, což podle definice topologie na Y znamená $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$. Tedy ε je spojité. Pokud $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$ v Y, nechť U je dané okolí x. Nalezneme funkci $f \in C^b(X)$ takovou, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ vně U. Protože $f(x_i) = \varepsilon_{x_i}(f) \to \varepsilon_x(f) = f(x)$, existuje $i_i \in I$ takové, že pro $i \geqslant i_0$ platí $|f(x_i)| > 0$. Pro tato i je tedy $x_i \in U$. Ověřili jsme tak, že $x_i \to x$, tj. ε je homeomorfizmus.

Dále ukážeme, že
$ep(X)$ je hustý v Y. Kdyby tomu tak nebyl, existovala by nenulová funkce $g \in C(Y)$ splňující $g = 0$ na $\varepsilon(X)$. Pak je funkce $f = \Gamma^{-1}g$ nenulová, ale pro $x \in X$ platí

$$f(x) = \varepsilon_x(f) = (\Gamma f)(\varepsilon_x) = g(\varepsilon_x) = 0.$$

Tedy $f = 0$, což je spor.

Je-li nyní $f \in C^b(X)$ libovolná, pak funkce $g = \Gamma f$ splňuje

$$g(\varepsilon_x) = (\Gamma f)(\varepsilon x) = \varepsilon_x(f) = f(x), \quad x \in X.$$

Tedy ε a Y jsou hledané objekty.

(b) Nechť Y_i a ϕ_i, $i = 1, 2$, splňují (a). Označme $A_i = C(Y_i)$, $i = 1, 2$. Pro $g \in C(Y_2)$ uvažujme jednoznačně určenou funkci $i(g) \in C(Y_1)$, která splňuje $i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x))$, $x \in X$. Pak $i\colon A_2 \to A_1$ je izometrický $*$-izomorfizmus. Tedy $i' \to A_1^* \to A_2^*$ je homeomorfizmus $\Delta(A_1)$ na $\Delta(A_2)$. Nechť $\varepsilon_i \to \Delta(A_i)$ jsou homeomorfizmy z Příkladu 3.3.59. Položme $\phi = \varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1$. Pak ϕ je homeomorfizmus Y_1 na Y_2, který pro každé $x \in X$ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} g(\phi(\phi_1(x))) &= g((\varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x)) = ((i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x))(g) \\ &= (\varepsilon_1(\phi_1(x))(i(g)) = i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x), \quad g \in C(Y_2). \end{aligned}$$

Tedy $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$ a důkaz je hotov. ☐

3.3.8 Prostor $L^\infty([0,1])$

Věta 3.3.83. *Nechť $A = L^\infty([0,1])$ s Lebesgueovou mírou λ, $\Delta = \Delta(A)$ a nechť $\Gamma\colon A \to C(\Delta)$ je Gelfandova transformace. Uvažujme zobrazení*

$$Tf = \int_0^1 \Gamma^{-1} f \, d\lambda, \quad f \in C(\Delta).$$

Pak T je nezáporný funkcionál na $C(\Delta)$, a tedy existuje jednoznačně určená nezáporná míra $\mu \in M(\Delta)$ splňující $\int_\Delta f \, d\mu = Tf$, $f \in C(\Delta)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Míra μ je kladná na neprázdných, otevřených podmnožinách Δ.

(b) Pro každou $g \in \mathrm{Bf^b}(\Delta)$ existuje $f \in C(\Delta)$ taková, že $g = f$ μ-skoro všude.

(c) Množina $\overline{U}$ je otevřená pro každou $U \subset \Delta$ otevřenou. Navíc $\mu(U) = \mu(\overline{U})$.

(d) Je-li $E \in \mathrm{Bs}(\Delta(A)$, pak $\mu(E) = \mu(\operatorname{Int} E) = \mu(\overline{E})$.

(e) Nechť $\{E_i : i \in I\}$ je systém λ-měřitelných množin v $[0,1]$. Pak existuje λ-měřitelná množina $E \subset [0,1]$ taková, že

(e1) $\lambda(E_i \backslash E) = 0$, $i \in I$,

(e2) pokud $F \subset [0,1]$ je λ-měřitelná a splňuje (e1), platí $\lambda(E \backslash F) = 0$.

(f) Prostor Δ nemá izolovaný bod.

(g) Prostor Δ neobsahuje žádnou konvergentní podposloupnost, která by nebylo od jistého členu konstantní.

Důkaz. Před započetmí důkazu tvrzení si povšimněme, že díky rovnostem

$$\operatorname{essrng} f = \sigma_A f = \sigma_{C(\Delta)}\Gamma f = \operatorname{Rng}\Gamma f$$

je Γf nezáporná, kdykoliv je $f \in A$ nezáporná. Dále pro $E \subset [0,1]$ λ-měřitelnou plyne z předcházející rovnosti, že $\operatorname{Rng}\Gamma\chi_E \subset \{0,1\}$, a tedy že se jedná o charakteristickou funkci obojetné množiny v Δ.

(a) Nechť $V \subset \Delta$ je neprázdná, otevřená množina. Nalezneme $g \in C(\Delta)$ takovou, že $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g = 0$ vně V a $g(x) = 1$ pro nějaké $x \in V$. Označme $f = \Gamma^{-1}g$. Pak je f nenulová, nezáporná funkce v A. Proto dostáváme

$$0 < \int_0^1 f\,d\lambda = \int_\Delta g\,d\mu = \int_V g\,d\mu,$$

čili (a) platí.

(b) Je-li $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\Delta)$ dána, nalezneme díky hustotě spojitých funkcí v $L^2(\mu)$ posloupnost $\{g_n\}$ v $C(\Delta)$ takovou, že $\|g - g_n\|_2 \to 0$. V případě potřeby upravíme g_n tak, aby $\|g_n\|_\infty \leqslant 1$. Pak pro $f_n = \Gamma^{-1}g_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, a

$$\int_0^1 |f_n - f_m|^2\,d\lambda = \int_0^1 (f_n - f_m)(\overline{f_n} - \overline{f_m})\,d\lambda = \int_\Delta |g_n - g_m|^2\,d\mu, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Tedy je $\{f_n\}$ cauchyovská posloupnost v $L^2([0,1])$. Nechť $f \in L^2([0,1])$ je limita $\{f_n\}$ v $L^2([0,1])$. Pak pro $h = \Gamma f$ máme

$$\|g - h\|_2 \leqslant \|g - g_n\|_2 + \|g_n - h\|_2 = \|g - g_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \to 0,$$

a tedy $g = h$ μ-skoro všude.

(c) Nechť $V \subset \Delta$ je otevřená. Dle (b) existuje $f \in C(\Delta)$ takové, že $f = \chi_V$ μ-skoro všude na Δ. Pak $\{x \in \Delta\colon f(x) \neq 0\}$ je otevřená množina μ-míry 0. Podle (a) je prázdná. Podobně z rovnosti

$$\mu(V \cap \{x \in \Delta\colon f(x) \neq 1\}) = 0 \quad \text{a} \quad \mu((\Delta\backslash\overline{V}) \cap \{x \in \Delta\colon f(x) \neq 0\}) = 0$$

plyne

$$V \cap \{x \in \Delta\colon f(x) \neq 1\} = (\Delta\backslash\overline{V}) \cap \{x \in \Delta\colon f(x) \neq 0\} = \varnothing.$$

Tedy $f = 1$ na V, a tedy ze spojitosti i na $\overline{V}$. Dále máme $f = 0$ na $\Delta\backslash\overline{V}$, a tedy $\overline{V} = \{x \in \Delta\colon f(x) > 0\}$ je otevřená množina. Navíc také máme

$$\chi_{\overline{V}} = f = \chi_V \ \mu - \text{skoro všude.}$$

Tedy $\mu(V) = \mu(\overline{V})$.

(d) Je-li $E \in \mathrm{Bs}(\Delta)$, pro $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U takové, že $K \subset E \subset U$ a $\mu(U\backslash K) < \varepsilon$. Jelikož

$$\mu(\Delta\backslash K) = \mu(\overline{\Delta\backslash K}) = \mu(\Delta\backslash \operatorname{Int} K),$$

dostáváme $\mu(K) = \mu(\operatorname{Int} K)$. Pak máme

$$\mu(\overline{E} \subset \mu(\overline{V}) = \mu(V) \leqslant \mu(K) + \varepsilon = \mu(\operatorname{Int} K) + \varepsilon \leqslant \mu(\operatorname{Int} E) + \varepsilon.$$

Tvrzení je tak dokázáno.

(e) Položme $g_i = \Gamma\chi_{E_i}$, $i \in I$. Pak $U_i = \{x \in \Delta\colon g_i(x) = 1\}$ je obojetná množina v Δ. Položíme $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ a nechť $f = \Gamma^{-1}\chi_{\overline{U}}$. Pak $\operatorname{essrng} f = \operatorname{Rng}\chi_{\overline{U}} \subset \{0,1\}$. Hledanou množinu definujme jako

$$E = \{x \in [0,1]\colon f(x) = 1\}.$$

Pak pro každé $i \in I$ platí $\Gamma\chi_{E_i} \leqslant \Gamma\chi_E$, a tedy $\chi_{E_i} \leqslant \chi_E$ λ-skoro všude. Z toho plyne (e1).

Nechť nyní $F \subset [0,1]$ je libovolná množina splňující (e1). Pak pro každé $i \in I$ platí $\chi_{E_i} \leqslant \chi_F$ λ-skoro všude, a tedy $\Gamma\chi_{E_i} \leqslant \Gamma\chi_F$, $i \in I$. Tedy množina $V = \{x \in \Delta\colon \Gamma\chi_F(x) = 1\}$ je obojetná množina splňující $U_i \subset V$, $i \in I$. Tedy $U \subset V$, z čehož plyne $\chi_E \leqslant \chi_F$ λ-skoro všude.

(f) Nejprve si povšimněme, že pro $E \subset [0,1]$ kladné míry λ je funkce $\gamma\chi_E$ charakteristická funkce obojetn0 množiny v Δ. Předpokládejme nyní, že $p \in \Delta$ je izolovaný bod. Pak $\{p\}$ je otevřená množina, a tedy $\mu(\{x\}) > 0$. Nechť $f = \Gamma^{-1}\chi_{\{p\}}$. Pak $f = \chi_E$ pro nějakou množinu splňující $\lambda(E) > 0$. Rozdělme E na dvě disjunktní množiny kladné míry. Pak $g_i = \Gamma\chi_{E_i}$, $i = 1, 2$, jsou charakteristické funkce neprázdných otevřených množin U_i, kterí jsou navíc disjunktní, neboť

$$0 = \Gamma\chi_\varnothing = \Gamma(\chi_{E_1}\chi_{E_2}) = \Gamma\chi_{E_1}\Gamma\chi_{E_2} = \chi_{U_1}\chi_{U_2}.$$

Tedy $\{p\} = U_1 \cup U_2$, kde U_1, U_2 jsou disjunktní, neprázdné množiny. To je však zřejmý spor.

(g) Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost navzájem různých elementů Δ konvergující k $p \in \Delta$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je množina $\{p\} \cup \{p_n\colon n \in \mathbb{N}\backslash\{m\}\}$ uzavřená a neobsahuje p_n. Existuje tak otevřené okolí V_n bodu p_n, které neobsahuje ostatní body posloupnosti. Uvažujme funkci

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in V_n, n \text{ liché}, \\ 1 & , x \in V_n, n \text{ sudé}, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Pak g je omezená, borelovská funkce, a tedy existuje $f \in C(\Delta)$ splňující $g = f$ μ-skoro všude. Jako v bodu (c) ukážeme, že $f = (-1)^n$ na V_n, $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že f není spojité v p. $\square$

Důsledek 3.3.84. *Nechť λ je Lebesgueova míra na $[0,1]$, Σ je systém všech λ-měřitelných množin v $[0,1]$ a $\mathcal{N}$ je systém všech množin míry 0. Uvažujme Booleovu algebru*

$$\mathcal{B} = \Sigma/\mathcal{N},$$

tj. algebru vzniklou z Σ ztotožněním množin lišící se o míru 0. Pak $\mathcal{B}$ je úplná, tj. každý systém $\{B_i : i \in I\}$ v $\mathcal{B}$ má supremum a infimum.

Důkaz. Nechť $[A]$ značí třídu ekvivalence příslušnou množině $A \in \Sigma$, tj. $B \in [A]$, pokud $A \triangle B \in \mathcal{N}$. Připomeňme, že pro $[A_1], [A_2] \in \mathcal{B}$ jsou Booleovy operace definovány jako

$$[A_1] \wedge [A_2] = [A_1 \cap A_2] \quad \mathrm{a} [A_1] \vee [A_2] = [A_1 \cup A_2].$$

Je-li nyní $\{[A_i] : i \in I\}$ nějaký systém v $\mathcal{B}$, nechť A je množina garantovaná Větou 3.3.83(e). Pak $[A]$ je požadované supremum daného systému. Infimum pak nalezneme přechodem k doplňkům.

$\square$

3.3.9 Aplikace pro nekomutativní algebry

Definice 3.3.85. Nechť A je algebra s involucí a $S \subset A$ je množina. Řekneme, že S je normální, pokud

- S komutuje, tj. $ab = ba$ pro každé $a, b \in S$, a
- $S^* = \{a^* : a \in S\} \subset S$.

Tvrzení 3.3.86. *Nechť A je algebra s involucí a $S \subset A$ je normální množina. Pak existuje normální množina obsahující S, která je maximální vzhledem k inkluzi.*

Důkaz. Uvažujme systém

$$\mathcal{S} = \{T \subset A : T \supset S \text{ je normální.}\}$$

uspořádaný inkluzí. Jelikož $S \in \mathcal{S}$, je $\mathcal{S}$ je neprázdný. Je-li $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ řetězec, je ihned vidět, že $\bigcup \mathcal{R}$ je horní závora $\mathcal{R}$ v $\mathcal{S}$. Aplikací Zornova lemmatu důkaz dokončíme. $\square$

Tvrzení 3.3.87. *Nechť A je C^*-algebra a B je maximální normální množina v A. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $x \in A$ normální prvek, který komutuje s B, je již obsažen v B.

(b) Množina B je komutativní C^*-podalgebra A.

(c) Má-li A jednotku, $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$. Nemá-li A jednotku, $\sigma_B(x)$ se liší od $\sigma_A(x)$ nejvýše o 0.

Důkaz. (a) Nechť x splňuje předpoklady (a). Pak pro každé $y \in B$ platí $xy^* = y^*x$, tj. $yx^* = x^*y$. Tedy $B \cup \{x, x^*\}$ je normální množina obsahující B, a proto $x, x^* \in B$.

(b) Nyní ověříme, že B je $*$-podalgebra. Jsou-li $x, y \in B$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, jsou x, y normální. Proto i prvky $x + y, \lambda x$ a xy jsou normální. Navíc komutují s B, a tedy jsou v B podle prvního kroku. Množina B je uzavřená na involuci dle definice.

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z B, která konverguje k nějakému $x \in A$. Pak také $x_n^* \to x^*$. Díky spojitosti násobení je x normální a komutuje s B. Tedy je prvkem B.

(c) *Krok 1.* Nechť nejprve A obsahuje jednotku e. Jelikož e je normální prvek komutující s B, platí $e \in B$ dle (a). Je-li $x \in B$ a $\lambda \in \rho_A(x)$, pak $(\lambda e - x)^{-1}$ je normální a komutuje s B. Tedy $\lambda e - x \in B$ dle (a) a $\lambda \in \rho_B(x)$. Proto $\rho_A(x) \subset \rho_B(x)$. Jelikož obrácená inkluze je triviální, máme $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Krok 2. Nechť A nemá jednotku.

Krok 2.1. Pak $C = B \oplus \operatorname{span}\{e\}$ je maximální normální množina v A_e.

Máme-li totiž $S \subset A_e$ normální množinu obsahující C, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je maximální. Pak S je C^*-podalgebra A a obsahuje e. Dále je $S \cap A$ normální množina a obsahuje B, tedy $S \cap A = B$. Nechť $(a, \lambda) \in S$ je libovolné. Pak $\lambda(0,1) \in S$, a tedy

$$(a, 0) = (a, \lambda) - \lambda(0, 1) \in S \cap A = B.$$

Proto $(a, 0) \in B$. Proto platí $(a, \lambda) = (a, 0) + \lambda(0, 1) \in B \oplus \operatorname{span}\{e\}$.

Krok 2.2. Nechť B nemá jednotku. Označme v tomto případě algebru B_e jako B_u, kde u značí jednotku v B_e. Pak zobrazení

$$I : B_u \to C,$$
$$(b, \lambda) \mapsto b + \lambda e,$$

je algebraický homomorfizmus jednotkových algeber B_u a C. Proto $\sigma_{B_u}(x) = \sigma_C(x)$. Máme tedy díky prvnímu kroku

$$\sigma_B(x) = \sigma_{B_u}(x) = \sigma_C(x) = \sigma_{A_u}(x) = \sigma_A(x).$$

Krok 2.3. Má-li B jednotku, pak máme z prvního kroku a Tvrzení 3.3.22(a3) rovnosti

$$\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x) = \sigma_C(x) = \sigma_{B_u}(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}.$$

Tedy $\sigma_A(x)$ se liší od $\sigma_B(x)$ nejvýše o 0. $\square$

Věta 3.3.88. *Nechť A je C^*-algebra. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro hermitovský prvek $x \in A$ platí $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

(b) Pro normální prvek $x \in A$ platí $r(x) = \|x\|$ a $\|x^2\| = \|x\|^2$.

(c) Pro každé $x \in A$ platí $r(xx^*) = \|x\|^2$.

(d) Má-li A jednotku a $x \in A$ je unitární, platí $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$.

Důkaz. (a) Nechť B je maximální normální množina obsahující x. Pak B je komutativní C^*-podalgebra A, která je pomocí Gelfandovy reprezentace $\Gamma\colon B \to C_0(\Delta(B))$ $*$-izomorfní s $C_0(\Delta(B))$. Jelikož je $\widehat{x}$ reálná funkce a podle Věty 3.3.63 platí $\sigma_B(x)\setminus\{0\}\,\operatorname{Rng}\widehat{x}$, dostáváme díky Tvrzení 3.3.87(c) inkluzi

$$\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\} \subset \operatorname{Rng}\widehat{x} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}.$$

(b) Je-li x normální a B je maximální normální množina obsahující $\{x, x^*\}$, platí

$$\begin{aligned}\|x\|_A = \|x\|_B = \|\widehat{x}\|_{C_0(\Delta(B))} &= \sup\{|\widehat{x}(\varphi)| : \varphi \in \Delta(B)\}\\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_B(x)\} = r_B(x) = r_A(x).\end{aligned}$$

Jelikož je x^2 též normální a $\sigma(x^2) = (\sigma(x))^2$, máme

$$\left\|x^2\right\| = r(x^2) = (r(x))^2 = \|x\|^2.$$

(c) Dle (b) platí $r(xx^*) = \|xx^*\| = \|x\|^2$.

(d) Jelikož $1 = \|e\| = \|xx^*\| = \|x\|^2$ a $\|x\| = \|x^*\| = \left\|x^{-1}\right\|$, platí dle Věty 3.3.25(c) inkluze $\sigma(x) \subset \overline{\mathbb{D}}$ a $\sigma(x^{-1}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Jelikož $(\sigma(x))^{-1} = \sigma(x^{-1})$ dle Věty 3.3.44(d), platí $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$.

$\square$

Věta 3.3.89. *Nechť A je algebra s involucí a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou takové normy, že $A_1 = (A, \|\cdot\|_1)$ i $A_2 = (A, \|\cdot\|_2)$ je C^*-algebra. Pak $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.*

Důkaz. Pro každé $x \in A$ platí

$$\|x\|_1^2 = r_{A_1}(xx^*) = r_{A_2}(xx^*) = \|x\|_2^2.$$

$\square$

Lemma 3.3.90. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Je-li $x \in A$, platí $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$. Pokud y komutuje s x, platí $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.*

Důkaz. Uvědomme si nejprve, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je absolutně konvergentní. Navíc polynomy $p_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^n}{n!}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, konvergují k $\exp(\lambda)$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$, a tedy $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (viz Věta 3.3.44(b)).

Pokud $y \in A$ komutuje s x, pomocí důkazu Cauchyovy věty o součinu absolutně konvergentních řad dostaneme $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Proto platí

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = e = \exp(-x)\exp(x),$$

čímž je důkaz zakončen. $\square$

Lemma 3.3.91. *Nechť A je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in A$. Nechť $y = x - x^*$ a $z = \exp(y)$. Pak $\|z\| = 1$ (uvažujeme holomorfní kalkulus z Definice 3.3.41).*

Důkaz. Díky spojitosti involuce máme pro $z = \exp(y)$ rovnost

$$z^* = \exp(y^*) = \exp(-y) = (\exp y)^{-1} = z^{-1}.$$

Element z je tedy unitární, a proto $\sigma(z) \in \mathbb{T}$. Máme tak $\|z\| = r(z) = 1$ (viz Věta 3.3.88). $\square$

Lemma 3.3.92. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená neprázdná a $f\colon \Omega \to A$ je holomorfní. Pokud $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní, je funkce $\lambda \mapsto f(g(\lambda))$ holomorfní na Ω.*

Důkaz. Odvoďme nejprve identitu

$$(\mu e - a)^{-1} - (\mu e - b)^{-1} = (\mu e - a)^{-1}(a - b)(\mu e - b)^{-1}, \quad a, b \in A, \mu \in \rho(a) \cap \rho(b). \tag{3.24}$$

To ověříme pomocí rovností

$$\begin{aligned}(\mu e - b) - (\mu e - a) = a - b &\implies e - (\mu e - a)(\mu e - b)^{-1} = (a - b)(\mu e - b)^{-1}\\ &\implies (\mu e - a)^{-1} - (\mu e - b)^{-1} = (\mu e - a)^{-1}(a - b)(\mu e - b)^{-1}.\end{aligned}$$

Nechť nyní $\lambda_0 \in \Omega$ je dáno. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(\lambda_0, \delta) \subset \Omega$ a na $B(\lambda_0, \delta)$ je funkce $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|$ omezená konstantou $C_1 > 0$. Vezměme $R > C_1$ a položme $\Gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Nechť $C_2 = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|g(Re^{it})\right|$. Jelikož jsou funkce

$$\mu \mapsto (\mu e - f(\lambda_0 + \lambda))^{-1}, \quad \mu \mapsto (\mu e - f(\lambda_0))^{-1}$$

spojité na Γ, existuje $C_3 > 0$, které je na Γ omezuje v normě.

Pak pro $\lambda \in B(0, \delta)$ nenulové platí díky (3.24) odhad

$$\begin{aligned}\left\|(\mu e - f(\lambda_0 + \lambda))^{-1} - (\mu e - f(\lambda_0))^{-1}\right\| &\leqslant \left\|(\mu e - f(\lambda_0 + \lambda))^{-1}\right\| \|f(\lambda_0 + \lambda) - f(\lambda_0)\| \left\|(\mu e - f(\lambda_0))^{-1}\right\|\\ &\leqslant C_3^2 \|f(\lambda_0 + \lambda) - f(\lambda_0)\|,\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\lambda}\left(g(f(\lambda_0 + \lambda)) - g(f(\lambda_0))\right)\right\| &= \frac{1}{|\lambda|}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\mu)\left((\mu e - f(\lambda_0 + \lambda))^{-1} - (\mu e - f(\lambda_0))^{-1}\right) d\mu\right\|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi|\lambda|}\int_0^{2\pi} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|g(Re^{it})\right| R \left\|(\mu e - f(\lambda_0 + \lambda))^{-1} - (\mu e - f(\lambda_0))^{-1}\right\| dt\\ &= \frac{1}{2\pi|\lambda|}\int_0^{2\pi} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|g(Re^{it})\right| RC_3^2 \|f(\lambda_0 + \lambda) - f(\lambda_0)\| dt\\ &\leqslant \frac{RC_2(C_3)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|\frac{1}{\lambda}(f(\lambda_0 + \lambda) - f(\lambda_0))\right\| dt\\ &= RC_2(C_3)^2 \left\|\frac{1}{\lambda}(f(\lambda_0 + \lambda) - f(\lambda_0))\right\|.\end{aligned}$$

Jelikož je f holomorfní v λ_0, tato limita konverguje pro $\lambda \to 0$ k 0. Tm je důkaz dokončen. □

Věta 3.3.93 (Fuglede–Putnam–Rosenblum). *Nechť A je C^*-algebra a nechť $a, b, x \in A$ takové, že a, b jsou normální a platí $ax = xb$. Pak $a^*x = xb^*$.*

Důkaz. Nechť nejprve A má jednotku e. Díky předpokladu pak platí $a^n x = xb^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (To snadno ověříme indukcí. Pro $n = 1$ se jedná a předpoklad a platí-li tato rovnost pro $n \in \mathbb{N}$, máme

$$a^{n+1}x = a(a^n x) = a(xb^n) = (ax)b^n = (xb)b^n = xb^{n+1}.)$$

Díky Lemmatu 3.3.90 tak platí

$$\exp(a)x = x\exp(b), \quad \text{tj.} \quad x = \exp(-a)x\exp(b). \tag{3.25}$$

Položme $u_1 = \exp(a^* - a)$ a $u_2 = \exp(b - b^*)$. Protože a, b jsou normální, máme z (3.25) vzorec

$$\exp(a^*)x\exp(-b^*) = \exp(a^*)\exp(-a)x\exp(b)\exp(-b^*) = u_1 x u_2.$$

Díky Lemmatu 3.3.91 platí $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, a tedy

$$\|\exp(a^*)x\exp(-b^*)\| \leqslant \|u_1\| \|x\| \|u_2\| = \|x\|. \tag{3.26}$$

Položme

$$f(\lambda) = \exp(\lambda a^*)x\exp(-\lambda b^*), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.27}$$

Aplikujeme-li výše uvedené úvahy na $\overline{\lambda}a$ a $\overline{\lambda}b$, dostaneme z (3.26) odhad

$$\|f(\lambda)\| \leqslant \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jelikož je f holomorfní na $\mathbb{C}$ (viz Lemma 3.3.92), dle Liouvilleovy věty je konstantní. Tedy $f(\lambda) = f(0) = x$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$. Rovnost (3.27) tak přejde v

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda a^*)^n}{n!} x = \exp(\lambda a^*)x = x \exp(\lambda b^*) = \sum_{n=0}^{\infty} x \frac{(\lambda b^*)^n}{n!}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.28}$$

Vezmeme-li nyní libovolné $\varphi \in A^*$ a aplikujeme ho na tuto rovnost, dostaneme rovnost dvou mocninných řad. Vzhledem k jednoznačnosti rozvoje mocninné řady, musí mít stejné koeficienty. Jelikož $\varphi \in A^*$ je libovolné, musí se koeficenty řad v (3.28) rovnost. Pro $n = 1$ tak dostáváme

$$a^* x = x b^*.$$

Tím je důkaz dokončen pro případ jednotkové C^*-algebry.

Nemá-li A jednotku, jsou $a, b \in A_e$ normální a platí pro ně $ax = xb$. Předešlá část důkazu tak dává závěr v A_e, a tedy i v A. ☐

Věta 3.3.94. *Nechť A je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in A$ je unitární prvek. Pokud $\sigma(x) \neq \mathbb{T}$, existuje hermitovský prvek $y \in A$ splňující $\exp(iy) = x$.*

Důkaz. Nechť x je daný unitární prvek splňující $\sigma(x) \neq \mathbb{T}$.

Krok 1. Předpokládejme nejprve, že $1 \notin \sigma(x)$. Nechť $g\colon \mathbb{C} \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$ značí funkci argumentu komplexního číslo, tj.

$$g(z) = \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus ([0,\infty) \times \{0\}),$$

kde $\arg z \in (0, 2\pi)$. Pak $g \in C(\sigma(x))$, což znamená, že $y = g(x)$ je dobře definovaný prvek A, který je dle Věty 3.3.97(h) hermitovský (funkce g je reálná). Vzhledem k tomu, že

$$(\exp \circ (ig))(\lambda) = (\mathrm{id})(z), \quad \lambda \in \sigma(x),$$

Dále dle tvrzení (f) této Věty 3.3.97 dostáváme

$$\exp(iy) = (\exp \circ (ig))(x) = (\mathrm{id})(x) = x.$$

Krok 2. Pokud nějaké číslo $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ splňuje $\lambda_0 \notin \sigma(x)$, pak je prvek $u = \lambda_0^{-1} x$ též unitární a přitom $1 \notin \sigma(u)$. Dle prvního kroku existuje hermitovský prvek $v \in A$ splňující $\exp(iv) = u$. Označme $t = \arg \lambda_0$. Pak $\lambda_0 = \exp(it)$ a $\lambda_0 e = \exp(ite)$. Díky Lemmatu 3.3.90 pak dostáváme

$$\exp(i(te + v)) = \exp(ite)\exp(iv) = \lambda_0 ev = \lambda_0 u = x.$$

Tedy $te + v$ je hledaný prvek y.

☐

Věta 3.3.95. *Nechť A je C^*-algebra se jednotkou e a B je její C^*-podalgebra e obsahující. Pak pro každé $x \in B$ platí $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Důkaz. Je třeba ověřit, že je-li $x \in B$ invertovatelné v A, je $x^{-1} \in B$. Pro takové x je prvek $y = xx^*$ hermitovský a invertovatelný, tj. $0 \notin \sigma_A(y)$. Jelikož $\sigma_B(y) \subset \mathbb{R}$, množina $\sigma_B(y)$ má prázdný vnitřek (v $\mathbb{C}$), a tedy dle Věty 3.3.31(d) platí $\sigma_B(y) = \sigma_A(y)$. Tedy $0 \notin \sigma_B(y)$, což znamená, že $xx^* \in G(B)$. Tedy $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$. ☐

3.3.10 Spojitý kalkulus pro normální prvky

Definice 3.3.96. Zobrazení $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazýváme polynomem v z a $\overline{z}$, pokud

$$p(z) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} z^i (\overline{z})^j, \quad z \in \mathbb{C},$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Věta 3.3.97. *Nechť A je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in A$ je normální prvek. Pak existuje zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$ takové, že píšeme-li $f(x)$ pro $\Phi(f)$, platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení Φ je izometrický $*$-izomorfizmus.

(b) Platí $\Phi(1) = e$ a $\Phi(\mathrm{id}) = x$.

(c) Zobrazení Φ je vlastnostmi (a), (b) určeno jednoznačně.

(d) Platí $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

(e) Množina $\{f(x) \colon f \in \mathcal{C}(\sigma(x))\}$ se rovná a B a je to C^*-algebra generovaná x a e.

(f) Pokud $f \in C(\sigma(x))$ a $g \in C(\sigma(f(x)))$, pak $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

(g) Prvek $f(x)$ je normální.

(h) Prvek $f(x)$ je hermitovský právě tehdy, když f je reálná.

(i) Zobrazení Φ splývá s holomorfním kalkulem na $\operatorname{Hol}(\sigma(x))$.

(j) Pokud y komutuje s x a $f \in C(\sigma(x))$, pak y komutuje s $f(x)$.

Nemá-li A jednotku, uvažme kalkulus v A_e. Pokud $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ splňuje $f(0) = 0$, pak $f(x) \in A$.

Důkaz. Nechť $B = \overline{\{p(x) \colon p \text{ polynom v } z \text{ a } \overline{z}.\}}$. Pak B je komutativní C^*-podalgebra A, která obsahuje e. Dle předcházející Věty 3.3.95 platí $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$. (V dalším budeme psát pouze $\sigma(x)$.) Jelikož má B jednotku, $\Delta(B)$ je kompaktní, a tedy $C_0(\Delta(B)) = C(\Delta(B))$.

Nechť $\Gamma \colon B \to C(\Delta(B))$ je Gelfandova transformace. Pak $\operatorname{Rng} \Gamma x = \sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. Lze tedy definovat zobrzení Φ jako

$$\Phi(f) = \Gamma^{-1}(f \circ \Gamma x), \quad f \in \mathcal{C}(\sigma(x)).$$

Ukažme, že Φ je hledané zobrazení. Zjevně se jedná o $*$-homomorfizmus a díky

$$\begin{aligned}\|f\|_{C(\sigma(x))} &= \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(x)\} = \sup\{|f(\varphi(x))| : \varphi \in \Delta(B)\} \\ &= \sup\{|(f \circ \widehat{x})(\varphi)| : \varphi \in \Delta(B)\} = \|f \circ \widehat{x}\|_{C(\Delta(B))} \\ &= \left\|\Gamma^{-1}(f \circ \widehat{x})\right\|_B = \|f(x)\|_B = \|f(x)\|_A\end{aligned}$$

je Φ je izometrie.

Jelikož

$$(1)(x) = \Gamma^{-1}(1 \circ \widehat{x}) = \Gamma^{-1}(1) = e \quad \text{a} \quad \operatorname{id}(x) = \Gamma^{-1}(\operatorname{id} \circ \widehat{x}) = \Gamma^{-1}(\widehat{x}) = x,$$

platí (b).

(c) Je-li nyní Ψ jiné zobrazení splňující (a) a (b), shoduje se Ψ s Φ na polynomech v z a $\overline{z}$. Jelikož jsou díky Stoneově-Weierstrassově větě tyto polynomy husté v $C(\sigma(x))$ a Φ, Ψ jsou izometrie, platí $\Phi = \Psi$.

(d) Co se týče obrazu spektra, máme

$$\sigma_A(f(x)) = \sigma_B(f(x)) = \sigma_B(\Gamma^{-1}(f \circ \widehat{x})) = \operatorname{Rng}(f \circ \widehat{x}) = f(\operatorname{Rng} \widehat{x}) = f(\sigma_B(x)) = f(\sigma_A(x)).$$

(e) Nechť C je C^*-algebra generovaná x a e, tj. nejmenší C^*-algebra tyto prvky obsahující. Jelikož $D = \{f(x) \colon f \in \mathcal{C}(\sigma(x))\}$ je C^*-algebra a obsahuje x a e, platí $C \subset D$. Na druhou stranu jsou v C všechny prvky $p(x)$ pro polynom v z a $\overline{z}$, a tedy $C \supset B$. Jelikož dle Stoneovy–Weierstrassovy věty je systém těchto polynomů hustý v $C(\sigma(x))$, a Φ je izometrie, platí $D \subset B$.

(f) Nechť $y = f(x)$ a $\Psi \colon C(\sigma(y)) \to A$ je funkční kalkulus pro prvek y. Pak Ψ splňuje (a) a (b). Jelikož $y \in B$, můžeme definovat $\Upsilon \colon C(\sigma(y))$ jako $\Upsilon(g) = \Gamma^{-1}(g \circ \Gamma y)$, $g \in C(\sigma(y))$. Pak Υ je též kalkulus pro y splňující (a) a (b), a tedy $\Psi = \Upsilon$ podle (c). Je-li nyní $g \in C(\sigma(y))$ libovolné, dostáváme pro $h = g \circ f$ rovnosti

$$\Psi g = \Upsilon g = \Gamma^{-1}(g \circ \Gamma y) = \Gamma^{-1}(g \circ \Gamma(\Gamma^{-1}(f \circ \Gamma(x)))) = \Gamma^{-1}(g \circ f \circ \Gamma(x)) = \Gamma^{-1}(h \circ \Gamma(x)),$$

z čehož tvrzení plyne.

(g) Jelikož $f^*(x) = \overline{f}(x) \in C$, $C = B$ a B je komutativní, platí $f(x)(f(x))^* = (f(x))^* f(x)$.

(h) Tvrzení plyne z (a).

(i) Nechť pro $f \in \operatorname{Hol}(\sigma(x))$ značí symbol $\Phi_{\text{Hol}}(f)$ prvek vzniklý Definicí 3.3.41. Nechť $f \in \operatorname{Hol}(\sigma(x))$ je libovolná funkce. Označme $\Omega = \operatorname{Dom}(f)$. Dle Rungeovy věty 3.3.45 existuje posloupnost racionálních funkcí $\{R_n\}$ s póly mimo množinu Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně k f na Ω. Speciálně tedy $R_n \rightrightarrows f$ na $\sigma(x)$. Jelikož Φ i Φ_{Hol} je alegbraický homomorfizmus, platí $\Phi(R_n) = \Phi_{\text{Hol}}(R_n)$. Použitím vlastnosti (a) a Věty 3.3.44(b) dostaneme $\Phi(f) = \Phi_{\text{Hol}}(f)$.

(j) Nechť y komutuje s x. Věta 3.3.93 pak zaručuje komutaci y s x^*. Proto $yp(x) = p(x)y$ pro každý polynom p v z a $\overline{z}$. Z tvrzení (a) a Stoneovy–Weierstrassovy tak dostáváme $yf(x) = f(x)y$ pro každé $f \in C(\sigma(x))$.

Nechť nyní A nemá jednotku. Nechť $f \in \sigma_A(x)$ splňuje $f(0) = 0$ (připomeňme, že $0 \in \sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ dle Tvrzení 3.3.22(b)). Uvažujme polynom p bez nultého členu, tj. $p(0) = 0$, pak $p(x) \in A$. Jelikož dle Stoneovy-Weierstrassovy věty platí

$$\overline{\{p \colon p \text{ polynom splňující } p(0) = 0\}}^{C(\sigma(x))} = \{f \in C(\sigma(x)) \colon f(0) = 0\},$$

dostáváme $f(x) \in A$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Poznámka 3.3.98. Nechť A, x a B jsou jako v předešlé větě. Pak zobrazení $j \colon \Delta(B) \to \sigma(x)$ definované jako $j(\varphi) = \varphi(x)$ je homeomorfizmus těchto dvou množin. Předně je $\varphi(x) \in \sigma(x)$, a tedy j je dobře definován. Zobrazení j je prosté, neboť pro dva různé prvky $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta(B)$ existuje polynom p, na kterém se tyto funkcionály liší. Proto $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Zjevně je j spojité zobrzení, a proto se jedná o homeomorfzimus. Jelikož $\sigma(x) = \operatorname{Rng} \widehat{x}$, je j surjektivní.

3.3.11 Komutátor

Definice 3.3.99. Nechť A je algebra a $S \subset A$. Pak $S' = \{x \in A : xs = sx, s \in S\}$ je komutátor množiny S.

Tvrzení 3.3.100. *Nechť A je Banachova algebra a $S \subset A$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Komutátor S' je uzavřená podalgebra.

(b) Platí $S \subset S''$.

(c) Množina $S' \cap S''$ komutuje a pokud S komutuje, pak S'' komutuje.

Důkaz. (a) Pokud $x, y \in S'$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak pro každé $s \in S$ platí

$$(x+y)s = s(x+y), \quad (\lambda x)s = s(\lambda x) \quad \text{a} \quad (xy)s = xsy = s(xy),$$

a tedy S' je podalgebra. Pokud $x_n \to x$, kde x_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou v S', pro libovolné $s \in S$ platí

$$xs = \lim_{n\to\infty} x_n s = \lim_{n\to\infty} s x_n = sx.$$

Tedy S' je uzavřená množina.

(b) Pokud $s \in S$ a $x \in S'$, platí $xs = sx$, a tedy $x \in S''$.

(c) Pokud $x, y \in S' \cap S''$, pak $x \in S''$ a $y \in S'$ znamená, že $xy = yx$. Pokud S komutuje, platí $S \subset S'$, a tedy $S' \supset S''$. Proto $S'' = S'' \cap S'$ komutuje. □

Tvrzení 3.3.101. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a $S \subset A$. Pokud S komutuje a $B = S''$, pak B je komutativní Banachova algebra, $S \subset B$ a pro každé $x \in B$ platí $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Důkaz. Pokud A má jednotku, platí $e \in B$. Nechť $x \in B$ je invertovatelný v A. Pak platí $xs = sx$ pro každé $s \in S'$, a tedy $sx^{-1} = x^{-1}s$, tj. $x^{-1} \in S''$. Proto je x invertovatelný v B. Z tohoto pozorování již plyne rovnost $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$. □

Věta 3.3.102. *Nechť A je Banachova algebra a $x, y \in A$ komutují. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ a $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.

(b) Platí $r(x+y) \leqslant r(x) + r(y)$ a $r(xy) \leqslant r(x)r(y)$.

Důkaz. Krok 1. Nechť A má jednotku e. Položme $S = \{x, y\}$ a $B = S''$. Uvažujme Gelfandovu transformaci $\Gamma : B \to C(\Delta(B))$. Pak dle Tvrzení 3.3.101 máme

$$\sigma_A(x+y) = \sigma_B(x+y) = \operatorname{Rng} \widehat{x+y} = \operatorname{Rng}(\widehat{x} + \widehat{y}) \subset \operatorname{Rng} \widehat{x} + \operatorname{Rng} \widehat{y} = \sigma_B(x) + \sigma_B(y) = \sigma_A(x) + \sigma_A(y)$$

a

$$\sigma_A(xy) = \sigma_B(xy) = \operatorname{Rng} \widehat{xy} = \operatorname{Rng}(\widehat{x}\widehat{y}) \subset (\operatorname{Rng} \widehat{x})(\operatorname{Rng} \widehat{y}) = \sigma_B(x) \cdot \sigma_B(y) = \sigma_A(x) \cdot \sigma_A(y).$$

Krok 2. Pokud A nemá jednotka, použijeme první krok pro algebru A_e a dostaneme tak

$$\sigma_A(x+y) = \sigma_{A_e}(x+y) \subset \sigma_{A_e}(x) + \sigma_{A_e}(y) = \sigma_A(x) + \sigma_A(y)$$

a podobně

$$\sigma_A(xy) \subset \sigma_A(x)\sigma_A(y).$$

□

Věta 3.3.103. *Nechť A je Banachova algebra a $x, y \in A$, Pak $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$ a $r(xy) = r(yx)$.*

Důkaz. Nechť A má jednotku e a $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ je libovolné. Předpokládejme, že a je levá inverze $\lambda e - xy$, tj. $a(\lambda e - xy) = e$. Pak

$$\begin{aligned}(\lambda^{-1}e + \lambda^{-1}yax)(\lambda e - yx) &= e - \lambda^{-1}yx + yax - \lambda^{-1}yaxyx = e + yax - \lambda^{-1}(yx + yaxyx) \\ &= e + yax - \lambda^{-1}y(e + axy)x = e + yax - \lambda^{-1}y(\lambda a)x = e,\end{aligned}$$

a tedy $\lambda^{-1}e - \lambda^{-1}yax$ je levá jednotka prvku $\lambda e - yx$.

Podobně máme pro prvek $b \in A$ splňující $(\lambda e - xy)b = e$ rovnosti

$$\begin{aligned}(\lambda e - yx)(\lambda^{-1}e + \lambda^{-1}ybx) &= e + ybx - \lambda^{-1}yx - \lambda^{-1}yxybx == e + ybx - \lambda^{-1}y(e + xyb)x \\ &= e + ybx - \lambda^{-1}y(\lambda b)x = e.\end{aligned}$$

Tedy $\lambda e - yx$ má levou i pravou jednotku, a tedy je invertovatelný. Proto je tvrzení dokázáno pro případ algbery s jednotku.

Nemá-li A jednotku, použijeme již dokázáné pro A_e. □

3.3.12 Nezáporné prvky C^*-algeber

Věta 3.3.104. *Nechť A je C^*-algebra. Pak pro každé $x \in A$ nezáporné existuje právě jeden prvek $y \geqslant 0$ splňující $y^2 = x$. Tento prvek navíc komutuje s x*

Důkaz. Vezměme funkci $g(t) = \sqrt{t}$, $t \in \sigma(x)$, a položme $y = g(x)$. Pak $y \geqslant 0$ a $x = \mathrm{id}(x) = (g^2)(x) = (g(x))^2 = y^2$.

Je-li nyní $z \in A$ jiný nezáporný prvek, uvažujme funkční kalkulus $\Phi\colon C(\sigma(z)) \to A$ pro z. Uvažujme funkci $f(t) = t^2$, $t \in \sigma(z)$. Pak $x = f(z)$ a tedy dle Věty 3.3.97(f) platí

$$z = \mathrm{id}(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(x) = y.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Definice 3.3.105. Nechť A je C^*-algebra a $x \in A$.

(a) Pokud $x \geqslant 0$, prvek garantovaný předcházející větou označíme jako $\sqrt{x}$.

(b) Je-li x hermitovský, je $x^2 \geqslant 0$ (viz Věta 3.3.97(d)). Označme $|x| = \sqrt{x^2}$.

Věta 3.3.106. *Nechť A je C^*-algebra, $x, y \in A$ jsou nezáporné a $t \geqslant 0$. Pak $x + y \geqslant 0$ i $tx \geqslant 0$.*

Důkaz. Krok 1. Předpokádejme nejprve, že A má jednotku e. Označme $z = x + y$ a položme $a = \|x\|$, $b = \|y\|$, $c = a + b$. Jelikož $\sigma(x) \subset [0, a]$, máme $\sigma(ae - x) \subset [0, a]$. Dle (b) platí $\|ae - x\| \leqslant a$.

Podobně dostáváme $\|be - y\| \leqslant b$. Proto platí

$$\|ce - z\| = \|(ae - x) + (be - y)\| \leqslant a + b = c.$$

Jelikož je $ce - z$ hermitovský, platí dle (a) inkluze $\sigma(ce - z) \subset [-c, c]$. Tedy

$$\sigma(z) = \sigma((z - ce) + ce) \subset [0, 2c].$$

Tedy $z \geqslant 0$.

Pro prvek $z = tx$, kde $t > 0$, máme $(ce - z) = t(\frac{c}{t}e - x)$, a tedy $\sigma(z) = t\sigma(x)$. Prot je i $z \geqslant 0$.

Krok 2. Nemá-li A jednotku, provedeme přecházející úvahy v A_e. Jelikož $\sigma(u) = \sigma_{A_e}(u)$ pro každé $u \in A$, je tím důkaz hotov.

□

Věta 3.3.107. *Nechť A je C^*-algebra. Pak pro každé $x \in A$ hermitovské existuje právě jedna dvojice nezáporných prvků x^+ a x^- taková, že*

(1) $x = x^+ - x^-$ *a*

(2) $x^- x^+ = x^+ x^- = 0$

Navíc pak platí

$|x| = x^+ + x^-$ *a tyto prvky spolu komutují.*

Důkaz. Uvažujme na spektru x funkce $f^+ \colon t \mapsto \max\{t, 0\}$ a $f^- \colon t \mapsto \max\{-t, 0\}$. Pak $\mathrm{id} = f^+ - f^-$ a $f^+ f^- = 0$. Tedy prvky $x^+ = f^+(x)$ a $x^- = f^-(x)$ splňují

$$x^+ - x^- = f^+(x) - f^-(x) = (f^+ - f^-)(x) = \mathrm{id}(x) = x \quad \text{a} \quad x^+ x^- = (f^+ f^-)(x) = 0 = (f^- f^+)(x) = x^- x^+.$$

Dále je prvek $y = x^+ + x^-$ nezáporný, neboť

$$\sigma(y) = \sigma(f^+ + f^-)(x) = \sigma(|\cdot|)(x) \subset [0, \infty),$$

a platí pro něj

$$y^2 = (x^+ + x^-) = (x^+)^2 + (x^-)^2 = (x^+ - x^-)^2 = x^2.$$

Tedy $y = |x|$ dle Věty 3.3.104.

Nechť nyní y_1, y_2 splňují (1) a (2). Pak $y_1 + y_2 \geqslant 0$ (viz Věta 3.3.106) a platí pro něj

$$(y_1 + y^2)^2 = y_1^2 + y_2^2 = (y_1 - y_2)^2 = (x^+ - x^-)^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2 = (x^+ - x^-)^2 = x^2.$$

Vzhledem k Větě 3.3.104 platí $y_1 + y_2 = |x| = x^+ + x^-$. Sečtením rovnosti

$$y_1 - y_2 = x^+ - x^- \quad \text{s} \quad y_1 + y_2 = x^+ + x^-$$

dostáváme $y_1 = x^+$, odečtením pak $y_2 = x^-$. □

Věta 3.3.108. *Nechť A je C^*-algebra. Pak platí následující tvrzení..*

(a) Pokud $x \in A$, pak $xx^* \geqslant 0$.

(b) *Pokud má A jednotku e, je pro každé $x \in A$ prvek $e + xx^*$ invertibilní.*

Důkaz. (a) *Krok 1.* Nejprve ukážeme, že $x = 0$, pokud $-x^*x \geqslant 0$. Mějme tedy takové x. Pak díky Větě 3.3.103 platí $\sigma(-xx^*) \subset \sigma(-x^*x) \cup \{0\} \subset [0, \infty)$, takže i $-x^*x \geqslant 0$. Rozložme $x = u + iv$, kde $u, v \in A$ jsou hermitovské. Pak

$$x^*x + xx^* = (u - iv)(u + iv) + (u - iv)(u + iv) = 2u^2 + 2v^2,$$

a tedy je prvek $x^*x = 2u^2 + 2v^2 - xx^*$ nezáporný. Tedy $\sigma(x^*x) \subset (-\infty, 0] \cap [0, \infty) = \{0\}$, což dle Věty 3.3.88(b) znamená $x^*x = 0$. Tedy $\|x\|^2 = \|x^*x\| = 0$.

Krok 2. Nechť $x \in A$ je libovolné. Pak prvek $y = x^*x$ je hermitovský, takže ho můžeme psát jako $y = y^+ - y^-$, kde y^+, y^- jsou nezáporné prvky dané Větou 3.3.107. Pak pro $z = xy^-$ platí

$$-z^*z = -y^-x^*xy^- = -y^-(y^+ - y^-)y^- = (y^-)^3,$$

takže $-z^*z \geqslant 0$. Dle prvního kroku tak máme $z = 0$. Proto $y^- = 0$, a tedy $x^*x = y = y^+$ je nezáporný.

(b) Jelikož $\sigma(xx^*) \subset [0, \infty)$ a $\sigma(e + xx^*) = \{1\} + \sigma(xx^*)$, je důkaz hotov. □

3.4 Základy harmonické analýzy

3.4.1 Topologické grupy

Definice 3.4.1. Nechť $(G, +,)$ je komutativní grupa, kde 0 značí neutrální prvek. Je-li τ topologie na G, řekneme, že (G, τ) je topologická grupa, pokud jsou operace sčítání

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (x, y) \in G \times G$$

a operace inverzního prvku

$$x \mapsto -x, \quad x \in G,$$

spojité.

dusledky o $V + tV \subset U$

Úmluva 3.4.2. *Nebude-li jinak řečeno, v této sekci bude symbol G značit lokálně kompaktní topologická komutativní grupu. Grupovou operaci budeme většinou značit jako $+$. Systém všech okolí 0 značíme jako $\tau(0)$.*

Tvrzení 3.4.3. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Pro každé $a \in G$ je zobrazení $x \mapsto a + x$ homeomorfismus.*

(b) *Existuje báze okolí 0 tvořená relativně kompaktními symetrickými množinami. (Množina $U \in$ je symetrická, pokud $-U = U$.)*

(c) *Pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$.*

(d) *Pro každé $x \in G$ je $\{x + U : U \in \tau(0)\}$ systém všech okolí x.*

Důkaz. (a) Ihned plyne ze spojitosti sčítání a invreze.

(b) Pro dané $U \in \tau(0)$ nalezneme relativně kompaktní $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$. Pak $W = V \cap (-V)$ je hledaná množina.

(c) Jelikož $0 + 0 = 0$, plyne tvrzení ze spojitosti sčítání.

(d) Tvrzení plyne z (a). □

Tvrzení 3.4.4. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $\tau(0)$ značí systém okolí 0. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Je-li $A \subset G$ libovolná množina a $U \subset G$ otevřená, je $A + U$ též otevřená.*

(b) *Jsou-li $K, L \subset G$ kompakty, je $K + L$ též kompakt.*

(c) *Je-li $K \subset G$ kompact a $F \subset G$ je uzavřená množina disjunktní s K, existuje $U \in \tau(0)$ splňující $(K + U) \cap (F + U) = \emptyset$.*

Důkaz. (a) Tvrzení plyne z Tvrzení 3.4.3(a) a identity

$$A + U = \bigcup \{A + u : u \in U\}.$$

(b) Jelikož je $K \times L \subset G \times G$ kompakt a zobrazení sčítání $\varphi : K \times L \to G$ je spojité, je

$$K + L = \varphi(K \times L)$$

kompakt.

(c) Nechť K a F splňující předpoklady tvrzení jsou dány. Pro každé $x \in K$ nalezneme $U_x \in \tau(0)$ symetrické okolí splňující $(x+U_x+U_x+U_x)\cap F = \emptyset$. Pak $(x+U_x+U_x)\cap(F+U_x) = \emptyset$. (Pokud by totiž platilo $x+u_1+u_2 = y+u_3$, kde $y \in F$ a $u_1, u_2, u_3 \in U_x$, dostali bychom $y = x + u_1 + u_2 - u_3 \in (x + U_x + U_x + U + x) \cap F$.)

Díky kompaktnosti existuje konečná množina $\{x_1 \dots, x_n\} \subset K$ splňující $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i+U_{x_i})$. Pak $V = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ je prvkem $\tau(0)$ a

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i} + U_{x_i}) \subset G\backslash(F + V)..$$

□

Příklady 3.4.5. (a) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$ s grupovou operací definovanou jako sčítání modulo n diskrétní kompaktní grupa.

(b) Pro každé $d \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{R}^d$ se sčítáním a eukleidovskou topologií nekompaktní grupa.

(c) Prostor $\mathbb{T}$ s násobením je kompaktní grupa.

(d) Prostor $\mathbb{Z}$ se sčítáním je diskrétní nekompaktní grupa.

(e) Prostor $(0, \infty)$ s násobením je nekompaktní grupa.

(f) Součinová grupa $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se součinovou topologií a sčítáním definovaným po souřadnicích je kompaktní.

Věta 3.4.6. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak existuje právě jedna (až na násobek) translačně invariantní nenulová Radonova míra na G. Ta je kladná na neprázdných otevřených podmnožinách G.*

Důkaz. Dokážeme pouze závěrečné tvrzení. Nechť m je zkonstruovaná míra. Nechť $U \subset G$ je neprázdná otevřená množina. Předpokládejme, že $m(U) = 0$. Pak pro libovolný kompakt $K \subset G$ existuje konečná množina $F \subset K$ taková, že $K \subset F + U$. Z translanční invariance m pak plyne $m(K) = 0$. Díky regularitě míry m dostáváme $m = 0$, což je spor. □

Úmluva 3.4.7. *Míře garantované přecházející větou se říká Haarova míra. V dalším textu ji budeme značit symbolem m.*

Věta 3.4.8. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pro $f, g \in L^1(G)$ definujme*

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(x-y)\, dm(y), \quad x \in G.$$

Dále položme

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}, \quad x \in G, \quad f \in L^1(G).$$

Pak $(L^1(G), *)$ je komutativní Banachova algebra s izometrickou involucí.

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Věty 1.5.19. Ověřme pouze vlastnosti involuce. Její komplexně sdružená linearita je jasná. Pokud $f, g \in L^1(G)$ jsou dány, pak

$$\begin{aligned}(g^* * f^*)(x) &= (f^* * g^*)(x) = \int_G f^*(y)g^*(x-y)\, dm(y) = \int_G \overline{f(-y)g(y-x)}\, dm(y) \\ &= \overline{\int_G f(-y)g(y-x)\, dm(y)} = \overline{\int_G f(y)g(-y-x)\, dm(y)} \\ &= \overline{(f*g)(-x)} = (f*g)^*(x).\end{aligned}$$

Konečně

$$\|f^*\| = \int_G \left|\overline{f(-x)}\right| dm(x) = \int_G |f(x)|\, dm(x) = \|f\|,$$

a tedy je $*$ izometrie. □

Tvrzení 3.4.9. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $p \in [1, \infty)$. Pak $C_c(G)$ je husté v $L^p(G)$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^p(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje kompakt $K \subset G$ takový, že $\int_{G\backslash K} |f|^p\, dm < \varepsilon$.

Vskutku, uvažujme množiny

$$A = \{x \in G\colon\ |f(x)|^p > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in G\colon\ |f(x)|^p \geqslant \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $m(A_n) < \infty$ a $|f|^p \chi_{A_n} \to |f|^p \chi_A$. Dle Lebesgueovy věty máme

$$\int_G |f|^p \chi_{A_n}\, dm \to \int_G |f|^p \chi_A\, dm = \|f\|_p^p.$$

Vezmeme-li nyní dostatečně velký index $n \in \mathbb{N}$ a použijeme regularitu míry m, dostaneme požadovaný kompakt.

Nyní již stačí použít metodu důkazu Důsledku 1.5.17. □

Definice 3.4.10. Nechť G je topologická grupa a (X, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f\colon G \to X$ je stejnoměrně spojité, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje U okolí 0 takové, že $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ kdykoliv $x - y \in U$.

Lemma 3.4.11. *Nechť G je topologická grupa a (P, ρ) metrický prostor. Nechť $p_0 \in X$ a $f\colon G \to X$ je spojité zobrazení takové, že množina $K = \overline{\{x \in G\colon f(x) \neq p_0\}}$ je kompaktní. Pak f je stejnoměrně spojité.*

Speciálně je každý element $C_c(G)$ stejnoměrně spojitý.

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ a každé $x \in K$ nalezneme U_x okolí 0 takové, že $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pro $y \in x + U_x$. Nalezneme V_x symetrické okolí 0 takové, že $V_x + V_x \subset U_x$. Vybereme konečně mnoho prvků $x_1, \dots, x_n$ z K takových, že $K \subset bigcup_{i=1}^n(x_i + V_{x_i})$. Položme $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Nechť $x, y \in G$ splňují $x - y \in V$. Předpokládejme nejprve, že $\{x, y\} \cap K \neq \emptyset$. Nechť například x je obsažen v K. pak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in x_i + V_{x_i}$. Pak $x - y \in x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subset x_i + U_{x_i}$, a tedy $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pokud $\{x, y\} \cap K = \emptyset$, máme $\rho(f(x), f(y)) = \rho(p_0, p_0) = 0 < \varepsilon$. □

Tvrzení 3.4.12. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $p \in [1, \infty)$. Pak pro každou funkci $f \in L^p(G)$ je zobrazení $x \mapsto f_x$, kde $f_x(y) = f(y - x)$ pro $y \in G$, stejnoměrně spojité z G do $L^p(G)$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^p(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $g \in C_c(G)$ takové, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Označme $K = \operatorname{spt} g$ a nechť U je kompaktní okolí 0. Pak $m(K + U) < \infty$. Zvolme V okolí 0 takové, že $V \subset U$ a $|g(x) - g(y)| < \varepsilon(m(K + U))^{-1}$. Pak $\operatorname{spt} g_x \subset K + U$ a pro $x \in V$ platí

$$\begin{aligned}\|g - g_x\|_p &= \left(\int_G |g(z) - g(z - x)|^p \, dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{K+U} \varepsilon^p (m(K + U))^{-p} \, dm\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \varepsilon(m(K + U))^{-1} m(K + U) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Pak pro tato x máme

$$\|f - f_x\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_x\|_p + \|g_x - f_x\|_p \leqslant 3\varepsilon,$$

jelikož $\|g_x - f_x\|_p = \|(g - f)_x\|_p = \|f - g\|_p$.

Konečně pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in G$ platí

$$\|f_x - f_y\|_p = \|(f - f_{y-x})_x\|_p = \|f - f_{y-x}\|_p < \varepsilon.$$

□

Tvrzení 3.4.13. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém

$$\{g_U = \frac{1}{m(U)} \chi_U \colon U \textit{je relativně kompaktní okolí } 0\}$$

je aproximativní jednotka v $L^1(G)$, tj. pro každé $f \in L^(G)$ a $\varepsilon > 0$ existuje U relativně kompaktní okolí 0 takové, že $\|f - f * g_V\| < \varepsilon$ pro každé V okolí 0 splňující $V \subset U$.

(b) Grupa G diskrétní právě tehdy, když $L^1(G)$ má jednotku. V takovém případě je pak jednotka $L^1(G)$ rovna $\chi_{\{0\}}$. (Předpokládáme, že m je normalizovaná tak, aby $m(\{0\}) = 1$.)

Důkaz. (a) Nechť $f \in L^1(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $g \in C_c(G)$ splňující $\|f - g\| < \varepsilon$ a zvolíme lokálně kompaktní $W \in \tau(0)$. Vezměme $\varepsilon' > 0$ splňující $\varepsilon'(m(K + W))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Nechť $U \subset W$ je takové lokálně kompaktní okolí 0, že $|g(x) - g(y)| < \varepsilon'$ pro $x, y \in U$ splňující $x - y \in G$. Pak pro V okolí 0 splňující $V \subset U$ platí

$$\begin{aligned}|g(x) - (g * g_V)(x)| &= \left|\int_G g(x) g_V(y) \, dm(y) - \int_G g_V(y) g(x - y) \, dm(y)\right| \\ &\leqslant \int_V |g(x) - g(x - y)| \, g_V(y) \, dm(y) \leqslant \varepsilon'.\end{aligned}$$

Jelikož $\operatorname{spt}(g * g_V) \subset K + V \subset K + U$, platí

$$\|g - g * g_V\|_p = \left(\int_G |g - g * g_V|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon'(m(K + W))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Pak pro $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$ platí

$$\|f - f * g_V\| \leqslant \|f - g\| + \|g - g * g_V\| + \|(g - f) * g_V\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \|g - f\| \, \|g_V\| \leqslant 3\varepsilon.$$

(b) Pokud je G diskrétní, je zjevně $\chi_{\{0\}}$ jednotka $L^1(G)$.

Předpokládejme nyní, že $h \in L^1(G)$ je jednotka. Vezměme libovolný kompakt $K \subset G$ neobsahující 0. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompaktní $U \in \tau(0)$ takové, že $U \cap K = \varnothing$ a $\|h - h * g_U\| < \varepsilon$. Pak

$$\varepsilon > \|h - h * g_U\| = \|h - g_U\| = \int_G |h - g_U| \, dm \geqslant \int_K |h - g_U| \, dm = \int_K |h| \, dm.$$

Jelikož ε bylo libovolné, dostáváme $\int_K |h| \, dm = 0$, a tedy $h = 0$ na K. Proto $h = 0$ na $G\backslash\{0\}$.

Protože $h \neq 0$, nutně platí $m(\{0\}) > 0$. Pak pro libovolný kompakt $K \subset G$ platí

$$\infty > m(K) = \sum_{x \in K} m(\{x\}) = \sum_{x \in K} m(\{0\}),$$

a tedy K je konečný. Nechť $U \in \tau(0)$ je otevřené relativně kompaktní okolí. Pak U je konečná množina, a tedy i $\{0\} = U\backslash(U\backslash\{0\})$ je otevřená množina. Proto je G diskrétní. □

3.4.2 Vztah $\Delta(L^1(G))$ a duální grupy

Definice 3.4.14. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\gamma\colon G \to \mathbb{T}$ je charakter, pokud γ je grupový homomorfizmus, tj. $\gamma(x + y)\gamma(x)\gamma(y)$ pro každé $x, y \in G$. Symbolem $\widehat{G}$ rozumíme množinu všech spojitých charakterů a této množině říkáme duální grupa. Uvažujme na $\widehat{G}$ bodové násobení, tj. $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$, kde $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ a $x \in G$.

Lemma 3.4.15. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\widehat{G}$ je též grupa, přičemž jednotková funkce je jednotka $\widehat{G}$, $\gamma(0) = 1$ pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ a*

$$\gamma(-x) = (\gamma^{-1})(x) = (\gamma(x))^{-1} = \overline{\gamma(x)}, \quad x \in G, \gamma \in \widehat{G}.$$

Dále je každý charakter stejnoměrně spojitý na G.

Důkaz. Jednotková funkce je zjevně jednotkou $\widehat{G}$. Dále $(\gamma(0))^2 = \gamma(0 + 0) = \gamma(0)$, a tedy $\gamma(0) = 1$. Konečně ověříme, že pro $x \in G$ a $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$1 = \gamma(0) = \gamma(x - x) = \gamma(x)\gamma(-x),$$

z čehož plyne požadovaný závěr.

Pro $\gamma \in \widehat{G}$ a $x, y \in G$ dále platí

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| = \left|\gamma^{-1}(y)\right| |\gamma(x - y) - 1| = |\gamma(x - y) - 1| \, .$$

Zvolíme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ okolí $U \in \tau(0)$ takové, že $|\gamma(z) - 1| < \varepsilon$ pro $z \in U$, pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$ platí $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon$. □

Věta 3.4.16. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L^1(G)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ existuje právě jedno $\gamma \in \widehat{G}$ takové, že $\varphi(f) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)} \, dm(x)$, $f \in A$.

(b) Je-li $\gamma \in \widehat{G}$, pak zobrazení $f \mapsto \int_G f(x)\overline{\gamma(x)} \, dm(x)$ je v $\Delta(A)$.

Důkaz. (a) Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je dáno. Jelikož je $\varphi \in B_{A*}$, existuje jednoznačně určený prvek $\phi \in L^\infty(G)$ splňující $\varphi(f) = \int_G f\phi \, dm$ a $\|\phi\|_\infty = \|\varphi\|$. Nechť $f, g \in A$ jsou libovolné. Pak

$$\begin{aligned}
\int_G \varphi(f)g(y)\phi(y) \, dm(y) &= \varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f * g) = \varphi(g * f) = \int_G (f * g)(x)\phi(x) \, dm(x) \\
&= \int_G \left(\int_G g(y)f(x - y) \, dm(y) \right) \phi(x) \, dm(x) = \int_G g(y) \left(\int_G f(x - y)\phi(x) \, dm(x) \right) dm(y) \\
&= \int_G g(y)\varphi(f_y) \, dm(y).
\end{aligned}$$

Jelikož tato rovnost platí pro každé $g \in A$, dostáváme pro každé $f \in A$ rovnost

$$\varphi(f)\phi(y) = \varphi(f_y) \quad \text{pro skoro všechna } y. \tag{3.29}$$

Zvolme $f \in A\backslash \operatorname{Ker}\varphi$. Jelikož je dle Tvrzení 3.4.12 zobrazení $y \mapsto f_y$ spojité, dostáváme, že ϕ má spojitého reprezentanta. Lze tedy předpokládat, že ϕ je spojité, a že tedy (3.29) platí pro všechna $y \in G$.

Z rovnosti 3.29 obdržíme

$$\varphi(f)\phi(x + y) = \varphi(f_{x+y}) = \varphi((f_x)_y) = \varphi(f_x)\phi(y)\varphi(f)\phi(x)\phi(y), \quad x, y \in G, f \in A,$$

z čehož plyne vztah $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in G$. Jelikož $\|\phi\|_\infty$, podobně jako v Lemmatu 3.4.15 odvodíme, že že $\phi(-x) = (\phi(x)^{-1}$, a že tedy $\operatorname{Rng}\phi \subset \mathbb{T}^{\cdot\cdot}$. Tedy $\phi \in \widehat{G}$. Položíme-li nyní $\gamma(x) = \overline{\phi(x)}$, $x \in G$, obdržíme požadovaný charakter.

(b) Nechť $\gamma \in \widehat{G}$ je dáno. Nechť $\varphi \in A^*$ je určeno funcí γ, tj. $\varphi(f) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dm(x)$, $f \in A$. Pak pro $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}
\varphi(f * g) &= \int_G (f*g)(x)\overline{\phi(x)}\, dm(x) = \int_{G\times G} f(y)g(x-y)\overline{\gamma(x)}\, d(m\times m)(x,y) \\
&= \int_{G\times G} f(y)g(x-y)\overline{\gamma(y+(x-y))}\, d(m\times m)(x,y) \\
&= \int_G f(y)\overline{\gamma(y)} \left(\int_G g(x-y)\overline{\gamma(x-y)}\, dm(x)\right) dm(y) \\
&= \int_G f(y)\overline{\gamma(y)} \left(\int_G g(x)\overline{\gamma(x)}\, dm(x)\right) dm(y) \\
&= \left(\int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\, dm(y)\right)\left(\int_G g(x)\overline{\gamma(x)}\, dm(x)\right) \\
&= \varphi(f)\varphi(g).
\end{aligned}$$

Jelikož γ je různá od 0 na G, je $\varphi \neq 0$. Tedy $\varphi \in \Delta(A)$. $\square$

3.4.3 Fourierova transformace

Definice 3.4.17. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak Fourierova transformace funkce $f \in L^1(G)$ je funkce $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ definovaná jako

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\, dm(y), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Věta 3.4.18. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L^1(G)$. Nechť $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ a nechť F značí Fourierovu transformaci. Pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ označme γ_φ jednoznačně určený prvek $\widehat{G}$ daný Větou 3.4.16. Pak*

$$(\Gamma f)(\varphi) = (Ff)(\gamma_\varphi), \quad \varphi \in \Delta(A), \quad f \in A.$$

Dále platí následující tvrzení.

(a) Zobrazení F je $*$-homomorfizmus A do $\ell^\infty(\widehat{G}$ a normě nejvýše 1.

(b) Množina $\operatorname{Rng} F$ je podalgebra $\ell^\infty(\widehat{(G)})$ uzavřená na komplexní sdružení a oddělující body $\widehat{G}$. Dále pro každé $f \in A$ a $\gamma_0 \in \widehat{G}$, $x_0 \in G$, platí

$$\widehat{f_{-x_0}}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma) \quad a \quad \widehat{\gamma_0 f}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Speciálně jsou funkce

$$\gamma \mapsto \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}) \quad a \quad \gamma \mapsto \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G},$$

obsaženy v $\operatorname{Rng} F$.

(c) Pro $f \in A$ a $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$(f*\gamma)(x) = \gamma(x)\widehat{f}(\gamma) \quad a \quad \widehat{f}(\gamma) = (f*\gamma)(0), \qquad x \in G, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Důkaz. Rovnost $\Gamma = F$ je dokázána v Větě 3.4.16.

(a) Zachovávání algebraických operací a odhad normy F plyne z Věty 3.3.65. Dále pro $f \in A$ platí

$$\begin{aligned}
(Ff^*)(\gamma) &= \int_G f^*(x)\overline{\gamma(x)}\, dm(x) = \int_G \overline{f(-x)\gamma(x)}\, dm(x) = \overline{\int_G f(-x)\gamma(x)\, dm(x)} \\
&= \overline{\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dm(x)} = \overline{Ff(\gamma)},
\end{aligned}$$

a F tedy zachovává involuci.

(b) Zřejmě je $\operatorname{Rng} F$ podalgebra $\ell^\infty(\widehat{G})$ oddělující body (opět viz Věta 3.3.65) a díky (a) je uzavřená na komplexní sdružení. Nechť $f \in A$, $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a $x_0 \in G$ jsou dány. Položme $g(x) = \gamma_0(x)f(x)$, $x \in G$, a počítejme

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\gamma) &= \int_G f(x)\gamma_0(x)\overline{\gamma(x)}\, dm(x) = \int_G f(x)\overline{(\gamma\gamma_0^{-1})(x)}\, dm(x) \\
&= \widehat{(f)}(\gamma\gamma_0^{-1}), \quad \gamma \in \widehat{G}.
\end{aligned}$$

Dále pro funkci $g = f_{-x_0}$ platí

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\gamma) &= \int_G f_{-x_0}(y)\overline{\gamma(y)}\,dm(y) = \int_G f(y+x_0)\gamma(-y)\,dm(y) = \int_G f(z)\gamma(x_0-z)\,dm(z)\\ &= \gamma(x_0)\int_G f(z)\overline{\gamma(z)}\,dm(z) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.\end{aligned}$$

(c) Pro $f \in A$ a $\gamma \in \widehat{G}$ máme

$$(f * \gamma)(x) = \int_G f(y)\gamma(x-y)\,dm(x) = \gamma(x)\int_G f(y)\gamma(-y)\,dm(y) = \gamma(x)\widehat{f}(\gamma), \quad x \in G.$$

Druhá rovnost pak ihned plyne z první. □

Tvrzení 3.4.19. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L^1(G)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li G diskrétní, je $\Delta(A)$ je kompaktní.

(b) Je-li G kompaktní, je $\Delta(A)$ je diskrétní.

Důkaz. (a) Je-li G diskrétní, má A jednotku, a tedy je $\Delta(A)$ komapktní (viz Věta 3.3.61(b)).

(b) Nechť G je kompaktní. Předpokládejme, že m je normalizována tak, aby $m(G) = 1$. *Krok 1.* Pak funkce $e(x) = 1$, $x \in G$, je v A a

$$(e * e)(x) = \int_G e(y)e(x-y)\,dm(y) = m(G) = 1 = e(x), \quad x \in G.$$

Uvažujme libovolné $\varphi \in \Delta(A)$. Pak $\varphi(e) = \varphi(e*e) = \varphi(e)^2$. Tedy $\varphi(e) \in \{0,1\}$. Vezmeme charakter $\gamma \in \widehat{G}$ odpovídající φ, který je dán Větou 3.4.16. Předpokládejme, že $\varphi(e) = 1$. Pak pro každé $x_0 \in G$ platí

$$\begin{aligned}1 = \varphi(e) &= \int_G \gamma(-x)\,dm(x) = \int_G \gamma(-x-x_0+x_0)\,dm(x) = \gamma(x_0)\int_G \gamma(-x-x_0)\,dm(x)\\ &= \gamma(x_0)\int_G \gamma(-x)\,dm(x) = \gamma(x_0)\varphi(e) = \gamma(x_0).\end{aligned}$$

Tedy odpovídající charakter γ je roven e.

Krok 2. Je-li nyní $\varphi_0 \in \Delta(A)$ dáno, nechť γ_0 je jemu odpovídající charakter. Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je libovolné a nechť γ je jemu odpovídající charakter. Položme $\delta(x) = \gamma_0(x)\gamma(-x)$, $x \in G$. Pak $\delta \in \widehat{G}$ a pro funkci $\gamma_0 \in A$ platí

$$\widehat{\gamma_0}(\varphi) = \varphi(\gamma_0) = \int_G \gamma_0(x)\gamma(-x)\,dm(x) = \int_G \delta(x)\,dm(x).$$

Pokud $\varphi = \varphi_0$, tj. $\delta = e$, dostáváme $\widehat{\gamma_0}(\varphi_0) = 1$. Pokud $\varphi \neq \varphi_0$, charakter δ není roven e, a tedy $\widehat{\gamma_0}(\varphi) = 0$ dle prvního kroku. Protože je funkce $\widehat{\gamma_0}$ spojitá na $\Delta(A)$ a $\{\varphi_0\} = \{\varphi \in \Delta(A)\colon |\widehat{\gamma_0}(\varphi)| > 0\}$, je množina $\{\varphi_0\}$ otevřená. tedy je $\Delta(A)$ diskrétní. □

3.4.4 Duální topologická grupa

Definice 3.4.20. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Uvažujme na $\widehat{G}$ topologii τ_K lokálně stejnoměrné konvergence. Přesněji, uvažujme množiny

$$U_{K,\varepsilon} = \{\gamma \in \widehat{G}\colon |\gamma(x) - 1| < \varepsilon, x \in K\}, \quad K \subset G \text{ kompaktní}, \varepsilon > 0. \tag{3.30}$$

Množina $V \subset \widehat{G}$ je pak τ_K-otevřená, pokud pro každé $\gamma \in V$ existuje množina $U_{K,\varepsilon}$ výše uvedeného typu splňující $\gamma U_{K,\varepsilon} \subset V$.

Tvrzení 3.4.21. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $(\widehat{G}, \tau_K)$ je topologická grupa.*

Důkaz. *Krok 1.* Ukažme nejprve, že τ_K je topologie. K tomu stačí ověřit, že pro dvě množiny U_{K_1,ε_1} a U_{K_2,ε_2} typu (3.30) existuje množina $U_{K,\varepsilon}$ splňující $U_{K,\varepsilon} \subset U_{K_1,\varepsilon_1} \cap U_{K_2,\varepsilon_2}$. Zjevně však stačí položit $K = K_1 \cup K_2$ a $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Krok 2. Ověříme, že grupové operace jsou na $\widehat{G}$ spojité. Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je pevné a $U = \gamma_0^{-1}U_{K,\varepsilon}$ je dané okolí γ_0^{-1}. Uvažujme okolí γ_0 tvaru $\gamma_0 U_{-K,\varepsilon}$. Pak pro γ z tohoto okolí tvaru $\gamma = \gamma_0\delta$, kde $\delta \in U_{K,\varepsilon}$, platí $\gamma^{-1} = \gamma_0^{-1}\delta^{-1} \in U$. To plyne z toho, že

$$\left|\delta^{-1}(x) - 1\right| = |\delta(-x) - 1| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

K ověření spojitosti násobení uvažujme charaktery $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ a okolí bodu $\gamma_1\gamma_2$ tvaru $\gamma_1\gamma_2 U_{K,\varepsilon}$. Ověříme, že

$$\mu_1\mu_2 \in \gamma_1\gamma_2 U_{K,\varepsilon}, \quad \mu_1 \in \gamma_1 U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}, \mu_2 \in \gamma_2 U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Nechť tedy $\mu_i = \gamma_i\delta_i$ pro nějaké $\delta_i \in U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}$, $i = 1, 2$. Pak pro $x \in K$ platí

$$|\delta_1(x)\delta_2(x) - 1| = |(\delta_1(x) - 1)\delta_2(x) + (\delta_2(x) - 1)| \leqslant |\delta_1(x) - 1| \, |\delta_2(x)| + |\delta_2(x) - 1| < \varepsilon.$$

Tedy operace násobení $\cdot\colon \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}$ je spojitá. □

Lemma 3.4.22. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa, $A = L^(G)$ a $f \in A$. Nechť $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ je zobrazení dané Větou 3.4.16. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení

$$(x, \varphi) \mapsto \widehat{f_x}(\phi(\varphi)), \quad (x, \varphi) \in G \times \Delta(A),$$

spojité na $G \times \Delta(A)$.

(b) Zobrazení

$$(x, \varphi) \mapsto (\phi(\varphi))(x), \quad (x, \varphi) \in G \times \Delta(A),$$

je spojité na $G \times \Delta(A)$.

Důkaz. Nechť $\Gamma\colon A \to \mathcal{C}_0(\Delta(A))$ značí Gelfandovu transformaci. Připomeňme, že

$$\widehat{f_x}(\phi(\varphi)) = \int_G f_x(y)(\phi(\varphi))(-y)\, dm(y) = \varphi(f_x) = (\Gamma f_x)(\varphi), \quad \varphi \in \Delta(A).$$

(a) Nechť $x_0 \in G$ a $\varphi_0 \in \Delta(A)$ jsou dány. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Díky Tvrzení 3.4.12 a spojitosti funkce Γf_{x_0} na $\Delta(A)$ existuje okolí U bodu x_0 a okolí V funkcionálu φ_0 takové, že

$$\|f_x - f_{x_0}\|_1\, \varepsilon,\ x \in U, \quad \text{a} \quad |(\Gamma f_{x_0})(\varphi) - (\Gamma f_{x_0})(\varphi_0)| < \varepsilon,\ \varphi \in V.$$

Pak

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f_x}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))\right| &\leqslant \left|\widehat{f_x}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi))\right| + \left|\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))\right| \\ &= \left|\widehat{f_x - f_{x_0}}(\phi(\varphi))\right| + \left|\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))\right| \\ &= |(\Gamma(f_x - f_{x_0}))(\varphi)| + \left|\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))\right| \\ &\leqslant \|f_x - f_{x_0}\|_A + |\Gamma f_{x_0}(\varphi) - (\Gamma f_{x_0})(\varphi_0)| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Nechť $(x_0, \varphi_0) \in G \times \Delta(A)$ je dáno. Nalezneme $f \in A$ takové, že $(\Gamma f)(\varphi_0) = \varphi_0(f) \neq 0$. Ze spojitosti Γf plyne existence okolí U bodu φ_0, na kterém je funkce Γf nenulová. Věta 3.4.18(b) dává pro $(x, \gamma) \in G \times \widehat{G}$ rovnost

$$\gamma(x)\widehat{f}(\gamma) = \widehat{f_{-x}}(\gamma),$$

a tedy

$$(\phi(\varphi))(x) = \widehat{f_{-x}}(\phi(\varphi))((\Gamma f)(\phi(\varphi)))^{-1}, \quad (x, \varphi) \in G \times U.$$

Jelikož je funkce $(x, \varphi) \mapsto ((\Gamma f)(\phi(\varphi)))^{-1}$ spojitá na $G \times U$, použitím (a) dostáváme spojitost funkce $(x, \varphi) \mapsto (\phi(\varphi))(x)$ v bodě (x_0, φ_0). Tím je důkaz dokončen. □

Věta 3.4.23. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L^1(G)$. Nechť $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ je zobrazení dané Větou 3.4.16. Pak ϕ je homeomorfizmus.*

Důkaz. Krok 1. Nechť $\varphi_0 \in \Delta(A)$ je dáno. Označíme $\gamma_0 = \phi(\varphi_0)$ a pro $\varphi \in \Delta(A)$ pišme $\gamma_\varphi = \phi(\varphi)$ (tj. $\gamma_0 = \gamma_{\varphi_0}$). Nechť $\phi(\varphi_0)U_{K,\varepsilon}$ je dané okolí $\phi(\varphi_0)$ v $(\widehat{G}, \tau_K)$. Dle Lemmatu 3.4.22(b) pro každé $y \in K$ nalezneme okolí U_y body y a okolí V_y bodu φ_0 takové, že

$$|\gamma_\varphi(x) - \gamma_0(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, \varphi) \in U_y \times V_y.$$

Vybereme konečně mnoho bodů $y_1, \dots, y_n$ z K tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$, a položíme $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$. Pak pro $\varphi \in V$ platí $\phi(\varphi) \in \gamma_0 U_{K,\varepsilon}$.

Vskutku, nechť $x \in K$ je libovolné. Vybereme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in U_{y_i}$. Jelikož je $\varphi \in V \subset V_{y_i}$, máme

$$|\gamma_\varphi(x) - \gamma_0(x)| \leqslant |\gamma_\varphi(x) - \gamma_0(y)| + |\gamma_0(y) - \gamma_0(x)| < \varepsilon.$$

Tedy $\gamma_\varphi = \gamma_0(\gamma_0^{-1}\gamma_\varphi) \in \gamma_0 U_{K,\varepsilon}$.

Tím je ověřena spojitost ϕ.

Krok 2. Abychom ukázali spojitost inverzního zobrazení, vezměme $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a označme $\varphi_0 = \phi^{-1}(\gamma_0)$. Nechť U je dané okolí φ_0. Pak lze předpokládat, že

$$U = \{\varphi \in \Delta(A)\colon\ |\varphi(f_i) - \varphi_0(f_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$ a funkce $f_1, \dots, f_n \in A$. Nechť $M \in (0, \infty)$ splňuje $M > \max\{\|f_i\| : i = 1, \dots, n\}$. Nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že

$$\int_{G \setminus K} |f_i|\, dm < \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Uvažujme okolí $\gamma_0 U_{K, \frac{\varepsilon}{4}}$. Pak $\phi^{-1}(\gamma) \in U$ pro každé $\gamma \in \gamma_0 U_{K, \frac{\varepsilon}{4M}}$.

Vskutku, je-li γ z této množiny, označme $\varphi = \phi^{-1}(\gamma)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned}
|\varphi(f_i) - \varphi_0(f_i)| &= \left| \int_G f_i(x) \overline{(\gamma(x) - \gamma_0(x))}\, dm(x) \right| \\
&\leqslant \int_{G \setminus K} 2\, |f_i(x)|\, dm(x) + \int_K |f_i(x)|\, |\gamma(x) - \gamma_0(x)|\, dm(x) \\
&\leqslant 2 \frac{\varepsilon}{4} + M \frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy i ϕ^{-1} je spojité a důkaz je tak dokončen. ☐

Důsledek 3.4.24. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $F\colon L^1(G) \to \ell^\infty(\widehat{G})$ je Fourierova transformace. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $\operatorname{Rng} F \subset C_0(\widehat{G})$ a $\operatorname{Rng} F$ je podalgebra uzavřená na komplexní sdružení a oddělující body $\widehat{G}$.

(b) Prostor $\operatorname{Rng} F$ je hustý v $C_0(\widehat{G})$.

(c) Pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ existuje $f \in C_c(G)$ takové, že $\widehat{f}(\gamma) \neq 0$.

Důkaz. Nechť $A = L^1(G)$ a $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ značí Gelfandovu transformaci. Pak $\operatorname{Rng} \Gamma$ je podalgebra $C_0(\Delta(A))$ oddělující body $\Delta(A)$ a uzavřená na komplexní sdružení (viz Věta 3.4.18(b)). Dle Věty 3.4.23 je zobrazení $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ surjektivní homeomorfizmus a navíc dle Věty 3.4.18 platí

$$(\Gamma f)(\varphi) = (F f)(\phi(\varphi)), \quad \varphi \in \Delta(A).$$

Proto platí (a).

Tvrzení (b) pak plyne za pomoci Stoneovy–Weierstrassovy věty z (a).

(c) Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Nechť δ značí funkci $\delta(x) = 1$, $x \in \widehat{G}$. Nalezneme funkci $f \in C_c(G)$ takovou, že $\int_G f\, dm > 0$. Pak

$$\widehat{f}(\delta) = \int_G f(x) \delta(x)\, dm(x) = \int_G f(x)\, dm(x) > 0.$$

Funkce $g\colon x \mapsto \gamma_0(x) f(x)$ pak dle Věty 3.4.18(b) splňuje

$$\widehat{g}(\gamma_0) = \widehat{f}(\gamma_0 \gamma_0^{-1}) = \widehat{f}(\delta) > 0.$$

Tvrzení je tedy dokázáno. ☐

Lemma 3.4.25. *Nechť $\gamma\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ je nenulová spojitá funkce splňující rovnici*

$$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y), \quad x, y \in [0, \infty). \tag{3.31}$$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\gamma(x) = e^{\lambda x}$, $x \in [0, \infty)$.

Důkaz. Za prvé si povšimněme, že $\gamma(0) = 1$. Vskutku, z rovnosti $\gamma(0) = \gamma(0 + 0) = (\gamma(0))^2$ plyne $\gamma(0) \in \{0, 1\}$. Kdyby $\gamma(0) = 1$, platí $\gamma(x) = \gamma(x)\gamma(0) =$ pro $x \in [0, \infty)$, což by byl spor s předpokladem.

Položme nyní $\omega(x) = \int_0^x \gamma(t)\, dt$, $x \in [0, \infty)$. Pak ω je spojitě diferencovatelná funkce na $[0, \infty)$ (v bodě 0 uvažujeme derivaci zprava), která není identicky rovna 0. (V tom případě by totiž $\gamma(x) = \omega'(x) = 0$ na $[0, \infty)$, což by byl spor.) Existuje proto $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že $\omega(\delta) \neq 0$. Z rovnosti (3.31) pak plyne vztah

$$\omega(\delta)\gamma(x) = \gamma(x) \int_0^\delta \gamma(t)\, dt = \int_0^\delta \gamma(x + t)\, dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\, dt = \omega(x + \delta) - \omega(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Pravá strana této rovnosti je spojitě diferencovatelná funkce na $[0, \infty)$, a tedy i γ má spojitou derivaci na $[0, \infty)$. Nechť $x \in [0, \infty)$ je pevné. Pak je funkce $y \mapsto \gamma(x + y)$ diferencovatelná na $[0, \infty)$ a derivováním (3.31) podle y dostaneme rovnici

$$\gamma'(x + y) = \gamma(x)\gamma'(y), \quad y \in [0, \infty).$$

Dosazením $y = 0$ dostáváme rovnost

$$\gamma'(x) = \gamma(x)\gamma'(0), \quad x \in [0, \infty).$$

Existují proto $a, b \in \mathbb{C}$ takové, že $\gamma(x) = a e^{bx}$. Protože $\gamma(0) = 1$, platí $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in \mathbb{R}$. ☐

Příklady 3.4.26. (a) Nechť $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ a $G = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Uvažujme grupu $H = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, \ldots, n-1\}$ chápanou jako podgrupu $\mathbb{T}$. Pak zobrazení $\phi\colon H \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})(j) = e^{ij\frac{2\pi k}{n}}, \quad j \in G,$$

je grupový homomorfizmus a topologický homeomorfizmus.

(b) Nechť $G = \mathbb{Z}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{T}$. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{T} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(\lambda)(j) = \lambda^j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

je grupový homomorfizmus a topologický homeomorfizmus.

(c) Nechť $G = \mathbb{R}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{R}$ s Haarovou mírou m_1 (viz Definice 1.5.30). Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(t)(x) = e^{itx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

je grupový homomorfizmus a topologický homeomorfizmus.

(d) Nechť $G = \mathbb{T}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{Z}$. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{Z} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(n)(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{T},$$

je grupový homomorfizmus a topologický homeomorfizmus.

Důkaz. (a) Zřejmě je $\phi(H) \subset \widehat{G}$. Nechť $\gamma \in \widehat{G}$ je dáno. Položme $\lambda = \gamma(1)$, tj. $\lambda = e^{it}$ pro nějaké $t \in [0, 2\pi)$. Indukcí ověříme rovnost $\gamma(j) = \lambda^j$, $j \in G$, a tedy platí

$$1 = \gamma(0) = \gamma((n-1)+1) = \gamma(n-1)\gamma(1) = \lambda^n = e^{int}.$$

Tedy existuje $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ splňující $t = \frac{2\pi k}{n}$, tj. $\gamma \in \phi(H)$.

Nechť $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, n-1\}$ jsou dány. Označme $k = (k_1 + k_2) \mod n$. Pak

$$e^{i\frac{2\pi k_1}{n}} e^{i\frac{2\pi k_2}{n}} = e^{i(k_1+k_2)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \phi\left(e^{i\frac{2\pi k_1}{n}} e^{i\frac{2\pi k_2}{n}}\right)(j) &= \phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})(j) = e^{ij\frac{2\pi k}{n}} \quad \text{a} \\ \left(\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})\phi(e^{i\frac{2\pi k'}{n}})\right)(j) &= e^{ij\frac{2\pi k_1}{n}} e^{ij\frac{2\pi k_2}{n}} = e^{ij\frac{2\pi k}{n}}, \end{aligned}$$

je ϕ grupový homomorfizmus.

Zobrazení ϕ je homeomorfizmus, neboť obě grupy jsou diskrétní (viz Tvrzení 3.4.19).

(b) Zjevně platí $\phi(\mathbb{T}) \subset \widehat{\mathbb{Z}}$. Nechť $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$ je dáno. Položme $\lambda = \gamma(1)$, tj. $\lambda = e^{it}$ pro nějaké $t \in [0, 2\pi)$. Indukcí se snadno ověří, že $\gamma(j) = \lambda^j$, $j \in \mathbb{Z}$, a tedy $\phi(\lambda) = \gamma$.

Pro $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ platí

$$\phi(\lambda_1\lambda_2)(j) = (\lambda_1\lambda_2)^j = (\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2))\, j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

je ϕ grupový homomorfizmus.

Zobrazení ϕ je spojité, neboť pro posloupnost $\{\lambda_n\}$ v $\mathbb{T}$ konvergující k $\lambda \in \mathbb{T}$ platí

$$\phi(\lambda_n)(j) = \lambda_n^j \to \lambda^j = \phi(\lambda)^j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

a tedy $\phi(\lambda_n) \to \phi(\lambda)$ bodově na $\mathbb{Z}$. Jelikož $\mathbb{Z}$ je diskrétní, jsou jeho kompaktní podmnožine konečné, což dle předchozího pozorování implikuje spojitost ϕ. Díky kompaktnosti $\mathbb{T}$ je proto ϕ homeomorfizmus.

(c) Zjevně je každé $\phi(t)$ prvkem $\widehat{\mathbb{R}}$. Předpokládejme tedy, že $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$ je dáno. Pak $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ je spojitá funkce splňující (3.31), a tedy $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in [0, \infty)$, pro nějaké $b \in \mathbb{C}$. Jelikož γ je omezená funkce, je b tvaru it pro nějaké $t \in \mathbb{R}$. Protože pro $x < 0$ platí $\gamma(x) = (\gamma(-x))^{-1} = (e^{-bx})^{-1} = e^{bx}$, platí rovnost $\gamma(x) = e^{bx}$ na $\mathbb{R}$. Tedy $\phi(t) = \gamma$.

Pro $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\phi(t_1 + t_2)(x) = e^{i(t_1+t_2)x} = (\phi(t_1)\phi(t_2))(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

a tedy ϕ je grupový homomorfizmus.

Ověříme, že se jedná o homeomorfizmus. Nechť $t_n \to t$ v $\mathbb{R}$. Nechť $K \subset \mathbb{R}$ je libovolný kompakt a $\varepsilon > 0$ je dáno. Nechť $M > 0$ splňuje $K \subset [-M, M]$. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby $\left|e^{iy} - 1\right| < \varepsilon$ pro každé $y \in (-\delta, \delta)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|t_n - t| < \frac{\delta}{M}$ pro každé $n \geqslant n_0$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ pak máme $|(t_n - t)x| < \delta$ pro libovolné $x \in K$, a tedy

$$\left|e^{it_nx} - e^{itx}\right| = \left|e^{itx}\right| \left|e^{i(t_n-t)x} - 1\right| \varepsilon, \quad x \in K.$$

Proto $\phi(t_n) \to \phi(t)$ v $\widehat{\mathbb{R}}$.

Ověřme nyní spojitost inverze. Jelikož je $L^1(\mathbb{R})$ separabilní, je $\Delta(L^1(\mathbb{R}))$ metrizovatelný prostor (viz Věta 3.1.95(b)), což znamená, že $\widehat{\mathbb{R}}$ je metrizovatelná množina (viz Věta 3.4.23). Stačí tedy ověřit sekvenciální spojitost ϕ^{-1}. Nechť $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{R}$ je takové, že $\phi(t_n) \to \phi(t)$ v $\widehat{\mathbb{R}}$.

Pokud by $\{t_n\}$ nebyla omezená, měla by podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}| \to \infty$. Pak díky Větě 1.5.33(f) platí

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}\, dm_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{it_{n_k}x}\, dm_1(x) = 0, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Z toho plyne $e^{itx} = 0$ na $\mathbb{R}$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je proto omezená. Předpokládejme, že nekonverguje k t. Pak existuje její podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $s \in \mathbb{R}$ různému od t. Ze spojitosti ϕ pak plyne

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty} \phi(t_{n_k}) = \phi(s),$$

což je spor. Tedy i ϕ^{-1} je spojité a důkaz je dokončen.

(d) Zobrazení ϕ zjevně splňuje $\phi(\mathbb{Z}) \in \widehat{\mathbb{T}}$ a jedná se o grupový homomorfizmus, neboť pro každé $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ platí

$$\phi(j_1 + j_2)(\lambda) = \lambda^{j_1+j_2} = \lambda^{j_1}\lambda^{j_2} = (\phi(j_1)\phi(j_2))(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{T}.$$

Nechť $\gamma \in \widehat{te}$ je dáno. Položme $\omega(x) = \gamma(e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\omega \in \widehat{\mathbb{R}}$, a tedy dle (c) existuje $t \in \mathbb{R}$ splňující $\omega(x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$. Jelikož

$$e^{itx} = \omega(x) = \omega(x + 2\pi) = e^{it(x+2\pi)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

existuje $j \in \mathbb{Z}$ takové, že $t = j$. Tedy $\gamma = \phi(j)$.

Jelikož $\widehat{\mathbb{T}}$ i $\mathbb{Z}$ jsou diskrétní prostory (viz Tvrzení 3.4.19), je ϕ homeomorfizmus.

□

Příklad 3.4.27. Nechť $A = L^1((0,\infty))$, kde uvažujeme násobení dané vzorcem

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)\, dy, \quad x \in (0,\infty).$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Prostor A je komutativní Banachova algebra.

(b) Nechť $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ a $\phi\colon \mathbb{C}_+ \to A^*$ je dané jako

$$\phi(\lambda)(f) = \int_0^\infty f(x)e^{\lambda x}\, dx, \quad f \in A.$$

Pak ϕ je homeomorfizmus $\mathbb{C}_+$ a $\Delta(A)$.

Důkaz. V následujících výpočtech budeme mlčky užívat Fubiniovu větu, jelikož ve všech případech je ověření jejích předpokladů přímočaré.

V důkazu též uvažujeme zobrazení $i\colon A \to L^1(\mathbb{R})$ dané jako

$$i(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,\infty), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad f \in A.$$

(a) Zobrazení i je izometrický homomorfizmus A do do $L^1(G)$. Vskutku, linearita a izometrie je jasná. Pro $f, g \in A$ pak máme

$$\begin{aligned}(i(f) * i(g))(x) &= \int_{-\infty}^\infty i(f)(y)i(g)(x-y)\, dy = \int_0^\infty f(y)i(g)(x-y)\, dy \\ &= \int_0^x f(y)g(x-y)\, dy = (f*g)(x), \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

Tedy A je jakožto podalgebra $L^1(G)$ komutativní Banachova algebra.

(b) *Krok 1.* Pro dané $\lambda \in \mathbb{C}_+$ a $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)(f*g) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)g(x-y)\, dy\right) e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty f(y) \left(\int_y^\infty g(x-y)e^{-\lambda x}\, dx\right) dy \\ &= \int_0^\infty f(y) \left(\int_0^\infty g(x)e^{-\lambda(x+y)}\, dx\right) dy = \left(\int_0^\infty f(y)e^{-\lambda y}\, dy\right)\left(\int_0^\infty g(x)e^{-\lambda x}\, dx\right) \\ &= \phi(\lambda)(f)\phi(\lambda)(g).\end{aligned}$$

Tedy $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \Delta(A)$.

Krok 2. Nechť nyní $\varphi \in \Delta(A)$ je dáno. Pak existuje $\gamma \in L^\infty((0,\infty))$ splňující $\varphi(f) = \int_0^\infty f(x)\gamma(x)\,dx$, $f \in A$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že γ je borelovská funkce. Definujme

$$h(x,y) = \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(x+y), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times (0\infty).$$

Pak h je omezená borelovská funkce na $(0,\infty)^2$. Pak pro každé $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\phi(f*g) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy\right)\gamma(x)\,dx = \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty g(x-y)\gamma(x)\,dx\right)dy \\ &= \int_0^\infty f(y)\left(\int_0^\infty g(x)\gamma(y+x)\,dx\right)dy = \int_{(0,\infty)^2} f(y)g(x)\gamma(y+x)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

a

$$\phi(f)\phi(g) = \left(\int_0^\infty f(y)\gamma(y)\,dy\right)(g(x)\gamma(x)\,dx) = \int_{(0,\infty)^2} f(y)g(x)\gamma(x)\gamma(y)\,dx\,dy.$$

Tedy

$$\int_{(0,\infty)^2} f(y)g(x)h(x,y)\,dx\,dy = 0, \quad f,g \in A,$$

z čehož plyne

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) \quad \text{skoro všude na } (0,\infty)^2. \tag{3.32}$$

Jelikož je γ omezená funkce, je funkce

$$\omega(x) = \int_0^x \gamma(t)\,dt, \quad x \in [0,\infty),$$

lokálně absolutně spojitá na $[0,\infty)$ a platí $\omega'(x) = \gamma(x)$ skoro všude na $(0,\infty)$.

Existuje $\delta > 0$ takové, že $\omega(\delta) \neq 0$. (Vskutku, kdyby $\omega = 0$ na $(0,\infty)$, byla by i γ, jakožto derivace ω nulová skoro všude. A to by byl spor.) Díky Fubiniově větě plyne z (3.32), že pro skoro všechna $x \in (0,\infty)$ máme

$$\omega(\delta)\gamma(x) = \int_0^x \gamma(t)\gamma(x)\,dt = \int_0^x \gamma(x+t)\,dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,dt.$$

Jelikož je pravá strana spojitá funkce, má γ spojitého reprezentanta.

Zvolme $y > 0$ takové, že $\gamma(y) \neq 0$. Pak

$$\lim_{x\to 0_+} \gamma(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\gamma(x+y)}{\gamma(y)} = 1.$$

Tedy γ lze spojitě rozšířit na $[0,\infty)$ dodefinováním $\gamma(0) = 1$. Dle Lemmatu 3.4.25 existuje $b \in \mathbb{C}$ splňující $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in [0,\infty)$. Jelikož γ je omezená na $(0,\infty)$, platí $\operatorname{Re} b \leqslant 0$. Číslo $\lambda = -b$ tedy splňuje $\phi(\lambda) = \gamma$.

Krok 3. Nyní ověříme, že ϕ je homeomorfzimus. Pokud $\lambda_n \to \lambda$ v $\mathbb{C}_+$, máme $e^{-\lambda_n x} \to e^{\lambda x}$ bodově na $\mathbb{R}$,a tak pro každou $f \in A$ díky Lebesgueově větě dostáváme

$$\phi(\lambda)(f) = \int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-\lambda_n x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \phi(\lambda_n)(f).$$

Tedy ϕ je spojité.

K ověření spojitosti inverze stačí ověřit sekvenciální spojitost, neboť $\Delta(A)$ je metrizovatelný prostor. Nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{C}_+$ a λ je takový element $\mathbb{C}_+$, že $\phi(\lambda_n) \to \phi(\lambda)$.

Ověříme nejprve, že $\{\lambda_n\}$ je omezená posloupnost. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by její podposloupnost $\{\lambda_{n_k}\}$ splňující $|\lambda_{n_k}| \to \infty$. Nechť $f \in \mathscr{D}((0,\infty))$ a nechť $\operatorname{spt} f \subset [a,b] \subset (0,\infty)$. Pak pomocí integrace per partes dostáváme

$$\left|\int_0^\infty f(x)e^{-\lambda_{n_k}x}\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)e^{-\lambda_{n_k}x}\,dx\right| = \left|\frac{1}{\lambda_{n_k}}\int_a^b f'(x)e^{-\lambda_{n_k}x}\,dx\right|,$$

což je výraz konvergující k 0. Tedy $\phi(\lambda_{n_k})(f) \to 0$ pro každou $f \in \mathscr{D}((0,\infty))$. Jelikož je prostor $\mathscr{D}((0,\infty))$ hustý v $L^1((0,\infty))$ (viz Věta 1.5.23), platí

$$\phi(\lambda)(f) = \lim_{k\to\infty} \phi(\lambda_{n_k})(f) = 0, \quad f \in A,$$

tj. $\phi(\lambda) = 0$, což je spor. (Nechť $f \in L^1((0,\infty))$ a $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $g \in \mathscr{D}((0,\infty))$ takové, že $\|f-g\| < \varepsilon$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $|\phi(\lambda_n)(g) - \phi(\lambda)(g)| < \varepsilon$ pro $n \geqslant n_0$. Pak pro tato n platí

$$\begin{aligned}|\phi(\lambda_n)(f) - \phi(\lambda)(f)| &\leqslant |\phi(\lambda_n)(f) - \phi(\lambda_n)(g)| + |\phi(\lambda_n)(g) - \phi(\lambda)(g)| + |\phi(\lambda)(g) - \phi(\lambda)(f)| \\ &\leqslant \|f-g\| + \varepsilon + \|f-g\| < 3\varepsilon.)\end{aligned}$$

Tedy $\{\lambda_n\}$ je omezená.

Pokud by nyní $\{\lambda_n\}$ nekonvergovala k λ, existovala by vybraná podposloupnost $\{\lambda_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $\mu \in \mathbb{C}_+$ různému od λ. Pak ale díky spojitosti ϕ platí

$$\phi(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \phi(\lambda_{n_k}) = \phi(\mu),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Příklad 3.4.28 (Wiener)**.** Nechť A je algebra $AC(\mathbb{T})$ z Příkladu 3.3.14. Pak platí následující tvrzení..

(a) Zobrazení $\phi\colon \ell^1(\mathbb{Z}) \to A$ definované jako

$$\phi(x)(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)z^k, \quad z \in \mathbb{T}, x \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$

je izometrický homomorfizmus $\ell^1(\mathbb{Z})$ na A, jehož inverze je dána vzorcem

$$\phi^{-1}(f)(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Algebra A je pak Banachova algebra s jednotkou.

(b) Pro každé $\lambda \in \mathbb{T}$ uvažujme $\psi(\lambda) \in A^*$ definované jako

$$\psi(\lambda)(f) = f(\overline{\lambda}), \quad f \in A.$$

Pak $\psi\colon \mathbb{T}\Delta(A)$ je homeomorfizmus.

(c) Je-li $f \in A$, pak $\frac{1}{f} \in A$ právě tehdy, když $f \neq 0$ na $\mathbb{T}$.

Důkaz. (a) Zobrazení ϕ je zjevně lineární izometrie. Pro $f \in A$ označíme $x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\, dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Položme $g(e^{it}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak $g \in C(\mathbb{T})$ a pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (g(e^{it}) - f(e^{it}))e^{-ijt}\, dt = 0.$$

Funkce jsou trigonometrické polynomy husté v $C(\mathbb{T})$ a f, g jsou spojité, $g = f$. Tedy $\phi(x) = f$ a ϕ je surjektivní.

Pro $x, y \in \ell^1(\mathbb{Z})$ a $z \in \mathbb{T}$ platí

$$\begin{aligned}
\phi(x * y)(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x * y)(k)z^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)y(k-j)\right) z^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} y(k-j)z^k\right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j) \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} y(l)z^{j+l}\right) = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)z^j\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} y(l)z^l\right) \\
&= (\phi(x)\phi(y))(z).
\end{aligned}$$

Tedy ϕ zachovává násobení a $\phi(\chi_{\{0\}}) = 1$. Proto je A Banachova algebra a jelikož je $\ell^1(\mathbb{Z})$ úplný prostor, je A také úplná.

(b) Každý prvek $\psi(\lambda)$ je zjevně element $\Delta(A)$. Je-li $\omega \in \Delta(A)$ dáno, je $x \mapsto \omega \circ \phi$ prvek $\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Existuje proto $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$ takové, že $\omega(\phi(x)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\gamma(-k)$, $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dle Příkladu 3.4.26(b) existuje $\mu \in \mathbb{T}$ takové, že $\gamma(k) = \mu^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Položme $\lambda\overline{\mu}$. Pak dostáváme

$$\omega(\phi(x)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\mu(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\lambda^k = \phi(x)\lambda).$$

Jelikož je ϕ surjektivní, platí $\omega(f) = f(\lambda)$, $f \in A$.

Jelikož je $\mathbb{T}$ kompaktní a ϕ je zjevně spojité, jedná se o homeomorfizmus.

(c) Pokud $\frac{1}{f} \in A$, zjevně $f \neq 0$ na $\mathbb{T}$. Obráceně, pokud f je nenulové na $\mathbb{T}$, dle bodu (b) platí $\varphi(f) \neq 0$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Dle Věty 3.3.63 platí $0 \notin \sigma_A(f)$, tj. f invertovatelný prvek A. To znamená, že $\frac{1}{f} \in A$. $\square$

3.4.5 Banachova algebra $M(G)$

Definice 3.4.29. Pro funkci $f\colon G \to \mathbb{C}$ rozšiřme definice f^* z Věty 3.4.8 vzorcem

$$f^{(}x) = \overline{f(-x)}, \quad x \in G.$$

Definice 3.4.30. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Nechť $A = M(G)$ značí prostor všech Radonových komplexních měr na G. Pro míry $\mu_1, \dots, \mu_n \in A$ definujeme

$$\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n = \psi(\mu_1 \times \cdots \mu_n),$$

kde $\psi\colon G^n \to G$ je definováno jako $\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$, $(x, 1 \dots, x_n) \in G^n$.

(a) Na A definujeme násobení pomocí vzorce

$$(\mu * \nu) = \phi(\mu \times \nu), \quad \mu, \nu \in A,$$

kde $\phi\colon G \times G \to G$ značí zobrazení $\phi(x, y) = x + y$, $(x, y) \in G \times G$.

(b) Nechť $M_{\mathrm{ac}}(G)$ značí prostor všech prvků A absolutně spojitých vůči m. Připomeňme, že $M_{\mathrm{c}}(G)$ a $M_{\mathrm{d}}(G)$ značí prostor všech spojitých, respektive diskrétních elemenů A (viz Definice **??**).

(c) Na A definujeme operaci $*$ jako

$$\mu^*(B) = \overline{\mu(-B)}, \quad B \in \mathrm{Bs}(G), \quad \mu \in A.$$

Věta 3.4.31. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $A = M(G)$. Pak $(A, *)$ je komutativní Banachova algebra s jednotkou a zobrazení $*\colon A \to A$ izometrická involuce, pro kterou platí*

$$\int_G f(x)\, d\mu^*(x) = \overline{\int_G f^*(x)\, d\mu(x)}, \quad f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G), \mu \in A. \tag{3.33}$$

Dále platí následující tvrzení.

(a) Pro každé $\mu, \nu \in A$ platí

$$\int f(x)\, dm(\mu * \nu)(x) = \int_G \left(\int_G f(x + y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y), \quad f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G). \tag{3.34}$$

] Nechť množiny $A, B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňují $\mu(G \backslash A) = \nu(G \backslash B) = 0$ a $A+B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak platí $(\mu*\nu)(G \backslash (A+B)) = 0$. Speciálně platí $\operatorname{spt}(\mu * \nu) \subset \operatorname{spt} \mu + \operatorname{spt} \nu$.

(b) Pro každé $f \in L^1(G)$ označme jako fm míru definovanou jako $(fm)(B) = \int_B f(x)\, dm(x)$, $B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak zobrazení $f \mapsto mf$ je izometrický $*$-homomorfizmus $L^1(G)$ na M_{ac}. Dále je $M_{\mathrm{ac}}(G)$ v A uzavřený $*$-ideál.

(c) Prostor $M_{\mathrm{c}}(G)$ a je v A uzavřený $*$-ideál a $M_{\mathrm{d}}(G)$ je uzavřená $*$-podalgebra A.

(d) Zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x$ je homomorfní a homeomorfní vnoření G do (A, w^*), kde A je chápána jako duál k $C_0(G)$.

Důkaz. Dle úvodní sekce je $M(G)$ Banachův prostor. Nechť $\phi\colon G \times G \to G$ je sčítání, tj. $\phi(x, y) = x + y$, $(x, y) \in G \times G$. Jelikož je pro $\mu, \nu \in M(G)$ míra $\mu \times \nu$ element $M(G^2)$, je $\mu * \nu \in M(G)$. Dokážeme nejdříve (a). Nechť $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ je dáno. Pak $f \circ \phi \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G^2)$ a

$$\int_G f(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \int_{G^2} (f \circ \phi)(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_G \left(\int_G f(x + y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Nechť nyní množiny $A, B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňují pro $\mu, \nu \in A$ rovnosti $\mu(G \backslash A) = \nu(G \backslash B) = 0$ a nechť $A + B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak pro $C = G \backslash (A + B)$ platí

$$(\mu * \nu)(G \backslash (A + B)) = \int_G \int_G \chi_C(x + y)\, dmu(x)\, dnu(y) = \int_B \int_A \chi_C(x + y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = 0.$$

Tím je (a) ověřeno.

Pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí díky (3.34) rovnosti

$$\int_G f(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \int_G \left(\int_G f(x + y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_G \left(\int_G f(y + x)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_G f(y)\, d(\nu * \mu)(y),$$

a tedy je A komutativní.

Diracova míra ε_0 je jednotka A, neboť

$$\int_G g(x)\, d(\varepsilon_0 * \mu)(x) = \int_G \int_G g(x + y)\, d\varepsilon_{\{0\}}(x)\, d\mu(y) = \int_G g(y)\, d\mu(y), \quad g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G).$$

Distributivita násobení plyne ze vztahu

$$\mu * (\nu + \omega) = \phi(\mu \times (\nu + \omega)) = \phi(\mu \times \nu + \mu \times \omega) = \phi(\mu \times \nu) + \phi(\mu \times \omega) = \mu * \nu + \mu * \omega$$

a asociativita z rovností

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, d(\mu * (\nu * \omega))(x) &= \int_G \int_G f(x+y)\, d\mu(x)\, d(\nu * \omega)(y) \\ &= \int_G \int_G f(x+y)\, d(\nu * \omega)(y)\, d\mu(x) \\ &= \int_G \int_G f(x+y+z)\, d\nu(y)\, d\omega(z)\, d\mu(x)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, d((\mu * \nu) * \omega)(x) &= \int_G \int_G f(x+z)\, d(\mu * \nu)(z)\, d\omega(y) \\ &= \int_G \int_G \int_G f(x+z+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\, d\omega(z) \\ &= \int_G \int_G f(x+y+z)\, d\nu(y)\, d\omega(z)\, d\mu(x)\end{aligned}$$

platných pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$.

Dále pro $\mu \in A$ a jednoduchou borelovskou funkci $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{B_i}$ platí

$$f^*(x) = \overline{f(-x)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} \chi_B(-x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} \chi_{-B}(x),$$

takže

$$\int_G f(x)\, d\mu^*(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu^*(B_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\mu_{-B_i}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} \mu(-B_i)} = \overline{\int_G f^*(x)\, d\mu(x)}.$$

Proto (3.33) pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$. Z ní též plyne její komplexně sdružená linearita a izometričnost.

Dále pro $\mu, \nu \in A$ a $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, d(\mu * \nu)^*(x) &= \overline{\int_G f^*(x)\, d(\mu * \nu)(x)} = \overline{\int_G \int_G f^*(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)} \\ &= \overline{\int_G \int_G \overline{f(-x-y)}\, d\mu(x)\, d\nu(y)} = \int_G \int_G f(-x-y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, d(\mu^* * \nu^*)(x) &= \int_G \int_G f(x+y)\, d\mu * (x)\, d\nu^*(y) = \int_G \overline{\int_G \overline{f(-x+y)}\, d\mu(x)}\, d\nu^*(y) \\ &= \int_G \int_G f(x-y)\, d\nu^*(y)\, d\mu(x) = \int_G \overline{\int_G \overline{f(-x-y)}\, d\nu(y)}\, d\mu(x) \\ &= \int_G \int_G f(-x-y)\, d\nu(y)\, d\mu(x),\end{aligned}$$

a tedy $(\mu * \nu)^* = \mu^* * \nu^*$.

(b) Zjevně je $fm \in M_{\mathrm{ac}}(G)$ pro každé $f \in L^1(G)$. Obráceně, pokud $\mu \in M_{\mathrm{ac}}(G)$, je daná míra, existuje dle Radonovy–Nikodýmovy věty $f \in L^1(G)$ splňující $\mu(B) = \int_B f(x)\, dm(x)$, $B \in \mathrm{Bs}(G)$. Zobrazení $\psi\colon f \mapsto fm$ je tak bijekce $L^1(G)$ na $M_{\mathrm{ac}}(G)$.

Nechť $f \in L^1(G)$ je dáno. Pak máme

$$\|fm\|_A = \sup_{g \in B_{\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)}} \left| \int_G g(x) f(x)\, dm(x) \right| = \sup_{g \in B_{L^\infty(G)}} \left| \int_G g(x) f(x)\, dm(x) \right| = \|f\|_{L^1(G)},$$

tedy se jedná o izometrii.

Dále pro $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí

$$\begin{aligned}\int_g (x)\, d(fm)^*(x) &= \overline{\int_G g^*(x)\, d(fm)(x)} = \overline{\int_G \overline{g(-x)} f(x)\, dm(x)} \\ &= \int_G g(-x) \overline{f(x)}\, dm(x) = \int_G g(x) \overline{f(-x)}\, dm(x) \\ &= \int_G g(x)\, d(f^* m)(x),\end{aligned}$$

čili ψ zachovává involuci.

Dále je zjevně ψ lineární. Konečně pro $f_1, f_2 \in L^1(G)$ platí pro každé $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ rovnosti

$$\begin{aligned}\int_G g(x)\, d((f_1 * f_2)m)(x) &= \int_G g(x)(f_1 * f_2)(x)\, dm(x) = \int_G \int_G g(x) f_1(y) f_2(x-y)\, dm(y)\, dm(x)\\ &= \int_G f_1(y) \left(\int_G g(x) f_2(x-y)\, dm(x) \right) dm(y) = \int_G g(y+z) f_1(y) f_2(z)\, dm(z)\, dm(y)\\ &= \int_G \int_G g(y+z)\, d(f_1 m)(y)\, d(f_2 m)(z) = \int_G g(y)\, d((f_1 m) * (f_2 m))(y),\end{aligned}$$

a tedy ψ zachovává násobení.

Je-li nyní $\mu \in M(G)$ a $f \in L^1(G)$, pro množinu $B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňující $m(B) = 0$ platí

$$\begin{aligned}((fm) * \mu)(B) &= \int_G \chi_B(x)\, d((fm) * \mu)(x) = \int_G \left(\int_G \chi_B(x+y) f(x)\, dm(x) \right) d\mu(y)\\ &= \int_G \left(\int_G \chi_B(z) f(z-y)\, dm(z) \right) d\mu(y) = 0,\end{aligned}$$

takže $M_{\mathrm{ac}}(G)$ je ideál.

(c) Prostor $M_{\mathrm{c}}(G)$ je uzavřený v A, viz Věta **??**. Zjevně

$$(\mu^*)(\{x\}) = \overline{\mu(\{-x\})} = 0, \quad x \in G, \mu \in M_{\mathrm{c}}(G),$$

takže $M_{\mathrm{c}}(G)$ je uzavřený na involuci.

Pro $\mu \in M_{\mathrm{c}}(G)$ a $\nu \in A$ platí

$$(\mu * \nu)(\{x\}) = \int_G \int_G \mu(\{x-y\})\, d\nu(y) = 0, \quad x \in G,$$

a $M_{\mathrm{c}}(G)$ je tedy ideál.

Uzavřenost $M_{\mathrm{d}}(G)$ je zaručena Větou **??**. Nechť $\mu, \nu \in M_{\mathrm{d}}(G)$ jsou dány. Nechť $A, B \subset G$ jsou spočetné množiny takové, že $\mu(G \backslash A) = \nu(G \backslash B) = 0$. Pak je $A + B$ spočetná, a tedy borelovská podmnožina G, a proto dle (a) platí $(\mu * \nu)(G \backslash (A+B)) = 0$. Tedy $\mu * \nu \in M_{\mathrm{d}}(G)$. Dále je $\mu * (G \backslash (-A)) = 0$, a tedy i $\mu^* \in M_{\mathrm{d}}(G)$.

(d) Pro $a, b \in G$ a $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí

$$\int_G g(x)\, d(\varepsilon_a * \varepsilon_b)(x) = \int_G \int_G g(x+y)\, d\varepsilon_a(x)\, d\varepsilon_b(y) = \int_G g(a+y)\, d\varepsilon_b(y) = g(a+b) = \int_G g(x)\, d\varepsilon_{a+b}(x).$$

Tedy je zobrazení $\varepsilon\colon G \to A$ algebraický homomorfzimus.

Dále pro net $\{a_i\}$ v G konvergující k $a \in G$ a $f \in C_0(G)$ aplatí

$$\int_G f(x)\, d\varepsilon_{a_i}(x) = f(a_i) \to f(a) = \int_G f(x) \varepsilon_a(x),$$

a tedy ε je spojité.

Nechť $\varepsilon_{a_i} \to \varepsilon_a$ pro nějaký net $\{a_i\}$ v G a $a \in G$. Nechť U je dané okolí a, přičemž můžeme předpokládat, že U je lokálně kompaktní. Nalezneme $f \in C_c(G)$ s hodnotami v $[0,1]$ splňující $f(a) = 1$ a $f = 0$ na $G \backslash U$. Protože

$$f(a_i) = \int_G f(x)\, d\varepsilon_{a_i}(x) \to \int_G f(x)\, d\varepsilon_a(x) = f(a) = 1,$$

existuje idnex i_0 takový, že $f(a_i) > 0$ pro $i \geqslant i_0$. Pro tato i je pak $a_i \in U$, takže jsme ověřili $a_i \to a$. Tedy ε je homeomorfizmus. ☐

Definice 3.4.32. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pro $\mu \in M(G)$ a $f \in L^1(G)$ borelovskou definujeme

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(x-y)\, d\mu(y), \quad x \in G.$$

Tvrzení 3.4.33. *Nechť G je alespoň dvoubodová komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Uvažujme $M(G)$ s involucí definovanou ve Větě 3.4.31. Pak $M(G)$ není C^*-algebra.*

Důkaz. Nechť $x \in G$ je prvek různý od 0. Vezměme ryze imaginární nenulové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ a uvažujme míru

$$\mu = \alpha \varepsilon_{-x} + \varepsilon_0 + \alpha \varepsilon_x.$$

Pak $\mu^* = \overline{\alpha}\varepsilon_x + \varepsilon_0 + \overline{\alpha}\varepsilon_{-x}$ a dle Věty 3.4.31(d) platí

$$\begin{aligned}\mu * \mu^* &= \left(|\alpha|^2 \varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_{-x} + |\alpha|^2 \varepsilon_{-2x}\right) + (\overline{\alpha}\varepsilon_{-x} + \varepsilon_0 + \overline{\alpha}\varepsilon_x) + \left(|\alpha|^2 \varepsilon_{2x} + \alpha\varepsilon_x + |\alpha|^2 \varepsilon_0\right) \\ &= (1 + 2|\alpha|^2)\varepsilon_0 + (\alpha + \overline{\alpha})\varepsilon_x + (\alpha + \overline{\alpha})\varepsilon_{-x} + |\alpha|^2 \varepsilon_{2x} + |\alpha|^2 \varepsilon_{-2x} \\ &= (1 + 2|\alpha|^2)\varepsilon_0 + |\alpha|^2 \varepsilon_{2x} + |\alpha|^2 \varepsilon_{-2x}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\|\mu * \mu^*\| = 1 + 4|\alpha|^2 .$$

Na druhou stranu máme

$$\|\mu\|^2 = (1 + 2|\alpha|)^2 = 1 + 4|\alpha|^2 + 4|\alpha| ,$$

a tedy $\|\mu\|^2 > \|\mu * \mu^*\|$. Proto $M(G)$ není C^*-algebra. □

Věta 3.4.34. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Je-li $\mu \in M(G)$ a $f \in L^1(G)$ je borelovská, pak $\mu * f \in L^1(G)$ a platí $\mu * fm = (\mu * f)m$.*

Důkaz. Pro $f \in L^1(G)$ borelovskou a $\mu \in M(G)$ je funkce $(x, y) \mapsto f(x-y)$ borelovská a z Fubiniovy věty aplikované na $|f|$ a $m \times |\mu|$ se ověří, že je $m \times \mu$-integrovatelná. Dle Fubiniovy věty je tedy funkce pro m-skoro všechna $x \in G$ je funkce $y \mapsto f(x - y)$ v $L^1(\mu)$ a funkce $x \mapsto \int_G f(x - y)\, d\mu(y) = (\mu * f)(x)$ je v $L^1(G)$.

Pro $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ pak platí

$$\begin{aligned}\int_G g(x)\, d(\mu * f)(m)(x) &= \int_G g(x) \left(\int_G f(x - y)\, d\mu(y)\right) dm(x) = \int_G \int_G g(x)f(x - y)\, dm(x)\, d\mu(y) \\ &= \int_G \int_G g(y + z)f(z)\, dm(z)\, d\mu(y) = \int_G \int_G g(y + z)\, d\mu(y)\, d(fm)(z) \\ &= \int_G g(y)\, d(\mu * fm)(y).\end{aligned}$$

Tím je požadovaná rovnost ověřena.

□

3.4.6 Fourierova–Stieltjesova transformace

Definice 3.4.35. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Definujeme Fourierovu–Stieltjesovu transformaci $F\colon M(G) \to \ell^\infty(\widehat{G})$ jako

$$(F\mu)(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x), \quad \gamma \in \widehat{G}, \mu \in M(G)$$

Někdy píšeme $F\mu = \widehat{\mu}$.

Věta 3.4.36. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a nechť F značí Fourierovu–Stieltjesovu transformaci. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Každá funkce $\widehat{\mu}$ je omezená a stejnoměrně spojitá na $\widehat{G}$.

(b) Zobrazení F je $*$-homomorfizmus $M(G)$ do $C^b(\widehat{G}$ zachovávající jednotku o normě nepřesahující 1 (prostor $C^b(\widehat{G})$ je uvažován s involucí $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma)}$). Navíc restrikce F na $L^1(G)$ je Fourierova transformace z Definice 3.4.17.

(c) Pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ je zobrazení $\psi(\gamma)\colon \mu \mapsto \widehat{\mu}(\gamma)$ prvek $\Delta(M(G))$. Zobrazení $\gamma \mapsto \psi_\gamma$ je homeomorfní vnoření $\widehat{G}$ do $\Delta(M(G))$.

(d) Nechť $\mu \in M(G)$, $x_0 \in G$ a $\gamma_0 \in \widehat{G}$ jsou dány. Pak pro míry λ a ω definované jako $\lambda = \gamma_0\mu$ a $\omega = \phi(\mu)$, kde $\phi\colon x \mapsto x - x_0$, $x \in G$, platí

$$\widehat{\lambda}(\gamma) = \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1}) \quad a \quad \widehat{\omega}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Speciálně, platí, že funkce $\gamma \mapsto \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1})$ a $\gamma \mapsto \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma)$ jsou též v $\operatorname{Rng} F$.

Důkaz. Nechť A značí $M(G)$.

(a) Pro dané $\mu \in A$ dané a libovolné $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$|\widehat{\mu}(\gamma)| = \left|\int_G \gamma(-x)\, d\mu(x)\right| \leqslant \int_G 1\, d|\mu|(x) = \|\mu\| .$$

Tedy $\widehat{\mu}$ je omezená a $\|F\| \leqslant 1$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že $|\mu|(G \backslash K) < \frac{\varepsilon}{4}$. Uvažujme množinu $U_{K,\varepsilon}$ tvaru(3.30). pak pro $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ splňující $\gamma_1 \gamma_2^{-1} \in U_{K, \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}}$ platí

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}(\gamma_1) - \widehat{\mu}(\gamma_2)| &\leqslant \left| \overline{\gamma_1(x) - \gamma_2(x)} \right| \, d|\mu|(x) = \int_G \left| \gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1 \right| \, d|\mu|(x) \\ &\leqslant \int_K \left| \gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1 \right| \, d|\mu|(x) + \int_{G \backslash K} \left| \gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1 \right| \, d|\mu|(x) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|} |\mu|(K) + 2|\mu|(G \backslash K) \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\widehat{\mu}$ je stejnoměrně spojitá.

(b) Zobrazení F je zjevně lineární a dle odhadu v (a) platí $\|F\| \leqslant 1$. Pro funkci $f \in L^1(G)$ máme

$$\widehat{fm}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) \, d(fm)(x) = \int_G f(x)\gamma(-x) \, dm(x) = \widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G},$$

a tedy F je rozšířením Fourierovy transformace.

Pro $\mu \in M(G)$ máme

$$\widehat{\mu^*}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) \, d\mu^*(x) = \overline{\int_G \overline{\gamma(x)} \, d\mu(x)} = \overline{\widehat{\mu}(\gamma)} = (\widehat{\mu}(\gamma))^*, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Tedy F zachovává involuci.

Pro $\mu, \nu \in M(G)$ dostáváme pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ rovnost

$$\begin{aligned} (\widehat{\mu * \nu})(\gamma) &= \int_G \gamma(-x) \, d(\mu * \nu)(x) = \int_G \int_G \gamma(-x-y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \\ &= \left(\int_G \gamma(-x) \, d\mu(x) \right) \left(\int_G \gamma(-y) \, d\mu(y) \right) \\ &= \widehat{\mu}(\gamma)\widehat{\nu}(\gamma), \end{aligned}$$

tj. F je homomorfismus.

Konečně pro ε_0 máme

$$\widehat{\varepsilon_0}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) \, d\varepsilon_0(x) = \gamma(-0) = 1, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

(c) Inkluze $\psi(\widehat{G}) \subset \Delta(M(G))$ plyne z (b). Nechť $\{\gamma_i\}$ je net v $\widehat{G}$ konvergující ke $\gamma \in \widehat{G}$. Dle (a) platí

$$\psi(\gamma_i)(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma_i) \to \widehat{\mu}(\gamma) = \psi(\gamma)(\mu), \mu \in M(G),$$

tj. $\psi(\gamma_i) \xrightarrow{w^*} \psi(\gamma)$. Tedy ψ je spojité.

Předpoikládejme nyní, že $\psi(\gamma_i) \to \psi(\gamma)$ pro nějaký net $\{\gamma_i\}$ v $\widehat{G}$ a $\gamma \in \widehat{G}$. Uvažujme inverzi k zobrazení z Věty 3.4.16, které každému prvku $\omega \in \widehat{G}$ přiřazuje element $\varphi_\omega \in \Delta(L^1(G))$. Pak zobrazení $\omega \mapsto \varphi_\omega$ je homeomorfizmus $\widehat{G}$ a $\Delta(L^1(G))$ (viz Věta 3.4.23). Nechť $f \in L^1(G)$ je libovolné. Pak $fm \in M(G)$ a dle předpokladu platí

$$\varphi_{\gamma_i}(f) = \int_G f(x)\gamma_i(-x) \, dm(x) = \widehat{fm}(\gamma_i) = \psi(\gamma_i)(\mu) \to \psi(\gamma)(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma) = \varphi_\gamma(f).$$

Tedy $\varphi_{\gamma_i} \xrightarrow{w^*} \varphi_\gamma$, což díky zmiňované Větě 3.4.23 implikuje $\gamma_i \to \gamma$ v $\widehat{G}$. Tedy ψ je homeomorfní vnoření.

(d) Pro $\gamma \in \widehat{G}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}(\gamma) &= \int_G \gamma(-x) \, d\lambda(x) = \int_G \gamma(-x)\gamma_0(x) \, d\mu(x) = \int_G \gamma\gamma_0(-x)^{-1} \, d\mu(x) \\ &= \int_G (\gamma\gamma_0^{-1})(-x) \, d\mu(x) = \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1}) \end{aligned}$$

a

$$\widehat{\omega}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) \, d\omega(x) = \int_G \gamma(-x + x_0) \, d\mu(x) = \gamma(x_0) \int_G \gamma(-x) \, d\mu(x) = \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma).$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Definice 3.4.37. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Definujme $\widetilde{F}\colon M(\widehat{G}) \to \ell^\infty(G)$ pomocí vzorce

$$(\widetilde{F}\mu)(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma), \quad x \in G.$$

Věta 3.4.38 (O jednoznačnosti)**.** *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $\mu \in M(\widehat{G})$. Pokud*

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) = 0, \quad x \in G,$$

pak $\mu = 0$. Tedy $\widetilde{F}$ je prosté zobrazení.

Důkaz. Nechť $F\colon L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ značí Fourierovu transformaci. Pro každé $f \in L^1(G)$ dle předpokladu platí

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \int_G f(x)\gamma(-x)\, dm(x)\, d\mu(\gamma) = \int_G f(x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(-x)\, d\mu(\gamma) \right) dm(x) = 0.$$

Jelikož $\operatorname{Rng} F$ je hustý v $C_0(\widehat{G})$ dle Důsledku 3.4.24, platí $\mu = 0$. □

3.4.7 Pozitivně definitní funkce a Bochnerova věta

Definice 3.4.39. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $f\colon G \to \mathbb{C}$ je funkce. Řekneme, že f je pozitivně definitní, pokud platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) \geqslant 0, \quad x_1, \dots, x_n \in G, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.35}$$

Lemma 3.4.40. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $f\colon G \to \mathbb{C}$ je pozitivně definitní funkce. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $f(0) \geqslant 0$.

(b) Pro každé $x \in G$ platí $f(-x) = \overline{f(x)}$.

(c) Pro každé $x \in G$ platí $|f(x)| \leqslant f(0)$, a tedy je f omezená funkce.

(d) Pro každé $x, y \in G$ platí

$$|f(x) - f(y)|^2 \leqslant 2f(0) \operatorname{Re}(f(0) - f(x-y)).$$

(e) Pokud f je spojitá v 0, je stejnoměrně spojitá.

Důkaz. (a) Pro $c_1 = 1$ a $x_1 = 0$ plyne z (3.35) nerovnost $0 \leqslant f(0)$.

(b) Dosadíme do (3.35) pro $n = 2$ body $x_1 = 0$ a $x_2 = x$ a čísla $c_1 = 1$ a $c_2 = c$. Pak

$$0 \leqslant \sum_{j,k=1}^{2} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) = f(0) + \overline{c} f(-x) + c f(x) + |c|^2 f(0). \tag{3.36}$$

Pro $c = 1$ dostáváme $0 \leqslant (1 + |c|^2) f(0) + f(x) + f(-x)$ a pro $c = i$ máme $0 \leqslant (1 + |c|^2) f(0) + i(f(x) - f(-x))$. Tedy $f(x) + f(-x)$ i $i(f(x) - f(-x))$ jsou reálně čísla. Proto pro $f(x) = a_1 + ia_2$, kde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, platí

$$f(x) + f(-x) = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2) \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad i(f(x) - f(-x)) = (b_2 - a_2) + i(a_1 - b_1) \in \mathbb{R}.$$

Tedy $b_2 = -a_2$ a $b_1 = a_1$, tj. $f(-x) = \overline{f(x)}$.

(c) Pro $x \in G$ předpokládejme, že $f(x) \neq 0$. Nalezneme $c \in \mathbb{C}$ takové, že $cf(x) = -|f(x)|$. Pak $|c|\,|f(x)| = |f(x)|$, a tedy $|c| = 1$. Z (3.36) tedy díky (a) dostáváme

$$0 \leqslant f(0) + \overline{c} f(-x) + c f(x) + |c|^2 f(0) = f(0) + \overline{c f(x)} - |f(x)| + f(0) = 2(f(0) - |f(x)|).$$

Tím je (c) dokázáno.

(d) Nechť $x, y \in G$ jsou dány. Můžeme předpokládat, že $f(x) \neq f(y)$. Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je libovolné. V (3.35) uvažujeme $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ a $c_1 = 1$, $c_2 = c = \frac{\lambda |f(x) - f(y)|}{f(x) - f(y)}$ a $c_3 = -c2$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) &= (f(0) + \overline{c} f(-x) - \overline{c} f(-y)) + c \left(f(x) + \overline{c} f(0) + \overline{(-c)} f(x-y) \right) \\
&\quad - c \left(f(y) + \overline{c} f(y-x) + \overline{(-c)} f(0) \right) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + (\overline{c f(x)} + c f(x)) - (\overline{c f(y)} - c f(y)) - |c|^2 (f(x-y) + f(y-x)) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + \overline{c(f(x) - f(y))} + c(f(x) - f(y)) - |c|^2\, 2 \operatorname{Re} f(x-y) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + 2\lambda |f(x) - f(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re} f(x-y) \\
&= \lambda^2 (2(\operatorname{Re}(f(0) - f(x-y))) + \lambda(2|f(x) - f(y)| + f(0).
\end{aligned}$$

Diskriminant tohoto kvadratického polynomu v proměnné λ tak musí být nekladný, a tedy

$$0 \geqslant 4\left|f(x) - f(y)\right|^2 - 4f(0)2\operatorname{Re}(f(0) - f(x-y)),$$

což implikuje nerovnost v (d).

Tvrzení (e) nyní plyne z (d). □

Tvrzení 3.4.41. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pokud $p \in (1, \infty)$ a q je sdružený exponent k p, pro každé funkce $f \in L^p(G)$ a $g \in L^q(G)$ je funkce $f * g \in C_0(G)$.*

Důkaz. Nechť $f, g \in C_c(G)$, pro $x, y \in G$ máme

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x) - (f*g)(y)| &= \left|\int_G (f(z)g(x-z) - f(z)g(y-z))\, dm(z)\right| \\
&\leqslant \int_G |f(z)|\, |g(x-z) - g(y-z)|\, dm(z) \\
&\leqslant \|f\|_\infty \|g_{-x} - g_{-y}\|_1 .
\end{aligned}$$

Dle Tvrzení 3.4.12 je zobrazení $x \mapsto g_x$ stejnoměrně spojité na G, a tedy je funkce $f * g$ stejnoměrně spojitá na G.

Pro $f \in L^p(G)$ a $g \in L^q(G)$ obecné nalezneme posloupnost $\{f_n\}$ v $L^p(G)$ a $\{g_n\}$ v $L^q(G)$ takové, že $\|f_n - f\|_p + \|g_n - g\|_q \to 0$. Pak pro $x \in G$ platí díky Hölderově nerovnosti

$$\begin{aligned}
|(f_n * g_n)(x) - (f*g)(x)| &= \left|\int_G (f_n(y)g_n(x-y) - f(y)g(x-y))\, dm(y)\right| \\
&\leqslant \int_G |f_n(y) - f(y)|\, |g_n(x-y)|\, dm(y) + \int_G |f(y)|\, |g_n(x-y) - g(x-y)|\, dm(y) \\
&\leqslant \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \to 0,
\end{aligned}$$

tj. $f_n * g_n \rightrightarrows f * g$.

Jelikož $f_n * g_n \in C_c(G)$ dle první části důkazu a Věty 3.4.31(a), dostáváme $f * g \in C_0(G)$. □

Lemma 3.4.42. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Součet dvou pozitivně definitních funkcí a nezáporný násobek pozitivně definitní funkce je definitně pozitivní funkce.

(b) Každý element $\gamma \in \widehat{G}$ je pozitivně definitní funkce.

(c) Pokud $f \in L^1(G)$, pak $f * f^*$ je pozitivně definitní funkce. Pokud $f \in L^2(G)$, je $f * f^*$ spojitá, pozitivně definitní funkce.

(d) Pokud $\mu \in M(\widehat{G})$ je nezáporná, je funkce

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma), \quad x \in G,$$

spojitá, pozitivně definitní funkce na G.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b) Pro $\gamma \in \widehat{G}$ a sumu tvaru (3.35) platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \gamma(x_j - x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \gamma(x_j) \overline{\gamma(x_k)} = \left|\sum_{l=1}^{n} c_l \gamma(x_l)\right|^2 \geqslant 0.$$

(c) Označme $h = f * f^*$. Pro libovolnou sumu z (3.35) platí

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} h(x_j - x_k) &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \int_G f(y) f^*(x_j - x_k - y)\, dm(y) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \int_G f(y) \overline{f(y - x_j + x_k)}\, dm(y) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \int_G f(z - x_k) \overline{f(z - x_j)}\, dm(z) \\
&= \int_G \left|\sum_{l=1}^{n} c_l f(z - x_l)\right|^2 dm(z) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Pokud 4fin L6ě9G04, je dle Lemmatu 3.4.41 funkce $f * f^* \in C_0(G)$.

(d) Je-li $\mu \in M(G)$ dáno, k ověření spojitosti funkce $f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$, $x \in G$, lze zopakovat důkaz tvrzení (a) Věty 3.4.36. Podrobněji, pro $x, y \in G$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_{\widehat{G}} |\gamma(x) - \gamma(y)|\, d|\mu|(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \left|\gamma(y)^{-1}\right| |\gamma(x-y) - 1|\, d|\mu|(\gamma).$$

Nalezneme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ okolí $U \in \tau(0)$ takové, že $|\gamma(x-y) - 1| < \varepsilon$ pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$ (viz Lemma 3.4.15), dostáváme odhad

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon |\mu|(G),$$

z čehož plyne stejnoměrná spojitost f.

Pro každou sumu tvaru (3.35) pak platí

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) &= \sum_{\widehat{G}} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \left(\gamma(x_1 - x_k)\right) d\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \gamma(x_1) \overline{\gamma(x_k)}\, d\mu(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \left| \sum_{l=1}^{n} c_l \gamma(x_l) \right|^2 d\mu(\gamma) \geqslant 0. \end{aligned}$$

□

Věta 3.4.43. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a $f\colon G \to \mathbb{C}$ je spojitá pozitivně definitní funkce na G. Pak existuje $\mu \in M(G)$ nezáporná taková, že $f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$.*

Důkaz. Díky Lemmatu 3.4.40(c) a Lemmatu 3.4.40(a) lze předpokládat, že $f(0) = 1$.

Krok 1. Ukážeme, že

$$\int_G \int_G g(x) \overline{g(x-y)} f(x-y)\, \mathrm{d}(x)\, dm(y) \geqslant 0, \quad g \in L^1(G).$$

Jelikož je prostor $C_c(G)$ hustý v $L^1(G)$ a f je omezená, stačí ověřit tuto nerovnost na $C_c(G)$. Nechť tedy $g \in C_c(G)$ je dána. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme $K = \operatorname{spt} g$. Položíme $\mu = m|_K \times m|_K$ a nechť $a = \mu(K \times K)$. Definujme spojitou funkci h na $K \times K$ jako

$$h(x,y) = g(x) \overline{g(y)} f(x-y), \quad (x,y) \in K \times K.$$

Z Lemmatu 9.2.22 odvodíme existenci míry $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(K \times K)$ splňující $\left| \int_{K \times K} h(x,y)\, d\mu(x,y) - a \int_K h(x,y)\, d\nu(x,y) \right| < \varepsilon$. Pak ν je tvaru $\nu = \sum_{j,k=1}^n c_j c_k \varepsilon_{(x_j,x_k)}$ pro nějaké body $(x_j, x_k) \in K \times K$ a nezáporná čísla c_j, c_k, $j, k = 1, \ldots, n$, splňující $\sum_{j,k=1}^n c_j c_k \geqslant 0$. Protože

$$\int_{K \times K} h(x,y)\, d\nu(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} g(x_j) \overline{g(x_k)} f(x_j - x_k) c_j c_k = \sum_{i,j=1}^{n} c_j g(x_j) \overline{c_k g(x_k)} f(x_j - x_k) \geqslant 0.$$

Tedy $\int_{K \times K} h(x,y)\, d\mu(x,y) \geqslant -\varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme nerovnost $Tg \geqslant 0$.

Krok 2. Jelikož je $f \in C^b(G)$, můžeme definovat

$$Tg = \int_G g(x) f(x)\, dm(x), \quad g \in L^1(G).$$

Protože $\|f\|_\infty \leqslant 1$, platí $\|T\| \leqslant 1$.

Položme dále

$$\langle g_1, g_2 \rangle = T(g_1 * g_2^*), \quad g_1, g_2 \in L^1(G).$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \langle g_1, g_2 \rangle &= \int_G \left(\int_G g_1(y) g_2^*(x-y)\, dm(y) \right) f(x)\, dm(x) = \int_G g_1(y) \left(\int_G \overline{g_2(y-x)} f(x)\, dm(x) \right) dm(y) \\ &= \int_G \int_G g_1(y) \overline{g_2(z)} f(y-z)\, dm(z)\, dm(y), \end{aligned} \tag{3.37}$$

je zobrazení $(g_1, g_2) \mapsto \langle g_1, g_2 \rangle$ lineární v první souřadnici a sdruženě lineární v druhé. Navíc díky prvnímu kroku platí $\langle g, g \rangle \geqslant 0$.

Analogicky jako v Tvrzení 1.1.11 odvodíme Cauchyovu–Scwarzovu nerovnost

$$|\langle g_1, g_2 \rangle|^2 \leqslant \langle g_1, g_1 \rangle \langle g_2, g_2 \rangle, \quad g_1, g_2 \in L^1(G).$$

Krok 3. Ukážeme, že pro $g \in L^1(G)$ platí

$$|Tg|^2 \leqslant T(g * g^*), \quad g \in L^1(G). \tag{3.38}$$

Nechť $V \in \tau(0)$ je relativně kompaktní a nechť $h = \frac{1}{m(U)}\chi_U$. Pak pro každé $g \in L^1(G)$ díky (3.37) platí

$$\begin{aligned}\langle g, h\rangle - Tg &= \int_G \left(\int_G g(x)\overline{h(y)} f(x-y)\, dm(y)\right) dm(x) - \int_G g(x) f(x)\, dm(x) \\ &= \int_G g(x) \left(\frac{1}{m(V)} \int_V (f(x-y) - f(x))\, dm(y)\right) dm(x)\end{aligned}$$

a

$$\langle h, h\rangle - 1 = \frac{1}{m(V)^2} \int_V \int_V (f(x-y) - f(x))\, dm(x)\, dm(y).$$

Nechť nyní $g \in L^1(G)$ je dána a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Jelikož je f stejnoměrně spojitá (viz Lemma 3.4.42(e)), existuje $V \in \tau(0)$ relativně kompaktní okolí 0 takové, že $|f(x-y) - 1| < \varepsilon$ pro $x, y \in V$. Pak pro $h = \frac{1}{m(V)}\chi_V$ máme

$$|\langle g, h\rangle - Tg| \leqslant \int_G |g(x)| \frac{1}{m(V)} \int_V |f(x-y) - f(y)|\, dm(y)\, dm(x) \leqslant \varepsilon \|g\|$$

a

$$|\langle h, h\rangle - 1| \leqslant \frac{1}{m(V)^2} \int_V \int_V \varepsilon\, dm(x)\, dm(y) = \varepsilon.$$

Tedy

$$|Tg| = |Tg - \langle g, h\rangle + \langle g, h\rangle| \leqslant \varepsilon \|g\| + |\langle g, h\rangle|,$$

a proto

$$\begin{aligned}|Tg|^2 &\leqslant \varepsilon(\varepsilon \|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle|) + |\langle g, h\rangle|^2 \leqslant \varepsilon(\varepsilon \|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle|) + \langle g, g\rangle\langle h, h\rangle \\ &\leqslant \varepsilon(\varepsilon \|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle|) + \langle g, g\rangle |\langle h, h\rangle - 1| + \langle g, g\rangle \\ &\leqslant \varepsilon(\varepsilon \|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle| + \langle g, g\rangle) + \langle g, g\rangle.\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (3.38) ověřena.

Krok 4. Ověříme, že

$$|Tg| \leqslant \|\widehat{g}\|_\infty, \quad g \in L^1(G). \tag{3.39}$$

Nechť $g \in L^1(G)$ je dáno. Položíme $h_1 = g * g^*$ a pro každé $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ induktivně definujeme $h^n = h^{n-1} * h$. Jelikož je h pozitivně definitní (viz Lemma 3.4.42(c)), platí $h^* = h$. Z (3.38) platí $|Tg|^2 \leqslant T(g * g^*) = Th$. Dosazením $h^{2^{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$ do (3.38) dostáváme

$$\left|T(h^{2^{n-1}})\right|^2 \leqslant T(h^{2^{n-1}} * (h^{2^{n-1}})^*) = T(h^{2^n}).$$

Tedy

$$|Tg|^2 \leqslant Th \leqslant (T(h^2))^{\frac{1}{2}} \leqslant (T(h^4))^{\frac{1}{4}} \leqslant \cdots \leqslant (T(h^{2^n}))^{\frac{1}{2^n}} \leqslant \left\|h^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož $\|T\| \leqslant 1$ a $\lim_{n\to\infty} \left\|h^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = r_{L^1(G)}(h)$, dostáváme z Věty 3.3.65(a) a Věty 3.4.18(a) nerovnost

$$|Tg|^2 \leqslant \left\|\widehat{h}\right\|_\infty = \|\widehat{g}\|_\infty^2.$$

Tedy (3.39) je ověřeno.

Krok 5. Nechť $F\colon L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ značí Fourierovu transformaci. Definujme

$$\widetilde{L}h = Tg, \quad g \in F^{-1}(h), h \in \operatorname{Rng} F.$$

Díky odhadu (3.39) je L dobře definované lineární zobrazení $\operatorname{Rng} F$ do $\mathbb{C}$. Navíc platí

$$\left|\widetilde{L}h\right| = |Tg| \leqslant \|\widehat{g}\| = \|h\|, \quad g \in F^{-1}(h), h \in \operatorname{Rng} F.$$

Tedy $\widetilde{L}$ je spojitý funkcionál na $\operatorname{Rng} F$ o normě nepřevyšující 1. Jelikož je $\operatorname{Rng} F$ hustý v $C_0(\widehat{G})$ (viz Důsledek 3.4.24), má $\widetilde{L}$ jednoznačné rozšíření $L \in C_0(\widehat{G})^*$ s normou $\|L\| = \left\|\widetilde{L}\right\|$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci (viz Věta **??**) existuje $\widetilde{\mu} \in M(\widehat{G})$ splňující $\|\mu\| = \|L\| \leqslant 1$ a

$$Lh = \int_{\widehat{G}} h(\gamma)\, d\widetilde{\mu}(\gamma), \quad h \in C_0(\widehat{G}).$$

Definujme míru $\mu \in M(\widehat{G})$ jako $\phi(\widetilde{\mu})$, kde $\phi\colon G \to G$ je definováno jako $\phi(x) = -x$, $x \in G$.

Položme

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma), \quad x \in G. \tag{3.40}$$

Nechť nyní $g \in L^1(G)$ je libovolné. Pak

$$\begin{aligned}\int_G g(x)f(x)\, dm(x) = Tg = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma)\, d\widetilde{\mu}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(-\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \int_G g(x)\gamma(x)\, dm(x)\, d\mu(\gamma)\\ = \int_G g(x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \right) dm(x) = \int_G g(x)\widetilde{f}(x)\, dm(x).\end{aligned}$$

Tedy $f = \widetilde{f}$ m-skoro všude. Jelikož f i $\widetilde{f}$ je spojitá funkce, platí $f = \widetilde{f}$.

Zbývá ukázat, že $\mu \geqslant 0$. Dosazením $x = 0$ do (3.40) dostáváme

$$1 = \widetilde{f}(0) = f(0) = \int_{\widehat{G}} 1\, d\mu(\gamma) = \mu(\widehat{G}) \leqslant \|\mu\| = \|\widetilde{\mu}\| \leqslant 1.$$

Díky Lemmatu 9.2.23 je μ nezáporná. $\square$

3.4.8 Věta o inverzi

Lemma 3.4.44. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\widetilde{F}$ je prostý operátor z $L(M(\widehat{G}), \ell^\infty(G))$ splňující $\left\|\widetilde{F}\right\| \leqslant 1$ a každý prvek $f \in \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ je omezená, stejnoměrně spojitá funkce na G.*

Důkaz. Zjevně pro $\mu \in M(G)$ platí

$$\left|(\widetilde{F}\mu)(x)\right| = \left|\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)\right| \leqslant \int_{\widehat{G}} 1\, d\,|\mu| = \|\mu\|\,, \quad x \in G,$$

a tedy $\left\|\widetilde{F}\right\| \leqslant 1$.

Pokud $\widetilde{F}\mu = 0$, z Věty 3.4.38 plyne $\mu = 0$, tj. $\widetilde{F}$ je prostý.

Nechť nyní $\mu \in M(G)$ je dána. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^3 i^k \mu_k$, kde $\mu_k \in M(G)$, $k = 0, \dots, 3$, jsou nezáporné. Pak pro každé $k \in \{0, \dots, 3\}$ je funkce $\widetilde{F}\mu_k$ spojitá a pozitivně definitní (viz Lemma 3.4.40(d)), a tedy je stejnoměrně spojitá (viz Lemma 3.4.40(e)). Tedy i $\widetilde{F}\mu = \sum_{k=0}^3 i^k \widetilde{F}\mu_k$ je stejnoměrně spojitá. $\square$

Věta 3.4.45 (Věta o inverzi)**.** *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $f \in L^1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$, pak platí $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$.

(b) Nechť je Haarova míra m na G fixována. Pak Haarovu míru $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ lze volit tak, že rovnost

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x) d\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G, \tag{3.41}$$

platí pro každou $f \in L^1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$.

Důkaz. (a) Označme $B = L^1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ a pro $f \in B$ označme $\mu_f = \widetilde{F}^{-1}(f)$.

Krok 1. Ukážeme, že platí

$$\widehat{g}\mu_f = \widehat{f}\mu_g, \quad f, g \in B. \tag{3.42}$$

Nechť tedy $f, g \in B$ jsou dány. Pak pro libovolnou $h \in L^1(G)$ máme

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\gamma)\, d\mu_f(\gamma) &= \int_{\widehat{G}} \left(\int_G h(x)\gamma(-x)\, dm(x) \right) d\mu_f(\gamma)\\ &\int_{\widehat{G}} \left(\int_G h(-x)\gamma(x)\, dm(x) \right) d\mu_f(\gamma)\\ &= \int_G h(-x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu_f(\gamma) \right) dm(x)\\ &= \int_G h(-x)f(x)\, dm(x) = (f * h)(0) = (h * f)(0).\end{aligned}$$

Použijeme-li tuto rovnost postupně pro $h * f$ a $h * g$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f}\, d\mu_g &= \int_{\widehat{G}} \widehat{h * f}\, d\mu_g = ((h * f) * g)(0)\\ &= ((h * g) * f)(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{h * g}\, d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f}\, d\mu_g.\end{aligned}$$

Jelikož je $\operatorname{Rng} F$ hustý v $C_0(\widehat{G})$ (viz Důsledek 3.4.24), (3.42) platí.

Krok 2. Definujeme nyní funkcionál T na $C_c(\widehat{G})$ následujícím způsobem.

Nechť $g \in C_c(\widehat{G})$ je libovolná. Označme

$$B_g = \{v \in C_c(G) \colon v \text{ pozitivně definitní}, \widehat{v} \geqslant 0 \text{ a } \widehat{g} > 0 \text{ na } \operatorname{spt} g\}.$$

Díky Větě 3.4.43 platí $B_g \subset B$. Položíme

$$Tg = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{v}}\, d\mu_v,$$

kde $v \in B_g$ je libovolná.

Všimněme si, že T je nezáporný a nezávisí na volbě v. Díky pozitivní definitnosti je totiž μ_v nezáporná, takže pro $g \geqslant 0$ je $Tg \geqslant 0$.

Dále, je-li $w \in B_g$ libovolná, platí díky (3.42) rovnost

$$\int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}\widehat{v}} \widehat{v}\, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}\widehat{v}} \widehat{w}\, d\mu_v = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{v}}\, d\mu_v = Tg.$$

Ověříme nyní, že požadovaná funkce v existuje. Pro každé $\gamma \in \operatorname{spt} g$ nalezneme díky Důsledku 3.4.24(c) funkci $f_\gamma \in C_c(G)$ takovou, že $\widehat{f}(\gamma) \neq 0$. Funkce $v_\gamma = u_\gamma * u_\gamma^*$ má pak kompaktní nosič a $\widehat{v_\gamma}(\gamma) > 0$. Pro každé $\gamma \in \operatorname{spt} g$ nalezneme okolí U_γ, na kterém je funkce $\widehat{v_\gamma}$ kladná. Díky kompaktnosti vybereme konečně mnoho bodů $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ takových, že $\operatorname{spt} g \subset_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Pak funkce $v = \sum_{i=1}^n v_{\gamma_i}$ je element $C_c(G)$, $\widehat{v} \geqslant 0$ na $\widehat{G}$ a $\widehat{v} > 0$ na $\operatorname{spt} g$. Dle Lemmatu 3.4.40(c) je pozitivně definitní.

Je třeba nyní ověřit linearitu T. Nechť $g_1, g_2 \in C_c(\widehat{G})$ a $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Nechť v_1, v_2 a v_3 jsou funkce požadované definicí T pro funkce g_1, g_2 a $a_1 g_1 + a_2 + g_2$. Pak je funkce $v_1 + v_2$ též pozitivně definitní, $\widehat{v_1} + \widehat{v_2} \geqslant 0$ na $\widehat{G}$ a je kladná na $\operatorname{spt} g_1 \cup \operatorname{spt} g_2$. Tedy je kladná i na $\operatorname{spt}(a_1 g_1 + a_2 g_2)$. Proto

$$\begin{aligned}a_1 T g_1 + a_2 T g_2 &= a_1 \int_{\widehat{G}} \frac{g_1}{\widehat{v_1 + v_2}}\, d\mu_{v_1+v_2} + a_2 \int_{\widehat{G}} \frac{g_2}{\widehat{v_1 + v_2}}\, d\mu_{v_1+v_2}\\ &= \int_{\widehat{G}} \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{\widehat{v_1 + v_2}}\, d\mu_{v_1+v_2} = T(a_1 g_1 + a_2 g_2).\end{aligned}$$

Tedy je T lineární.

Krok 3. Funcionál T je nenulový a translačně invariantní.

Zvolme totiž $v \in B$ nenulovou, pak i $\mu_v \neq 0$, neboť $\widetilde{F}$ je prostý. Nechť $g \in C_c(\widehat{G})$ je funkce splňující $\int_{\widehat{G}} g\, d\mu_v \neq 0$. Nechť w je funkce z definice $T(g\widehat{v})$. Díky (3.42) pak dostáváme

$$T(g\widehat{v}) = \int_{\widehat{G}} \frac{h\widehat{v}}{\widehat{w}}\, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\, d(\widehat{v}\mu_w) = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\, d(\widehat{w}\mu_v) = \int_{\widehat{G}} g\, d\mu_v \neq 0.$$

Funkcionál T je tedy nenulový.

Abychom ukázali jeho translanční invariantnost, vezměme $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a $g \in C_c(\widehat{G})$. Položme

$$f(\gamma) = g(\gamma_0^{-1}\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Pak $\operatorname{spt} f = \gamma_0 \operatorname{spt} g$.

Stejným postupem jako v druhém kroku nalezneme $v \in B_g$ takovou, že $\widehat{v} > 0$ i na $\gamma_0 \operatorname{spt} g$. Pak také platí $v \in B_f$. Nechť $\phi \colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ je definováno jako

$$\phi(\gamma) = \gamma_0^{-1}\gamma, \gamma \in \widehat{G}.$$

Položme $\mu = \phi(\mu_v)$ a $w = \widetilde{F}\mu$. Pak w je spojitá pozitivně definitní funkce na G (viz Lemma 3.4.40(d)) a $w(x) = \gamma_0^{-1}(x)v(x)$, $x \in G$. Vskutku, pro $x \in G$ máme

$$\begin{aligned}w(x) &= \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\phi(\mu)(\gamma) = \int_{\widehat{G}} (\gamma_0^{-1}\gamma)(x)\, d\mu_v(\gamma)\\ &= \gamma_0(-x) \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu_v(x) = \gamma_0(-x)(\widetilde{F}\mu_v)(x) = \gamma_0(-x)v(x).\end{aligned}$$

Proto $w \in C_c(G)$ a dle Věty 3.4.18(b) máme

$$\widehat{w}(\gamma) = \widehat{v}(\gamma_0\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Platí tak $w \in B_g$. Jelikož $v \in B_f$, dostáváme

$$Tg = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g(\gamma)}{\widehat{w}(\gamma)}\, d\phi(\mu_g)(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \frac{g(\gamma_0^{-1}\gamma)}{\widehat{w}(\gamma_0^{-1}\gamma)}\, d\mu_v(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \frac{f(\gamma)}{\widehat{v}(\gamma)}\, d\mu_v(\gamma) = Tf.$$

Tedy T je translačně invariantní.

Krok 4. Nechť $\widehat{m}$ značí Haarovu míry na $\widehat{G}$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci existuje nezáporná, nenulová míra $\mu \in M(\widehat{G})$ splňující $Tg = \int_{\widehat{G}} g\, d\mu$, $g \in C_c(\widehat{G})$. Díky jednoznačnosti Haarovy míry existuje $c > 0$ takové, že $\mu = c\widehat{m}$.

Nechť $f \in B$ a $g \in C_c(\widehat{G})$ jsou dány. Vezměme libovolné $v \in B_{g\widehat{f}}$. Pak díky (3.42) máme

$$\int_{\widehat{G}} g\, d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{g\widehat{v}}{\widehat{v}}\, d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{g\widehat{f}}{\widehat{v}}\, d\mu_v = T(g\widehat{f}) = c\int_{\widehat{G}} g\widehat{f}\, d\widehat{m}.$$

Tedy pro každé $f \in B$ platí

$$\int_{\widehat{G}} g\, d\mu_f = c\int_{\widehat{G}} g\widehat{f}\, d\widehat{m}, \quad g \in C_c(\widehat{G}).$$

Protože je prostor $C_c(\widehat{G})$ hustý v $C_0(\widehat{G})$, platí $\mu_f = \widehat{f}c\widehat{m}$. Jelikož je μ_f konečná míra, je $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Tedy platí (a).

Z máme

$$f(x) = (\widetilde{F}\mu_f)(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu_f(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\widehat{f}(\gamma)\, d(c\widehat{m})(x).$$

Tedy formule (3.41) platí pro $f \in B$, kde uvažujeme míru $c\widehat{m}$.

□

Příklad 3.4.46. Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.

(a) Pokud G je diskrétní a $m(\{0\}) = 1$, pak Haarova míra $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ vyhovující (3.41) je pravděpodobnostní.

(b) Pokud G je kompaktní a $m(G) = 1$, pak Haarova míra $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ vyhovující (3.41) splňuje $\widehat{m}(\{\gamma\}) = 1$, $\gamma \in \widehat{G}$.

(c) Pokud $G = \mathbb{R}^d$, pak míra m_d z Definice 1.5.30 splňuje (3.41).

Důkaz. (a) Uvažujme funkci $f = \chi_{\{0\}}$. Pak

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(-x)\ m(x) = f(0)\gamma(0) = 1, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Tedy platí

$$\widehat{m}(\widehat{G}) = \int_{\widehat{G}} 1\, d\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\, d\widehat{m}(\gamma) = f(0) = 1,$$

tj. $\widehat{m}$ je pravděpodobnostní.

(b) Uvažujme funkci $e(x) = 1$, $x \in G$. Pak $e \in L^1(G) \cap \operatorname{Rng}\widetilde{F}$, neboť f je spojitá a pozitivně definitní. (Pro funkci e je totiž suma typu (3.35) rovna $\left|\sum_{l=1}^n c_l\right|^2$.) V důkazu Tvrzení 3.4.19(b) jsme odvodili, že

$$\widehat{e}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = e, \\ 0, & \gamma \in \widehat{G}\backslash\{e\}. \end{cases}$$

Tedy

$$1 = e(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{e}(\gamma)\, d\widehat{m}(\gamma) = \widehat{m}(\{e\}).$$

(c) Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}, m_d) \cap \operatorname{Rng}\widetilde{F}$ je dáno. Pak $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R}, m_d)$ a z Věty 1.5.37(d) víme, že

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t)e^{ixt}\, dm_d(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy míra m_d na $\mathbb{R}$ a m_d na $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ splňují (3.41). □

Věta 3.4.47. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Uvažujme na G topologii $\tau_{\widehat{K}}$ stejnoměrně konvergence na kompaktních podmnožinách $\widehat{G}$, tj. množina $U \subset G_1$ je $\tau_{\widehat{K}}$-otevřená, pokud pro každé $x \in U$ existuje kompakt $K \subset \widehat{G}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že množina*

$$U_{K,\varepsilon} = \{y \in G\colon\ |\gamma(y) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\} \tag{3.43}$$

splňuje $x + U_{K,\varepsilon} \subset U$.

Pak $\tau_{\widehat{K}}$ je topologie, která splývá s původní topologií.

Důkaz. Je třeba ukázat, že průnik dvou $\tau_{\widehat{K}}$-otevřených množin $U_1, U_2 \subset G$ je $\tau_{\widehat{K}}$-otevřená. Nechť tedy $x \in U_1 \cap U_2$ je dáno a U_{K_1,ε_1} a U_{K_2,ε_2} jsou množiny tvaru (3.43) splňující $x + U_{K_i,\varepsilon_i} \subset U_i$, $i = 1, 2$. Uvažujme množinu $V = U_{K_1 \cup K_2, \min \varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Pak pro $y \in V$ platí

$$|\gamma(y) - 1| < \varepsilon_i, \gamma \in K_i, i = 1, 2,$$

a tedy $x + V \subset U_1 \cap U_2$. Vskutku je tedy $\tau_{\widehat{K}}$ topologie.

Nechť τ je topologie G. Ukážeme, že τ splývá s $\tau_{\widehat{K}}$. Zřejmě stačí ukázat, že množiny tvaru (3.43) jsou τ-otevřené a že pro každé $U \in \tau(0)$ existuje množina V tvaru (3.43) splňující $V \subset U$.

Krok 1. Nechť nejprve $K \subset \widehat{G}$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nechť $x \in U_{K,\varepsilon}$ je dáno. Pro každé $\gamma \in K$ existuje τ-otevřená množina $U_\gamma \subset G$ a otevřená množina $V \subset \widehat{G}$ takové, že $(x, \gamma) \in U_\gamma \times V_\gamma$ a

$$\left|\gamma'(x') - \gamma(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x,', \gamma') \in U_\gamma \times V_\gamma.$$

(Zde používáme Lemma 3.4.22(b).) Díky kompaktnosti K existuje konečně mnoho prvků $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ takových, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\gamma_i}$. Položme $U = \bigcap_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Pak $U \subset U_{K,\varepsilon}$. Vskutku, nechť $y \in U$ je dáno. Vezmeme libovolné $\gamma \in K$ a nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\gamma \in V_{\gamma_i}$. Pak

$$|\gamma(y) - 1| \leqslant |\gamma(y) - \gamma(x)| + |\gamma(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy $U \subset U_{K,\varepsilon}$, takže jsme ověřili, že každá množina tvaru (3.43) je τ-otevřená.

Krok 2. Nechť $U \subset G$ je τ-okolí 0. Nalezneme kompaktní, symetrické $V \in \tau(0)$ splňující $V - V \subset U$. Položme $f = m(V)^{-\frac{1}{2}} \chi_V$ a $g = f * f^*$. Pak g je spojitá, pozitivně definitní funkce na G_1 (viz Lemma 3.4.40(c)) a

$$\operatorname{spt} g \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} f \subset V + V \subset U.$$

Tedy pro g platí (3.41). Speciálně máme

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}} \widehat{g}\, d\widehat{m} = g(0) = \int_G f(x) f(-x)\, dm(x) &= \int_G m(V)^{-1} \chi_V(x) \chi_V(-x)\, dm(x)\, dm(x) \\
= m(V)^{-1} \int_V \chi_V(x) \chi_{-V}(x)\, dm(x) = 1.
\end{aligned}$$

Jelikož $\widehat{g} = \left|\widehat{f}\right|^2 \geqslant 0$, existuje kompakt $K \subset \widehat{G}$ takový, že $\int_K \widehat{g}\, d\widehat{m} > \frac{2}{3}$.

Takovýto kompakt nalezneme následovně. Položme

$$A = \{\gamma \in \widehat{G} \colon \widehat{g} > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{\gamma \in \widehat{G} \colon \widehat{g} \geqslant \frac{1}{n}\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\widehat{m}(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a díky Lebesgueově větě pak dostáváme

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{g}\, d\widehat{m} = \int_{\widehat{G}} \chi_A \widehat{g}\, d\widehat{m} = \lim_{n \to \infty} \int_{\widehat{G}} \chi_{A_n} \widehat{g}\, d\widehat{m}.$$

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{A_n} \widehat{g}\, d\widehat{m} > \frac{2}{3}$. Za pomoci regularity míry $\widehat{m}$ nyní nalezneme požadovaný kompakt.

Uvažujme nyní množinu $U_{K,\frac{1}{3}}$ (viz (3.43)). Pak $U_{K,\frac{1}{3}} \subset U$.

Nechť totiž $x \in U_{K,\frac{1}{3}}$ je libovolné. Pak pro $\gamma \in K$ platí $|\gamma(x) - 1| < \frac{1}{3}$, a tedy $\operatorname{Re} \gamma(x) > \frac{2}{3}$. Dále

$$\left|\int_{\widehat{G} \setminus K} \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| \leqslant \int_{\widehat{G} \setminus K} \widehat{g}\, d\widehat{m} = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}\, d\widehat{m} - \int_K \widehat{g}\, d\widehat{m} \leqslant 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

a

$$\begin{aligned}
\left|\int_K \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| &= \left|\int_K \widehat{g}(\gamma) \operatorname{Re} \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma) + i \int_K \widehat{g}(\gamma) \operatorname{Im} \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| \\
&\geqslant \left|\int_K \widehat{g}(\gamma) \operatorname{Re} \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| = \int_K \widehat{g}(\gamma) \operatorname{Re} \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma) \\
&\geqslant \frac{2}{3} \int_K \widehat{g}\, d\widehat{m} \geqslant \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned}
|g(x)| = \left|\int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| &= \left|\int_K \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma) + \int_{\widehat{G} \setminus K} \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| \\
&\geqslant \left|\int_K \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| - \left|\int_{\widehat{G} \setminus K} \widehat{g}(\gamma) \gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma)\right| \geqslant \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Jelikož $g = 0$ na $G_1 \setminus (V - V)$, dostáváme $x \in V - V \subset U$.

Tedy $U_{K,\frac{1}{3}} \subset U$, a tedy množiny tvaru (3.43) tvoří bázi okolí 0. $\square$

Věta 3.4.48. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Grupa $\widehat{G}$ odděluje body G.

(b) Je-li G kompaktní, je systém funkcí

$$\mathcal{F} = \{\sum_{i=1}^{n} a_j \gamma_j : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \widehat{G}\}$$

hustý v $C(G)$.

Důkaz. (a) Nechť bod $x \in G \backslash \{0\}$ je dán. Zvolíme okolí $U \in \tau(0)$ splňující $x \notin U$ a nechť $U_{K,\varepsilon}$ je množina tvaru (3.43) splňující $U_{K,\varepsilon} \subset U$. Pak $\gamma(x) \neq 1$ pro nějaké $\gamma \in K$. V opačném případě by totiž platilo $|\gamma(x) - 1| = 0 < \varepsilon$ pro každé $\gamma \in K$, a tedy $x \in U_{K,\varepsilon} \subset U$, což by byl spor.

Jsou-li nyní body $x_1, x_2 \in G$ různé, nalezneme $\gamma \in \widehat{G}$ splňující $\gamma(x_1 - x_2) \neq 1$. Pak $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je zjevně vektorový prostor uzavřený na komplexní sdružení. Jelikož je $\widehat{G}$ grupa, je $\mathcal{F}$ i algebra. Dle (a) odděluje body, takže tvrzení plyne ze Stoneovy-Weierstrassovy věty. □

Úmluva 3.4.49. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Dále budeme předpokládat, že m i $\widehat{m}$ jsou normalizovány tak, že platí* (3.41).

3.4.9 Plancherelova věta

Věta 3.4.50 (Plancherelova věta)**.** *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a F značí Fourierovu transformaci. Pak existuje právě jeden izometrický, surjektivní operátor $P\colon L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$, který splňuje $P = F$ na $L^1(G) \cap L^2(G)$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ je libovolné. Pak funkce $g = f * f^*$ je v $L^1(G)$, je spojitá a pozitivně definitní (viz Lemma 3.4.40(c)), tj. $g \in L^1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$. Jelikož $\widehat{g} = \left|\widehat{f}\right|^2$, z Věty 3.4.45 dostáváme

$$\int_G |f(x)|^2 \, dm(x) = \int_G f(x) f^*(-x) \, dm(x) = g(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma) \, d\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \left|\widehat{f}(\gamma\right|^2 \, d\widehat{m}(\gamma).$$

Tedy F je izometrie na $L^1(G) \cap L^2(G)$ do $L^2(G)$.

Označme $A = F(L^1(G) \cap L^2(G))$. Nechť $g \in L^2(\widehat{G})$ splňuje

$$\int_{\widehat{G}} f(\gamma) \overline{g(\gamma)} \, d\widehat{m}(\gamma) = 0, \quad f \in A.$$

Pak pro každé $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ a $x_0 \in G$ platí $\widehat{f_{-x_0}} \in L^1(G) \cap L^2(G)$ a dle Věty 3.4.18(c) máme $\widehat{f_{-x_0}}(\gamma) = \gamma(x_0) \widehat{f}(\gamma)$. Tedy

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x_0) f(\gamma) \overline{g(\gamma)} \, d\widehat{m}(\gamma) = 0, \quad f \in A, x_0 \in G.$$

Pro $f \in A$ je $f \in L^2(\widehat{G})$, a tedy díky Hölderově nerovnosti platí $f\overline{g} \in L^1(\widehat{G})$. Máme tedy $\widetilde{F}(f\overline{g}\widehat{m}) = 0$, a tedy $f\overline{g} = 0$ $\widehat{m}$-skoro všude (viz Věta 3.4.38).

Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Nalezneme $f \in C_c(G)$ takovou, že $\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$ (viz Důsledek 3.4.24(c)). Ze spojitosti $\widehat{f}$ plyne, že $\widehat{f} \neq 0$ na nějakém okolí U bodu γ_0. Tedy $\overline{g} \chi_U = 0$ $\widehat{m}$-skoro všude. Ukázali jsme, že pro každý bod $\gamma_0 \in \widehat{G}$ existuje okolí U takové, že $\widehat{m}(\{\gamma \in U : \ |g(\gamma)| > 0\}) = 0$.

Položme

$$L = \{\gamma \in \widehat{G} : \ |g(\gamma)| > 0\}.$$

Jelikož je $g \in L^2(\widehat{G})$, je $\widehat{m}(L) < \infty$, a tedy existuje neklesající posloupnost $\{L_n\}$ kompaktních podmnožin $\widehat{G}$ splňující $L_n \subset L$, $n \in \mathbb{N}$, a $\widehat{m}(L_n) \to \widehat{m}(L)$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro každý bod $\gamma \in L_n$ nalezneme okolí U_γ takové, že $\widehat{m}(U_\gamma) = 0$. Díky kompaktnosti existuje konečná množina $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in L_n$ taková, že $L_n \subset \bigcup_{i=1}^m U_{\gamma_i}$. Tedy $\widehat{m}(L_n) = 0$. Proto i $\widehat{m}(L) = 0$ a g je nulová funkce.

Díky Větě 1.2.8 je tedy A hustý podprostor $L^2(\widehat{G})$. Proto má F z $L^1(G) \cap L^2(G)$ právě jedno izometrické rozšíření na $P\colon L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$ (viz Věta 1.1.37). □

Definice 3.4.51. Zobrazení P z předchozí Věty 3.4.50 se nazývá Plancherelovou transformací.

Lemma 3.4.52 (Parsevalova rovnost)**.** *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa a P je Plancherelova transformace. Pak platí*

$$\int_G f(x) \overline{g(x)} \, dm(x) = \int_{\widehat{G}} Pf(\gamma) \overline{Pg(\gamma)} \, d\widehat{m}(\gamma), \quad f, g \in L^2(G).$$

Důkaz. Požadovaná rovnost plyne z Věty 3.5.10. □

Věta 3.4.53. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak*

$$\operatorname{Rng} F = \{g_1 * g_2 \colon g_1, g_2 \in L^2(\widehat{G})\}.$$

Důkaz. Nechť F je Fourierova a P Plancherelova transformace.

Krok 1. Ukážeme, že pro $f, g \in L^2(G)$ platí

$$F(fg) = Pf * Pg. \tag{3.44}$$

Nechť tedy $f, g \in L^2(G)$ jsou dány. Abychom toto ukázali, vezměme posloupnost $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ v $C_c(G)$ splňující $\|f_n - f\|_2 + \|g_n - g\|_2 \to 0$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné a nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Položíme $u(x) = g_n(-x)\gamma_0(x)$, $x \in G$. Pak

$$u^*(x) = \overline{u(-x)} = \overline{g_n(x)\gamma_0(-x)}, \quad x \in G.$$

Pak

$$\widehat{u}(\gamma) = \int_G g_n(x)\gamma_0(x)\gamma(-x)\, dm(x) = \int_G g_n(-x)(\gamma_0\gamma^{-1}(-x)\, dm(x) = \widehat{g_n}(\gamma_0\gamma^{-1}), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Dle Parsevalovy rovnosti tak máme

$$\begin{aligned} P(f_ng_n)(\gamma_0) = \widehat{f_ng_n}(\gamma_0) &= \int_G f_n(x)g_n(x)\gamma_0(-x)\, dm(x) = \int_G f(x)\overline{\overline{g_n(x)\gamma_0(-x)}}\, dm(x) \\ &= \int_G f_n(x)\overline{u^*(x)}\, dm(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\overline{\widehat{u^*}(\gamma)}\, d\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\widehat{u}(\gamma)\, d\widehat{m}(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\widehat{g_n}(\gamma_0\gamma^{-1})\, d\widehat{m}(\gamma) = (\widehat{f_n} * \widehat{g_n})(\gamma_0). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Jelikož díky Hölderově nerovnosti platí

$$\|f_ng_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\| + \|(f_n - f)g\|_1 \leqslant \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 ,$$

dostáváme $F(f_ng_n) \rightrightarrows F(fg)$.

Dále $Ff_n = Pf_n \to Pf$ a $Fg_n = Pg_n \to Pg$ v $L^2(\widehat{G})$. Tedy pro $\gamma_0 \in \widehat{G}$ platí

$$\begin{aligned} |(Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma)| &\leqslant \int_{\widehat{G}} |Pf_n(\gamma) - Pf(\gamma)| \left|Pg_n(\gamma_0\gamma^{-1}) - Pg(\gamma_0\gamma^{-1})\right| d\widehat{m}(\gamma) \\ &\leqslant \|Pf_n - Pf\|_2 \|Pg_n - Pg\|_2 . \end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \left|\widehat{fg}(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma_0)\right| &\leqslant \left|\widehat{fg}(\gamma_0) - \widehat{f_ng_n}(\gamma_0)\right| + \left|\widehat{f_ng_n}(\gamma_0) - (Pf_n * Pg_n)(\gamma_0)\right| \\ &\quad + |(Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma_0)| \end{aligned}$$

a

$$\widehat{(f_ng_n)}(\gamma_0) - (Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) = 0$$

dle (3.45), máme $\widehat{fg}(\gamma_0) = (Pf * Pg)(\gamma_0)$.

Krok 2. Dokažme nyní požadovanou rovnost. K důkazu inkluze „$\subset$“ vezměme libovolné $f \in L^1(G)$. Položíme-li

$$f_1 = \sqrt{|f|}\operatorname{sgn} f \quad \text{a} \quad f_2 = \sqrt{|f|},$$

platí $f_1, f_2 \in L^2(G)$ a $f = f_1f_2$. Rovnost(3.45) ukazuje, že $Ff = Pf_1 * Pf_2$.

Pokud $g_1, g_2 \in L^2(\widehat{G})$ jsou dány, nechť $f_1, f_2 \in L^2(G)$ splňují $Pf_i = g_i$, $i = 1, 2$. Dle (3.45) pak $Pg_1 * Pg_2 = F(f_1f_2) \in \operatorname{Rng} F$. Tím je důkaz ukončen. □

Věta 3.4.54. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa nechť $U \subset \widehat{G}$ je neprázdná otevřená množina. Pak existuje $f \in L^1(G)$ takové, že $\widehat{f} \neq 0$ a $\widehat{f} =$ na $\widehat{G} \backslash U$.*

Důkaz. Nechť K je kompaktní podmnožina U splňující $\widehat{m}(K) > 0$ a nechť $V \in \tau(0)$ je kompaktní okolí splňující $K + V \subset U$. Dle Věty 3.4.53 existuje $f \in L^1(G)$ takové, že $\widehat{f} = \chi_K * \chi_V$. Pak $\operatorname{spt} \widehat{f} \subset K + V \subset U$ a

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma_0)\, d\widehat{m}(\gamma_0) &= \int_{\widehat{G}} (\chi_K * \chi_V)(\gamma_0)\, d\widehat{m}(\gamma_0) = \int_{\widehat{G}}\int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\chi_V(\gamma_0\gamma^{-1})\, d\widehat{m}(\gamma)\, d\widehat{m}(\gamma_0) \\ &= \int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma) \left(\int_{\widehat{G}} \chi_V(\gamma_0\gamma^{-1})\, d\widehat{m}(\gamma_0)\right) d\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\widehat{m}(V)\, d\widehat{m}(\gamma) \\ &= \widehat{m}(K)\widehat{m}(V) > 0 \end{aligned}$$

Tedy $\widehat{f} \neq 0$ a důkaz je hotov. □

3.4.10 Pontrjaginova dualita

Definice 3.4.55 (Kanonické vnoření). Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Definujme zobrazení $\phi\colon G \to \ell^\infty(\widehat{G})$ jako

$$\phi(x)(\gamma) = \gamma(x), \quad \gamma \in \widehat{G}, x \in G.$$

Lemma 3.4.56. *Nechť G_1 je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Pak $\operatorname{Rng}\phi \subset G_3$ a ϕ je grupový homomorfizmus.*

Důkaz. Nechť $x \in G_1$ je dáno. Pak

$$\phi(0)(\gamma) = \gamma(x) = 1, \quad \gamma \in G_2,$$

a

$$\phi(x)(\gamma_1\gamma_2) = (\gamma_1\gamma_2)(x) = (\gamma_1(x))(\gamma_2(x)) = (\phi(x)(\gamma_1))(\phi(x)(\gamma_2), \gamma_1, \gamma_2 \in G_2,$$

tedy $\phi(x)\colon G_2 \to \mathbb{T}$ je grupový homomorfzimus.

Dle Lemmatu 3.4.22(b) a Věty 3.4.23 je $\phi(x)$ spojitá funkce na G_2, a tedy je $\operatorname{Rng}\phi \subset G_3$. □

Věta 3.4.57 (Pontrjaginova dualita). *Nechť G_1 je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Pak je kanonické vnoření homeomorfizmus G_1 na G_3.*

Důkaz. Nechť τ značí topologii G_1 a nechť g_0 značí neutrální prvek G_3, tj. $\phi(0) = g_0$.

Krok 1. Ukážeme, že ϕ je spojité zobrazení z G_1 do G_3. Nechť $V \subset G_3$ je otevřená množina a nechť $x \in G_1$ splňuje $\phi(x) \in V$. Dle Definice 3.4.20 existuje $K \subset G_2$ kompakt a $\varepsilon > 0$ takové, že $\phi(x)V_{K,\varepsilon} \subset V$ (zde $V_{K,\varepsilon}$ je množina tvaru (3.30)). Pak je množina

$$U_{K,\varepsilon} = \{x \in G_1\colon |\gamma(x) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\}$$

prvkem $\tau(0)$ (viz Věta 3.4.47) a splňuje $\phi(x + U_{K,\varepsilon}) \subset \phi(x)V_{K,\varepsilon}$. Tedy $\phi^{-1}(V)$ je otevřená množina a ϕ je tak spojité.

Krok 2. Nechť nyní $U \subset G_1$ je τ-otevřená množina a $\phi(x) \in \phi(U)$ je dáno. Chceme ukázat, že existuje množina $V_{K,\varepsilon}$ tvaru (3.43) splňující

$$\phi(x)(V_{K,\varepsilon} \cap \phi(G_1)) \subset \phi(U). \tag{3.46}$$

Nalezneme $K \subset G_2$ kompakt a $\varepsilon > 0$ takové, že množina $U_{K,\varepsilon}$ tvaru (3.30) splňuje $x + U_{K,\varepsilon} \subset U$. Nechť

$$V_{K,\varepsilon} = \{g \in G_3\colon |g(\gamma) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\}.$$

Pak V je otevřená množina v G_3 a navíc pro ni platí (3.46). Je-li totiž $y \in G_1$ splňující $\phi(y) \in V_{K,\varepsilon}$, pak $y \in U_{K,\varepsilon}$. Pak $x + y \in U$, a tedy

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(x + y) \in \phi(U).$$

Krok 3. V tomto kroku ověříme, že $\phi(G_1)$ je uzavřená podmnožina G_3 Nechť $g \in \overline{\phi(G_1)}$ je dáno. Nalezneme net $\{x_i\}_{i\in I}$ v G_1 takový, že $\phi(x_i) \to g$. Pak $\{x_i\}$ splňuje následující fakt:

$$\forall U \in \tau(0)\ \exists i_0 \in I\ \forall i, j \in I, i, j \geqslant i_0\colon x_i - x_j \in U. \tag{3.47}$$

Mějme totiž $U \in \tau(0)$ dáno. Pak $\phi(U)$ je otevřené okolí g_0 v $\phi(G_1)$, a tedy existuje $V \in \tau(g_0)$ takové, že $V \cap \phi(G_1) \subset \phi(U)$. Nechť $W \in \tau(g_0)$ splňuje $WW^{-1} \subset V$. Jelikož je gW okolí g, existuje $i_0 \in I$ takové, že $\phi(x_i) \in gW$ pro $i \geqslant i_0$. Pro $i \in I$ označme symbolem $w_i \in W$ splňující $\phi(x_i) = gw_i$. Pak pro $i, j \geqslant i_0$ platí

$$\phi(x_i - x_j) = \phi(x_i)\phi(x_j)^{-1} = gw_i g^{-1} w_j^{-1} w_i w_j^{-1} \in WW^{-1} \subset V.$$

Tedy máme $\phi(x_i - x_j) \in V \cap \phi(U)$, a tedy $x_i - x_j \in U$. Tím je (3.47) ověřeno.

Zvolme nyní kompaktní množinu $U \in \tau(0)$. Nechť $i_0 \in I$ je index daný (3.47). Pak pro $i \geqslant i_0$ platí $x_i - x_{i_0} \in U$, tj. $x_i \in x_{i_0} + U$. Net $\{x_i\}_{i\geqslant i_0}$ je tak obsažen v kompaktní množině $x_{i_0} + U$, a tedy má podnet $\{y_j\}$ konvergující k $y \in G_1$.

Vzhledem k tomu, že $\{x_i\}_{i\geqslant i_0}$ je podnet $\{x_i\}_{i\in I}$, je i $\{y_j\}$ podnet $\{x_i\}_{i\in I}$. Ze spojitosti ϕ tak dostáváme

$$\phi(y) = \lim_j \phi(y_j) = g,$$

a tedy $g \in \phi(G_1)$.

Krok 4. Nyní stačí ukázat, že $\phi(G_1)$ je hustá podmnožina G_3. Předpokládejme, že tomu tak není, a že tedy existuje neprázdná, otevřená množina $V \subset G_3$ splňující $\phi(G_1) \cap V = \varnothing$. Dle Věty 3.4.54 existuje $\varphi \in L^1(G_2)$ taková, že $\widehat{\varphi} \neq 0$, ale $\widehat{\varphi} = 0$ na $G_3 \backslash V$. Jelikož $\widehat{\varphi}(\phi(x)) = 0$ pro každé $x \in G_1$, máme

$$\widehat{\varphi}(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)(\phi(x))(\gamma^{-1})\, d\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\gamma(-x)\, d\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G_1.$$

Díky Větě 3.4.38 dostáváme $\varphi = 0$, což je spor. Proto platí

$$G_3 = \overline{\phi(G_1)} = \phi(G_1),$$

a důkaz je tak hotov. □

3.4.11 Důsledky Pontrjaginovy duality

Věta 3.4.58. *Nechť G_1 je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Nechť $\phi\colon G_1 \to G_3$ je kanonické vnoření. Nechť dále*

- *$F_1\colon L^1(G_1) \to C_0(G_2)$, respektive $F_2\colon L^1(G_2) \to C_0(G_3)$, je Fourierova transformace na G_1, respektive G_2,*
- *symbol F_1', respektive F_2', značí duální operátor k F_1, respektive k F_2,*
- *$H_1\colon L^1(G_1) \to C^b(G_2)$, respektive $H_2\colon L^1(G_2) \to C^b(G_3)$, je Fourierova–Stieltjesova transformace na G_1, respektive G_2.*
- *Nechť $\widetilde{F}_1\colon M(G_2) \to C^b(G_1)$, respektive $\widetilde{F}_2\colon M(G_3) \to C^b(G_2)$, je zobrazení z Definice 3.4.37. Položme*

$$(T_1\mu)(x) = (\widetilde{F}_1\mu)(-x), \quad x \in G_1, \mu \in M(G_2),$$

a

$$(T_2\mu)(\gamma) = (\widetilde{F}_2\mu)(\gamma^{-1}), \quad \gamma \in G_2, \mu \in M(G_3),$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Platí $F_i' = T_i$, $i = 1, 2$.

(b) Pro $\mu \in M(G_2)$ položme $\nu = i(\mu)$, kde $i\colon G_2 \to G_2$ je definováno jako $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, $\gamma \in G_2$. Pak

$$(\widetilde{F}_1\nu)(x) = (H_2\mu)(\phi(x)), \quad x \in G_1.$$

(c) Pro $\mu \in M(G_1)$ položme $\nu = i(\mu)$, kde $i\colon G_1 \to G_1$ je definováno jako $i(x) = -x$, $x \in G_1$. Pak platí

$$(H_1\mu)(\gamma) = (\widetilde{F}_2\phi(\nu))(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

Důkaz. (a) Nechť $\mu \in M(G_2)$ je dáno. Pak

$$\begin{aligned}\int_{G_1} (T_1\mu)(x)f(x)\,dm(x) &= \int_{G_1}\int_{G_2} f(x)\gamma(-x)\,d\mu(\gamma)\,dm(x) = \int_{G_2}\int_{G_1} f(x)\gamma(-x)\,dm(x)\,d\mu(\gamma)\\ &= \int_{G_2} F_1 f\,d\mu, \quad f \in L^1(G_1),\end{aligned}$$

a tedy $F_1' = T_1$.

Podobně pro $\mu \in M(G_3)$ a $f \in L^1(G_2)$ platí

$$\begin{aligned}\int_{G_2} (T_2\mu)(\gamma)f(\gamma)\,d\widehat{m}(\gamma) &= \int_{G_2}\int_{G_3} f(\gamma)g(\gamma^{-1}\,d\mu(g)\,d\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_3}\int_{G_2} f(\gamma)g(\gamma^{-1})\,d\widehat{m}(\gamma)\,d\mu(g)\\ &= \int_{G_3} F_2 f\,d\mu.\end{aligned}$$

Tvrzení (a) je tak ověřeno.

(b) Nechť $\mu \in M(G_2)$ je dáno. Položme $\nu = i(\mu)$. Pak pro $x \in G$ platí

$$\begin{aligned}(\widetilde{F}_1\nu)(x) = (\widetilde{F}_1 i(\mu))(x) &= \int_{G_2} \gamma(x)\,di(\mu)(\gamma) = \int_{G_2} \gamma^{-1}(x)\,d\mu(\gamma)\\ &= \int_{G_2} \phi(x)(\gamma^{-1})\,d\mu(\gamma) = (H_2\mu)(\phi(x)).\end{aligned}$$

(c) Podobně jako v (b) definujme pro $\mu \in M(G_1)$ míru $\nu = i(\mu)$. Pak dostáváme pro $\gamma \in G_2$ rovnosti

$$\begin{aligned}(\widetilde{F_2}\phi(\nu))(\gamma) &= \int_{G_3} g(\gamma)\,d\phi(\nu)(g) = \int_{G_1} \phi(x)(\gamma)\,d\nu(x)\\ &= \int_{G_1} \gamma(-x)\,d\mu(x) = (H_1\mu)(\gamma).\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.4.59. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak je Fourierova–Stieltjesova transformace prostá.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 3.4.58(c), neboť zobrazení $\widetilde{F}_2$ je prosté dle Věty 3.4.38, což implikuje injektivitu T_2. □

Věta 3.4.60. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $M(G)$ a $L^1(G)$ jsou polojednoduché algebry.*

Důkaz. Dle Věty 3.4.36(c) je pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ zobrazení $\mu \mapsto \widehat{\mu}(\gamma)$ prvek $\Delta(M(G))$. Pokud je tedy pro nějakou míru $\mu \in M(G)$ její Gelfandova transformace nulová, speciálně platí $\widehat{\mu}(\gamma) = 0$ na $\widehat{G}$. Vzhledem k Důsledku 3.4.59 je $\mu = 0$. Algebra $M(G)$ je tak polojednoduchá.

Co se týč polojednoduchosti $L^1(G)$, je třeba dle Věty 3.4.16 ověřit, že pokud $\widehat{f} = 0$ pro nějakou $f \in L^1(G)$, je již nutně $f = 0$. Položíme-li však $\mu = fm$, platí $\widehat{\mu} = \widehat{f}$ dle Věty 3.4.36(b). Fakt $f = 0$ tedy opět plyne z Důsledku 3.4.59. □

Lemma 3.4.61. *Nechť G_i, $i = 1, 2, 3$, a ϕ jsou jako ve Větě 3.4.58. Nechť m_1 je Haarova míra na G_1 a nechť m_2 a m_3 jsou Haarovy míry na G_2 a G_3 normalizované tak, že jak pro dvojici (G_1, G_2), tak pro dvojici (G_2, G_3) platí věta o inverzi. Pak $m_3 = \phi(m_1)$.*

Důkaz. Uvažujme stejné značení operátorů jako ve Větě 3.4.58. Jelikož je $\phi(m_1)$ nenulová Haarova míra na G_3, existuje $c > 0$ takové, že $m_3 = c\phi(m_1)$.

Nechť $g \in C_c(G_1)$ je nenulová funkce a nechť $g = f * f^*$. Pak f je spojitá, pozitivně definitní (viz Lemma 3.4.40(c)), a tedy pro ni platí (3.41). Proto $\widehat{f} \neq 0$. Definujme $\psi\colon G_3 \to \mathbb{C}$ jako

$$\psi(\phi(x)) = f(-x), \quad x \in G_1.$$

Položme $\varphi = \widetilde{F}_2(\psi\phi(m_1))$. Pak

$$\varphi(\gamma) = \int_{G_3} g(\gamma)\, d\psi\phi(m_1)(g) = \int_{G_1} \gamma(x) f(-x)\, dm_1(x) = \widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

Tedy $\varphi \in L^1(G_2)$ dle Věty 3.4.45(a). Proto i pro φ platí (3.41).

Povšimněme si dále, že pro $x \in G_1$ platí

$$\varphi(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\phi(x)(\gamma^{-1})\, dm_2(\gamma) = \int_{G_2} \widehat{f}(\gamma)\gamma(-x)\, dm_2(\gamma) = f(-x).$$

Složením těchto faktů pro každé $\gamma \in G_2$ máme

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma) &= \int_{G_3} \widehat{\varphi}(g) g(\gamma)\, dm_3(g) = c\int_{G_3} \widehat{\varphi}(g) g(\gamma)\, d\phi(m_1)(g)\\ &= c\int_{G_1} \widehat{\varphi}(\phi(x))\phi(x)(\gamma)\, dm_1(x) = c\int_{G_1} f(-x)\gamma(x)\, dm_1(x) = c\widehat{f}(\gamma).\end{aligned}$$

Jelikož je $\widehat{f}$ nenulové, platí $c = 1$ a důkaz je dokončen. □

Věta 3.4.62 (O inverzi pro $M(G)$)**.** *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $\mu \in M(G)$ splňuje $\widehat{\mu} \in L^1(\widehat{G})$. Pak existuje $f \in L^1(G)$ taková, že $\mu = fm$ a platí

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{\mu}(\gamma)\, d\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G.$$

(b) Nechť $f \in L^1(G)$ splňuje $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Položme

$$g(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\, d\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G.$$

Pak $f = g$ m-skoro všude.

Důkaz. Budeme používat značení z Věty 3.4.58.

(a) Označme

$$\varphi(\gamma) = (H_1\mu)(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(-x)\, d\mu(x), \quad \gamma \in G_2.$$

Dle Věty 3.4.58(c) je $\varphi \in \operatorname{Rng} \widetilde{F}_2$. Tedy je $\varphi \in L^1(G_2) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}_2$, což znamená, že $\widehat{\varphi} \in L^1(G_3)$ a platí pro něj (3.41).

Položme

$$f(x) = \int_{G_2} \gamma(x)\varphi(\gamma)\, dm_2(\gamma), \quad x \in G_1.$$

Pak
$$\widehat{\varphi}(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\phi(x)(\gamma^{-1}\, dm_2(\gamma) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\gamma(-x)\, dm_2(\gamma) = f(-x), \quad x \in G_1.$$
Tedy $f \in L^1(G_1)$.

Díky (3.41) pro φ dostáváme
$$\varphi(\gamma) = \int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\, dm_3(g) = \int_{G_1} \widehat{\varphi}(\phi(x))(\gamma)\, dm_1(x) = \int_{G_1} f(-x)\gamma(x)\, dm(x) = \widehat{f}(\gamma).$$

Označme $\nu = fm_1$. Pak
$$(H_1\nu)(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(-x)f(x)\, dm_1(x) = \widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$
Tedy $H_1\mu = H_1\nu$, z čehož pomocí Věty 3.4.38 plyne rovnost $\mu = fm_1$.

(b) Nechť $f \in L^1(G_1)$ je dáno. Pak míra $\mu = fm_1$ leží v $M(G_1)$ a $H_1\mu = \widehat{f}$. Dle předpokladu tedy $H_1\mu \in L^1(G_2)$, což díky (a) znamená, že funkce
$$g(x) = \int_{G_2} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\, dm_2(\gamma), \quad x \in G_1,$$
leží v $L^1(G_1)$ a $fm_1 = gm_1$. Tedy $f = g$ m_1-skoro všude. □

Příklad 3.4.63. Nechť G je $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$ nebo $\mathbb{R}$. Pak Fourierova transformace $F\colon G \to C_0(\widehat{G})$ není surjektivní.

Důkaz. „$G = \mathbb{Z}$“

□

Tvrzení 3.4.64. *Nechť G je komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa taková, že Fourierova transformace není surjektivní. Pak na $L^1(G)$ nelze zavést involuci a ekvivalentní normu, ve které by $L^1(G)$ byla C^*-algebra.*

Příklad 3.4.65. Nechť G je konečná, komutativní, lokálně kompaktní topologická grupa. Pak na $L^1(G)$ nelze zavést involuci a ekvivalentní normu, ve které by $L^1(G)$ byla C^*-algebra.

3.5 Operátory na Hilbertových prostorech

Úmluva 3.5.1. *V této sekci budeme opět uvažovat pouze komplexní prostory.*

3.5.1 Operátory na Hilbertových prostorech

Lemma 3.5.2 (Polarizační identita)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak platí*
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right), \quad x, y \in H.$$

Důkaz. Rovnost plyne přímým ověřením (viz Věta 1.1.13). □

Věta 3.5.3. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Operátor T je nulový.

(ii) Pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx, x\rangle = 0$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) platí zjevně. Předpokládejme nyní platnost tvrzení (ii). Pak
$$0 = \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle, \quad x, y \in H. \tag{3.48}$$
Záměnou y za iy obdržíme
$$0 = \langle Tx, iy\rangle + \langle T(iy), x\rangle = -i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle, \quad x, y \in H.$$
Přenásobením této rovnice číslem i dostaneme
$$0 = \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle, \quad x, y \in H. \tag{3.49}$$
Setením (3.48) a (3.49) dostaneme
$$0 = \langle Tx, y\rangle, \quad x, y \in H.$$
Pro každé $x \in H$ tak platí
$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = 0,$$
a tedy je T nulový. □

Důsledek 3.5.4. *Nechť H he Hilbertův prostor a $S, T \in L(H)$ splňují*

$$\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle, \quad x \in H.$$

Pak $T = S$.

Důkaz. Aplikujeme předchozí větu na operátor $S - T$. ☐

Definice 3.5.5. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak T je

- kvazinilpotentní, pokud $r(T) = 0$,
- ortogonální projekce, pokud T je projekce $\operatorname{Rng} T \perp \operatorname{Ker} T$.

Definice 3.5.6. Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $U \in L(H, G)$. Pak U se nazývá unitárním operátorem, pokud $U^*U = I_H$ a $UU^* = I_G$.

Poznámka 3.5.7. V případě $H = G$ se jedná o definici unitárního prvku z Definice 3.3.70.

Věta 3.5.8 (Struktura normálních operátorů)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Operátor T je normální právě tehdy, když $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pro každé $x \in H$.

(b) Nechť T je normální. Pak platí následující tvrzení.

  (b1) Platí $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$.

  (b2) Prostor $\operatorname{Rng} T$ hustý právě tehdy, když T je prostý.

  (b3) Operátor T je invertovatelný právě tehdy, když T je zdola omezený (Weylova věta).

  (b4) Pokud $\operatorname{dist}(\{\langle Tx, x\rangle : x \in S_H\}, 0) > 0$, pak T je invertovatelný.

  (b5) Pro $x \in H$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí $Tx = \lambda x$ právě tehdy, když $T^*x = \overline{\lambda} x$.

  (b6) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I) \perp \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I)$.

Důkaz. (a) „ $\Longrightarrow$ “ Pro $x \in H$ máme

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2 .$$

„$\Longleftarrow$“ Z předpokladu dostáváme pro každé $x \in H$ vztah

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle.$$

Dle Důsledku 3.5.4 platí $T^*T = TT^*$.

(b1) Podle (a) platí $\|Tx\| = \|T^*x\|$, c čehož tvrzení plyne.

(b2) Díky Větě 1.4.9 a (b1) máme

$$\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp = (\operatorname{Ker} T)^\perp,$$

což dokazuje (b2).

(b3) Implikace „ $\Longrightarrow$ “ plyne z Lemmatu 1.4.10.

Pro ověřená obrácené implikace máme z Lemmatu 1.4.10 informaci, že $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený a T je prostý. Z (b2) tak plyne surjektivita T, a ten je tedy invertovatelný.

(b4) Dle (b3) stačí dokázat, že T je zdola omezený. Označme $d = \operatorname{dist}(\{\langle Tx, x\rangle : x \in S_H\}, 0)$. Pak pro $x \in S_H$ platí

$$\|Tx\| = \|Tx\| \, \|x\| \geqslant |\langle Tx, x\rangle| \geqslant d$$

a jsme hotovi.

(b5) Jelikož je pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ operátor $\lambda I - T$ normální a $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$, tvrzení plyne z (b1).

(b6) Vezměme libovolné nenulové $x_1 \in \operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T)$ a $x_2 \in \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$. Pak díky (b5) dostáváme

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, T^*x_2\rangle = \langle x_1, \overline{\lambda_2} x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Tedy $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. ☐

Věta 3.5.9. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak T je samoadjungovaný (tj. hermitovský) právě tehdy, když $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.*

Důkaz. „ $\Longrightarrow$ “ Pro $x \in H$ máme

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

„$\Longleftarrow$“ Jelikož je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, máme $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle T^*x, x\rangle$. Dle Důsledku 3.5.4 je $T = T^*$. ☐

Věta 3.5.10. *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $U \in L(H, G)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Operátor U je unitární.

(ii) Platí $\operatorname{Rng} U = G$ a $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in H$.

(iii) Platí $\operatorname{Rng} U = G$ a U je izometrie.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Jelikož $UU^* = I_G$, pro každé $y \in G$ platí $y = UU^*y$, a tedy $\operatorname{Rng} U = G$. Dále platí

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

(ii) $\implies$ (iii) Zřejmé.

(iii) $\implies$ (i) Pro $x \in H$ máme

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, x\rangle = \langle I_H x, x\rangle,$$

a tedy $U^*U = I_H$.

Je-li $y \in G$ dáno, nechť $x \in H$ splňuje $Ux = y$. Pak dle předešlého výpočtu máme

$$\langle UU^*y, y\rangle = \langle UU^*Ux, Ux\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \langle y, y\rangle = \langle I_G y, y\rangle.$$

Tedy $UU^* = I_G$ a U je unitární. □

Věta 3.5.11. *Nechť H je Hilbertův prostor $P \in L(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Projekce P samoadjungovaná.

(ii) Projekce P je normální.

(iii) Projekce P je ortogonální.

(iv) Pro každé $x \in H$ platí $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$.

(v) Pro každé $x \in H$ platí $(Px, x) \geqslant 0$.

(vi) Platí $\|P\| \leqslant 1$.

Navíc, jsou-li P, Q samoadjungované projekce, pak $\operatorname{Rng} P \perp \operatorname{Rng} Q$ právě tehdy, když $PQ = 0$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) zjevně.

(ii) $\implies$ (iii) Nechť $y \in \operatorname{Rng} P$ a $x \in \operatorname{Ker} P$. Pak $P^*x = 0$ dle Věty 3.5.8(b1), a tedy

$$\langle x, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle P^*x, y\rangle = 0.$$

Tedy $\operatorname{Rng} P \perp \operatorname{Ker} P$.

(iii) $\implies$ (iv) Jelikož $x - Px \perp Px$, platí $\langle Px, Px - x\rangle = 0$, a tedy $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$.

(iv) $\implies$ (v) zřejmě.

(v) $\implies$ (i) plyne z Věty 3.5.9.

(iv) $\implies$ (vi) Pro $x \in H$ máme $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leqslant \|Px\| \|x\|$, a tedy $\|Px\| \leqslant \|x\|$. Z toho nerovnost $\|P\| \leqslant 1$ plyne.

(vi) $\implies$ (iii) Ukážeme nejprve, že $(\operatorname{Ker} P)^\perp \subset \operatorname{Rng} P$. Nechť tedy $x \in (\operatorname{Ker} P)^\perp$ je dáno. Pak $0 = \langle x - Px, x\rangle$, tj.

$$\|x\|^2 = \langle Px, x\rangle \leqslant \|Px\| \|x\| \leqslant \|x\|^2 .$$

Tedy

$$\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 + \|Px\|^2 - \langle x, Px\rangle - \langle Px, x\rangle \leqslant 2\|x\|^2 - 2\langle Px, x\rangle = 2\left\|x^2\right\| - 2\|x\|^2 = 0,$$

a tedy $x = Px$.

Pro důkaz obrácené inkluze vezměme $x \in \operatorname{Rng} P$. Rozložme $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in \operatorname{Ker} P$ a $x_2 \in (\operatorname{Ker} P)^\perp$. Pak $x_2 \in \operatorname{Rng} P$ dle první části, a proto

$$Px = Px_1 + Px_2 = Px_2 = x_2 \in (\operatorname{Ker} P)^\perp.$$

Tedy $\operatorname{Rng} P \perp \operatorname{Ker} P$ a P je ortogonální.

Poslední část tvrzení pak plyne z rovnosti

$$\langle Px, Qy\rangle = \langle x, P^*Qy\rangle = \langle x, PQy\rangle, \quad x, y \in H.$$

□

Poznámka 3.5.12. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle \colon x \in S_H\}$ se nazývá numerický range. (Povšimněme si, že je to díky souvislosti S_H souvislá množina.)

Věta 3.5.13. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$.*

(a) Je-li T normální, pak $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

(b) Nechť T je samoadjungovaný. Pak platí následující tvrzení.

(b1) Množina N_T je podmnožinou $\mathbb{R}$.

(b2) Označme $a = \inf N_T$, $b = \sup N_T$. Pak platí $\sigma(T) \subset [a, b]$, $a, b \in \sigma(T)$ a $\|T\| = \max\{|a|, |b|\}$.

(b3) Číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

Důkaz. (a) Nechť $\lambda \notin \overline{N_T}$ a Nechť $d = \operatorname{dist}(\lambda, \overline{N_T})$. pak pro $x \in S_H$ platí

$$|\langle(\lambda I - T)x, x\rangle| = \left|\lambda \|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle\right| = |\lambda - \langle Tx, x\rangle| \geqslant d > 0.$$

Operátor $\lambda I - T$ je tedy zdola omezený, což dle Věty 3.5.8(b4) zaručuje jeho invertovatelnost.

(b1) Inkluze $N_T \subset \mathbb{R}$ plyne z Věty 3.5.9.

(b2) Inkluze $\sigma(T) \subset [a, b]$ plyne z (a). Dále máme $\overline{N_T} \subset [a, b] \subset [-\|T\|, \|T\|]$. Jelikož $\|T\| = r(T)$, existuje $\lambda \in \sigma(T)$ splňující $|\lambda| = \|T\|$. Tedy λ se rovná buď a nebo b. Tedy $\|T\| = \max\{|a|, |b|\}$.

Předpokládejme, že $\lambda = b$. Pokud $b = a$, jsou zbývající tvrzení v (b2) zřejmá. Předpokládejme tedy, že $a < b$. Uvažujme operátor $S = bI - T$. Pak

$$\sigma(S) = b - \sigma(T), \quad N_S = b - N_T, \quad 0 = \inf N_S \quad \text{a} \quad b - a = \sup N_S.$$

Aplikujeme předcházející úvahy na operátor S a dostaneme tak $\mu \in \sigma(S)$, které splňuje $\|S\| = |\mu|$, přičemž $|mu| = b - a$, nebo $|\mu| = 0$. Pokud $\mu = 0$, je $S = 0$, a tedy $N_S = \{0\}$, což je spor s nerovností $\sup N_S = b - a > 0$. Tedy $\mu = b - a$. existuje tak $\lambda \in \sigma(T)$ splňující $b - a = b - \lambda$, a tedy $a \in \sigma(T)$.

Konečně (b3) plyne z (b2). □

Věta 3.5.14 (Hilbert–Schmidt)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je kompaktní a normální. Pak existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T. Dále existuje $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nenulová vlastní čísla $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální báze $\{e_n\}$ prostoru $\overline{\operatorname{Rng} T}$ tak, že*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$

Důkaz. Krok 1. Pro každé nenulové číslo $\lambda \in \sigma_p(T)$ vezmeme nějakou ortonormální bázi konečně dimenzionálního prostoru $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Pro různá vlastní čísla jsou na sebe příslušné vlastní podprostory kolmé dle Věty 3.5.8(b6). Jelikož má T pouze spočetně mnoho nenulových vlastních čísel, existuje $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ takové, že vzniklé ortonormální systémy lze uspořádat do jednoho ortonormálního systému $\{e_n\}_{n=1}^N$. Nechť $\lambda_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ je vlastní číslo příslušné vektoru e_n. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \{1, \dots, N\}\}$. Pak $\{e_n : n \in \{1, \dots, N\}\}$ je ortonormální báze prostoru Y (viz Věta 1.1.52).

Krok 2. Díky Větě 3.5.8(b5) platí $T(Y) \subset Y$ a $T^*(Y) \subset Y$.

Je-li $x \in Y^\perp$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Tx, e_n\rangle = \langle x, T^* e_n\rangle = \lambda\langle x, e_n\rangle = 0 \quad \text{a} \quad \langle T^* x, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle = \overline{\lambda_n}\langle x, e_n\rangle = 0.$$

Tedy dostáváme inkluze $T(Y^\perp) \subset Y^\perp$ a $T^*(Y^\perp) \subset Y^\perp$.

Krok 3. Ukažme nyní, že $Y^\perp = \operatorname{Ker} T$. Uvažujme operátor $S \in L(Y^\perp)$ vzniklý restrikcí T, tj. $Sx = Tx$ pro $x \in Y^\perp$. Pak S je díky druhému kroku dobře definovaný prvek $L(Y^\perp)$, který je normální (v $L(Y^\perp)$). Operátor $V = T^*|_{Y^\perp}$ je totiž též dobře definovaný a pro $x, y \in Y^\perp$ splňuje rovnosti

$$\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, Vy\rangle.$$

Operátor V je tedy adjunkce S v prostoru $L(Y^\perp)$. Jelikož T^* komutuje s T, komutuje V s S, a tedy S je normální.

Dále je S kompaktní. Pokud by S měl nenulové vlastní číslo λ, bylo by λ prvkem $\sigma_p(T)$. Jemu příslušné vlastní vektory však v $Y^\perp$ neleží, a tedy $\sigma(S) \subset \{0\} \cup \sigma_p(S) = \{0\}$. Proto $\|S\| = r(S) = 0$ a $S = 0$. Tedy i $T = 0$ ne $Y^\perp$, tj. $Y^\perp \subset \operatorname{Ker} T$.

K důkazu obrácené inkluze vezměme $x \in \operatorname{Ker} T$ a pišme $x = a + b$, kde $a = \sum_{n=1}^N \langle a, e_n\rangle e_n \in Y$ a $b \in Y^\perp$. Pak díky první části máme $Tb = 0$, a tedy

$$0 = Tx = Ta + Tb = \sum_{n=1}^{N} \langle a, e_n\rangle Te_n + 0 = \sum_{n=1}^{N} \langle a, e_n\rangle \lambda_n e_n.$$

Proto platí $\langle a, e_n\rangle = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x = b \in Y^\perp$.

Krok 4. Ukázali jsme tedy, že $H = \operatorname{Ker} T \oplus_{\perp} Y$. Vezměme nyní libovolnou ortonormální bázi B prostoru $\operatorname{Ker} T$. Pak $B \cup \{e_n : n \in \{1, \dots, N\}\}$ je ortonormální báze prostoru H, která je tvořena vlastním vektory T. Libovolné $x \in H$ rozložme jako $x = a + \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$, kde $a \in \operatorname{Ker} T$ (viz Lemma 1.1.45). Pak

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle Te_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 3.5.15. *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak $K(H) = \overline{F(H)}$.*

Důkaz. Zvolme ortonormální bázi $\{e_i : i \in I\}$ prostoru H a pro každou $F \in \mathcal{F}(I)$ uvažujme ortogonální projekci $P_F x = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i$, $x \in H$. Jelikož $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$, $x \in H$, pro každé $x \in H$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \in \mathcal{F}(I)$ splňující $\|x - P_F x\| < \varepsilon$.

Nechť $K \in K(H)$ je dán. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kone4nou ε-síť $\{x_1, \dots, x_n\}$ množiny B_H. Nechť $F \in \mathcal{F}(I)$ je zvoleno tak, že $\|Kx_i - P_F x_i\| < \varepsilon$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak operátor $P_F \circ K$ je element $F(H)$ a platí $\|K - P_F K\| < \varepsilon$.

Vskutku, nechť $x \in B_H$ je dáno. Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$ je zvoleno tak, aby $\|Kx - Kx_i\| < \varepsilon$. Pak

$$\|Kx - P_F x\| \leqslant \|K_x - Kx_i\| + \|Kx_i - P_F K x_i\| + \|P_F K x_i - P_F kx\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \|P_F\| \, \|Kx_i - Kx\| \leqslant 3\varepsilon.$$

Tíme je důkaz dokončen. □

3.5.2 Borelovský kalkulus pro normální operátory

Značení 3.5.16. Nechť K je topologický prostor. Symbol $\operatorname{Bs}(K)$ značí σ-algebru všech borelovských podmnožin K a $\operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$ značí systém všech omezených borelovských funkcí na K.

Lemma 3.5.17. *Nechť K je metrický prostor. Nechť $\mathcal{F}$ je systém v $\operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$, který obsahuje $C^b(K)$ a je uzavřený vhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Pak $\mathcal{F} = \operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$.*

Důkaz. Krok 1. Položme $\mathcal{F}_0 = C^b(K)$ a pro každé $\alpha \in (0, \omega_1)$ definujme induktivně

$$\mathcal{F}_\alpha = \left\{ f \in : K \to \mathbb{C} : \text{existuje omezená posloupnost } \{f_n\} \text{ v } \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_b \text{ splňující } f_n \to f \right\}.$$

Přímočaře se ověří, že každý systém $\mathcal{F}_\alpha$ je podalgebra $\mathcal{F}$. Položíme-li $\mathcal{F}_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{F}_\alpha$, dostaneme podalgebru $\mathcal{F}$ uzavřenou na bodové limity omezených posloupností. Vskutku, je-li $\{f_n\}$ omezená posloupnost v $\mathcal{F}_{\omega_1}$ konvergující k f, pak každé f_n je v $\mathcal{F}_{\alpha_n}$ pro nějaké $\alpha_n < \omega_1$. Pak $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, a tedy $f \in \mathcal{F}_{\alpha+1} \subset \mathcal{F}_{\omega_1}$.

Krok 2. Nechť

$$\mathcal{S} = \{S \in \operatorname{Bs}(K) : \chi_B \in \mathcal{F}_{\omega_1}\}.$$

Pak $\mathcal{S}$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny K.

Abychom toto ukázali, nechť $U \subset K$ je otevřená množina. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{F_n\}$ uzavřený množin v K splňující $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = U$. Pomocí Urysohnova lemmatu sestrojíme spojité funkce $f_n : K \to [0, 1]$ splňující $f_n = 1$ na F_n a $f_n = 0$ na $K \backslash F_n$. Pak $f_n \to \chi_U$, a tedy $\chi_U \in \mathcal{F}$. Proto $U \in \mathcal{S}$.

Pro dvě množiny $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ máme

$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} + \chi_{S_1} \chi_{S_2} \in \mathcal{F}_{\omega_1},$$

a tedy $\mathcal{S}$ je uzavřený na konečná sjednocení.

Jsou-li nyní S_n, $n \in \mathbb{N}$, elementy v $\mathcal{S}$ a $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, jsou množiny $T_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$, $n \in \mathbb{N}$, v $\mathcal{S}$ a přitom $\chi_{T_n} \to \chi_S$. Vzhledem k uzavřenosti $\mathcal{F}_{\omega_1}$ na bodové limity omezených posloupností platí $\chi_S \in \mathcal{F}_{\omega_1}$, tj. $S \in \mathcal{S}$.

Tedy $\mathcal{S} = \operatorname{Bs}(K)$.

Krok 3. Nechť $f \in \operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$ je dáno. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pokryjeme $\operatorname{Rng} f$ konečnou ε-sítí $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \operatorname{Rng} f$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položme $S_i = f^{-1}(B(y_i, \varepsilon))$. Pak S_i jsou borelovské množiny v K, a tedy $\chi_{S_i} \in \mathcal{F}_{\omega_1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $S_0 = \varnothing$ a $T_i = S_i \backslash \bigcup_{j=0}^{i-1} S_j$. Pak funkce

$$g = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{T_i} \in \mathcal{F}_{\omega_1}$$

a $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tak dostaneme posloupnost $\{g_n\}$ v $\mathcal{F}_{\omega_1}$ stejnoměrně konvergující k f. Tedy $\{g_n\}$ je omezená, a proto $f \in \mathcal{F}_{\omega_1}$.

Tedy

$$\operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K) \subset \mathcal{F}_{\omega_1} \subset \mathcal{F} \subset \operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K),$$

a důkaz je tak hotov. □

Lemma 3.5.18 (Lax–Milgram)**.** *Nechť H he Hilbertův prostor. Nechť $B\colon H \times H \to \mathbb{C}$ je v první souřadnici lineární a v druhé sdruženě lineární. Pokud $\|B\| = \sup_{x,y \in B_H} |B(x,y)| < \infty$, existuje právě jeden $T \in L(H)$ takový, že $\|T\| = \|B\|$ a $B(x,y) = \langle Tx, y\rangle$, $x, y \in H$.*

Důkaz. Pro pevné $y \in H$ je zobrazení $x \mapsto B(x,y)$ prvek duálního prostoru H^*. Existuje tak právě jedno $Sy \in H$ splňující $B(x,y) = \langle x, Sy\rangle$, $x \in H$. Pak S je lineární operátor, neboť pro $y_1, y_2 \in H$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\langle x, S(\alpha y_1)\rangle = B(x, \alpha y_1) = \overline{\alpha}\langle x, Sy_1\rangle = \langle x, \alpha Sy_1\rangle, \quad x \in H,$$

a

$$\langle x, S(y_1 + y_2)\rangle = B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2) = \langle x, Sy_1\rangle + \langle x, Sy_2\rangle = \langle x, Sy_1 + Sy_2\rangle, \quad x \in H.$$

Dále

$$\|Sy\|^2 = \langle Sy, Sy\rangle = B(Sy, y) \leqslant \|B\| \, \|Sy\| \, \|y\|, \quad y \in H,$$

což implikuje nerovnost $\|S\| \leqslant \|B\|$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, vezměme posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ v B_H, které splňující $|Bx_n, y_n)| \to \|B\|$. Pak

$$\|B\| = \lim_{n\to\infty} |B(x_n, y_n)| = \lim_{n\to\infty} |\langle x_n, Sy_n\rangle| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \, \|Sy_n\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|Sy_n\| \,.$$

Tedy $\|Sy_n\| \to \|B\|$, a tedy $\|S\| = \|B\|$.

Operátor $T = S^*$ pak pro každé $x, y \in H$ splňuje

$$B(x,y) = \langle x, Sy\rangle = \langle S^* x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

a

$$\|T\| = \|S^*\| = \|S\| = \|B\| \,.$$

Důkaz je tak hotov. □

Poznámka 3.5.19. Povšimněme si, že množina všech zobrazení $B\colon H \times H \to \mathbb{C}$ splňujících předpoklady Lemmatu 3.5.18 tvoří vektorový prostor, uvažujeme-li na této množině vektorové operace bodově.

Věta 3.5.20. *Nechť H he Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť Φ značí spojitý kalkulus pro T z Věty 3.3.97. Pak existuje zobrazení $\Psi\colon \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T)) \to L(H)$ s následujícími vlastnostmi.*

- *(a) Platí $\Psi = \Phi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$.*
- *(b) Pokud $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$, která konverguje k f, pak pro každé $x, y \in H$ platí $\langle \Psi(f_n)x, y\rangle \to \langle \Psi(f)x, y\rangle$.*
- *(c) Zobrazení Φ je algebraický $*$-homorfismus a $\|\Psi(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$.*
- *(d) Zobrazení Ψ je vlastnostmi (a),(b) a (c) určeno jednoznačně.*
- *(e) Pokud $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá a $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$, pak $g(\Psi(f)) = \Psi(g \circ f)$.*
- *(f) Operátor $\Psi(f)$ je normální pro každé $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.*
- *(g) Operátor $\Psi(f)$ je samoadjungovaný, pokud $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ je reálná.*
- *(h) Pokud $S \in L(H)$ komutuje s T, potom S komutuje s $\Psi(f)$ pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.*

Důkaz. Krok 1. Hledané zobrazení Ψ nejprve zkonstruujme. Pro každou dvojici $x, y \in H$ uvažujme zobrazení $R_{x,y}\colon C(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$ definované jako

$$R_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Pak

$$|R_{x,y}| \leqslant \|\Phi(f)\| \, \|x\| \, \|y\| = \|f\| \, \|x\| \, \|y\| \,, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Dle Rieszovy věty 1.2.24 existuje komplexní borelovská míra $\mu_{x,y}$ na $\sigma(T)$ splňující

$$R_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda), \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Navíc platí $\|\mu_{x,y}\| = \|R_{x,y}\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

Pro libovolné $f \in C(\sigma(T))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ a $x_1, x_2, y \in H$ máme

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y}(\lambda) &= R_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y}(f) = \langle \Phi(f)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle \\
&= \alpha_1 \langle \Phi(f)x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle \Phi(f)x_2, y\rangle \\
&= \alpha_1 \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x_1,y}(\lambda) + \alpha_2 \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x_2,y}(\lambda) \\
&= \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d(\alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y})(\lambda),
\end{aligned}$$

a tedy $\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y} = \alpha_1\mu_{x_1,y} + \alpha_2\mu_{x_2,y}$. Podobně odvodíme $\mu_{x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2} = \overline{\alpha_1}\mu_{x,y_1} + \overline{\alpha_2}\mu_{x,y_2}$.

Položme

$$B_g(x,y) = \int_{\sigma(T)} g(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda), \quad g \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T)).$$

Pak B splňuje předpoklady Lemmatu 3.5.18 s odhadem

$$|B_g(x,y)| \leqslant \|g\|\,\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|g\|\,\|x\|\,\|y\|\,, \quad x,y \in H.$$

(Všimněme si, že $B_{\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2} = \alpha_1 B_{g_1} + \alpha_2 B_{g_2}$ pro $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{C}$ a $g_1,g_2 \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$.)

Dle Lemmatu 3.5.18 tedy existuje jednoznačně určený operátor $\Psi(g) \in L(H)$, který vyhovuje rovnici

$$B_g(x,y) = \langle \Psi(g)x, y\rangle, \quad x,y \in H.$$

Tím je konstrukce zobrazení Ψ ukončena.

Krok 2. Ověřme nyní vlastnosti (a)-(h) pro toto zobrazení.

(a) Dle definice platí pro $f \in C(\sigma(T))$ rovnost

$$\langle \Psi(f)x,y\rangle = B_f(x,y) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda) = R_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x,y\rangle, \quad x,y \in H.$$

Dle Věty 3.5.3 máme $\Psi(f) = \Phi(f)$.

(b) Vezměme omezenou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$ konvergující k f a $x,y \in H$. Pak díky Lebesgueově větě platí

$$\langle \Psi(f)x,y\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} f_n(\lambda)\, d\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x,y\rangle.$$

(c) Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ a $g_1,g_2 \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$ platí

$$\begin{aligned}\langle \Psi(\alpha g_1 + g_2)x,y\rangle &= B_{\alpha g_1+g_2}(x,y) = (\alpha_1 B_{g_1} + \alpha_2 B_{g_2})(x,y) = \alpha_1 B_{g_1}(x,y) + \alpha_2 B_{g_2}(x,y)\\ &= \langle(\alpha_1\Psi(g_1) + \alpha_2\Psi(g_2))x,y\rangle, \quad x,y \in H.\end{aligned}$$

Proto je Ψ lineární.

Ukažme nyní multiplikativitu. Položme

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))\colon \forall f \in C(\sigma(T))\colon \Psi(gf) = \Psi(g)\Psi(f)\}.$$

Pak $\mathcal{F}$ splňuje předpoklady Lemmatu 3.5.17. Zjevně totiž $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ a je-li $\{g_n\}$ omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující ke g, platí pro každou $f \in C(\sigma(T))$ rovnosti

$$\langle \Psi(gf)x,y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(g_n f)x,y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(g_n)\Psi(f)x,y\rangle = \langle \Psi(g)\Psi(f)x,y\rangle, \quad x,y \in H.$$

Tedy $g \in \mathcal{F}$. Proto $\mathcal{F} = \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$.

Uvažujme nyní systém

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))\colon \forall g \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))\colon \Psi(gh) = \Psi(g)\Psi(h)\}.$$

Podle předcházející úvahy je $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{H}$ a pro omezenou posloupnost $\{h_n\}$ v $\mathcal{H}$ konvergující k h platí pro libovolnou $g \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$ rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \Psi(gh)x,y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(gh_n)x,y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(g)\Psi(h_n)x,y\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(h_n)x, (\Psi(g))^*y\rangle = \langle \Psi(h)x, (\Psi)g)^*y\rangle\\ &= \langle \Psi(g)\Psi(h)x,y\rangle, \quad x,y \in H.\end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{F} = \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$ a Ψ je multiplikativní.

Položme nyní

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))\colon (\Psi(f))^* = \Psi(\overline{f})\}.$$

Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$. Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující k f. Pak pro každé $x,y \in H$ platí

$$\begin{aligned}\langle \Psi(f)x,y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x,y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, (\Psi(f_n))^*y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(\overline{f_n})y\rangle\\ &= \langle x, \Psi(\overline{f})y\rangle = \langle (\Psi(\overline{f}))^*x,y\rangle.\end{aligned}$$

Tedy i $f \in \mathcal{F}$. Proto Ψ zachovává involuci.

Co se týče normy, povšimněme si, že pro $x \in H$ platí

$$\|\Psi(f)(x)\|^2 = \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x \rangle = \left| \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,\Psi(f)x}(\lambda) \right| \leqslant \|f\| \, \|x\| \, \|\Psi(f)(x)\| \, .$$

Tedy $\|\Psi(f)\| \leqslant \|f\|$.

(d) Nechť $\widetilde{\Psi}\colon \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T)) \to L(H)$ je zobrazení splňující (a), (b) a (c). Položme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))\colon \Psi(f) = \widetilde{\Psi}(f)\}.$$

Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ dle (a). Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující k f. Pak pro každé $x, y \in H$ platí

$$\langle \Psi(f)x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widetilde{\Psi}(f_n)x, y \rangle = \langle \widetilde{\Psi}(f_n)x, y \rangle = \langle \widetilde{\Psi}(f)x, y \rangle.$$

Tedy $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ a důkaz je hotov.

(e) Nechť nejprve g je polynom tvaru $g(z) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} z^i (\overline{z})^j$, $z \in \mathbb{C}$. Pak

$$\begin{aligned}
\Psi(g \circ f) &= \Psi\left(\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} f^i (\overline{f})^j \right) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} \Psi(f^i (\overline{f})^j) \\
&= \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} \left(\Psi(f)\right)^i \left(\Psi(f)^*\right)^j = g(\Psi(f))
\end{aligned}$$

Je-li g obecná spojitá funkce, lze ji na $\sigma(\Psi(f))$ stejnoměrně aproximovat posloupností polynomy $\{g_n\}$. Pak $g_n \circ f \rightrightarrows g \circ f$, z čehož plyne

$$g(\Psi(f)) = \lim_{n\to\infty} g_n(\Psi(f)) = \lim_{n\to\infty} \Psi(g_n \circ f) = \Psi(g \circ f).$$

(f) Platí

$$\Psi(f)(\Psi(f))^* = \Psi(f)\Psi(\overline{f}) = \Psi(f\overline{f}) = \Psi(\overline{f}f) = \Psi(\overline{f})\Psi(f) = (\Psi(f))^*\Psi(f).$$

(g) Pokud $f \in Bf(\sigma(T)$ je reálná, platí $(\Psi(f))^* = \Psi(\overline{f}) = \Psi(f)$.

(h) Položme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))\colon S\Psi(f) = \Psi(f)S\}.$$

Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ dle Věty 3.3.97(j). Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující k f. Pak pro každé $x, y \in H$ platí

$$\begin{aligned}
\langle S\Psi(f)x, y \rangle &= \langle \Psi(f)x, S^*y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, S^*y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S\Psi(f_n)x, y \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)Sx, y \rangle = \langle \Psi(f)Sx, y \rangle.
\end{aligned}$$

Opět dle Lemmatu 3.5.17 usoudíme, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.

□

3.6 Spektrální rozklad

3.6.1 Rozklad jednotky

Definice 3.6.1. Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor, tj. Σ je σ-algebra na množině Ω. Nechť H je Hilbertův prostor. Rozklad jednotky je zobrazení $E\colon \Sigma \to L(H)$ s následujícím vlastnostmi.

(a) Platí $E(\varnothing) = 0$ a $E(\Omega) = I$.

(b) Každé $E(A)$ je samodajungovaná projekce.

(c) Pro každé $A_1, A_2 \in \Sigma$ platí $E(A_1)E(A_2) = E(A_1 \cap A_2)$.

(d) Pokud $A_1, A_2 \in \Sigma$ jsou disjunktní, platí $E(A_1) + E(A_2) = E(A_1 \cup A_2)$.

(e) Pro každé $x, y \in H$ je funkce $E_{x,y}\colon A \mapsto \langle E(A)x, y \rangle$ komplexní míra na Σ.

Pokud Σ je σ-algebra $\mathrm{Bs}(K)$ nějakého lokálně kompaktního topologického prostoru K, požaduje se navíc, že

(f) každá míra $E_{x,y}$ je regulární.

Úmluva 3.6.2. *Nebude-li řečeno přesněji, v dalším textu budeme uvažovat rozklad identity na prostoru (Ω, Σ) s hodnotami v $L(H)$.*

Poznámky 3.6.3. Rozklad jednotky E splňuje následující vlastnosti.

(g) Pro každé $x \in H$ a $A \in \Sigma$ platí

$$E_{x,x}(A) = \langle E(A)x, x\rangle = \langle E(A)x, E(A)x\rangle = \|E(A)x\|^2 .$$

Tedy totální variace $E_{x,x}$ je rovna $\|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$.

(h) Díky (c) spolu operátory $E(A_1)$ a $E(A_2)$ pro každé $A_1, A_2 \in \Sigma$ komutují.

(i) Z vlastností (a) a (c) plyne, že pro disjunktní $A_1, A_2 \in \Sigma$ platí $\operatorname{Rng} E(A_1) \perp \operatorname{Rng} E(A_2)$ (viz Věta 3.5.11).

Tvrzení 3.6.4. *Nechť E je rozklad identity. Nechť $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pokud $E(A_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí $E(A) = 0$.*

Důkaz. Pro každé $x \in H$ platí

$$E_{x,x}(A) = E_{x,x}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,x}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(A_n)x, x\rangle = 0.$$

Jelikož $\|E(A)x\|^2 = E_{x,x}(A) = 0$, je projekce $E(A)$ nulová. □

Definice 3.6.5. Nechť E je rozklad jednotky.

(a) Nechť $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Nechť

$$\mathcal{U} = \bigcup \left\{U \subset \mathbb{C} \text{ otevřená}\colon E(f^{-1}(U)) = 0\right\} .$$

Položme $V = \bigcup \mathcal{U}$. Pak $E(f^{-1}(V)) = 0$, neboť V lze napsat jako spočetné sjednocení množin z $\mathcal{U}$ (viz Tvrzení 3.6.4).

Esenciálním oborem hodnot f se nazývá množina $\operatorname{essrng} f = \mathbb{C}\backslash V$. Funkce f je esenciálně omezená, pokud $\operatorname{essrng} f$ je omezená množina. Pak

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{essrng} f\}.$$

Symbolem $\mathscr{L}^\infty(E)$ značíme algebru všech esenciálně omezených funkcí na Ω. Řekneme, že $f = g$ E-skoro všude (či jenom skoro všude), pokud pro množinu $N = \{\omega \in \Omega\colon f(\omega) \neq g(\omega)\}$ platí $E(N) = 0$.

Tvrzení 3.6.6. *Nechť E je rozklad jednotky a $\mathscr{L}^\infty(E)$ je jako výše. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Uvažujme algebru $\mathscr{L}(E)^\infty$ s involucí danou komplexním sdružením. Nechť

$$N = \{f \in \mathscr{L}^\infty(E)\colon \|f\|_\infty = 0\}.$$

Pak algebra $L^\infty(E) = \mathscr{L}^\infty(E)/N$ s normou $\|\cdot\|_\infty$ a involucí zděděnou z $\mathscr{L}^\infty(E)$, (tj.

$$[f]^* = [\overline{f}], \quad f \in \mathscr{L}^\infty(E),)$$

je komutativní C^*-algebra s jednotkou.

(c) Pro $f \in L^\infty(E)$ platí $\sigma(f) = \operatorname{essrng} f$ (prvek $[f]$ obvykle ztotožňujeme s funkcí f).

Důkaz. (a) Zjevně je $\mathscr{L}^\infty(E)$ komutativní algebra s involucí a pseudonormou $\|\cdot\|_\infty$, která pro $f, g \in \mathscr{L}^\infty(E)$ splňuje $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ a $\|f\|^2 = \|ff^*\|$. Snadno se ověří, že po faktorizaci pomocí N vznikne požadovaná struktura (jednotka odpovídá funkci $f = 1$ na Ω).

(b) Pokud $\lambda \notin \operatorname{essrng} f$, pak je funkce $g = (\lambda - f)^{-1}$ inverzí k $\lambda - f$. Tedy $\sigma(f) \subset \operatorname{essrng} f$.

Nechť $\lambda \in \operatorname{essrng} f$ je dáno. Předpokládejme, že $\lambda \notin \sigma(f)$, tj. existuje inverze $g \in L^\infty(E)$ prvku $\lambda - f$. Pak $g = (\lambda - f)^{-1}$ E-skoro všude, tj. množina

$$A = \{\omega \in \Omega\colon g(\omega) = \frac{1}{\lambda - f(\omega)}\}$$

splňuje $E(A) = I$. Nechť $C > 0$ splňuje $C > \|g\|_\infty$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, které je větší než C, a uvažujme množinu $A_n = f^{-1}(B(\lambda, \frac{1}{n}))$. Pak $E(A_n) \neq 0$ a pro $\omega \in A_n$ platí $|f(\omega) - \lambda| < \frac{1}{n}$. Tedy $|g(\omega)| > n$ na $A_n \cap I$, což je E-nenulová množina. To je však spor s nerovností $\|g\| \leqslant C$. □

Věta 3.6.7. *Nechť E je rozklad identity. Pak existuje izometrický $*$-izomorfizmus $\Psi\colon L^\infty(E) \to L(H)$ takový, že platí následující tvrzení.*

(a) Množina $\Psi(L^\infty(E))$ je komutativní C^*-podalgebra $L(H)$ obsahující I.

(b) Platí

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f \, dE_{x,y}, \quad f \in L^\infty(E), x, y \in H.$$

(c) *Platí*

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 \, dE_{x,x}, \quad f \in L^\infty(E), x \in H.$$

(d) *Operátor* $Q \in L(H)$ *komutuje s každou projekcí* $E(A)$ *právě tehdy, když* Q *komutuje se* $\Psi(L^\infty(E))$.

Důkaz. Krok 1. Nechť S označuje jednoduché funkce z $L^\infty(E)$. Položme

$$\Psi(f) = \sum_{i=1}^n c_i E(A_i), \quad f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} \in S.$$

Stejně jako ve Větě 3.2.11(a) se ukáže, že $\Psi(f)$ nezáleží na vyjádření funkce f a že Ψ je lineární zobrazení.

Dále pro $f, g \in S$ tvaru $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ a $g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$, kde $\{A_1, \dots, A_n\}$ a $\{B_1, \dots, B_m\}$ jsou měřitelné rozklady Ω, platí

$$\Psi(f)\Psi(g) = \left(\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^m d_j E(B_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j E(A_i)E(B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j E(A_i \cap B_j) = \Psi(fg),$$

jelikož $fg = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}$.

Dále

$$(\Psi(f))^* = \left(\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\right)^* \sum_{i=1}^n \overline{c_i} E(A_i) = \Psi(\overline{f}) = \Psi(f^*)$$

a

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle E(A_i)x, y\rangle = \sum_{i=1}^n c_i E_{x,y}(A_i) = \int_\Omega f \, dE_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Krok 2. Předpokládejme, že f je vyjádřeno pomocí rozkladu $\{A_1, \dots, A_n\}$ množiny Ω. Pak z odhadu

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = \langle (\Psi(f))^*\Psi(f)x, x\rangle = \langle \Psi(f^*f)x, x\rangle$$
$$= \langle \Psi(|f|^2)x, x\rangle = \int_\Omega |f|^2 \, dE_{x,x}, \quad x \in H,$$

plyne $\|\Psi(f)x\| \leqslant \|f\|_\infty \|x\|$, $x \in H$, tj. $\|\Psi\| \leqslant \|f\|_\infty$.

Na druhou stranu zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $|c_i| = \|f\|_\infty$. Jelikož mají projekce $E(A_1), \dots, E(A_n)$ navzájem kolmé obory hodnot, pro $x \in \operatorname{Rng} E(A_i)$ platí

$$\Psi(f)x = \sum_{j=1}^n c_j E(A_j)x = c_i E(A_i)x = c_i x.$$

Tedy $\|\Psi(f)\| = |c_i| = \|f\|_\infty$. Dohromady tedy máme $\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty$.

Krok 3. Zobrazení $\Psi\colon S \to L(H)$ tedy splňuje všechny vlastnosti (a), (b) a (c) na prostoru S. Jelikož je S hustá podalgebra $L^\infty(E)$, lze Ψ jednoznačně izometricky rozšířit na celou algebru $L^\infty(E)$. Díky spojitosti involuce a násobení je pak Ψ $*$-izomorfizmus. Množina $\Psi(L^\infty(E))$ je pak komutativní $*$-podalgebra $L(H)$ obsahující I (neboť $\Psi(1) = I$). Díky úplnosti $L^\infty(E)$ se jedná o C^*-podalgebru. Vlastnosti (b) a (c) plynou z platnosti těchto vztahů pro zobrazení Ψ na S. Je-li $Q \in L(H)$ operátor komutující s každým $E(A)$, $A \in \Sigma$, komutuje Q s každým operátorem z $\Psi(S)$. Ze spojitosti tedy Q komutuje s $\Psi(L^\infty(E))$. Tím je důkaz ukončen. □

Značení 3.6.8. Prvek $\Psi(f)$ z Věty 3.6.7 značíme $\Psi(f) = \int_\Omega f \, dE$.

3.6.2 Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 3.6.9. *Nechť* H *je Hilbertův prostor a* $T \in L(H)$ *je normální operátor. Nechť* $K = \sigma(T)$ *a* $(\Omega, \Sigma) = (K, \operatorname{Bs}(K))$. *Pak existuje právě jeden rozklad identity* $E\colon \operatorname{Bs}(K) \to L(H)$, *pro který platí*

$$T = \int_K \lambda \, dE.$$

Dále platí následující výroky.

(a) *Nechť* Φ *je borelovský kalkulus z Věty 3.5.20 a* $\Psi\colon L^\infty(E) \to L(H)$ *je zobrazení z Věty 3.6.7 dané rozkladem jednotky* E. *Pak* $\Psi([f]) = \Phi(f)$ *pro* $f \in \operatorname{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$.

(b) *Platí* $\Psi(L^\infty(E)) = \overline{\operatorname{span}}\{E(A)\colon A \in \operatorname{Bs}(K)\}$.

(c) *Je-li* $A \in \operatorname{Bs}(K)$, *označme* $T_A = T|_{\operatorname{Rng} E(A)}$. *Pak* $T_A \in L(\operatorname{Rng} E(A))$ *a* $\sigma(T_A) \subset \overline{A}$ *(spektrum uvažujeme vzhledem k* $L(\operatorname{Rng} E(A))$.*)*

(d) *Pokud $A \subset K$ je neprázdná otevřená množina, je $P(A)$ nenulová.*

Důkaz. Krok 1. Nechť Φ je borelovský kalkulus z Věty 3.5.20. Položme

$$E(A) = \Psi(\chi_A), \quad A \in \mathrm{Bs}(K).$$

Ověříme nyní vlastnosti požadované Definicí 3.6.1. Zjevně platí $E(\emptyset) = \Phi(0) =)$ a $E(K) = E(1) = I$.
Dále pro $A \in \mathrm{Bs}(K)$ platí

$$(E(A))^2 = E(A)E(A) = \Phi(\chi_A)\Phi(\chi_A) = \Phi((\chi_A)^2) = \Phi(\chi_A)$$

a

$$(E(A))^* = (\Phi(\chi_A))^* = \Phi(\overline{\chi_A}) = \Phi(\chi_A) = E(A),$$

a tedy $E(A)$ je samodajungovaná projekce.
Pro $A_1, A_2 \in \mathrm{Bs}(K)$ máme díky multiplikativitě Φ rovnost

$$E(A_1 \cap A_2) = \Phi(\chi_{A_1 \cap A_2}) = \Phi(\chi_{A_1}\chi_{A_2}) = \Phi(\chi_{A_1})\Phi(\chi_{A_2}) = E(A_1)E(A_2).$$

Tedy E má i vlastnost (c). Podobně pro $A_1, A_2 \in \mathrm{Bs}(K)$ disjunktní platí

$$E(A_1 \cup A_2) = \Phi(\chi_{A_1 \cup A_2}) = \Phi(\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) = \Phi(\chi_{A_1}) + \Phi(\chi_{A_2}) = E(A_1) + E(A_2).$$

Ohledně vlastnosti (e) a (f) si připomeňme, že pro každé $x, y \in H$ byla nalezena za pomoci Riezovy věty komplexní borelovská (regulární) míra $\mu_{x,y}$ na K splňující

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda), \quad f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K).$$

Tedy je zobrazení

$$E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle = \langle \Phi(\chi_A)x, y\rangle = \int_K \chi_A\, d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(K),$$

požadovaná míra.
Tím je konstrukce E ukončena.
Krok 2. Nechť $E\colon \mathrm{Bs}(K) \to L(H)$ je rozklad jednotky splňující $T = \int_K \lambda\, dE'$. Dle algebraických vlastností popsaných ve Větě 3.6.7 dostáváme rovnost $\int_K p\, dE = \int_K p\, dE'$ pro každý polynom p v proměnných z a $\overline{z}$. Ze spojitosti pak tato rovnost platí pro každou spojitou funkci f na K. Položme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)\colon \int_K f\, dE = \int_K f\, dE'\}.$$

Pak $\mathcal{F} \supset C(K)$ a pokud $f_n \to f$, kde $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$, platí pro každé $x, y \in H$ rovnost

$$\int_K f\, dE_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n dE_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n d' E_{x,y} = \int_K f\, dE'.$$

Dle Lemmatu 3.5.17 je $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$. Speciálně tedy $E(A) = E'(A)$ a první část tvrzení je dokázána.
Krok 3. Tvrzení(a) plyne přímo z konstrukce E a tvrzení (b) je důsledkem konstrukce Ψ popsané v důkazu Věty 3.6.7. Uvažujme $\in \mathrm{Bs}(K)$ a $T_A = T|_{\mathrm{Rng}\, E(A)}$. Pak pro každé $x \in \mathrm{Rng}\, E(A)$ platí

$$T_A E(A)x = TE(A)x = E(A)Tx \in \mathrm{Rng}\, E(A),$$

a tedy T_A je vskutku element $L(\mathrm{Rng}\, E(A))$.
Vezměme $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{A}$ a položme

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z}, & z \in A, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$. Dále je funkce $g(z) = (\lambda - z)\chi_A(z)$ též prvkem $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$ a platá pro ni rovnost $gf = \chi_A$. Pro každé $x \in H$ tak dostáváme

$$\langle E(A)x, x\rangle = \langle \Psi(\chi_A)x, x\rangle = \langle \Psi(f(\lambda - \mathrm{id})\chi_A)x, x\rangle = \langle \Psi(f)\Psi(\lambda - \mathrm{id})\Psi(\chi_A)x, x\rangle = \langle \Psi(f)(\lambda I - T)E(A)x, x\rangle.$$

Pro $x \in \mathrm{Rng}\, E(A)$ máme proto

$$\langle x, x\rangle = \langle \Psi(f)(\lambda I - T)x, x\rangle,$$

a tedy
$$I|_{\operatorname{Rng} E(A)} = \Psi(f)(\lambda I - T).$$
Dostali jsem, že $\Psi(f)$ je levá inverze operátoru $\lambda I_{\operatorname{Rng} E(A)} - T_A$. Obdobně se ukáže, že $\Psi(f)$ je též pravá inverze, a tedy $\lambda \notin \sigma(T_A)$.

(d) Nechť $A \subset K$ je neprázdná otevřená podmnožina K. Pokud by platilo $E(A) = 0$, platí $I = E(K\backslash A)$, takže $\operatorname{Rng} E(K\backslash A) = H$. Potom $T_{K\backslash A} = T$, a tedy
$$K = \sigma(T) = \sigma(T_{K\backslash A}) \subset K\backslash A,$$
ož je spor.

□

Věta 3.6.10. *Nechť H he Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť $\lambda \in \sigma(T)$ a E je rozklad jednotky daný Větou 3.6.9. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $\lambda \in \sigma_p(T)$ právě tehdy, když $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

(b) Je-li $\lambda \in \sigma_p(T)$, pak $E(\{\lambda\})$ je projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.

(c) Je-li λ izolovaný bod $\sigma(T)$, je v $\sigma_p(T)$.

Důkaz. (a) Máme $(\lambda - \mathrm{id})\chi_{\{\lambda\}} = 0$, takže $(\lambda I - T)E(\{\lambda\}) = 0$. Proto $\operatorname{Rng} E(\{\lambda\}) \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.

Dokažme nyní obrácenou inkluzi. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme
$$B_n = \{z \in \sigma(T)\colon\ |z - \lambda| \geqslant \frac{1}{n}\}$$
a položme
$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z}, & z \in B_n, \\ 0, & z \in \sigma(T) - B_n. \end{cases}$$
Nechť $f(T)$ značí $\int_{\sigma(T)} f\,dE$, $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$. Pro $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ máme $f_n(T)(\lambda I - T)x = f_n(T)0 = 0$, a tedy
$$\chi_{B_n}(T)x = f_n(T)(\lambda I - T)x = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Proto pro každé $y \in H$ platí
$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle (1 - \chi_{B_n})(T)x, y\rangle \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} (1 - \chi_{B_n})\,dE_{x,y} = \int_{\sigma(T)} \chi_{\{\lambda\}}\,dE_{x,y} = \langle E(\{\lambda\})x, y\rangle.$$
Proto $x = E(\{\lambda\})x \in \operatorname{Rng} E(\{\lambda\})$.

(b) Platí
$$\lambda \in \sigma_p(T) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\} \Longleftrightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0.$$

(c) Množina $\{\lambda\}$ je otevřená v $\sigma(T)$, a tedy $E(\{\lambda\}) \neq 0$ dle Věty 3.6.9(d). Díky (a) je $\lambda \in \sigma_p(T)$.

□

Věta 3.6.11. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor se spektrem $K = \sigma(T)$. Nechť E je rozklad identity jemu příslušející. Pro danou $[f] \in L^\infty(E)$ označme $L = \operatorname{essrng} f$. Definujme $F\colon \mathrm{Bs}(L) \to L(H)$ jako*
$$F(B) = E(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathrm{Bs}(L).$$
Pak pro operátor $S = \int_K f\,dE$ platí $\sigma(S) = L$ a F je rozklad identity pro S.

Důkaz. Vlastnosti (a)–(d) z Definice 3.6.1 snadno plynou z definice díky tomu, že f^{-1} zachovává množinové operace. Pro $x, y \in H$ platí
$$\langle F(A)x, y\rangle = \langle E(f^{-1}(A))x, y\rangle = E_{x,y}(f^{-1}(A)) f(E_{x,y})(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(L).$$
Tedy $F_{x,y} = f(E_{x,y})$ je komplexní míra na $\mathrm{Bs}(L)$. Je tedy regulární dle Věty **??**.

Zobrazení $g \mapsto \int_K g\,dE$ je $*$-izomorfizmus $L^\infty(E)$ do $L(H)$, a tedy zachovává spektra. Proto $\sigma(S) = \sigma([f]) = \operatorname{essrng} f = L$ (viz Tvrzení 3.6.6(c)).

K dokončení důkazu stačí ukázat, že $S = \int_L \mathrm{id}\,dF$. Nechť $x, y \in H$ jsou libovolné. Protože pro funkci $\mathrm{id}\colon L \to \mathbb{C}$ platí $\mathrm{id} \circ f = f$, máme
$$\begin{aligned} \langle Sx, y\rangle &= \left\langle \left(\int_K f(\lambda)\,dE(\lambda)\right) x, y\right\rangle = \int_K f(\lambda)\,dE_{x,y}(\lambda) = \int_K (\mathrm{id} \circ f)(\lambda)\,dE_{x,y}(\lambda) \\ &= \int_L \mathrm{id}\,df(E_{x,y}) = \int_L \mu\,dF_{x,y}(\mu) = \left\langle \left(\int_L \mathrm{id}\,dF\right) x, y\right\rangle. \end{aligned}$$
Tedy $S = \int_L \mathrm{id}\,dF$ a důkaz je dokončen. □

Příklad 3.6.12. Nechť $H = L^2(\mu)$ pro nějakou σ-konečnou míru μ na měřitelném prostoru (Ω, Σ). Nechť $m \in L^\infty(\mu)$ a M je operátor definovaný jako

$$Mf = mf, \quad f \in H.$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Operátor M je dobře definovaný normální operátor na H a platí $\|M\| = \|m\|_\infty$.

(b) Platí

$$\sigma_p(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \mu(m^{-1}(\lambda)) > 0\} \quad \text{a} \quad \sigma(M) = \operatorname{essrng} m.$$

(c) Platí $M^*g = \overline{m}g$, $g \in H$, a operátor M je samoadjungovaný právě tehdy, když m je reálná. Dále je M pozitivní právě tehdy, když $m \geqslant 0$.

(d) Rezolventní funkce je dána vzorcem

$$(\lambda I - M)^{-1}g = \frac{g}{\lambda - m}, \quad g \in H, \quad \lambda \in \rho(M).$$

(e) Rozklad jednotky E pro operátor M je dán jako

$$E(A)f = \chi_{m^{-1}(B)}f, \quad f \in H, \quad B \in \operatorname{Bs}(\sigma(M)).$$

(f) Pro každou $h \in L^\infty(E)$ platí

$$\left(\int_{\sigma(M)} h\, dE\right) f = (h \circ m)f, \quad f \in H.$$

Důkaz. (a) Platí

$$\int_\Omega |mf|^2 \, d\mu \leqslant \|m\|_\infty^2 \int_\Omega |f|^2 \, d\mu, \quad f \in H,$$

a tedy $M \in L(H)$ a $\|M\| \leqslant \|m\|_\infty$.

Pro dané $\varepsilon > 0$ položme $A' = \{\omega \in \Omega \colon |m(\omega)| > \|m\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak $\mu(A) > 0$, a tedy existuje množina $A \subset A'$ konečné kladné míry. Pak $\|\chi_A\|_H^2 = \int_\Omega \chi_A \, d\mu = \mu(A)$. Položme

$$f = \frac{\chi_A}{\|\chi_A\|^2}.$$

Pak $f \in S_H$ a

$$\|Mf\|^2 = \frac{1}{\|\chi_A\|^2} \int_A |m|^2 \, d\mu \geqslant \frac{1}{\|\chi_A\|^2} \int_A (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2 \, d\mu = (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2 \frac{\mu(A)}{\|\chi_A\|^2} = (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2.$$

Tedy $\|M\| = \|m\|_\infty$.

(b) Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ je takové, že $\mu(m^{-1}(\lambda)) > 0$, vezmeme $A \subset m^{-1}(\lambda)$ kladné konečné míry. Pak $\chi_A \in H$ a platí $mf = \lambda f$. Tedy $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Nechť $\lambda \in \sigma_p(M)$ a $f \in \operatorname{Ker}(\lambda I - M)$ je nenulový. Pak $f(m - \lambda) = 0$. Pokud $\mu(m^{-1}(\lambda)) = 0$, je $f = 0$ skoro všude, tj. $f = 0$. Proto $\mu(m^{-1}(\lambda)) > 0$.

Pokud $\lambda \notin \operatorname{essrng} m$, je operátor $g \mapsto \frac{g}{\lambda - m}$ inverzní k $\lambda I - M$.

Nechť $\lambda \in \operatorname{essrng} m$. Chceme ukázat, že $\lambda \in \sigma(M)$. Díky popisu $\sigma_p(M)$ můžeme předpokládat, že $\mu(m^{-1}(\lambda)) = 0$. Předpokládejme, že $N = (\lambda I - M)^{-1}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme množiny $A_n' = m^{-1}(B(\lambda, \frac{1}{n}))$. Pak $\mu(A_n') > 0$, takže lze nalézt množiny $A_n \subset A_n'$ kladné míry. Položme $g_n = \chi_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $g_n \in H$ a pro $f_n = Ng_n$ platí $f_n(\lambda - m) = g_n$. Tedy $f_n = \frac{g_n}{\lambda - m}$ na $\Omega \setminus m^{-1}(\lambda)$. Pak ale

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2 &= \int_{\Omega \setminus m^{-1}(\lambda)} \left|\chi_{A_n} \frac{1}{\lambda - m}\right|^2 d\mu = \int_{A_n \setminus m^{-1}(\lambda)} \frac{1}{|\lambda - m|^2} \, d\mu \geqslant \\ &= \int_{A_n \setminus m^{-1}(\lambda)} n^2 \, d\mu = n^2 \mu(A_n) = n^2 \|g_n\|^2 . \end{aligned}$$

Tedy $\|N\| \geqslant n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což je spor. Proto $\lambda \in \sigma(M)$.

(c) Položme $M'f = \overline{m}f$, $f \in H$. Pak

$$\langle Mf, g\rangle = \int_\Omega mf\overline{g} \, d\mu = \int_\Omega f\overline{\overline{m}g} \, d\mu = \langle f, M'g\rangle, \quad f, g \in H.$$

Tedy $M' = M*$. Druhé tvrzení je pak okamžitým důsledkem. Je-li totiž M samoadjungovaný, pak $mf = \overline{m}f$ pro každé $f \in H$. což implikuje $m = \overline{m}$. Podobně nezápornost m implikuje pozitivitu M. Obráceně, pokud

$$\int_\Omega mf\overline{f} \, d\mu = \langle Mf, f\rangle \geqslant 0, \quad f \in H,$$

je $m \geqslant 0$ skoro všude.

Tvrzení (d) bylo právě dokázáno během důkazu (b).

(e) Ukážeme, že zobrazení E je rozklad jednotky. Dle (c) je každý operátor $E(B)$ samoadjungovaná projekce. Zjevně $E(\sigma(M)) = I$ a $E(\varnothing) = 0$. Pro $B_1, B_2 \in \mathrm{Bs}(\sigma(M))$ platí

$$\begin{aligned} E(B_1)E(B_2)f &= E(B_1)(\chi_{m^{-1}(B_2)}f) = \chi_{m^{-1}(B_1)}\chi_{A_2}f = \chi_{m^{-1}(B_1)\cap m^{-1}(B_2)}f \\ &= \chi_{m^{-1}(B_1\cap B_2)}f = E(B_1 \cap B_2)f, \quad f \in H. \end{aligned}$$

Tedy vlastnost (c) Defince 3.6.1 je splněna. Pokud $A_1, A_2 \in \mathrm{Bs}(\Sigma(M))$ jsou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} E(B_1)f + E(B_2)f &= \chi_{m^{-1}(B_1)}f + \chi_{m^{-1}(B_2)}f = (\chi_{m^{-1}(B_1)} + \chi_{m^{-1}(B_2)})f = \chi_{m^{-1}(B_1)\cup m^{-1}(B_2)}f \\ &= \chi_{m^{-1}(B_1\cup B_2)}f = E(B_1 \cup B_2)f, \quad f \in H. \end{aligned}$$

Tedy i (d) z Definice 3.6.1 je splněno. Konečně pro $f, g \in H$ položme

$$\mu_{f,g}(A) = \int_A f\overline{g}\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Jelikož $f\overline{g} \in L^1(\mu)$, je $\mu_{f,g}$ dobře definovaná komplexní míra na Σ. Tedy míra $\nu_{f,g} = m(\mu_{f,g})$ je komplexní míra na $\mathrm{Bs}(\sigma(M))$.

Pro každé $B \in \mathrm{Bs}(\sigma(M))$ pak platí

$$E_{f,g}(B) = \langle E(B)f, g\rangle = \int_\Omega \chi_{m^{-1}(B)}f\overline{g}\, d\mu = \mu_{f,g}(m^{-1}(B)) = \nu_{f,g}(B),$$

a tedy i (e) Definice 3.6.1 je splněno.Vzhledem k Větě **??** je $E_{f,g}$ regulární míra.

Ukažme, že $M = \int_{\sigma(M)} \mathrm{id}\; dE$. Pro libovolnou dvojici $f, g \in H$ totiž máme

$$\leqslant \left(\int_{\sigma(M)} \mathrm{id}\; dE\right) f, g\rangle = \int_{\sigma(M)} \mathrm{id}\; dE_{f,g} = \int_{\sigma(M)} \mathrm{id}\; d\nu_{f,g} = \int_\Omega m\, d\mu_{f,g} = \int_\Omega mf\overline{g}\, d\mu = \langle Mf, f\rangle.$$

Tím je tvrzení (e) dokázáno.

(f) Nechť $h \in L^\infty(E)$ je dáno. Pak pro libovolnou dvojici $f, g \in H$ platí

$$\langle\left(\int_{\sigma(M)} h\, dE\right) f, g\rangle = \int_{\sigma(M)} h\, dE_{f,g} = \int_\Omega (h \circ m)\, d\mu_{f,g} = \int_\Omega (h\circ m)f\overline{g}\, d\mu = \langle (h\circ m)f, g\rangle.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

3.6.3 Aplikace spektrálního rozkladu

Věta 3.6.13. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Platí $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ pro každé $x \in H$.

(ii) Platí $T^* = T$ a $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Dle Věty 3.5.9 je T samoadjungovaný. Podle Věty 3.5.13 je

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx, x\rangle \colon x \in S_H\}} \subset [0, \infty).$$

(ii) $\implies$ (i) Nechť E je rozklad jednotky příslušný T. Pak pro každé $x \in H$ platí

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE_{x,x}(\lambda) \geqslant 0.$$

□

Definice 3.6.14. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ splňuje (i) Věty 3.6.13. Pak T se nazývá pozitivní operátor (značíme $T \geqslant 0$). Všimněme se, že tato definice pozitivnosti souhlasí s Definicí 3.3.77.

Věta 3.6.15. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$.*

(a) Je-li $T \geqslant 0$, pak existuje právě jeden $S \geqslant 0$ takový, že $S^2 = T$. (značíme $S = \sqrt{T}$).

(b) Je-li T invertovatelný a pozitivní, $\sqrt{S}$ je též invertovatelný.

Důkaz. (a) Nechť E je rozklad jednotky pro T. Protože $\sigma(T) \subset [0,\infty)$, je operátor $S = \int_{\sigma(T)} \sqrt{\lambda}\, dE(\lambda)$ dobře definovaný a z vlastností rozkladu jednotky splňuje $S^2 = T$. Dále je S pozitivní, neboť

$$\langle Sx, x\rangle = \langle \int_{\sigma(T)} \sqrt{\lambda}\, dE_{x,x}(\lambda) \geqslant 0, \quad x \in H.$$

Nechť S_1, S_2 jsou pozitivní operátory splňující $S_1^2 = S_2^2 = T$. Jelikož $\sigma(S_1) = \sqrt{\sigma(T)} = \sigma(S_2)$ dle Věty 3.3.97(d), jsou rozklady jednotky E_1 a $E - 2$ příslušné S_1 a S_2 definované na jedné kompaktní množině $L \subset [0,\infty)$, přičemž $\|S_1\| = \|S_2\| = \sqrt{\|T\|}$ (viz Věta 3.3.88(b)). Nechť $M = \|S_1\|$. Jelikož

$$\int_{\sigma(S_1)} \lambda^2\, dE_1(\lambda) = T = \int_{\sigma(S_2)} \lambda^2\, dE_2(\lambda),$$

platí

$$\int_L p(\lambda^2)\, dE_1(\lambda) = \int_L p(\lambda^2)\, dE_2(\lambda), \quad p \text{ polynom na } \mathbb{R}.$$

Pomocí Stoneovy–Weierstrassovy věty odvodíme, že platí

$$\int_L f(\lambda^2)\, dE_1(\lambda) = \int_L f(\lambda^2)\, dE_2(\lambda), \quad f \in C([0, M^2]).$$

Je-li $g \in C([0,M])$ libovolná, je funkce $f(\lambda) = g(\sqrt{\lambda})$ prvek $C([0,M^2])$, a tedy

$$\int_L g(\lambda)\, dE_1(\lambda) = \int_L f(\lambda^2)\, dE_1(\lambda) = \int_{L)} f(\lambda^2)\, dE_2(\lambda) = \int_L g(\lambda)\, dE_2(\lambda).$$

Standardní aplikací Lemmatu 3.5.17 odvodíme rovnost $\int_L g\, dE_1 = \int_L g\, dE_2$ pro každou $g \in \mathrm{Bf^b}(L)$. Tedy $E_1 = E_2$, z čehož plyne rovnost $S_1 = S_2$.

Pokud je T navíc invertovatelný, je díky Větě 3.3.97(d) invertovatelný i operátor $\sqrt{T}$. $\square$

Definice 3.6.16. Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $U \in L(H,G)$ je operátor. Řekneme, že U je částečná izometrie, pokud existují uzavřené podprostory $H_1 \subset\subset H$ a $G_1 \subset\subset G$ takové, že U je izometrie H_1 na G_1 a $U = 0$ na $(H_1)^\perp$.

Lemma 3.6.17. *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $U \in L(H,G)$ je operátor. Je-li U částečná izometrie, přičemž H_1 a G_1 jsou příslušné podprostory z Definice 3.6.16, nechť $Q \in L(H)$ ortogonální projekce na H_1. Pak platí následující tvrzení.*

- *(a) Platí $UU^* = Q$.*
- *(b) Operátor U^* izometricky zobrazuje G_1 na H_1.*
- *(c) Platí $U^*|_{G_1} = (U|_{H_1})^{-1}$.*

Důkaz. (a) Pišme $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. Pak $U\colon H_1 \to G_1$ je unitární operátor (viz Věta 3.5.10). Pro $x = x_1 = x_2$ a $y = y_2 + y_2$, kde $x_1, y_1 \in H_1$ a $x_2, y_2 \in H_1^\perp$, tak platí

$$\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle Ux_1, Uy_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \quad \text{a}$$
$$\langle Qx, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle.$$

Dle Důsledku 3.5.4 platí $U^*U = Q$.

Tvrzení (b) a (c) nyní plynou z (a). $\square$

Věta 3.6.18 (Polární rozklad)**.** *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H,G)$ je operátor.*

- *(a) Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $P \in L(H)$ a $U \in L(H,G)$ s následujícími vlastnostmi.*
  - *(a1) Platí $T = UP$.*
  - *(a2) Operátor P je pozitivní a U je částečná izometrie, přičemž prostory H_1 a G_1 z Definice 3.6.16 jsou $H_1 = \overline{\operatorname{Rng} P}$ a $G_1 = \overline{\operatorname{Rng} T}$.*

  Navíc platí $P^2 = T^*T$ a $P = U^*T$.
- *(b) Je-li T navíc invertovatelný, lze T jednoznačně rozložit jako $T = UP$, kde $P \in L(H)$ je pozitivní a invertovatelný a $U \in L(H,G)$ je unitární.*

Důkaz. (a) Položme $P = \sqrt{T^*T}$. (Definice je korektní, neboť T^*T je pozitivní operátor na H, což plyne z výpočtu

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, (T^*)^*x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geqslant 0, \quad x \in H.)$$

Pro $x \in H$ pak platí

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 .$$

Operátor $\widetilde{U}\colon \operatorname{Rng} P \to \operatorname{Rng} T$ definovaný jako

$$\widetilde{U}y = Tx, \quad x \in P^{-1}(y), y \in \operatorname{Rng} P,$$

je proto dobře definovaná izometrie $\operatorname{Rng} P$ na $\operatorname{Rng} T$. Lze ji proto jednoznačně rozšířit na izometrii $U\colon \overline{\operatorname{Rng} P} \to \overline{\operatorname{Rng} T}$. Tu dodefinujeme na celé H pomocí složení s ortogonální projekcí Q prostoru H na $\overline{\operatorname{Rng} P}$.

Přím z definice pak dostáváme $T = UP$. Stejně tak máme ihned vlastnost (a2).

Pokud $T = U'P'$ je jiný rozklad splňující (a1) a (a2), máme dle Lemmatu 3.6.17

$$T^*T = (U'P')^*(U'P') = P'(U')^*U'P = P'QP' = (P')^2,$$

a tedy $P' = P$ dle Věty 3.6.15. Protože $UPx = Tx = U'P'x = U'Px$ pro $x \in H$, platí i $U = U'$. Rozklad je tedy jednoznačný.

Konečně platí

$$U^*T = U^*UP = QP = P.$$

(b) Je-li T navíc invertovatelný, je invertovatelný i operátor T^*T, a potažmo i $P = \sqrt{T^*T}$. Tedy $\operatorname{Rng} P = H$ a $\operatorname{Rng} T = G$, z čehož plyne, že U je unitární operátor (viz Věta 3.5.10). □

Příklad 3.6.19. Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory, $\{e_i\colon i \in I\}$ je ortonormální systém v H a $\{f_i\colon i \in I\}$ je ortonormální systém v G. Nechť $m = \{m_i\colon i \in I\}$ je omezená posloupnost. Uvažujme operátor $T \in L(H, G)$ definovaný jako

$$Mx = \sum_{i \in I} m_i \langle x, e_i\rangle f_i, \quad x \in H.$$

Pak platí následující tvrzení.

(a) Operátor M je dobře definovaný, $\|M\| = \|\lambda\|_\infty$ a

$$M^*y = \sum_{i \in I} \overline{m_i} \langle y, f_i\rangle e_i, \quad y \in G.$$

(b) Operátor M je kompaktní právě tehdy, když $m \in c_0(I)$.

(c) Nechť $G = H$ a $f_i = e_i$ pro $i \in I$. Pak platí následující tvrzení.

  (c1) Operátor M je normální, přičemž je samoadjungovaný právě tehdy, když m_i, $i \in I$, jsou reálná.

  (c2) Operátor M je pozitivní právě tehdy, když m_i, $i \in I$, jsou nezáporná.

  (c3) Platí

$$\sigma_p(M) = \{m_i\colon i \in \mathbb{I}\} \quad \text{a} \quad \sigma(M) = \overline{\{m_i\colon i \in \mathbb{I}\}}.$$

  (c4) Rozklad jednotky E pro M je dán jako

$$E(B) = \sum_{i \in m^{-1}(B)} m_i \langle x, e_i\rangle e_i, \quad B \in \operatorname{Bs}(\sigma(M)),$$

  a pro každou $h \in L^\infty(E)$ platí

$$\left(\int_{\sigma(M)} h\, dE\right) x = \sum_{i \in I} h(m_i) \langle x, e_i\rangle e_i, \quad x \in H.$$

Důkaz. (a) Pro $x \in H$ platí

$$\|Mx\|^2 = \sum_{i \in I} |m_i|^2 |\langle x, e_i\rangle| \leqslant \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2 .$$

Tedy $\|M\| \leqslant \|m\|_\infty$.

Pro dané $\varepsilon > 0$ nechť $j \in I$ je zvolena tak, že $|m_j| \geqslant \|m\|_\infty - \varepsilon$. Pak $e_j \in S_H$ a platí

$$\|Mx\| = \|m_j f_j\| = |m_j| \geqslant \|m\|_\infty - \varepsilon.$$

Tedy $\|M\| = \|m\|_\infty$.

Označme
$$M'y = \sum_{i\in I} \overline{m_i}\langle y, f_i\rangle e_i, \quad y \in G.$$
Pro $x \in H$ a $y \in G$ platí
$$\langle Mx, y\rangle = \langle \sum_{i\in I} m_i\langle x, e_i\rangle f_i, \sum_{j\in J}\langle y, f_j\rangle f_j\rangle = \sum_{i\in I} m_i\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, f_i\rangle},$$
$$\langle x, M'y\rangle = \langle \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j\in J} \overline{m_j}\langle y, f_j\rangle e_j\rangle = \sum_{i\in I} m_i\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, f_i\rangle},$$
a tedy $M^* = M'$.

(b) Pokud $m \in c_0(I)$, pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $F = \{i \in I\colon |m_i| > \varepsilon\}$ konečná. Položme
$$M_F x = \sum_{i\in F} m_i\langle x, e_i\rangle f_i, \quad x \in H.$$
Pak
$$\|Mx - M_F x\|^2 = \langle \sum_{i\in I\setminus F} m_i\langle x, e_i\rangle f_i, \sum_{j\in I\setminus F} m_j\langle x, e_j\rangle f_j\rangle = \sum_{i\in I\setminus F} |m_i|^2 |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|x\|^2 .$$
Tedy $M \in \overline{F(H, G)}$, a tedy je kompaktní.

Nechť nyní existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $F = \{i \in I\colon |m_i| \geqslant \varepsilon\}$ je nekonečná. Uvažujme vektory e_j, $j \in F$. Pak pro různé indexy $j, j' \in J$ platí
$$\|Me_j - Me_{j'}\|^2 = \langle m_j f_j - m_{j'} f_{j'}, m_j f_j - m_{j'} f_{j'}\rangle = |m_j|^2 + |m_{j'}|^2 \geqslant 2\varepsilon^2.$$
Tedy množina $\{Me_j : j \in F\}$ není relativně kompaktní, což znamená, že M není kompaktní.

(c) V tomto případě uvažujme měřitelný prostor $(I, \mathscr{P}(I))$ s diskrétní mírou. Pak zobrazení $\phi\colon H \to \ell^2(I)$ definované jako $\phi(x) = \{\langle x, e_i\rangle\}_{i\in I}$ je izometrický izomorfizmus a platí
$$Mx = (\phi^{-1} \circ N \circ \phi)x, \quad x \in H,$$
kde $N \in L(\ell^2(I))$ je definováno jako
$$(Ny)_i = m_i y_i, \quad i \in I, \quad y \in \ell^2(I).$$
Vlastnosti operátoru M nyní snadno plynou z Příkladu 3.6.12. □

Věta 3.6.20 (Schmidtova reprezentace)**.** *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $T \in K(H, G)$. Pak existuje $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a nerostoucí posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ obsažená v $c_0(\{1, \dots, N\})$,, ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^N$ v H a ortonormální systém $\{f_n\}_{n=1}^N$ v G takové, že*
$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n\langle x, e_n\rangle f_n, \quad x \in H.$$
Posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ je přitom určena jednoznačně.

Důkaz. Krok 1. Nechť $T = UP$ je polární rozklad T. Jelikož $P = \sqrt{T^*T}$, je P kompaktní, pozitivní operátor.

Vskutku, T^*T je kompaktní a funkce $f : \lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ je nezáporná funkce s hodnotou 0 v 0. Lze ji proto na $\sigma(T^*T)$ stejnoměrně aproximovat polynomy $\{p_n\}$, pro které též platí $p(0) = 0$. Proto $p_n(T^*T)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou kompaktní operátory a konvergují k P. Proot je P kompaktní. Pozitivnost P pak plyne z vlastností spojitého kalkulu, viz Věta 3.3.97.

Pomocí Věty 3.5.14 nalezneme $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ nenulových prvků $\sigma(P)$ a ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^N$ v H takový, že
$$Px = \sum_{n=1}^N \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$
Pak $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ sestává z kladných čísel, přičemž předpokládáme, že se jedná o nerostoucí posloupnost. Jelikož $\sigma(P) = \sqrt{\sigma(T^*T)}$, konvergují λ_n k 0, pokud $N = \infty$ (viz Věta 1.4.31). Dále jsou vektory e_n obsaženy v $\operatorname{Rng} P$. Jelikož $U : \overline{\operatorname{Rng} P} \to \overline{\operatorname{Rng} T}$ je unitární operátor, tvoří vektory $f_n = Ue_n$ ortonormální systém v G. Pak máme hledaný rozklad, neboť
$$Tx = UPx = \sum_{n=1}^N \lambda_n\langle x, e_n\rangle f_n, \quad x \in H.$$

Krok 2. Předpokládejme, že

$$Tx = \sum_{n=1}^{N'} \lambda_n' \langle x, e_n' \rangle f_n', \quad x \in H,$$

pro nějaký rozklad splňující požadavky tvrzení. Označme $H_1 = \overline{\operatorname{span}}\{e_n' : n = 1, \dots N'\}$ a $G_1 = \overline{\operatorname{span}}\{f_n' : n = 1, \dots, N'\}$. Položme

$$P'x = \sum_{n=1}^{N'} \lambda_n' \langle x, e_n' \rangle e_n', \quad x \in H.$$

Pak $P' \geqslant 0$. Je-li totiž $x \in H$ libovolné, platí $x = (x - \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e_n' \rangle e_n') + \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e_n' \rangle e_n'$, přičemž $x - \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e_n' \rangle e_n' \in H_1^{\perp}$. Pak

$$\langle P'x, x \rangle = \langle \sum_{n=1}^{N'} \lambda_n' \langle x, e_n' \rangle e_n', \sum_{k=1}^{N'} \langle x, e_k' \rangle e_k' \rangle = \sum_{n=1}^{N'} \lambda_n' \left| \langle x, e_n' \rangle \right|^2 \geqslant 0.$$

Definujeme-li $U' : H_1 \to G_1$ jako

$$U'x = \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e_n' \rangle f_n', \quad x \in H,$$

dostaneme částečnou izometrii H do G, přičemž $U = 0$ na $H_1^{\perp}$ a $U : H_1 \to G_1$ je izometrie. Navíc $H_1 = \overline{\operatorname{Rng} P'}$, $G_1 = \overline{\operatorname{Rng} T}$ a $T = U'P'$. Dle Věty 3.6.18 platí $P' = P$ a $U' = U$. Speciálně platí $\sigma(P) = \sigma(P')$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lim_{n \to \to infty} \lambda_n' = 0$, platí

$$\{\lambda_n : n = 1, \dots, N \in \mathbb{N}\} = \{\lambda_n' : n = 1, \dots N'\}.$$

Nechť $\lambda \in \sigma(P) \setminus \{0\}$. Pak λ má stejný počet výskytů v posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ jako v posloupnosti $\{\lambda_n'\}_{n=1}^{N'}$, neboť tento počet je roven dimenzi prostoru $\operatorname{Ker}(\lambda - P)$. Proto $N = N'$ a $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N} = \{\lambda_n'\}_{n=1}^{N'}$. Tím je důkaz dokončen. □

Věta 3.6.21. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je unitární operátor. Pak existuje samodajungovaný operátor $S \in L(H)$ takový, že $T = \exp(iS)$.*

Důkaz. Uvažujme spojitou funkci $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danou předpisem $f(t) = e^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, a její restrikci $f = h|_{[0,2\pi)}$. Pak f je spojitá bijekce $[0, 2\pi)$ na $\mathbb{T}$. Její inverze $g = f^{-1} : \mathbb{T} \to [0, 2\pi)$ je pak bodovou limitou spojitou funkcí, a speciálně je tedy borelovská.

Vkutku, pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujeme funkci

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} t, & \lambda = e^{it}, t \in [0, 2\pi - \frac{1}{n}], \\ 2\pi - \frac{1}{n}, & \lambda = e^{it}, t \in [2\pi - \frac{1}{n}, 2\pi). \end{cases}$$

Tyto funkce jsou zjevně spojité a splňují $g_n \to g$.

Položme nyní $S = g(T) = \Psi(g)$, kde Ψ je zobrazení z Věty 3.5.20. Díky vlastnosti (f) této věty je S samodajungovaný operátor. Dále platí $h \circ g = \mathrm{id}$ na $\mathbb{T}$, a tedy díky Větě 3.5.20(e) máme

$$T = (\mathrm{id})(T) = (h \circ g)(T) = h(g(T)) = h(S) = \exp(iS).$$

Tím je důkaz dokončen. □

Kapitola 4

Funkcionální analýza I. - příklady

4.1 Topologické vektorové prostory

4.1.1 Příklady a elementární vlastnosti

Příklad 4.1.1. Ukažte, že $\mathcal{C}(\Omega)$, $H(\Omega)$, $\mathscr{D}(K)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ jsou Fréchetovy prostory.

Příklad 4.1.2. Prozkoumejte vlastnosti následujících prostorů: $(\mathbb{R}^\gamma, \tau_p)$, $(\mathcal{C}(X), \tau_K)$, slabou topologii na Banachově prostoru, slabou* topologii na duálu, měřitelné funkce na $[0,1]$ na konveregencí v míře

Příklad 4.1.3. Uvažujte $L_p(0,1)$ pro $0 < p < 1$. Ukažte, že

- je to lokálně omezený F-prostor,
- neobsahuje netriviální otevřené konvexní množiny,
- jeho duál je triviální.

Příklad 4.1.4. Ve vektorovém prostoru X platí následující:

- $2A \subset A + A$ a rovnost obecně neplatí,
- A je konvexní právě tehdy, když $(s+t)A = sA + tA$ pro každé $s, t \geqslant 0$,
- vyvážené množiny jsou stabilní vzhledem ke sjednocením a průnikům,
- konvexní množiny jsou stabilní vzhledem k průnikům a nahoru usměrněným sjednocením,
- $A + B$ je konvexní, pokud A, B jsou konvexní,
- $A + B$ je vyvážené, pokud A, B jsou vyvážené.

Příklad 4.1.5. Ve TVS X platí následující:

- konvexní obal otevřené množiny je otevřená,
- konvexní obal omezené množiny je omezená, pokud X je LCS,
- předchozí tvrzení neplatí v TVS,
- konvexní obal totálně omezené množiny je totálně omezená, pokud X je LCS,
- $A + B$ je omezená, pokud A, B jsou omezené,
- $A + B$ je kompaktní, pokud A, B jsou kompaktní,
- $A + B$ je uzavřená, pokud A uzavřená a B kompaktní.

Příklad 4.1.6. Najděte vyváženou $B \subset \mathbb{C}^2$, jejíž vnitřek není vyvážený.

Příklad 4.1.7. Nechť $\{x_n\}$ ve LCS X konverguje k 0. Pak $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i \to 0$.

Příklad 4.1.8. Nechť X je Banachův nekonečné dimenze. Ukažte, že X lze napsat jako sjednocení dvou disjunktních hustých konvexních množin.

Příklad 4.1.9. Ukažte, že

- konvexní obal kompaktních konvexních množin je kompaktní,
- konvexní obal kompaktní množiny je kompaktní v konečně dimenzionálních prostorech,
- konvexní obal kompaktní množiny nemusí být kompaktní ani v Hilbertově prostoru,
- uzavřený konvexní obal kompaktní množiny je kompaktní ve Fréchetově prostoru,

- vyvážený obal kompaktní množiny je kompaktní.

Příklad 4.1.10. Ukažte, že A v TVS je omezená, pokud každá její spočetná podmnožina je omezená.

Příklad 4.1.11. Uvažujte $X = \mathcal{C}_p([0,1])$. Najděte $\{f_n\}$ v X konvergující k 0 takovou, že $\{\gamma_n f_n\}$ nekonverguje k 0 pro každou posloupnost $\{\gamma_n\}$ jdoucí k ∞.

Příklad 4.1.12. Nechť X, Y jsou TVS, přičemž Y je konečně-dimenzionální, $T : X \to Y$ lineární surjekce. Ukažte, že T je otevřené. Navíc, T je spojité, pokud jeho jádro je uzavřené.

Příklad 4.1.13. Ukažte, že každé prostor konečné kodimenze v L_p pro $0 < p < 1$ je hustý.

Příklad 4.1.14. Uvažujte $X = \mathcal{C}([0,1])$ s metrikou $d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|}$. Nechť σ značí topologii definovanou d a τ značí bodovou topologii. Pak:

- každá τ-omezená množina je i σ-omezená,
- $I : (X,\tau) \to (X,\sigma)$ je omezené nespojité sekvenciálně spojité zobrazení,
- τ není metrizovatelná,
- τ nemá spočetnou bázi,
- každý spojitý funkcionál na (X,τ) je tvaru $f \mapsto \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$.
- (X,σ) má pouze triviální otevřené konvexní množiny,
- $I : (X,\sigma) \to (X,\tau)$ není spojité,
- konvergence v σ odpovídá konvergenci v míře.

Příklad 4.1.15. Ukažte, že topologie $\mathcal{C}(\Omega)$ (respektive $H(\Omega)$) nezávisí na volbě kompaktů.

Příklad 4.1.16. Ukažte, že lineární operátor z hustého podprostoru TVS X do F-prostoru Y lze jednoznačně rozšířit.

Příklad 4.1.17. Uvažujte bázi $X = \ell_2(\mathbb{Z})$ a vektory $f_n = e_{-n} + ne_n$. Nechť X_1 je uzavřený lineární obal vektorů $\{e_0, e_1, \dots\}$ a X_2 je uzavřený lineární obal $\{f_1, f_2 \dots\}$. Pak $X_1 + X_2$ je hustý v X, ale neobsahuje $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_{-n}$.

Příklad 4.1.18. Uvažujte $X = \mathcal{C}(0,1)$ s topologií generovanou koulemi ve stejnoměrné metrice. Ukažte, že X není TVS.

Příklad 4.1.19. Uvažujte $X = L^2([-1,1])$ a $X_\alpha = \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) : f(0) = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak X_α jsou disjunktní husté prostory, které tedy nemohou být odděleny spojtým funkcionálem.

Příklad 4.1.20. Jsou-li X_i TVS, pak $\prod X_i$ se součinovou topologií je TVS, stejně jako $\sum X_i = \{x \in \prod X_i : \operatorname{spt} x \text{ konečný}\}$. Ukažte, že:

- součin i suma jsou LCS, pokud X_i jsou LCS,
- $(\prod X_i)^* = \sum X_i^*$.
- $(\sum X_i)^* = \prod X_i^*$.

Příklad 4.1.21. Ukažte, že $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^* = (c_{00}, \tau_p)$.

4.1.2 Slabé topologie

Příklad 4.1.22. Uvažujte $X = \ell_p$ pro $0 < p < \infty$. Pak

- pro $1 < p < \infty$ prostor X obsahuje slabě konvergentí posloupnost, která nekonverguje v normě,
- pro $p = 1$ normově konvergentní posloupnosti splývají se slabě konvergentními,
- pro $0 < p < 1$ je X lokálně omezený F-prostor splňující $X^* = \ell_\infty$,
- pro $0 < p < r \leqslant 1$ uvažujte na ℓ_∞ slabou* topologie τ_p a τ_r indukované ℓ_p a ℓ_r a ukažte, že jsou různé na celém prostoru a splývají na normově omezených množinách ℓ_∞.

Příklad 4.1.23. Ukažte, že $e_n = e^{int}$ konvergují v $L^p(-\pi,\pi)$ slabě k 0 pro $1 \leqslant p < \infty$.

Příklad 4.1.24. Ukažte, že $\mathcal{C}([0,1])$ je slabě* husté v $L^\infty([0,1])$.

Příklad 4.1.25. Uvažujte komplexní prostor $X = \mathcal{C}([0,1])$. Najděte $f \in X^*$ zobrazující B_X na otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$.

Příklad 4.1.26. Uvažujte prostor $X = \ell_2$ a E sestává z prvků $e_{m,n} = e_m + me_n$. Nechť E_1 značí slabý sekvenciální uzávěr E.

- Najděte E_1.
- Najděte slabý uzávěr E.
- Ukažte, že $0 \in \overline{E}^w \setminus E_1$.

Příklad 4.1.27. Nechť X je vektorový prostor, $M \subset\subset X^\#$, pak $(X, \sigma(X, M))$ je metrizovatelný právě tehdy, když M má spočetnou bázi.

Příklad 4.1.28. • Slabá topologie na NLP X nekonečné dimenze není metrizovatelná.

- Slabá* topologie na duálním X^* je metrizovatelná právě tehdy, když X má spočetnou bázi (tj. pro nekonečně dimenzionální Banachův X není slabá* topologie metrizovatelná).

Příklad 4.1.29. • (B_X, w) je metrizovatelná právě tehdy, když X^* separabilní.

- (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná právě tehdy, když X separabilní.

Příklad 4.1.30. Nechť $\dim X = \infty$, pak $\overline{S_X}^w = B_X$.

Příklad 4.1.31 (Helly)**.** Nechť X Banachův, $f \in X^{**}$ a $F \subset\subset X^*$ konečné dimenze a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $x \in X$ takové, že $\|x\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|f\|$ a $x = f$ na F.

Příklad 4.1.32. Nechť X je Banachův. Ukažte, že normová a slabá topologie splývá na B_X právě tehdy, když X je konečně dimenzionální.

Příklad 4.1.33. Nechť X je LCS. Ukažte, že (X, w) má omezené okolí právě tehdy, když X je konečně dimenzionální.

Příklad 4.1.34. Na X je $\|\cdot\|$ slabě zdola polospojitá, na X^* je slabě* zdola polospojitá.

Příklad 4.1.35. Pro X Banachův je S_X G_δ v B_X ve slabé topologii, S_{X^*} je slabě* G_δ v B_{X^*}.

Příklad 4.1.36. Nechť X je Banachův. Ukažte, že $A \subset X^*$ je slabě* omezená právě tehdy, když A je normově omezená.

Příklad 4.1.37. Norma není pro $\dim X = \infty$ slabě spojitá, ani není slabě* spojitá na duálu.

Příklad 4.1.38. Je-li X Banach a $K \subset X$ slabě kompaktní, pak pro každé $x \in X$ existuje v K k němu nejbližší prvek. Podobně pro slabě* kompaktní podmnožinu duálu.

Příklad 4.1.39. Nechť K je kompakt. Ukažte, že $\mathcal{C}(K)$ je separabilní právě tehdy, když K je metrizovatelný.

Příklad 4.1.40. Nechť X je Banachův a $Y \subset\subset X$ je hustý. Ukažte, že X^* je izometricky izomorfní s Y^*, přičemž tento izomorfizmus je homeomorfizmus mezi w* topologiemi právě tehdy, když $Y = X$.

Příklad 4.1.41. Uvažujte ℓ_1 jako

- duál k c_0 (pomocí duality $x \mapsto \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$, $x \in c_0$, $y \in \ell_1$) s topologií $\sigma_1 = \sigma(\ell_1, c_0)$,
- duál k c_{00} (pomocí duality $x \mapsto \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$, $x \in c_0$, $y \in \ell_1$) s topologií $\sigma_2 = \sigma(\ell_1, c_{00})$,
- duál k c (pomocí duality $x \mapsto (\lim x) y_1 + \sum_{i=1}^\infty x_i y_{i+1}$, $x \in c_0$, $y \in \ell_1$) s topologií $\sigma_3 = \sigma(\ell_1, c)$.

Rozmyslete si,

- pro jaké topologie je identické zobrazení na ℓ_1 spojité či homeomorfní,
- pro jaké topologie je identické zobrazení na B_{ℓ_1} spojité či homeomorfní,
- stejné otázky pro pravý a levý shift T a S, tj. $T(y_1, y_2, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots)$ a $S(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$.

Příklad 4.1.42. Nechť $T : X \to Y$ je operátor mezi normovanými lineárními prostory. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojitý,
(ii) $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, w)$ je spojitý,
(iii) $T : (X, w) \to (Y, w)$ je spojitý,
(iv) $T : (X, w) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojitý.

Příklad 4.1.43. Nechť $T : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ je operátor mezi lokálně kovexními prostory. Rozmyslete si implikace mezi následujícími výroky:

(i) $T : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ je spojitý,
(ii) $T : (X, w) \to (Y, w)$ je spojitý,
(iii) $T : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ je spojitý pro nějaké přípustné topologie τ_1 na X a σ_1 na Y,
(iv) $T : (X, \tau) \to (Y, w)$ je spojitý,
(v) $T : (X, w) \to (Y, \sigma_1)$ je spojitý.

Příklad 4.1.44. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor a $X_{\mathbb{R}}$ je reálná verze X. Ukažte, že $I : X^* \to (X_{\mathbb{R}})^*$, $x^* \mapsto \operatorname{Re} x^*$, je izometrický w^*-w^* homeomorfizmus.

4.1.3 Poláry a extremální body

Příklad 4.1.45. Najděte poláry množin A v prostoru X:

- $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1,1)\}$,
- $X = \mathbb{C}^3$, $A = \{(1,i,-i)\}$,
- $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in X : 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,
- $X = \mathbb{C}$, $A = \{t(1,1) : t \in [0,1]\}$,
- $X = \mathbb{C}^2$, $A = \{z\,((1,0),(0,1)) : |z| \leqslant 1\}$.

Příklad 4.1.46. Nechť X je NLP a $A \subset X$. Ukažte, že $(A^0)^0 = \overline{\text{bco}}^{w^*}(\varepsilon(A))$.

Příklad 4.1.47. Najděte kompaktní konvexní množinu $K \subset \ell_2$ tak, že $K \neq \operatorname{co}\operatorname{ext} K$.

Příklad 4.1.48. Najděte extremální body jednotkové koule prostoru c_0, $C(K)$, $L_1([0,1])$, ℓ_p pro $p \in [1,\infty]$ a $\mathcal{M}(K)$.

Příklad 4.1.49. Nechť X je Banachův nekonečné dimenze a $\operatorname{ext} B_X$ je konečná. Ukažte, že X není izometricky izomorfní žádnému duálnímu prostoru.

Příklad 4.1.50. Najděte $\operatorname{ext}\mathcal{M}^1(K)$, $\overline{\text{co}}^{w^*}\operatorname{ext}\mathcal{M}^1(K)$ a $\overline{\text{co}}^{\|\cdot\|}\operatorname{ext}\mathcal{M}^1(K)$ pro kompaktní prostor K.

Příklad 4.1.51. Najděte $X = \ell_1$, pak $B_X = \overline{\text{co}}^{\|\cdot\|}\operatorname{ext} B_X$.

Příklad 4.1.52. Nechť X je Banachův a $x \in X$. Pak existuje $x^* \in \operatorname{ext} B_{X^*}$, že $\|x^*\| = |x^*(x)|$.

4.1.4 Slabá a slabá* separabilita, slabá kompaktnost

Příklad 4.1.53. Ověřte následující pro topologický prostor X:

- relativně kompaktní je relativně spočetně kompaktní a kompaktní je spočetně kompaktní,
- relativně sekvenciálně kompaktní je relativně spočetně kompaktní a sekvenciálně kompaktní je spočetně kompaktní,

Příklad 4.1.54. Ověřte následující příklady:

- Nechť $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$, $A = \{x \in X : \operatorname{spt} x \text{ spočetný }\}$. Pak A je sekvenciálně kompaktní a $\overline{A} = X$.
- Nechť $X = \beta\mathbb{N}\backslash\{u\}$ pro nějaké $u \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Pak X je spočetně kompaktní a není kompaktní.
- Nechť $X = \beta\mathbb{N}$. Pak X je kompaktní a není sekvenciálně kompaktní.
- Nechť $X = [0,\omega_1)$. Pak X je sekevenciálně kompaktní a nekompaktní.

Příklad 4.1.55.
- Nechť $X = c_0(\Gamma)$ a $A = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě kompaktní.
- Nechť $X = \ell_1(\Gamma)$ a $A = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě* kompaktní a není slabě kompaktní.
- Nechť $X = \ell_2(\Gamma)$ a $A = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě kompaktní.
- Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$. Najděte posloupnost (f_n) v X konvergující k 0 v τ_p a nekonvergující slabě.
- Nechť $X = L_p([0,1])$, $1 \leqslant p < \infty$, a $A = \{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě kompaktní.

Příklad 4.1.56. Nechť X je separabilní NLP a $A \subset X$ relativně slabě spočetně kompaktní. Pak A je relativně slabě kompaktní.

Příklad 4.1.57. Rozmyslete si Eberlein-Šmuljanovu větu pro normované lineární prostory.

Příklad 4.1.58. Nechť $\varphi : K \to L$ je spojitá surjekce kompaktu K na L a $g : L \to M$ je zobrazení do topologického prostoru M. Pak g je spojité právě tehdy, když $g \circ \varphi$ je spojité.

Příklad 4.1.59. Nechť $A \subset (\mathcal{C}(K), \tau_p)$ je separabilní relativně spočetně kompaktní. Pak A je metrizovatelná.

Příklad 4.1.60. Nechť $A \subset (\mathcal{C}(K), \tau_p)$. Pak A je τ_p-separabilní právě tehdy, když A je slabě separabilní právě tehdy, když A je $\|\cdot\|$-separabilní.

Příklad 4.1.61. Nechť X je Banachův a $A \subset X$. Ukažte, že A je slabě kompaktní právě tehdy, když $A \cap Y$ je slabě kompaktní pro každý uzavřený separabilní $Y \subset\subset X$.

Příklad 4.1.62. Nechť $A \subset X$, kde X je NLP. Pak A je slabě separabilní právě tehdy, když A je $\|\cdot\|$-separabilní.

Příklad 4.1.63. Je-li X separabilní, pak X^* je slabě* separabilní. (Obrácená implikace obecně neplatí.)

Příklad 4.1.64. Nechť X je Banachův a $K \subset X$ je slabě kompaktní a separabilní. Pak (K, w) je metrizovatelný.

Příklad 4.1.65. Nechť K je separabilní kompaktní prostor, $A \subset \mathcal{C}(K)$ je slabě kompaktní. Pak je metrizovatelná ve slabé topologii a normově separabilní.

Příklad 4.1.66. Banachův prostor X ve slabé topologii není úplný.

Příklad 4.1.67. Nechť X je Banachův prostor. Pak B_{X*} je w^* separabilní právě tehdy, když S_{X*} je w^* separabilní. Pokud B_{X*} je w^* separabilní, je i X^* w^* separabilní (obráceně neplatí).

Příklad 4.1.68. Nechť X je Banachův. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) X^* je w^* separabilní.

(ii) Existuje spojité prosté zobrazení X do separabilního reflexivního prostoru.

(iii) Existuje spojité prosté zobrazení X do separabilního prostoru.

Příklad 4.1.69. Nechť K je kompakt. Pak K je separabilní právě tehdy, když $B_{\mathcal{M}(K)}$ je w^* separabilní.

Příklad 4.1.70. Nechť X je separabilní Banachův prostor. Pak X^{**} je w^* separabilní.

Příklad 4.1.71. Ukažte, že $(\ell_\infty)^*$ je slabě* separabilní.

Příklad 4.1.72. Ukažte, že $\mathcal{C}(K)$ je reflexivní právě tehdy, když K je konečný.

Příklad 4.1.73. Ukažte, že slabě kompaktní operátory tvoří levý i pravý ideál.

4.2 Matice a operátory

1. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a $AB = I$. Ukažte, že $B = A^{-1}$. Platí to i v nekonečně rozměrných prostorech?
2. Pokud $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, pak má invariantní podprostor. Ukažte, že pro $n = 2$ to neplatí.
3. Pokud $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, pak existuje polynom $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ tak, že $p(A) = 0$.
4. Ať $T \in \mathcal{L}(H)$, H komplexní Hilbertův prostor, splňuje $(Tx, x) = 0$ pro každé $x \in H$. Pak $T = 0$. Ukažte, že pro reálné prostory to neplatí.
5. Ukažte, že $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^n$, $n \in \mathbb{N}$, pro $T \in \mathcal{L}(H)$ normální.
6. Ať $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ je normální. Ukažte, že A je unitárně diagonizovatelný, tj. existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory A.
7. Najděte všechna řešení A rovnice
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
8. Najděte všechna řešení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ rovnice
$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
9. Najděte T^*, pokud $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ je definováno jako $Tf(x) = \int_0^x k(x-t)f(t)dt$, kde k je 1–periodická funkce z $L^2(0,1)$.
10. Najděte T^*, pokud $T : \ell^2 \to \ell^2$ je definováno jako
$$T(\{x_n\}) = \{(-\frac{1}{2})^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^{2j}}\}_n.$$
11. Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je kompaktní právě tehdy, když je kompaktní T^*T.
12. Najděte nekompaktní operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $T^2 = 0$.
13. Ať $T : L^1[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ je dán jako $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ukažte, že T není kompaktní a najděte T'.
14. Ať $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ je dán jako $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ukažte, že T je kompaktní, určete $\sigma(T)$ a najděte T^*. Je T samoadjungovaný?
15. Ať $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Najděte $\sigma(P)$.
16. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou po dvou různá komplexní čísla, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jsou komplexní čísla. Najděte polynom p tak, že $p(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, \ldots, k$.
17. Nechť $T = A + iB$, A, B samoadjungované. Ukažte, že
    (a) T je normální právě tehdy, když A, B komutují,
    (b) T kompaktní právě tehdy, když A, B kompaktní.
18. $T \in \mathcal{L}(H)$ splňuje $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.
19. Ukažte, že Věta **??** neplatí pro obecné operátory. Platí v (a) $\sigma(T) = N$?

4.3 Kalkulus s normálními maticemi

1. Ať $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ je normální a $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ je její spektrální rozklad. Ukažte, že $p(A) = \sum p(\lambda_i) P_i$ pro každý polynom p. Definujme pro libovolnou funkce $f : \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \to \mathbb{C}$ operátor $f(A)$ jako $\sum f(\lambda_i) P_i$. Pro invertibilní normální operátor A najděte A^{-1}. Ukažte, že $f(A)$ je normální pro libovolnou funkci f.
2. Řekneme, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ je pozitivní, pokud A je samoadjungovaný a $(Ax, x) \geqslant 0$ pro každé $x \in \mathbb{C}^n$. Ukažte, že samoadjungovaný A je pozitivní právě tehdy, když $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.
3. Ať $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$je samoadjungovaný, $f \in \ell^\infty(\sigma(A))$ je reálná funkce. Pak $f(A)$ je samoadjungovaný.
4. (Polární rozklad) Ať $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Pak existuje právě jeden pozitivní operátor T a nějaký unitární U tak, že $A = TU$. Pokud A je invertibilní, je U také určen jednoznačně.
5. Ať $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Pak existuje právě jeden pozitivní operátor T a nějaký samoadjungovaný U tak, že $A = Te^{iU}$.
6. Ukažte, že normální A je unitární právě tehdy, když všechna vlastní čísla A leží na jednotkové kružnicic.
7. Ukažte, že pro normální A existuje polynom p tak, že $p(A) = A^*$.
8. Dokažte: A je normální právě tehdy, když pro libovolný A-invariantní podprostor S je $S^\perp$ také A–invariantní.
9. Ukažte, že pro pozitivní A je $\sqrt{A}$ jednoznačně určena.
10. Najděte $\sqrt{A}$, pokud
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-i \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
11. Najděte diagonalizaci matice
$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{pmatrix}.$$
12. Najděte polární rozklad matice
$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4 Vektorová integrace

1. Je–li $f : [0,1] \to X$ spojitá a $\lambda \in \mathcal{M}^1([0,1])$ je Lebesgueova míra, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každou volbu $\{\xi_i\}$ z dělení o normě menší jak δ platí
$$\| \int_{[0,1]} f \, d\lambda(t) - \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \| < \varepsilon.$$

4.5 Analytický kalkulus

1. Nechť $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ je definováno jako
$$Tf(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|-|t|} f(t) dt \,.$$
Najděte bodové spektrum, spektrum a normu operátoru T. Zjistěte, zda je samoadjungovaný a najděte $f(T)$ pro libovolnou spojitou funkci f na $\sigma(T)$.
2. Zkoumejte úkoly z předešlého příkladu pro operátor $T : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$, který je definován vztahem
$$Tf(x) = \int_0^\infty e^{-|x|-|t|} f(t) dt \,.$$
3. Pro libovolnou funkci f na $\sigma(A)$ spočtěte $f(A)$, je–li
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+4i \\ 2-4i & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Spočtěte $f(A)$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(z) = \cos z,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(z) = \sin z,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-4i \\ 2+4i & 3 \end{pmatrix}, \quad f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 2 & i \end{pmatrix}, \quad f(z) = \exp z,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+5i \\ 2-5i & 1 \end{pmatrix}, \quad f(z) = \sqrt{z}.$$

5. Najděte A tak, aby $\exp A = B$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Najděte všechna řešení rovnice $A^3 = B^4$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Najděte všechna řešení rovnice $A^5 = B$, kde

$$B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

8. Definujme operátor $A : L^2((1,\infty)) \to L^2((1,\infty))$ předpisem

$$\big(A\varphi\big)(x) := \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{x^2 t}\, dt\,.$$

Najděte $||A||$, $\sigma_p(A)$, $\sigma(A)$ a rozmyslete, zda je A kompaktní či samoadjungovaný. Dále najděte, pokud existuje, $f(A)$ pro $f(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{4\lambda+1}$.

9. Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je libovolná funkce. Nalezněte $f(A)$, jestliže $A \in \mathcal{L}\big(L^2([0,1])\big)$ je definován předpisem

$$Af(x) := \int_0^1 x f(t)\, dt$$

či

$$Af(x) := \int_0^1 (x-t)^2 f(t)\, dt\,.$$

10. Nechť

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte matice A, B, pro něž $A^4 = T^3$ či $e^B = T$. Kolik takových matic existuje?

11. Najděte, pokud existuje, pozitivní matici A, pro niž platí

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} =: B\,.$$

4.6 Kalkulus s normálními operátory

1. Ať $T : \mathcal{L}^2[0,1] \to \mathcal{L}^2[0,1]$ je dán jako
$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
Najděte TT^*, spektrální rozklad TT^*, $\sqrt{TT^*}$ a polární rozklad T, tj., pozitivní P a unitární U tak, že $T = PU$. Jak vypadá samoadjungovaný S splňující $e^{iS} = U$?

2. Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Ukažte, že existuje unitární U tak, že $T^* = UT$. Kdy je U určen jednoznačně?

3. Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je kompaktní právě tehdy, když je kompaktní T^*T.

4. Najděte $\sqrt{A}$, kde operátor $A : l^2 \to l^2$, $A\{x_n\} = \{y_n\}$ je dán rovnostmi:
$$\begin{aligned}
9y_1 &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3\\
9y_2 &= 2x_1 + 8x_2 - 2x_3\\
9y_3 &= 4x_1 - 2x_2 + 5x_3\\
y_4 &= 3x_4 + (2-i)x_5\\
y_5 &= (2+i)x_4 + 7x_5\\
y_{5+k} &= \frac{1}{k}x_{5+k} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \dots\,.
\end{aligned}$$

5. Nechť A je pozitivní operátor na Hilbertově prostoru H, $||A|| \leqslant 1$. Definujte rekurentní posloupnost $\{B_n\} \subset \mathcal{L}(H)$ předpisem
$$B_0 = 0 \quad \text{a} \quad B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2)\,.$$
Dokažte, že $B_n \to \sqrt{A}$.

6. Definujme operátor T na l^2 předpisem
$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, 0, x_3, x_4, \dots)\,.$$
Ukažte, že $||T|| = 1$, že T je hermiteovskě a pozitivní, a že $\sqrt{T} = T$.

7. Nechť H je Hilbertův prostor a $A \in \mathcal{L}(H)$. Nalezněte adjungovaný operátor $\left(e^A\right)^*$. Je-li A hermiteovský, ukažte, že e^A je pozitivní a nalezněte $\sqrt{e^A}$.

8. Nechť A, B jsou pozitivní operátory. Ukažte, že prvky $A + B$ a AA^* jsou také pozitivní, zatímco prvek AB pozitivní být nemusí. Pokud ovšem A a B komutují, je AB také pozitivní.
Pro součin zkuste vynásobit matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Nechť T je pozitivní operátor na Hilbertově prostoru H. Potom T je invertibilní, právě když existuje takové $\eta > 0$, že $T \geqslant \eta I$. V tomto případě pak T^{-1} je též pozitivní operátor.
Návod Nechť $T \geqslant \eta I$. Potom operátory $T - \eta I$ a $T + \eta I$ jsou pozitivní a komutují spolu. Jejich součin $T^2 - \eta^2 I$ též pozitivní. Odtud plyne, že T je omezené zdola, neboť pro každé, $x \in H$ máme
$$||Tx||^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \geqslant (\eta^2 x, x) = \eta^2 ||x||^2\,,$$
a tedy T je invertibilní.
Je-li T invertibilní, je zdola omezené - existuje $\beta > 0$ tak, že $||Tx|| \geqslant \beta||x||$ pro každ, $x \in H$. Protože tak, $\operatorname{Rng} T = H$ a $(T^{-1}Tx, Tx) = (x, Tx) = (Tx, x) \geqslant 0$, je T^{-1} pozitivní. Dále pro každé $x \in H$ máme
$$(T^2x, x) = (Tx, Tx) = ||Tx||^2 \geqslant \beta^2||x||^2 = (\beta^2 x, x)\,,$$
což není nic jiného než $T^2 \geqslant \beta^2 I$. Potřebujeme však dok zat, že $T \geqslant \beta I$. Ale to je již snadné. Operátor $T + \beta I$ je invertibilní a jeho inverze $(T + \beta I)^{-1}$ je pozitivní (to plyne z předchozích řádků). Protože pozitivní operátory $T^2 - \beta^2 I$ a $(T + \beta I)^{-1}$ komutují, je i jejich součin
$$(T^2 - \beta^2 I)(T + \beta I)^{-1} = (T - \beta I)(T + \beta I)(T + \beta I)^{-1} = T - \beta I$$
pozitivní.

4.7 Spektrální rozklad normálního operátoru

1. Najděte spektrální míry operátorů (tj. míry E a $E_{x,x}$ splňující $(f(T)x,x) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_{x,x}(\lambda)$:

   (a) $Tf(t) = tf(t)$ pro $f \in \mathcal{L}^2[-1,1]$,

   (b) T je ortogonální projekce na H,

   (c) T je levý shift na $\ell^2(\mathbb{Z})$,

   (d) $T(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) = (x_2,x_1,x_4,x_3,\dots)$, $(x_1,x_2,\dots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

   (e) $Tf(t) = f(t+1)$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$,

   (f)
$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   (g) $T(\{x_n\}) = \{\frac{x_n}{n}\}$, $\{x_n\} \in \ell^2$.

2. Pro $\varphi \in L^\infty(\mu)$ položme $M_\varphi f = \varphi f$, $f \in L^2(\mu)$. Najděte $\sigma(M_\varphi)$ a vlastní čísla M_φ. Ukažte, že zobrazení $\varphi \mapsto M_\varphi$ je izomorfizmus (zachovává všechno) $L^\infty(\mu)$ do $\mathcal{L}(L^2(\mu))$.

3. Ukažte, že Fourierova transformace F na $L^2(\mathbb{R})$ je unitární operátor, platí $F^4 = I$, $\sigma(F) = \sigma_p(F) = \{1,-1,i,-i\}$. (Vyzkoušejte funkce
$$\exp(\frac{1}{2}x^2)(\frac{d}{dx})^n \exp(-x^2).)$$
   Což takhle zkusit najít spektrální rozklad F?

4. Je–li $\mathcal{H}$ separabilní a $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak existuje nejvýše spočetně mnoho $\lambda \in \sigma(T)$ tak, že $E(\{\lambda_n\}) \neq 0$.

5. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak T je samoadjungovaný (pozitivní, unitární) právě tehdy, když $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ ($\sigma(T) \subset [0,\infty)$, $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$).

6. Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $\sigma_p(T)$ je borelovská. Pak $E(\sigma(T)\backslash\sigma_p(T)) = 0$ právě tehdy, když existuje ortonormální báze vlastních vektorů.

   Najděte T normální, že $\sigma_p(T)$ je neborelovská.

7. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $T = U|T|$ jeho polární rozklad, pak $U = f(T)$ pro nějakou $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$. Tedy $U|T| = |T|U$.

8. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ samoadjungovaný, pak e^{iT} je unitární. Platí to i naopak?

9. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ unitární, pak existuje spojitá křivka $\gamma : [0,1] \to \mathcal{L}(H)$ tak, že $\gamma(t)$ je unitární pro $t \in [0,1]$, $\gamma(0) = T$ a $\gamma(1) = 1$.

Kapitola 5

Funkcionální analýza II.

5.1 Neomezené operátory

Úmluva 5.1.1. *V této části budeme pracovat s komplexními Hilbertovými prostory a lineárními operátory definovanými na jejich podprostorech. Jsiu-li tedy H_1, H_2 Hilbertovy prostory, značení $T\colon H_1 \to H_2$ znamená, že T je lineární zobrazení definované na prostoru* $\operatorname{Dom}(T) \subset\subset H_1$ *s hodnotami v* H_2.

Poznámka 5.1.2. Připomeňme, že jsou-li H_1, H_2 Hilbertovy prostory, je i prostor $H_1 \times H_2$ se skalárním součinem

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{H_1 \times H_2} = \langle x_1, x_2\rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2\rangle_{H_2}, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H_1 \times H_2,$$

též Hilbertův.

5.1.1 Základní vlastnosti

Definice 5.1.3. Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T, S\colon H_1 \to H_2$ jsou operátory s definičními obory $\operatorname{Dom} T$ a $\operatorname{Dom} S$.

(a) Symbolem $\operatorname{graf}(T)$ rozumíme množinu

$$\operatorname{graf}(T) = \{(x, y) \in H \times H\colon x \in \operatorname{Dom} T, y = Tx\}.$$

Pokud $\operatorname{graf}(T) \subset \operatorname{graf}(S)$, značíme teto fakt jako $T \subset S$.

(b) Řekneme, že T je uzavřený, pokud $\operatorname{graf}(T)$ je uzavřená množina v $H_1 \times H_2$.

(c) O operátoru T řekneme, že ho lze uzavřít, pokud existuje uzavřený operátor $V\colon H_1 \to H_2$ splňující $T \subset V$.

Lemma 5.1.4. *Nechť S, T jsou operátory na Hilbertově prostoru H, přičemž T je uzavřený a $S \in L(H)$. Pak $S+T$ je uzavřený.*

Důkaz. Důkaz plyne z definic.

□

Definice 5.1.5. Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

(a) Nechť $T, S\colon H_1 \to H_2$ jsou operátory s definičními obory $\operatorname{Dom} T$ a $\operatorname{Dom} S$. Pak operátor $T + S$ je definován jako

$$(T + S)(x) = Tx + Sx, \quad x \in \operatorname{Dom} T \cap \operatorname{Dom} S.$$

(b) Je-li $T\colon H_1 \to H_2$ operátor a $\lambda \in \mathbb{F}$, položíme $\lambda T = 0$ v případě $\lambda = 0$ a jinak

$$(\lambda T)(x) = \lambda Tx, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

(c) Jsou-li $T\colon H_1 \to H_2$ a $S\colon H_2 \to H_3$ operátory, operátor $S \circ T$ definujeme jako

$$(S \circ T)x = S(Tx), \quad x \in \operatorname{Dom} T \cap T^{-1}(\operatorname{Dom} S).$$

Věta 5.1.6. *Nechť H je Hilbertův prostor a R, S, T jsou operátory na H. Pak platí*

$$(R + S) + T = R + (S + T) \quad (RS)T = R(ST) \quad (R + S)T = RT + ST \quad T(R + S) \supset TR + TS.$$

Důkaz. Pro důkaz první rovnosti stačí ověřit následující sérii ekvivalencí:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}(R + (S+T)) &\iff x \in \operatorname{Dom} R \ \&\ x \in \operatorname{Dom}(S+T) \iff x \in \operatorname{Dom} R \cap (\operatorname{Dom} S \cap \operatorname{Dom} T) \\ &\iff x \in (\operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S) \cap \operatorname{Dom} T \iff x \in \operatorname{Dom}(R+S) \ \&\ x \in \operatorname{Dom} T \\ &\iff x \in \operatorname{Dom}((R+S)+T). \end{aligned}$$

Druhá rovnost se dokáže podobně:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}((RS)T) &\iff x \in \operatorname{Dom} T \ \&\ Tx \in \operatorname{Dom}(RS) \iff x \in \operatorname{Dom} T \ \&\ Tx \in \operatorname{Dom} S \ \&\ STx \in \operatorname{Dom} R \\ &\iff x \in \operatorname{Dom}(ST) \ \&\ STx \in \operatorname{Dom} R \iff x \in \operatorname{Dom}(R(ST)). \end{aligned}$$

Třetí rovnost plyne z ekvivalencí

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}((R+S)T) &\iff x \in \operatorname{Dom} T \& \ Tx \in \operatorname{Dom}(R+S) \iff x \in \operatorname{Dom} T \ \&\ Tx \in \operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S \\ &\iff x \in \operatorname{Dom}(RT) \cap \operatorname{Dom}(ST) \iff x \in \operatorname{Dom}(RT + ST). \end{aligned}$$

Čtvrtý fakt se ověří též snadno. Pokud $x \in \operatorname{Dom}(TR + TS)$, pak $x \in \operatorname{Dom}(TR) \cap \operatorname{Dom}(TS)$. Tedy $x \in \operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S$ a $Rx, Sx \in \operatorname{Dom} T$. Proto platí $x \in \operatorname{Dom}(R+S)$, a tedy máme $x \in \operatorname{Dom}(T(R+S))$. □

Definice 5.1.7. Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory a nechť $T\colon H_1 \to H_2$ je operátor. Uvažujeme takové $z \in H_2$, že zobrazení

$$\phi(x) = \langle Tx, z\rangle_{H_2}, \quad x \in \operatorname{Dom} T,$$

má právě jedno rozšíření na prvek $\varphi \in (H_1)^*$. Nechť $y \in H_1$ je prvek daný Větou **??**, tj. prvek splňující $\varphi(x) = \langle x, y\rangle_{H_1}$, $x \in H_1$.

Elementy $z \in H_2$ vyhovující této podmínce tvoří pak definiční obor adjungovaného operátoru T^*, přičemž prvek y je pak hodnota T^*z.

Poznámka 5.1.8. (a) Povšimněme si, že jednoznačnost rozšíření φ z Definice 5.1.7 požaduje hustotu $\operatorname{Dom} T$ v H_1.

(b) Z definice T^* ihned máme, že

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad x \in \operatorname{Dom} T, y \in \operatorname{Dom} T^*.$$

(c) Pokud S je operátor splňující $T \subset S$, pak $S^* \subset T^*$.

Věta 5.1.9. *Nechť S, T a ST jsou hustě definované operátory na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Definiční obor adjunkce T^* je podprostor H a T^* je na něm lineární.
(b) Je-li $T \in L(H)$, je jeho adjunkce T^* souhlasná s definicí z Věty **??**.
(c) Platí inkluze $T^*S^* \subset (ST)^*$.
(d) Je-li navíc $S \in L(H)$, platí dokonce $T^*S^* = (ST)^*$.
(e) Je-li $S \in L(H)$, platí $(T+S)^* = T^* + S^*$.

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) jsou zřejmá.

(c) Uvažujme $x \in \operatorname{Dom}(ST)$ a $y \in \operatorname{Dom}(T^*S^*)$. Jelikož platí $y \in \operatorname{Dom} S^*$, $Tx \in \operatorname{Dom} S$ a $S^*y \in \operatorname{Dom} T^*$, dostáváme

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle.$$

Proto je $y \in \operatorname{Dom}((ST)^*)$ a $(ST)^*y = T^*S^*y$.

(d) Pokud je navíc $S \in L(H)$, uvažujeme $x \in \operatorname{Dom}(ST)$ a $y \in \operatorname{Dom}((ST)^*)$. Protože platí $\operatorname{Dom} S^* = H$, máme

$$\langle Tx, S^*y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle.$$

Tedy $S^*y \in \operatorname{Dom} T^*$ a y tak leží v $\operatorname{Dom}(T^*S^*)$. Proto platí inkluze $(ST)^* \subset T^*S^*$.

(e) Dokážeme nejprve inkluzi „$\subset$“. Nechť tedy $y \in \operatorname{Dom}((T+S)^*)$ je dáno. Pak pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ platí

$$\langle Tx, y\rangle = \langle (T+S)x, y\rangle - \langle Sx, y\rangle = \langle x, (T+S)^*y - S^*y\rangle.$$

Tedy $y \in \operatorname{Dom} T^*$ a $T^*y = (T+S)^*y - S^*y$.

Pro důkaz obrácené inkluze vezmeme $y \in \operatorname{Dom}(T^* + S^*) = \operatorname{Dom} T^*$. Pak pro každé $x \in \operatorname{Dom}(T+S) = \operatorname{Dom} T$ platí

$$\langle (T+S)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^*y + S^*y\rangle.$$

Proto je y obsaženo v $\operatorname{Dom}((T+S)^*)$ a platí $(T+S)^*y = T^*y + S^*y$. Tím je důkaz dokončen. □

Definice 5.1.10. Nechť H je Hilbertův prostor a $T\colon H \to H$ je operátor.

(a) Řekneme, že T je symetrický, pokud platí

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in \operatorname{Dom} T.$$

(b) Operátor T je samoadjungovaný, pokud $T = T^*$, tj. pokud T je symetrický a $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$.

Tvrzení 5.1.11. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T\colon H \to H$ je operátor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li T hustě definovaný, je T symetrický právě tehdy, když $T \subset T^*$.

(b) Je-li $T \in L(H)$, je T symetrický právě tehdy, když T je samoadjungovaný.

(c) Je-li T hustě definovaný a S je operátor na H splňující $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, $x \in \operatorname{Dom} T$, $y \in \operatorname{Dom} S$, pak $S \subset T^*$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z definic, tvrzení (b) pak z (a).

(c) Pro dané $y \in \operatorname{Dom} S$ platí $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, xß$\operatorname{Dom} T$, což implikuje $y \in \operatorname{Dom} T^*$ a rovnost $Sy = T^*y$. $\square$

Definice 5.1.12. Pro daný Hilbertův prostor H definujeme operátor $V \in L(H \times H)$ předpisem

$$V(x, y) = (-y, x), \quad (x, y) \in H \times H.$$

Lemma 5.1.13. *Nechť H je Hilbertův prostor a V je jako v Definici 5.1.12. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Operátor V je unitární, tj. jedná se o surjektivní izometrii.

(b) Inverze k V je dána vzorcem $V^{-1}(x, y) = (y, -x)$, $(x, y) \in H \times H$.

(c) Platí $V^{-1} = -V$.

(d) Platí $V^2 = -I$.

Důkaz. Důkaz plyne ihned z definice. $\square$

Tvrzení 5.1.14. *Nechť T je hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak* $\operatorname{graf}(T^*) = (V(\operatorname{graf} T))^{\perp}$.

Důkaz. Tvrzení plyne z následující série ekvivalentních tvrzení:

$$\begin{aligned}(y, z) \in \operatorname{graf} T^* &\iff \forall x \in \operatorname{Dom} T\colon \langle Tx, y\rangle_H = \langle x, z\rangle_H \iff \forall x \in \operatorname{Dom} T\colon \langle(-Tx, x), (y, z)\rangle_{H\times H} = 0 \\ &\iff (y, z) \in (V(\operatorname{graf} T))^{\perp}.\end{aligned}$$

$\square$

Věta 5.1.15. *Nechť T je hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak T^* je uzavřený operátor.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Lemmatu 5.1.13. $\square$

Důsledek 5.1.16. *Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $H \times H = V(\operatorname{graf}(T)) \oplus_{\perp} \operatorname{graf}(T^*)$.

(b) Pro dané $(a, b) \in H \times H$ má systém rovnic

$$\begin{aligned}-Tx + y &= a\\ x + T^*y &= b\end{aligned}$$

právě jedno řešení splňující $x \in \operatorname{Dom} T$ a $y \in \operatorname{Dom} T^*$.

Důkaz. (a) Jelikož je T uzavřený operátor a V je homeomorfizmus, je množina $V(\operatorname{graf}(T))$ uzavřená. Tedy díky Tvrzení 5.1.14 dostáváme

$$H \times H = V(\operatorname{graf}(T)) \oplus_{\perp} (V(\operatorname{graf}(T))^{\perp} = V(\operatorname{graf}(T)) \oplus_{\perp} \operatorname{graf}(T^*).$$

(b) Je-li $(a, b) \in H \times H$ dáno, nalezneme díky (a) jednoznačně určené prvky $(c_1, d_1) \in V(\operatorname{graf}(T))$, $(c_2, d_2) \in \operatorname{graf}(T^*)$ splňující $(a, b) = (c_1, d_1) + (c_2, d_2)$. Existuje tak $x \in \operatorname{Dom} T$ a $y \in \operatorname{Dom} T^*$ splňující $(c_1, d_1) = (-Tx, x)$ a $(c_2, d_2) = (y, T^*y)$. Zjevně pak platí $a = c_1 + c_2 = -Tx + y$ a $b = d_1 + d_2 = x + T^*y$.

Jednoznačnot tohto řešení plyne z jednoznačnosti rozkladu daného vzorcem z (a). $\square$

Lemma 5.1.17. *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $M \subset\subset H \times H$, pak M je graf operátoru na H právě tehdy, když platí rovnost $\{(x, y) \in M\colon x = 0\} = \{(0, 0)\}$.

(b) Je-li T operátor na H, pak T lze uzavřít právě tehdy, když $\overline{\operatorname{graf} T}$ je graf operátoru.

Důkaz. (a) Implikace „ $\implies$ “ je zjevná. Obráceně, pokud podmínka platí a $(x, y_1), (x, y_2)$ jsou prvky M, pak $(0, y_1 - y_2) \in M$. Tedy $y_1 = y_2$ a M je grafem zobrazení.

(b) Je-li S uzavřený operátor na H, který splňuje $T \subset S$, pak platí $\overline{\operatorname{graf} T} \subset \operatorname{graf} S$. Tedy $\overline{\operatorname{graf} T}$ je grafem operátoru. Obrácená implikace je zřejmá. □

Definice 5.1.18. Nechť T je operátor na Hilbertově prostoru H. Pokud lze T uzavřít, definujeme $\overline{T}$ jako operátor, jehož graf je roven $\overline{\operatorname{graf} T}$.

Tvrzení 5.1.19. *Nechť T je hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Operátor T^* je uzavřený a $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$.

(b) Operátor T^* je hustě definovaný právě tehdy, když T lze uzavřít.

(c) Operátor T lze uzavřít právě tehdy, když $\overline{T} = T^{**}$.

(d) Je-li T uzavřený, pak T^* je hustě definovaný a uzavřený operátor a navíc platí $T^{**} = T$.

(e) Je-li T prostý a $\operatorname{Rng} T$ *hustý, pak T^* je prostý a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Důkaz. (a) Uzavřenost množiny $\operatorname{graf} T^*$ plyne z Tvrzení 5.1.14, neboť $A^\perp$ je uzavřený podprostor pro libovolnou množinu A. Dále pro $y \in H$ máme:

$$y \in \operatorname{Dom} T^* \ \&\ T^* y = 0 \iff \forall x \in \operatorname{Dom} T \colon \langle Tx, y \rangle = 0 \iff y \in (\operatorname{Rng} T)^\perp.$$

(b) Nejprve si uvědomíme, že díky unitaritě V dostáváme z Tvrzení 5.1.14 rovnosti

$$(\operatorname{graf} T^*)^\perp = \overline{V(\operatorname{graf} T)} = V(\overline{\operatorname{graf} T}),$$

což implikuje vztah

$$\overline{\operatorname{graf} T} = V^{-1}((\operatorname{graf} T^*)^\perp) = (V^{-1}(\operatorname{graf} T^*))^\perp.$$

Tedy pro $y \in H$ platí

$$\begin{aligned}(0, y) \in \overline{\operatorname{graf} T} &\iff \forall (v, z) \in \operatorname{graf} T^* \colon \langle (0, y), (z, -v) \rangle_{H \times H} = 0 \\ &\iff \forall v \in \operatorname{Dom} T^* \colon \langle y, v \rangle_H = 0 \iff y \in (\operatorname{Dom} T^*)^\perp.\end{aligned}$$

Nyní použijeme Lemma 5.1.17(a). Z předchozí rovnosti vidíme, že $\operatorname{Dom} T^*$ je hustý právě tehdy, když pouze prvek $y = 0$ splňuje $(0, y) \in \overline{\operatorname{graf} T}$.

(c) Lze-li T uzavřít, pak pomocí důkazu tvrzení (b), faktu $V^{-1} = -V$ a Tvrzení 5.1.14 máme

$$\operatorname{graf} \overline{T} = \overline{\operatorname{graf} T} = \left(V^{-1}(\operatorname{graf} T*)\right)^\perp = (V(\operatorname{graf} T^*)^\perp = \operatorname{graf} T^{**}.$$

Obrácená implikace je pak jasná.

Tvrzení (d) plyne z (a), (b) a (c).

(e) Jelikož $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp = \{0\}$, je T^* prostý.

K důkazu druhé části tvrzení si rozmyslíme, že pro každé prosté zobrazení f platí

$$\operatorname{graf} f^{-1} = \{(y, f^{-1}(y)) \colon y \in \operatorname{Dom} f^{-1}\} = \{(y, f^{-1}(y)) \colon y \in \operatorname{Rng} f\} = \{(f(x), x) \colon x \in \operatorname{Dom} f\}.$$

Dále z Tvrzení 5.1.14víme, že

$$\operatorname{graf}(T^{-1})^* = \left(V(\operatorname{graf} T^{-1})\right)^\perp = (V(\{(Tx, x) \colon x \in \operatorname{Dom} T\}))^\perp = (\{(-x, Tx) \colon x \in \operatorname{Dom} T\})^\perp.$$

Označíme $A = \{(-x, Tx) \colon x \in \operatorname{Dom} T\}$ a ukážeme, že $\operatorname{graf}(T^*)^{-1} = A^\perp$.

Nechť nejprve $y \in \operatorname{Dom} T*$ je dáno. Pak pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ platí

$$\langle (T^* y, y), (-x, Tx) \rangle_{H \times H} = -\langle T^* y, x \rangle + \langle y, Tx \rangle = 0.$$

Tedy $(T^* y, y) \in A^\perp$.

Obráceně, nechť $(a, b) \in A^\perp$ je dáno. Pak

$$0 = \langle (a, b), (-x, Tx) \rangle_{H \times H} = -\langle a, x \rangle + \langle b, Tx \rangle, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

Tedy

$$\langle a, x \rangle = \langle b, Tx \rangle, \quad x \in \operatorname{Dom} T,$$

z čehož plyne, že $b \in \operatorname{Dom} T^*$ a $a = T^* b$. Proto $(a, b) = (T^* b, b) \in \operatorname{graf}(T^*)^{-1}$. Tím je důkaz dokončen. □

Věta 5.1.20. *Nechť T je symetrický hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $\operatorname{Dom} T = H$*, je $T^* = T$ a T je spojitý.*

(b) Je-li $T^* = T$ a T je prostý, pak $\operatorname{Rng} T$ *je hustý a T^{-1} je samoadjungovaný.*

(c) Je-li $\operatorname{Rng} T = H$ *a T je prostý, pak $T^* = T$ a $T^{-1} \in L(H)$.*

Důkaz. (a) Jelikož je T symetrický a hustě definovaný, platí $T \subset T^*$. Dle předpokladu však máme $\operatorname{Dom} T = H$, a tedy $T = T^*$. Jelikož je T^* uzavřená dle Tvrzení 5.1.19(a), je i operátor $T = T^*$ uzavřený. Navíc je T spojitý díky Větě **??**.

(b) Jelikož $T^* = T$ a T je prostý, máme díky Tvrzení 5.1.19(a)

$$(\operatorname{Rng} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T = \{0\}.$$

Tedy je $\operatorname{Rng} T$ hustý v H. Navíc dle Tvrzení 5.1.19(e) platí $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$, tj. T^{-1} je samoadjungovaný.

(c) Jelikož $\operatorname{Rng} T = H$, je dle Tvrzení 5.1.19(a) operátor T^* prostý. Dále je T^{-1} symetrický, neboť pro $x, y \in \operatorname{Dom} T^{-1}$ platí při označení $a = T^{-1}x$, $b = T^{-1}y$ rovnosti

$$\langle T^{-1}x, y\rangle = \langle a, Tb\rangle = \langle Ta, b\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle.$$

Díky tvrzení (a) je tak T^{-1} samoadjungovaný a spojitý. Z tvrzení (b) tak plyne, že $T = (T^{-1})^{-1}$ je též samoadjungovaný. □

Věta 5.1.21. *Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor na Hilbertově prostoru H. Označme $Q = I + T^*T$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Existují operátory $B, C \in L(H)$ takové, že

(a1) Q je prostý a na,

(a2) $\max\{\|B\|, \|C\|\} \leqslant 1$,

(a3) platí $C = TB$,

(a4) platí $BQ \subset QB = I$,

(a5) B je pozitivní,

(a6) operátor T^*T je samoadjungovaný.

(b) Pro operátor $T' = T|_{\operatorname{Dom}(T^*T)}$ platí, že jeho graf je hustý v grafu T.

Důkaz. (a) Ukážeme nejprve prostoru Q. Je-li $x \in \operatorname{Dom} Q$, pak nutně $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx \in \operatorname{Dom} T^*$. Dále máme

$$\|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, Qx\rangle \leqslant \|x\| \|Qx\|,$$

a tedy $\|Qx\| \geqslant \|x\|$. Operátor Q je tak prostý.

Použijeme nyní Důsledek 5.1.16 k tomu, abychom pro dané $(0, y) \in H \times H$ nalezli jednoznačně dané vektory $By \in \operatorname{Dom} T$ a $Cy \in \operatorname{Dom} T^*$ takové, že

$$(0, y) = (-T(By), By) + (Cy, T^*(Cy)), \tag{5.1}$$

přičemž $(-T(By), By) \perp (Cy, T^*(Cy))$ v $H \times H$. Díky jednoznačnosti tohoto řešení jsou zobrazení $y \mapsto By$ a $y \mapsto Cy$ lineární a navíc splňují

$$\begin{aligned}\|y\|_H^2 &= \|(0, y)\|_{H\times H}^2 = \|(-T(By), By) + (Cy, T^*(Cy))\|_{H\times H}^2 = \|(-T(By), By)\|_{H\times H}^2 + \|(Cy, T^*(Cy))\|_{H\times H}^2 \\ &\geqslant \|By\|_H^2 + \|Cy\|_H^2 .\end{aligned}$$

Proto mají obě normu shora odhadnutou číslem 1.

Z (5.1) plyne $0 = -TBy + Cy$, tj. $C = TB$. Dále máme z (5.1) rovnosti

$$y = By + T^*Cy = By + T^*TBy = QBy.$$

Tedy $QB = I$, z čehož dostáváme inkluzi $\operatorname{Rng} B \subset \operatorname{Dom} Q$, prostotu B a surjektivitu Q.

Pro libovolné $y \in \operatorname{Dom} Q$ dále platí

$$QBQy = Qy,$$

což vzhledem k prostotě Q znamená rovnost $BQy = y$. Tedy $BQ \subset I$.

Pro libovolné $y \in H$ nyní nalezneme $x \in H$ splňující $Qx = y$ a dostaneme

$$\langle By, y\rangle = \langle BQx, Qx\rangle = \langle x, Qx\rangle = \langle x, x + T^*Tx\rangle = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \geqslant 0.$$

Operátor B je tak pozitivní.

Jelikož je B samoadjungovaný a prostý, je $\operatorname{Rng} B$ hustý a $Q = B^{-1}$ je samoadjungovaný (viz Věta 5.1.20(b)). Proto i $T^*T = Q - I$ je samoadjungovaný (viz Věta 5.1.9(e)).

(b) Uvažujme Hilbertův prostor graf T a jeho podprostor graf $T' \subset\subset$ graf T. Předpokládejme, že prvek (z, Tz) leží v graf $T \cap (\operatorname{graf} T')^\perp$. Pak pro každé $x \in \operatorname{Dom}(T^*T) = \operatorname{Dom} Q$ platí

$$0 = \langle (z, Tz), (z, Tx) \rangle = \langle z, x \rangle + \langle Tz, Tx \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, T^*Tx \rangle = \langle z, Qx \rangle.$$

Tedy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} Q \colon \langle z, Qx \rangle = 0.$$

Jelikož $\operatorname{Rng} Q = H$, platí $z = 0$. Proto je graf T' je hustý v grafu T.

□

5.1.2 Spektrum

Definice 5.1.22. Nechť T je operátor na Hilbertově prostoru H. O čísle $\lambda \in \mathbb{C}$ řekneme, že je v rezolventní množině $\rho(T)$, pokud $\lambda I - T$ je prostý, na a $(\lambda I - T)^{-1} \in L(H)$. Množina $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$ se zove spektrum T, přičemž bodové spektrum $\sigma_p(T)$ tvoří ta čísla $\lambda \in \sigma(T)$, pro která je $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$.

Lemma 5.1.23. *Nechť T je operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}(\lambda I - T)$.

(b) Pro číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ platí, že $\lambda \in \rho(T)$ právě tehdy, když existuje $S \in L(H)$ splňující $S(\lambda I - T) \subset I$ a $(\lambda I - T)S = I$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé.

Předpokládejme, že $\lambda \in \rho(T)$ je dáno. Pak je $S = (lambdaI - T)^{-1}$ požadovaný operátor. Obráceně, pokud S splňuje požadované podmínky, pak z vlastnosti $S(\lambda I - T) \subset I$ plyne prostota $\lambda I - T$ a z rovnosti $(\lambda I - T)S = I$ surketivita $\lambda I - T$. Zjevně je pak $(\lambda I - T)^{-1} = S \in L(H)$, takže $\lambda \in \rho(T)$. □

Věta 5.1.24. *Nechť T je operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li T uzavřený a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak $\lambda \in \rho(T)$ právě tehdy, když $\lambda I - T \colon \operatorname{Dom} T \to H$ je prostý a na.

(b) Spektrum $\sigma(T)$ je uzavřené v $\mathbb{C}$.

(c) Je-li T uzavřený a $\sigma(T) = \emptyset$, je $T^{-1} \in L(H)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.

(d) Pokud $\rho(T) \neq \emptyset$, je T uzavřený.

Důkaz. (a) Implikace „ $\implies$ “ je jasná. Předpokládejme nyní platnost podmínky na $\lambda I - T$. Pak je operátor $(\lambda I - T)^{-1} \colon H \to \operatorname{Dom}(\lambda I - T)$ lineární, prostý a na. Navíc z uzavřenosti grafu T plyne uzavřenost grafu $\lambda I - T$, což však implikuje uzařenost grafu $(\lambda I - T)^{-1}$. Z Věty **??** plyne spojitost operátoru $(\lambda I - T)^{-1}$, takže λ leží v $\rho(T)$.

(b) Nechť $\lambda_0 \in \rho(T)$ je dáno. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ splňuje $|\lambda - \lambda_0| < \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1}$. Pak má operátor

$$S = (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$$

normu menší než 1, a tedy je $I + S$ invertovatelný. Proto je i operátor

$$\lambda I - T = \left((\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1} + I \right) (\lambda_0 I - T)$$

invertovatelný, neboť jeho inverze je dána jako $(\lambda_0 I - T)^{-1}(S + I)^{-1}$.

(c) Jelikož je $0 \in \rho(T)$, je T prostý a na. Tedy $T^{-1} \in L(H)$ a dle Věty **??** je $\sigma(T^{-1}) \neq \emptyset$.

Nechť $\lambda \in \sigma(T^{-1}) \backslash \{0\}$. Ukážme, že pak $\lambda I - T^{-1}$ je prostý a na.

Nechť $(\lambda I - T^{-1})x = 0$. Pak

$$0 = T^{-1}x - \lambda x = (\frac{1}{\lambda} I - T)\lambda T^{-1} x,$$

což díky faktu $\lambda^{-1} \in \rho(T)$ znamená, že $\lambda T^{-1} x = 0$. Tedy i $x = 0$ a $\lambda I - T^{-1}$ je tak prostý.

Ukážeme, že je $\lambda I - T^{-1}$ surjektivní. Pro dané $y \in H$ existuje $z \in H$ splňující $(\lambda^{-1} I - T)z = -\lambda^{-1} y$. Pak pro $x = Tz$ platí

$$(\lambda I - T^{-1})(x) = \lambda Tz - z = \lambda(T - \lambda^{-1} I)z = y.$$

Tedy je operátor $\lambda I - T^{-1}$ invertovatelný, což je spor. Proto $\sigma(T^{-1}) = \{\emptyset\}$.

(d) Nebyl-li by T uzavřený, pak pro vybrané $\lambda \in \rho(T)$ platí, že ani $\lambda I - T$ není uzavřený. Avšak fakt $(\lambda I - T)^{-1} \in L(H)$ znamená, že graf$(\lambda I - T)^{-1}$ uzavřený je, což je spor.

□

5.1.3 Cayleyova transformace

Definice 5.1.25. Symetrický operátor T na Hilbertově prostoru H se nazývá maximálním symnetrickým, pokud pro každý symetrický operátor S na H splňující $T \subset S$ platí $T = S$.

Věta 5.1.26. *Nechť T je hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud T je samoadjungovaný, je T maximální symetrický.

(b) Pokud T je symetrický, lze T uzavřít, přičemž platí, že $\overline{T}$ je symetrický.

Důkaz. (a) Pokud $T \subset S$, kde S je symetrický operátor na H, pak zjevně platí $S* \subset T^*$. Ze symetrie S dostáváme inkluze $S \subset S^* \subset T^* = T$, což znamená, že T je maximální.

(b) Jelikož $T \subset T^*$ a $\operatorname{Dom} T$ je hustý, lze T uzavřít dle Tvrzení 5.1.19(b). Dle Tvrzení 5.1.14 platí

$$\operatorname{graf}(\overline{T})^* = \left(V(\operatorname{graf} \overline{T}\right)^{\perp} = \left(V(\overline{\operatorname{graf} T})\right)^{\perp} = \left(\overline{V(\operatorname{graf} T)}\right)^{\perp} = (V(\operatorname{graf} T))^{\perp} = \operatorname{graf} T^*,$$

tj. $\overline{T}^* = T^*$. Z Tvrzení 5.1.19(d) máme $\overline{T} = \overline{T}^{**}$. Ze symetrie T platí $T \subset T^*$, což implikuje $T^{**} \subset T^*$. Dohromady pak platí

$$\overline{T} = \overline{T}^{**} = \left(\overline{T}^*\right)^* = (T^*)^* \subset T^* = (\overline{T})^*.$$

Tedy $\overline{T} \subset \overline{T}^*$ a $\overline{T}$ je tak symetrický. □

Lemma 5.1.27. *Nechť X, Y jsou úplné metrické prostory, $A \subset X$ a $\phi\colon A \to Y$ je bilipschitzovské zobrazení. Pak A je uzavřená v X právě tehdy, když $\phi(A)$ je uzavřená v Y.*

Důkaz. Je-li A uzavřená v X, je A úplný metrický prostor. Tedy i $\phi(A)$ je úplný metrický prostor, což implikuje uzavřenost $\phi(A)$ v Y. Obrácená implikace se ukáže obdobně. □

Věta 5.1.28. *Nechť T je symetrický operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ platí $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$.

(b) Operátor T je uzavřený právě tehdy, když $\operatorname{Rng}(T + iI)$ je uzavřený.

(c) Operátor $T + iI$ je prostý.

(d) Pokud $\operatorname{Rng}(T + iI) = H$, je T maximální symetrický.

(e) Tvrzení (a)–(d) platí i pro číslo $-i$.

Důkaz. (a) Pro $x \in \operatorname{Dom} T$ máme díky rovnosti

$$\langle Tx, ix\rangle + \langle ix, Tx\rangle = \bar{i}\langle x, Tx\rangle + i\langle x, Tx\rangle = 0$$

vztah

$$\|Tx + ix\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 + \langle Tx, ix\rangle + \langle ix, Tx\rangle = \|Tx\|^2 + \|x\|^2.$$

(b) Zobrazení $\phi\colon \operatorname{graf} T \to H$ definované jako $\phi(x, Tx) = (T + iI)x$, $(x, Tx) \in \operatorname{graf} T$, je dle (a) izometrie. Z tohoto faktu již tvrzení (b) za použití úplnosti prostorů H a $H \times H$ přímočaře plyne (viz Lemma 5.1.27).

Tvrzení (c) plyne z (a).

(d) Nechť S je symetrický operátor na H splňující $S \supset T$. Pak také $S + iI \supset T + iI$ a díky (c) jsou oba injektivní. Je-li $x \in \operatorname{Dom}(S + iI)$, pak existuje $y \in \operatorname{Dom}(T + iI)$ takové, že $(T + iI)y = (S + iI)x$. Jelikož $\operatorname{Dom}(T + iI) \subset \operatorname{Dom}(S + iI)$, máme

$$(S + iI)y = (T + iI)y = (S + iI)x.$$

Z injektivity $S + iI$ pak máme $y = x$, tj. $x \in \operatorname{Dom}(T + iI)$. Proto $\operatorname{Dom}(T + iI) = \operatorname{Dom}(S + iI)$, a tedy i $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} S$. Proto $T = S$ a T je maximální symetrický. □

Věta 5.1.29. *Nechť T je operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud je T uzavřený, symetrický a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, pak $\lambda I - T$ je prostý a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

(b) Pokud je T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \neq \varnothing$ a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(c) Je-li T hustě definovaný, jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Platí $T^* = T$.

(ii) Operátor T je symetrický a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(iii) Operátor T je symetrický a existuje $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ takové, že $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(T)$.

Důkaz. (a) Pišme $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Aplikací Věty 5.1.28(a) obdržíme

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \beta^2 \|x^2\| + \|(T - \alpha I)x\|^2 \geqslant \beta^2 \|x\|^2, \quad x \in \operatorname{Dom} T,$$

a tedy je $\lambda I - T$ prostý. Díky tomuto odhadu však dokonce máme i uzavřenost $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ (viz Věta **??**).

(b) Pokud $\sigma(T) = \emptyset$, je $T^{-1} \in L(H)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$ (viz Věta 5.1.24(c)). Jelikož $T = T^*$ a T je prostý, je samoadjungovaný i operátor T^{-1} (viz Věta 5.1.19(e)). Jelikož spektrální poloměr T^{-1} je 0, je nulový i T^{-1}, což je spor. Tedy $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ je libovolné. Dle (a) stačí ukázat, že $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = H$ (viz též Větu 5.1.24(a)). Máme však díky Tvrzení 5.1.19(a) a (a)

$$(\lambda I - T)^\perp = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^* = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T) = \{0\}.$$

Tedy $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = \overline{\operatorname{Rng}(\lambda I - T)} = H$ a důkaz je dokončen.

(c) Stačí již jen dokázat (iii) $\implies$ (i). Nejprve si rozmyslíme, že z Tvrzení 5.1.19(a) platí

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - T^*) = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T)^* = (\operatorname{Rng}(\overline{\lambda} I - T))^\perp = H^\perp = \{0\},$$

a tedy je $\lambda I - T^*$ prostý.

Víme z předpokladu, že $T \subset T^*$. Nechť $x \in \operatorname{Dom} T^*$ je dáno. Položme

$$y = (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T^*)x.$$

Pak $y \in \operatorname{Dom} T$, což díky inkluzi

$$\lambda I - T \subset \lambda I - T^* = (\overline{\lambda} I - T)^*$$

implikuje

$$(\lambda I - T^*)y = (\overline{\lambda} I - T)^* y = (\lambda I - T)y = (\lambda I - T^*)x.$$

Jelikož je $\lambda I - T^*$ prostý, je $x = y \in \operatorname{Dom} T$, a tedy $T^* \subset T$. □

Definice 5.1.30. Nechť T je symetrický operátor na Hilbertově prostoru H. Definujeme zobrazení $U\colon \operatorname{Rng}(T + iI) \to \operatorname{Rng}(T - iI)$ předpisem

$$U((T + iI)x) = (T - iI)x, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

Toto zobrazení se nazývá Cayleyova transformace T.

Tvrzení 5.1.31. *Nechť U je izometrický operátor na Hilbertově prostoru H definičním oborem* $\operatorname{Dom} U$. *Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $x, y \in \operatorname{Dom} U$ platí $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

(b) Je-li $\operatorname{Rng}(I - U)$ hustý, je $I - U$ prostý.

(c) Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

  (i) Prostor $\operatorname{Dom} U$ je uzavřený.

  (ii) Prostor $\operatorname{Rng} U$ je uzavřený.

  (iii) Prostor $\operatorname{graf} U$ je uzavřený.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z polarizační identity (viz Věta **??**).

(b) Nechť $(I - U)x = 0$ pro nějaké $x \in \operatorname{Dom} U$. Pak pro každé $y \in \operatorname{Dom} U$ platí

$$\langle x, (I - U)y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux, Uy\rangle - \langle x, U_y\rangle = \langle (U - I)x, Uy\rangle = \langle 0, Uy\rangle = 0.$$

Z hustoty $\operatorname{Rng}(I - U)$ tak plyne $x = 0$.

(c) K důkazu stačí použít úplnost prostorů H a $H \times H$ spolu s (a) následující identitou platnou pro každé $x, y \in \operatorname{Dom} U$ (viz Lemma 5.1.27):

$$\begin{aligned}\|(x, Ux) - (y, Uy)\|_{H\times H} &= \|(x - y, Ux - Uy)\|_{H\times H} = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle_H + \langle Ux - Uy, Ux - Uy\rangle_H} \\ &= \sqrt{2\langle x - y, x - y\rangle_H} = \sqrt{2}\,\|x - y\|_H .\end{aligned}$$

□

Věta 5.1.32. *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť T je symetrický operátor na Hilbertově prostoru H a U je jeho Cayleyova transformace. Pak platí následující tvrzení.

  (a1) Operátor U je izometrie, která je uzavřená právě tehdy, když T je uzavřený.

  (a2) Platí $\operatorname{Rng}(I - U) = \operatorname{Dom} T$, $I - U$ je prostý a $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$.

(a3) Operátor U je unitární právě tehdy, když T je samoadjungovaný.

(b) Je-li V izometrie na H s definičním oborem $\operatorname{Dom} V$ taková, že $I - V$ je prostý, pak existuje právě jeden symetrický operátor T na H takový, že V j jeho Cayleyova transformace.

Důkaz. (a1) Dle Věty 5.1.28(a),(e) je U izometrie.

Dle Vět 5.1.28(b) a 5.1.31(c) pak platí

$$T \text{ uzavřený } \iff \operatorname{Rng}(T+iI) \text{ uzavřený } \iff \operatorname{Dom} U = \operatorname{Rng}(T+iI) \text{ uzavřený } \iff U \text{ uzavřený}.$$

(a2) Předpokládejme nyní, že $(I-U)z = 0$ pro nějaké $z \in \operatorname{Dom} U = \operatorname{Rng}(T+iI)$. Nechť $x \in \operatorname{Dom} T$ splňuje $(T+iI)x = z$. Pak

$$0 = z - Uz = Tx + ix - (T-iI)x = 2ix, \tag{5.2}$$

a tedy $x = 0$. Proto $z = 0$ a $I - U$ je prostý. Navíc z tohoto výpočtu dostáváme, že $\operatorname{Rng}(I-U) = \operatorname{Dom} T$.

Uvažujme $(I-U)^{-1}\colon \operatorname{Dom} T \to \operatorname{Dom}(I-U)$. Nechť $z \in \operatorname{Rng}(T+iI$ a $x \in \operatorname{Dom} T$ splňují $(T+iI)x = z$. Pak z (5.2) máme $z = 2i(I-U)^{-1}x$, což implikuje

$$2Tx = (Tx+ix) + (Tx-ix) = z + Uz = (I+U)z = (I+U)(I-U)^{-1}2ix.$$

Rovnost $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$ je tak ověřena.

(a3) Nechť nejprve $T = T^*$. Z Věty 5.1.21(a4) plyne, že $\operatorname{Rng} T^2 = \operatorname{Rng}(I+T^2) = H$. Dále máme

$$(T+iI)(T-iI)x = (I+T^2)x = (T-iI)(T+iI)x, \quad x \in \operatorname{Dom}(T^2).$$

Tedy

$$\operatorname{Dom} U = \operatorname{Rng}(T+iI) = H = \operatorname{Rng}(T-iI) = \operatorname{Rng} U.$$

Operátor U je tak unitární.

Nechť nyní U je unitární. Pak $I - U$ je normální, a proto dle Věty **??** platí

$$(\operatorname{Rng}(I-U))^\perp = \operatorname{Ker}(I-U^*) = \operatorname{Ker}(I-U) = \{0\}.$$

Proto je $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Rng}(I-U)$ hustý,a tedy T^* je dobře definovaný. Jelikož je T symetrický, je $T \subset T^*$.

Uvažujme nyní libovolný prvek $y \in \operatorname{Dom} T^*$. Jelikož $\operatorname{Rng}(T+iI) = \operatorname{Dom} U = H$, existuje $y_0 \in \operatorname{Dom} T$ splňující $(T^*+iI)y_0 = (T+iI)y$. Díky symetrii T platí $(T^*+iI)y_0 = (T+iI)y_0$.

Položme $y_1 = y - y_0$. Pak

$$\forall x \in \operatorname{Dom} T\colon \langle (T-iI)x, y_1\rangle = \langle x, (T^*+iI)y_1\rangle = \langle x, 0\rangle = 0,$$

tj.

$$y_1 \in (\operatorname{Rng}(T-iI))^\perp = (\operatorname{Rng} U)^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Tedy $y = y_0 \in \operatorname{Dom} T$.

(b)Nechť V je daná izometrie a $I - V\colon \operatorname{Dom} V \to \operatorname{Rng}(I-V)$. Definujeme $S\colon \operatorname{Rng}(I-V) \to H$ jako

$$Sx = i(I+V)z, \quad z = (I-V)^{-1}x, x \in \operatorname{Rng}(I-V).$$

Pak pro $x, y \in \operatorname{Dom} S$ označme $z = (I-V)^{-1}x$ a $u = (I-V)^{-1}y$. Dostáváme pak díky rovnosti $\langle Vz, Vu\rangle = \langle z, y\rangle$

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= \langle i(z+Vz), u - Vu\rangle = i\langle z+Vz, u-Vu\rangle = i\left(\langle Vz, u\rangle - \langle z, Vu\rangle\right) = i\langle Vz, u\rangle - i\langle z, Vu\rangle \\ &= \cdots = \langle z - Vz, iu + iVu\rangle = \langle x, Sy\rangle.\end{aligned}$$

Operátor S je tak symetrický.

Dále pro $x \in \operatorname{Dom} S$ nalezneme $z \in \operatorname{Dom} V$ splňující $x = z - Vz$. Pak

$$\begin{aligned}Sx - ix &= iz + iVz - iz + iVz = 2iVz,\\ Sx + ix &= iz + iVz + iz - iVz = 2iz.\end{aligned}$$

Tedy

$$V(Sx+ix) = 2iVz = Sx - ix.$$

Tedy $V = (S-iI)(S+iI)^{-1}$ na $\operatorname{Dom} V = \operatorname{Rng}(S+iI)$.

Jednoznačnost operátoru S pak plyne z (a2). ☐

Definice 5.1.33. Nechť T je uzavřený symetrický operátor na Hilbertově prostoru H. Pak čísla

$$n_+(T_= \dim\left(\operatorname{Rng}(T+iI)\right)^\perp \quad \text{a} \quad n_-(T_= \dim\left(\operatorname{Rng}(T-iI)\right)^\perp$$

nazveme indexy defektu operátoru T.

Věta 5.1.34. *Nechť T je uzavřený symetrický hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Operátor T je samoadjungovaný právě tehdy, když $n_+(T) = n_-(T) = 0$.*

(b) *Operátor T je maximální symetrický právě tehdy, když $\min\{n_+(T), n_-(T)\} = 0$.*

(c) *Operátor T má samoadjungovanou extenzi právě tehdy, když $n_+(T) = n_-(T)$.*

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z Věty 5.1.32(a3).

(b) Nejprve uvažujme dva symetrické operátory T_1, T_2 na H a jejich Cayleyovy transformace U_1, U_2. Z Věty 5.1.32(a2) a Definice 5.1.30 platí, že $T_1 \subset T_2$ právě tehdy, když $U_1 \subset U_2$.

Nechť nyní U_T je Cayleyova transformace T. Předpokládejme nejprve, že $\min\{n_+(T), n_-(T)\} > 0$. Pak existuje izometrie $V \supset U_T$ různá od U_T. Jelikož

$$\operatorname{Rng}(I - V) \supset \operatorname{Rng}(I - U_T) = \operatorname{Dom} T$$

je hustý v H, dle Věty 5.1.31(b) je $I - V$ prostý. Existuje tak dle Věty 5.1.32(b) symetrický operátor S, jehož je V Cayleyova transformace. Pak $T \subset S$, ale $T \neq S$. Operátor T tak není maximální symetrický.

Obráceně, pokud T není maximální symetrický, existuje symetrický $S \supset T$ různý od T. Pak je $U_S \neq U_T$, takže

$$\min\{n_+(T), n_-(T)\} = \min\{\dim(\operatorname{Dom} U_T)^\perp, \dim(\operatorname{Rng} U_T)^\perp\} > 0$$

(c) Nechť má T samoadjungovanou extenzi S. Pak $U_T \subset U_S$ a U_S je unitární operátor, který izoemtricky zobrazuje $(\operatorname{Dom} U_T)^\perp$ na $(\operatorname{Rng} U_T)^\perp$. Tedy se jejich dimenze rovnají.

Pokud T más stejné indexy defektu, lze U_T rozšířit na unitární zobrazení V, které zobrazuje $(\operatorname{Dom} U_T)^\perp$ na $(\operatorname{Rng} U_T)^\perp$. Ukážeme, že je $I - V$ prostý operátor. Vskutku,

$$\operatorname{Rng}(I - V) \supset \operatorname{Rng}(I - U_T) = \operatorname{Dom} T$$

je hustý v H, a tedy je $I - V$ prostý (viz Věta 5.1.31). Operátor S odpovídající V dle Věty 5.1.32(b) je pak samoadjungovaný operátor splňující $T \subset S$.

□

5.1.4 Spektrální rozklad

Úmluva 5.1.35. *V této sekci budeme pracovat se spektrální mírou $E\colon \Sigma \to L(H)$ na měřitelném prostoru (Ω, Σ) s hodnotmai v Hilbertově prostoru H (viz Definice 3.6.1). Zobrazení $\Psi\colon L^\infty(E) \to L(H)$ je pak měřitelný kalkulus z Věty* **??**.

Lemma 5.1.36. *Nechť $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná. Pak je množina*

$$\operatorname{Dom}_f = \{x \in H\colon \int_\Omega |f|^2 \, dE_{x,x} < \infty\}$$

hustý podprostor H.

Důkaz. Pokud $x, y \in H$ a $z = x + y$, máme pro $A \in \Sigma$ odhad

$$\|E(A)z\|^2 \leqslant (\|E(A)x\| + \|E(A)y\|)^2 \leqslant 2\,\|E(A)x\|^2 + 2\,\|E(A)y\|^2 .$$

Tedy $E_{z,z} \leqslant 2E_{x,x} + 2E_{y,y}$, z čehož plyne uzavřenost Dom_f na součet. Uzavřenost na násobená skalárem je zjevná.

Uvažujme nyní množiny $A_n = f^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$. Pro $x \in \operatorname{Rng} E(A_n)$ pak platí

$$E(A)x = E(A)E(A_n)x = E(A \cap A_n)x, \quad A \in \Sigma,$$

a tedy

$$E_{x,x}(A) = E_{x,x}(A \cap A_n), \quad A \in \Sigma.$$

Proto platí

$$\int_\Omega |f|^2 \, dE_{x,x} = \int_{A_n} |f|^2 \, dE_{x,x} \leqslant n^2 \|x\|^2 < \infty.$$

Tedy $\operatorname{Rng} E(A_n) \subset \operatorname{Dom}_f$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Jelikož $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ a $\{A_n\}$ je neklesající posloupnost, dostáváme pro každé $y \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \|y - E(A_n)y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|E(\Omega \backslash A_n)y\|^2 = \lim_{n\to\infty} E_{x,x}(\Omega \backslash A_n) = 0.$$

Tedy $\operatorname{Dom}_f g$ je hustý v H.

□

Věta 5.1.37. *Nechť E je rozklad jednotky na měřitelném prostoru (Ω,Σ) s hodnotami v Hilbertově prostoru H a $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ je měřitelná. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Existuje právě jeden operátor T_f na H takový, že platí následující tvrzení.

  (a1) Platí $\operatorname{Dom} T_f = \operatorname{Dom}_f$.

  (a2) Operátor T_f je hustě definovaný.

  (a3) Je-li $\{f_n\}$ posloupnost omezených měřitelných funkcí konvergující k f v $L^2(\Omega, E_{x,x})$ pro každé $x\in\operatorname{Dom}_f$, pak platí
$$\lim_{n\to\infty}\Psi(f_n)x = T_f x,\quad x\in\operatorname{Dom}_f .$$

(b) Posloupnost popsaná v (a3) existuje.

(c) Platí $\langle T_f x, x\rangle = \int_\Omega f\, dE_{x,x}$ pro každé $x\in\operatorname{Dom} T_f$.

(d) Platí $\|T_f x\|^2 = \int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x}$ pro každé $x\in\operatorname{Dom} T_f$.

(e) Pokud je f omezená, splývá operátor T_f s operátorem $\Psi(f)$ z Věty **??**.

Důkaz. (a) Již vím z Lemmatu 5.1.36, že Dom_f je hustý podprostor H. Vezmeme libovolnou posloupnost $\{f_n\}$ omezených měřitelných funkcí, která splňuje
$$\int_\Omega |f-f_n|^2\, dE_{x,x}\to 0,\quad x\in\operatorname{Dom}_f . \tag{5.3}$$

(Takovou posloupnost sestrojíme snadno. Nechť $A_n = f^{-1}B(0,n)$, $n\in\mathbb{N}$, a nechť $f_n = f\chi_{A_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Pak $\{f_n\}$ je požadovaná posloupnost díky Lebesgueově větě.)

Pro $x\in\operatorname{Dom}_f$ a indexy $n,m\in\mathbb{N}$ pak máme
$$\|\Psi(f_n)x-\Psi(f_m)x\|^2 = \|\Psi(f_n-f_m)x\|^2 = \int_\Omega |f_n-f_m|^2\, dE_{x,x}.$$

Jelikož $\int_\Omega |f-f_n|^2\, dE_{x,x}\to 0$ pro $x\in\operatorname{Dom}_f$, posloupnost $\{\Psi(f_n)x\}$ je cauchyovská (použijeme odhad $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$, $a,b\in[0,\infty)$), a tudíž konvergentní. Její limitu pak označíme jako T_f.

Pokud $\{g_n\}$ je libovolná jiná posloupnost omezených měřitelných funkcí splňující $\int_\Omega |f-g_n|^2\, dE_{x,x}\to 0$, $x\in\operatorname{Dom}_f$, pak posloupnost $(f_1,g_1,f_2,g_2,\dots)$ též splňuje (5.3). Proto $\lim\Psi(g_n)=\lim\Psi(f_n)$. Linearita T_f plyne z konstrukce a jednoznačnost z vlastnosti (a3)

Tvrzení (b) jsme již ověřili.

Tvrzení (c) plyne z výpočtu
$$\langle T_f x, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\Psi(f_n)x,x\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, dE_{x,x} = \int_\Omega f\, dE_{x,x},$$

kde $\{f_n\}$ je jako v (a), $x\in\operatorname{Dom}_f$ (užili jsme faktu, že $f\in L^1(\Omega,E_{x,x})$).

(d) Obdobně jako výše obdržíme
$$\|T_f x\|^2 = \lim_{n\to\infty}\langle\Psi(f_n)x,\Psi(f_n)x\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n|^2\, dE_{x,x} = \int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x},\quad x\in\operatorname{Dom}_f .$$

(e) Pro omezenou funkci f pak lze za aproximující posloupnost $\{f_n\}$ volit $f_n=f$, $n\in\mathbb{N}$. Proto (e) platí. □

Věta 5.1.38. *Nechť f,g jsou měřitelné funkce na Ω. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí $T_f+T_g\subset T_{f+g}$.

(b) Platí $T_fT_g\subset T_{fg}$ a $\operatorname{Dom} T_fT_g = \operatorname{Dom} T_g\cap\operatorname{Dom} T_{fg}$.

(c) Platí $T_f^* = T_{\overline{f}}$ a $T_fT_f^* = T_{|f|^2} = T_f^*T_f$.

(d) Operátor T_f je uzavřený.

Důkaz. (a) Je-li $x\in\operatorname{Dom} T_f+T_g = \operatorname{Dom} T_f\cap\operatorname{Dom} T_g$, je díky odhadu
$$\int_\Omega |f+g|^2\, dE_{x,x}\leqslant 2\int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x} + 2\int_\Omega |g|^2\, dE_{x,x}$$
i v $\operatorname{Dom} T_{f+g}$. Rovnost $T_fx+T_gx = (T_{f+g})x$ pak plyne z konstrukce zobrazení Ψ.

(b) *Krok 1.* Nechť nejprve f je omezená. Pak $T_f=\Psi(f)$ a
$$\operatorname{Dom} T_fT_g = \operatorname{Dom} T_g = \operatorname{Dom}_g\subset\operatorname{Dom}_{fg} = \operatorname{Dom} T_{fg}.$$

Uvažujme posloupnost $\{g_n\}$ konvergující ke g v prostorech $L^2(\Omega, E_{y,y})$, kde $y \in \mathrm{Dom}_g$. Pak $\{fg_n\}$ aproximuje fg a pro $x \in \mathrm{Dom}_g = \mathrm{Dom}_{fg}$ platí

$$T_{fg}x \lim_{n\to\infty} \Psi(fg_n)x = \lim_{n\to\infty} \Psi(f)\Psi(g_n)x = \Psi(f)\left(\lim_{n\to\infty} \Psi(g_n)x\right) = \Psi(f)\Psi(g)x.$$

Krok 2. Dokážeme nyní, že pro každou dvojici měřitelných funkcí f, g platí

$$\int_\Omega |f|^2 \, dE_{T_g x, T_g x} = \int_\Omega |fg|^2 \, dE_{x,x}, \quad x \in \mathrm{Dom}\, T_g. \tag{5.4}$$

K tomuto účelu uvažujme funkce $f_n = f\chi_{A_n}$, kde $A_n = f^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$. Díky prvnímu kroku pak pro $x \in \mathrm{Dom}\, T_g$ díky faktu $x \in \mathrm{Dom}\, T_{f_n g}$ platí

$$\int_\Omega |f_n|^2 \, dE_{T_g x, T_g x} = \|T_{f_n} T_g x\|^2 = \|T_{f_n g} x\|^2 = \int_\Omega |f_n g|^2 \, dE_{x,x}.$$

Má-li tedy jedna strana limitu, má ji i druhá strana a vice versa. Limitním přechodem pak za pomoci Leviho věty obdržíme platnost (5.4).

Krok 3. Ukážeme nyní platnost rovnosti $\mathrm{Dom}\, T_f T_g = \mathrm{Dom}\, T_g \cap \mathrm{Dom}\, T_{fg}$. Ohledně inkluze „$\subset$“, nechť $x \in \mathrm{Dom}\, T_f T_g$ je dáno. Dle definice je pak $x \in \mathrm{Dom}\, T_g$ a $T_g x \in \mathrm{Dom}\, T_f = \mathrm{Dom}_f$. Dle (5.4) je $x \in \mathrm{Dom}_{fg} = \mathrm{Dom}\, T_{fg}$.

Obráceně, nechť $x \in \mathrm{Dom}\, T_g \cap \mathrm{Dom}\, T_{fg}$ je dáno. Opět díky (5.4) dostáváme $T_g x \in \mathrm{Dom}_f = \mathrm{Dom}\, T_f$, a tedy $x \in \mathrm{Dom}\, T_f T_g$.

Krok 4. Ukážeme rovnost $T_{fg}x = T_f T_g x$ pro $x \in \mathrm{Dom}\, T_f T_g$, kde f, g jsou libovolné měřitelné funkce. Nechť $x \in \mathrm{Dom}\, T_f T_g$ je dáno. Pak $T_g x \in \mathrm{Dom}\, T_f$. Vezměme aproximující posloupnost $\{f_n\}$ pro f. Pak díky prvnímu kroku máme

$$T_f T_g x = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n) T_g x = \lim_{n\to\infty} T_{f_n g} x.$$

Jelikož dle (a), Věty 5.1.37(d) a druhému kroku platí

$$\|T_{fg}x - T_{f_n g}x\|^2 = \left\|T_{(f-f_n)g}x\right\|^2 = \int_\Omega |(f-f_n)g|^2 \, dE_{x,x} = \int_\Omega |f-f_n|^2 \, dE_{T_g x, T_g x},$$

dostáváme

$$T_{fg}x = T_f T_g x.$$

(c) *Krok 1.* Ukážeme, že $T_{\overline{f}} \subset T_f^*$. Předně je zřejmé, že

$$\mathrm{Dom}\, T_f = \mathrm{Dom}_f = \mathrm{Dom}_{\overline{f}} = \mathrm{Dom}\, T_{\overline{f}}.$$

Nechť $\{f_n\}$ je aproximující posloupnost pro f. Pak pro $x, y \in \mathrm{Dom}_f = \mathrm{Dom}_{\overline{f}}$ platí

$$\langle T_f x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(f_n)^* y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(\overline{f_n})y\rangle = \langle x, T_{\overline{f}} y\rangle.$$

Tedy $T_{\overline{f}} \subset T_f^*$.

Krok 2. Nyní ukážeme, že $\mathrm{Dom}\, T_f^* \subset \mathrm{Dom}\, T_{\overline{f}}$.

Nechť $y \in \mathrm{Dom}\, T_f^*$ je dáno. Položíme $A_n = f^{-1}(B(0,n)$, $n \in \mathbb{N}$, a $f_n = f\chi_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $x \in \mathrm{Dom}\, T_f$ máme $z = E(A_n)x \in \mathrm{Dom}\, T_f$. Vskutku, platí

$$\langle E(\Omega \backslash A_n)z, z\rangle = \langle E(\Omega \backslash A_n)E(A_n)z, z\rangle = \langle E(\varnothing)z, z\rangle = 0,$$

a tedy

$$\int_\Omega |f|^2 \, dE_{y,y} = \int_{A_n} \left|f^2\right| \, dE_{y,y} < \infty,$$

tj. $y \in \mathrm{Dom}_f$. Dostáváme proto z tvrzení (b) a Věty **??**

$$\langle x, E(A_n)T_f^* y\rangle = \langle T_f E(A_n)x, y\rangle = \langle T_{f\chi_{A_n}} x, y\rangle = \langle x, T_{f\chi_{A_n}}^* \rangle = \langle x, T_{\overline{f}\chi_{A_n}} \rangle, \quad x \in \mathrm{Dom}_f\,.$$

Z tohoto výpočtu nyní díku hustotě $\mathrm{Dom}\, T_f$ v H máme rovnost

$$E(A_n)T_f^* y = T_{\overline{f_n}} y = \Psi(\overline{f_n}).$$

Tedy

$$\int_\Omega |f|^2 \, dE_{y,y} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^2 \, dE_{y,y} = \lim_{n\to\infty} \|\Psi(f_n)y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\|E(A_n)T_f^* y\right\|^2 \leqslant \left\|T_f^* y\right\|^2.$$

Tedy $y \in \mathrm{Dom}_f = \mathrm{Dom}\, T_f = \mathrm{Dom}\, T_{\overline{f}}$.

Tedy $T_f^* \subset T_{\overline{f}}$.

Krok 3. Ověříme nyní rovnost $T_f T_f^* = T_{|f|^2} = T_f^* T_f$. Již víme, že

$$\operatorname{Dom} T_f^* = \operatorname{Dom} T_{\overline{f}} = \operatorname{Dom} T_f.$$

Z Hölderovy nerovnosti plyne vztah $\operatorname{Dom} T_{|f|^2} \subset \operatorname{Dom} T_f$ (použijeme odhad

$$\int_\Omega |f|^2 \, dE_{x,x} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^4 \, dE_{x,x} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega 1 \, dE_{x,x} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad x \in \operatorname{Dom} T_{|f|^2}.)$$

Pomocí tvrzení (b) tak dostáváme

$$\operatorname{Dom} T_f T_f^* = \operatorname{Dom} T_f^* \cap \operatorname{Dom} T_{f\overline{f}} = \operatorname{Dom} T_{\overline{f}} \cap \operatorname{Dom} T_{|f|^2} = \operatorname{Dom} T_f \cap \operatorname{Dom} T_{|f|^2} = \operatorname{Dom} T_{|f|^2}$$

a rovnost

$$T_f T_f^* = T_f T_{\overline{f}} = T_{|f|^2} = T_{\overline{f}f} = T_{\overline{f}} T_f = T_f^* T_f.$$

(d) Jelikož

$$T_f = T_{\overline{\overline{f}}} = T_{\overline{f}}^*,$$

je dle Tvrzení 5.1.19(a) operátor T_f uzavřený. □

Značení 5.1.39. Operátor T_f zkonstruovaný ve Větě 5.1.37 označíme symbolem $\Psi(f)$.

Věta 5.1.40. *Nechť $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Pak $\sigma(\Psi(f)) = \operatorname{essrng} f$.*

Důkaz. Ověříme „$\supset$“. Nechť $\lambda \in \operatorname{essrng} f$ je dáno. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$A_n = \{\omega \in \Omega\colon\ |f(\omega) - \lambda| < \frac{1}{n}\}.$$

Pak $E(A_n) \neq 0$, a tedy existují jednotkové vektory $x_n \in \operatorname{Rng} E(A_n)$. Pak platí

$$\|\lambda x_n - \Psi(f)x_n\| = \|\lambda\Psi(\chi_{A_n})x_n - \Psi(f)\Psi(\chi_{A_n})x_n\| = \|\Psi((\lambda - f)\chi_{A_n})x_n\| \leqslant \|x_n\| \, \|(\lambda - f)\chi_{A_n}\|_\infty = \frac{x_n}{n}.$$

Tedy $(\lambda I - \Psi(f))$ není invertovatelný, jelikož není zdola omezený.

Ukážeme nyní inkluzi „$\subset$“. Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{essrng} f$ je dáno. Položíme

$$g(\omega) = (\lambda - f(\omega))^{-1}, \quad \omega \in \Omega.$$

Jelikož existuje $\delta > 0$ takové, že $B(\lambda, \delta) \cap \operatorname{essrng} f = \emptyset$, je g omezená měřitelná funkce na Ω. Dále platí

$$g(\lambda - f) = \chi_\Omega = (\lambda - f)g.$$

Použitím tohoto faktu a Věty 5.1.38(b) tak máme

$$\Psi(g)(\lambda I - \Psi(f)) = T_g T_{\lambda - f} \subset T_{g(\lambda - f)} = \Psi(\chi_\Omega) = I$$

a

$$(\lambda I - \Psi(f))\Psi(g) = T_{\lambda - f} T_g = T_{(\lambda - f)g} = \Psi(\chi_\Omega) = I.$$

Tedy $\Psi(g)$ je spojitá inverze k $\lambda I - \Psi(f)$, což znmená, že $\lambda \notin \sigma(\Psi(f))$. □

Lemma 5.1.41. *Nechť H je Hilbertův prostor a E je rozklad jednotky na (Ω, Σ) s hodnotmai v $L(H)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť (Ω', Σ') je měřitelný prostor a $\phi\colon \Omega \to \Omega'$ je měřitelné zobrazení. Pak je zobrazení $E'\colon \Sigma' \to L(H)$ definované jako

$$E'(A') = E(\phi^{-1}(A')), \quad A' \in \Sigma',$$

rozklad jednotky na (Ω', Σ'), který splňuje pro každou měřitelnou $f'\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ rovnost

$$\int_{\Omega'} f' \, dE' = \int_\Omega f' \circ \phi \, dE.$$

(b) Nechť jsou navíc prostory (Ω, Σ) a (Ω', Σ') lokoálně kompaktní a ϕ je spojité. Pak platí týž závěr jako v (a).

Důkaz. (a) Pro E' ověříme vlastnosti (a)–(e) z Definice 3.6.1. Všechny požadované vlastnosti však ihned plynou z definic. Navíc vidíme, že $E'_{x,y} = \phi(E_{x,y})$, $x, y \in H$.

Nechť f' je E'-měřitelná funkce na Ω'. Uvažujme nejprve případ, že je omezená. Pak pro $x, y \in H$ platí

$$\langle\left(\int_{\Omega'} f'\,dE'\right)x, y\rangle = \int_{\Omega'} f'\,dE'_{x,y} = \int_{\Omega} f' \circ \phi\,dE_{x,y} = \langle\left(\int_{\Omega} f' \circ \phi\right)x, y\rangle,$$

a tedy máme rovnost $\int_{\Omega'} f'\,dE' = \int_{\Omega} f' \circ \phi\,dE$.

Nechť nyní f je obecná. Jelikož $\phi(E_{x,x}) = E'_{x,x}$, platí $\mathrm{Dom}_{f'} = \mathrm{Dom}_{f'\circ\phi}$. Pak pro $A_n = f'^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$, platí, že $f'_n = f'\chi_{A_n}$ konvergují k f' v prostorech $L^2(\Omega', E'_{x,x})$, $x \in \mathrm{Dom}_{f'}$, a tedy $f'_n \circ \phi \to f' \circ \phi$ v prostorech $L^2(\Omega, E_{x,x})$, $x \in \mathrm{Dom}_{f'\circ\phi}$. Tedy pro $x \in \mathrm{Dom}_{f'}$ máme

$$\left(\int_{\Omega'} f'\,dE'\right)x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega'} f'_n\,dE'_{x,x}\right)x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega} f'_n \circ \phi\,dE\right)x = \left(\int_{\Omega} f' \circ \phi\,dE\right)x.$$

Tím je důkaz tvrzení (a) proveden.

(b) V tomto případě je třeba ověřit požadavek (f) Definice 3.6.1. Ten je však zaručen Tvrzením **??**. □

Věta 5.1.42. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak existuje právě jeden rozklad jednotky E na $(\sigma(T), \mathrm{Borel}(\sigma(T)))$ takový, že $T = \Psi(\mathrm{id})$.*

Důkaz. Existence. Uvažujme Cayleyovu transformaci U_T operátoru T. Obdržíme tak unitární operátor takový, že $I - U_T$ je prostý (viz Věta 5.1.32(a2)). Jelikož je U_T unitární, platí $\sigma(U_T) \subset \mathbb{T}$. Nechť F' je spektrální míra na $(\sigma(U_T), \mathrm{Borel}(\sigma(U_T)))$ splňující $U_T = \int_{\sigma(U_T)} \mathrm{id}\, dF'$. Jelikož $\mathrm{Ker}(I - U_T) = \{0\}$, je $F'(\chi_{\{1\}}) = 0$ (viz Věta **??**). Restringujeme nyní F' na $\sigma(U_T)\backslash\{1\}$, tj. položíme

$$F(A) = F'(A), \quad A \in \mathrm{Borel}(\sigma(U_T)\backslash\{1\}).$$

Pak též platí $U_T = \int_{\sigma(U_T)\backslash\{1\}} \mathrm{id}\, dF$.

Povšimněme si, že funkce $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}\backslash\{1\}$ definovaná jako $\psi(t) = \frac{t-i}{t+i}$ má inverzi $\phi\colon \mathbb{T}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $\phi(\lambda) = i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Speciálně též vidíme, že se jedná o borelovské funkce.

Položme

$$S = \int_{\sigma(U_T)\backslash\{1\}} \phi\,dF.$$

Jelikož je ϕ reálná, je S samoadjungovaný operátor (viz Věta 5.1.38(c)). Protože $\phi(\lambda)(1-\lambda) = i(1+\lambda)$, platí $S(I - U_T) = i(I + U_T)$. (Vskutku, při označení $f = \phi$ a $g = (1 - \lambda)$ stačí použít Větu 5.1.38(b).) Z tohoto vztahu vidíme inkluzi

$$\mathrm{Dom}\, S \supset \mathrm{Rng}(I - U_T) = \mathrm{Dom}\, T,$$

(viz Věta 5.1.32(a2)). Tedy $S \supset T$. To ale znamená inkluze

$$T = T^* \subset S^* = S,$$

a tedy $T = S$.

Z Věty 5.1.40 a (5.1.24)(b) máme, že

$$\sigma(T) = \sigma(S) = \mathrm{essrng}\,\phi|_{U_T\backslash\{1\}}$$

je uzavřené v $\mathbb{R}$.

Uvažujme E obraz rozkladu jednotku F při zobrazení ϕ, tj.

$$E(A) = F(\phi^{-1}(A)), \quad A \subset \mathrm{Borel}(\sigma(T)).$$

Pak E je hledaná spektrální míra, neboť dle Lemmatu 5.1.41 platí

$$\int_{\sigma(T)} \mathrm{id}\; dE = \int_{\sigma_{U_T}\backslash\{1\}} \phi\,dF = S = T.$$

Jednoznačnost. Předpokládejme, že E' je též rozklad jednotky na $(\sigma(T), \mathrm{Borel}(\sigma(T)))$ splňující $T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}\; dE'$. Uvažujme funkci $\psi(t) = \frac{t-i}{t+i}$, $t \in \sigma(T)$, a operátor

$$U' = \int_{\sigma(T)} \psi\,dE'.$$

Pak U' plňuje $U'(T+iI) = T - iI$ díky Větě 5.1.38(b). (Máme totiž $\psi(t)(t+i) = (t-i)$, a tedy $U(T+iT) \subset T_i I$. Navíc $\operatorname{Dom} U(T+iI) = \operatorname{Dom} T$.) Tedy $U' = U_T$ (zde U_T je opět Cayleyova transformace T). Nechť F' je rozklad jednotky daný jako obraz E' při zobrazení ψ, tj. F' je rozklad na

$$(\sigma(U'), \operatorname{Borel}(\sigma(U'))) = (\operatorname{essrng}\psi, \operatorname{Borel}(\operatorname{essrng}\psi)) = (\sigma(U_T), \operatorname{Borel}(\sigma(U_T))).$$

Jelikož

$$\int_{\sigma(U_T)} \operatorname{id}\, dE = U_T = U' = \int_{\sigma(T)} \psi dE' = \int_{\operatorname{essrng}\psi)} \operatorname{id}\, dF' = \int_{\sigma(U_T)} \operatorname{id}\, dF',$$

z jednoznačnosti rozkladu jednotky pro normální operátory (viz Věta **??**) plyne vztah $F' = F$. Tedy

$$E' = \phi(F') = \phi(F) = E.$$

Tím je dokázána jednoznačnost. □

Definice 5.1.43. Nechť T je samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H a E je jeho rozklad jednotky na $\sigma(T)$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ uvažujme operátor $E_\lambda = E_{\sigma(T)\cap(-\infty,\lambda]}$. Pak se systému

$$\{E_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

říká spektrální rozklad T.

Věta 5.1.44. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H a $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ je jeho spektrální rozklad T. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Operátory E_λ mají následující vlastnosti.

(a1) Každý operátor E_λ je ortogonální projekce na H.

(a2) Pro každé $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ platí $E_\mu E_\nu = E_\nu E_\mu = E_{\min\{\mu,\nu\}}$.

(a3) Platí $\lim_{\mu\to\lambda_+} E_\mu x = E_\lambda x$, $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a4) Platí $\lim_{\mu\to\infty} E_\mu x = x$ a $\lim_{\mu\to-\infty} E_\mu x = 0$, $x \in H$.

(b) Platí následující výroky o číslu $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

(b1) Číslo λ_0 leží v $\sigma_p(T)$ právě tehdy, když existuje $x \in H$ splňující $\lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x \neq E_{\lambda_0} x$.

(b2) Pokud číslo λ_0 leží v $\sigma_p(T)$, pak $E(\{\lambda_0\}) = E_{\lambda_0} - E_\mu$ je ortogonální projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.

(b3) Číslo λ_0 leží v $\rho(T)$ právě tehdy, když funkce $\lambda \mapsto E_\lambda$ je konstantní na nějakém okolí λ_0.

Důkaz. Nechť E je rozklad jednotky na $\sigma(T)$ příslušný T. Během důkazu budeme pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ psát pouze $E(A)$ místo $E(A \cap \sigma(T))$.

Tvrzení (a1) a (a2) plynou z definice.

(a3) Pokud $\mu > \lambda$ a $x \in H$, máme

$$\|E_\mu x - E_\lambda x\|^2 = \|E((\lambda,\mu])x\|^2 = \langle E((\lambda,\mu])x, x\rangle = E_{x,x}((\lambda,\mu]).$$

Jelikož poslední člen konverguje k 0 pro μ jdoucí k λ zprava, platí

$$\lim_{\mu\to\lambda_+} E_\mu x = E_\lambda x.$$

(a4) Jako výše máme

$$\|x - E_\mu x\|^2 = \|(I - E((-\infty,\mu]))\, x\|^2 = \|E((\mu,\infty))x\|^2 = E_{x,x}\left((\mu,\infty)\right),$$

což je výraz konvergující k 0 pro μ jdoucí do nekonečna.

Podobně

$$\|E_\mu x\|^2 = \|E((-\infty,\mu])x\|^2 = E_{x,x}((-\infty,\mu])$$

konverguje k 0 pro μ jdoucí do $-\infty$.

(b) Nejprve si povšimneme, že $\lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x$ existuje vždy. To plyne z odhadu

$$\|E((-\infty,\lambda_0))x - E_\lambda x\|^2 = \|E((\lambda,\lambda_0))x\|^2 = E_{x,x}\left((\lambda,\lambda_0)\right)$$

platného pro každé $\lambda < \lambda_0$. Z něho totiž plyne, že

$$\lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x = E((-\infty,\lambda_0))x.$$

Proto též máme

$$E_{\lambda_0}x = E((-\infty,\lambda_0])x = E((-\infty,\lambda_0))x + E(\{\lambda_0\})x = \lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x + E(\{\lambda_0\})x, \quad x \in H. \tag{5.5}$$

(b1) Nechť $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. Ukážeme, že $\operatorname{Rng} E(\{\lambda_0\}) = \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.
„$\subset$“ Nechť $E(\{\lambda_0\})x = x$. Ukážeme nejprve, že $x \in \operatorname{Dom} T$. Jelikož ale

$$\operatorname{Dom} T = \{x \in H\colon \int_{\sigma(T)} |\mathrm{id}|^2 \, dE_{x,x} < \infty\},$$

stačí si uvědomit, že pro $A \in \operatorname{Borel}(\sigma(T))$ platí

$$E_{x,x}(A) = \langle E(A)x, x\rangle = \langle E(A)E(\{\lambda_0\})x, x\rangle = \langle E(A\cap\{\lambda_0\})x, x\rangle = \begin{cases} \langle E(\{\lambda_0\})x, x\rangle, & \lambda_0 \in A,\\ 0, & \lambda_0 \notin A.\end{cases}$$

Tedy $x \in \operatorname{Dom} T$. Pomocí Věty 5.1.38(b) pak

$$\begin{aligned} Tx = TE(\{\lambda_0\})x &= \left(\int_{\sigma(T)} \mathrm{id}\, dE\right)\left(\int_{\sigma(T)} \chi_{\{\lambda_0\}}\, dE\right)x = \left(\int_{\sigma(T)} \lambda_0\chi_{\{\lambda_0\}}\right)x = \lambda_0\left(\int_{\sigma(T)} \chi_{\{\lambda_0\}}\, dE\right)x \\ &= \lambda_0 E(\{\lambda_0\})x = \lambda_0 x. \end{aligned}$$

Tedy $x \in \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.
„$\supset$“ Nechť $x \in \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$. Položme pro $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{t \in \sigma(T)\colon |t-\lambda_0| \geqslant \frac{1}{n}\} \qquad \text{a} \qquad f_n(t) = \frac{1}{t-\lambda_0}\chi_{A_n}(t), \quad t \in \sigma(T).$$

Pak pro funkci $f = \mathrm{id} - \lambda_0$ platí $f_n f = \chi_{A_n}$. Pro x tak dostáváme díky Větě 5.1.38(b)

$$\begin{aligned} E(A_n)x &= \left(\int_{\sigma(T)} \chi_{A_n}\, dE\right)x = \left(\int_{\sigma(T)} f_n f\, dE\right)x = \left(\int_{\sigma(T)} f_n\, dE\right)\left(\int_{\sigma(T)} f\, dE\right)x \\ &= \left(\int_{\sigma(T)} f_n\, dE\right)(T-\lambda_0 I)x = 0. \end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu máme

$$\|E(\sigma(T)\backslash\{\lambda_0\})x\|^2 = \langle E(\sigma(T)\backslash\{\lambda_0\})x, x\rangle = E_{x,x}(\sigma(T)\backslash\{\lambda_0\}) = \lim_{n\to\infty} E_{x,x}(A_n) = \lim_{n\to\infty}\langle E(A_n)x, x\rangle = 0,$$

takže

$$x = E(\{\lambda_0\})x + E(\sigma(T)\backslash\{\lambda_0\})x = E(\{\lambda_0\})x.$$

Nyní již snadno ověříme (b1) a (b2). Pokud $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, pak pro $x \in \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T0$ nenulové je $E(\{\lambda_0\})x = x \neq 0$, což ale dle (5.5) znamená, že v (b1) neplatí na pravé straně rovnost.

Na druhou stranu, pokud v (b1) neplatí na pravé straně rovnost, tak díky (5.5) víme nenulovost $E(\{\lambda_0\})$. To však znamená nenulovost $\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.

(b3) Nechť λ_0 leží v $\rho(T)$. Pak existuje interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ takový, že $\lambda_0 \subset (a,b) \subset [a,b] \subset \rho(T)$. Pak ovšem

$$E_a = E(\sigma(T)\cap(-\infty,a]) = E_\lambda = E(\sigma(T)\cap(-infty,\lambda]) = E_b = E(\sigma(T)\cap(-infty,b]), \quad \lambda \in (a,b),$$

tj. funkce $\lambda \mapsto E_\lambda$ je konstantní na (a,b).

Předpokládejme nyní, že $E_b = E_a$ pro nějaký interval (a,b) takový, že $a < \lambda_0 < b$. Pak $E((a,b]) = 0$. Položíme $f(t) = (\lambda_0 - t)^{-1}\chi_{\mathbb{R}\backslash(a,b]}(t)$, $t \in \sigma(T)$. Pak

$$g(t)(\lambda_0 - t) = \chi_{\mathbb{R}\backslash(a,b]} = (\lambda_0 - t)g(t), \quad t \in \sigma(T).$$

Dle Věty 5.1.38(b) máme

$$\left(\int_{\sigma(T)} g\, dE\right)\left(\int_{\sigma(T)} \lambda_0 - \mathrm{id})\, dE\right) \subset \int_{\sigma(T)} g(\lambda_0 - \mathrm{id})\, dE = \int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R}\backslash(a,b]}\, dE = \int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R}}\, dE = I,$$

přičemž

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}\left(\int_{\sigma(T)} dE\right)\left(\int_{\sigma(T)} \lambda_0 - \mathrm{id})\, dE\right) &\subset \operatorname{Dom}\left(\int_{\sigma(T)} g\, dE\right) \cap \operatorname{Dom}\left(\int_{\sigma(T)} g(\lambda_0 - \mathrm{id})\, dE\right) \\ &= H \cap \operatorname{Dom}(\lambda_0 I - T) = \operatorname{Dom} T \end{aligned}$$

Tedy

$$\left(\int_{\sigma(T)} dEg\right)(\lambda_0 I - T) \subset I.$$

Podobně máme

$$I = \left(\int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R}}\, dE\right) = \int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R}\setminus(a,b]}\, dE = (\lambda_0 I - T)\left(\int_{\sigma(T)} g\, dE\right).$$

Tedy je operátor $\int_{\sigma(T)} g\, dE$ inverzí operátoru $\lambda_0 I - T$. $\square$

5.2 Lokálně konvexní topologie a slabá kompaktnost

5.2.1 Kreinova–Milmanova věta

Definice 5.2.1. Nechť A je konvexní množina ve vektorovém prostoru X. Řekneme, že $B \subset A$ je extremální, pokud je neprázdná a platí následující výrok:

$$\forall x, y \in A\ \forall \lambda \in (0,1)\colon \lambda x + (1-\lambda)y \in B \implies x, y \in B.$$

Bod $x \in A$ je extremální, pokud množina $\{x\}$ je extremální. Množinu všech extremálních bodů A značíme jako $\operatorname{ext} A$.

Lemma 5.2.2. *Nechť A je podmnožina vektorového prostoru X. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém extremálních podmnožin A je uzavřený na neprázdné průniky a libovolná sjednocení.

(b) Je-li X topologický vektorový prostor a A je kompaktní, je systém uzavřených extremálních množin A uzavřený na neprázdné průniky a libovolná sjednocení.

Důkaz. Důkaz ihned plyne z definic. $\square$

Věta 5.2.3 (Krein–Milman)**.** *Nechť A je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Pak $A = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} A$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný prostor.

Krok 1. Ukážeme nejprve, že každá uzavřená extremální množina v A obsahuje extremální bod A. Nechť tedy $F \subset A$ je uzavřená a extremální. Uvažujme částečně uspořádanou množinu

$$(\mathcal{F}, \leqslant) = (\{H \subset F\colon H \text{ uzavřená extremální }\}, \supset).$$

Pak $(\mathcal{F}, \leqslant)$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu.

Vskutku, je-li $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ řetězec, jedná se o systém kompaktních množin s konečnou průnikovou vlastností, což znamená, že $R = \bigcap \mathcal{R}$ je neprázdná uzavřená množina. Navíc je dle Lemmatu 5.2.2 extremální. Množina $\mathcal{R}$ je pak zjevně horní závora pro řetězec $\mathcal{R}$.

Nechť $G \in \mathcal{F}$ je $\leqslant$-maximální prvek. Tvrdíme, že G je jednobodová množina. Kdyby totiž G obsahovala dva body, řekněme a a b, zvolili bychom funkci $f \in X^*$ splňující $f(a) > f(b)$. Uvažujme množinu

$$H = \{z \in G\colon f(z) = \max f(G)\}.$$

Pak H je neprázdná uzavřená podmnožina G. Je navíc extremální. Vskutku, pokud $x, y \in A$ a $\lambda \in (0,1)$ splňují $\lambda x + (1-\lambda)y \in H$, pak x extremality G platí $x, y \in G$. Z linearity f pak dostáváme $f(x) = f(y) = \max f(G)$, tj. $x, y \in H$.

Obdrželi jsme tak spor s maximalitou G v $(\mathcal{F}, \leqslant)$. Proto je F jednobodová množina. Dle definice tak F protíná $\operatorname{ext} A$.

Krok 2. Dle prvního kroku víme, že $\operatorname{ext} A$ je neprázdná množina. Zjevně platí $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} A \subset A$. Předpokládejme, že existuje $x \in A \setminus \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} A$. Dle Hahnovy–Banachovy věty existuje $f \in X^*$ splňující $f(x) > \max f(\overline{\operatorname{co}} A)$. Množina

$$F = \{y \in A\colon f(y) = \max f(A)\}$$

je pak uzavřená a extremální, ale neobsahuje dle předpokladu žádný extremální bod. To je však v rozporu s prvním krokem. Tedy $A = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} A$.

$\square$

5.2.2 Přípustné topologie

Definice 5.2.4. Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Řekneme, že lokálně konvexní toplogie σ na X je přípustná, pokud $(X, \sigma)^* = (X, \tau)^*$.

Příklad 5.2.5. Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak slabá topologie $\tau_w = \sigma(X, X^*)$ je přípustná topologie a každá přípustná topologie σ splňuje $\tau_w \subset \sigma$.

Věta 5.2.6. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor, σ je přípoustná topologie na X a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) A je τ-omezená,

(ii) A je σ-omezená,

(iii) A je slabě omezená.

Důkaz. Z Věty **??** víme, že (i)$\Longleftrightarrow$(iii). Stačí si však uvědomit, že jelikož slabá topologie τ_w splňuje $\tau_w \subset \sigma$, důkaz této věty funguje i pro důkaz ekvivalence (ii)$\Longleftrightarrow$(iii). $\square$

Definice 5.2.7. Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pro každou konvexní, vyváženou w^*-kompaktní množinu $B \subset X^*$ uvažujme pseudonormu

$$p_B(x) = \sup_{x^* \in B} |x^*(x)|, \quad x \in X.$$

Pak Mackeyova-Arensova topologie $\mu(X, X^*)$ je topologie generovaná systémem

$$\{p_B : B \subset X^* \text{ vyvážená, konvexní a } w^*\text{-kompaktní}\}.$$

Věta 5.2.8 (Mackey–Arens)**.** *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor a σ je přípustná topologie na X. Pak $\sigma(X, X^*) \subset \sigma \subset \mu(X, X^*)$.*

Důkaz. Nechť τ_w značí slabou topologii $\sigma(X, X^*)$.

Krok 1. Inkluze $\tau_w \subset \sigma$ plyne z přípustnosti σ a definice τ_w (viz Definice **??**).

Krok 2. Inkluze $\tau_w \subset \mu(X, X^*)$ plyne snadno z definic obou topologií. Vskutku, konverguje-li net $\{x_i\}$ v $\mu(X, X^*)$, konverguje i v $\sigma(X, X^*)$.

Krok 3. Ukážeme $\sigma \subset \mu(X, X^*)$. Nechť tedy U je σ-okolí 0. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že U je τ-uzavřené, konvexní vyvážené okolí 0. Pak U° je $\sigma(X^*, X)$-kompaktní množina. Tedy je

$$V = \{x \in X : \sup_{x^* \in U^\circ} |x^*(x)| \leqslant 1\}$$

$\mu(X, X^*)$-okolí 0. Proto dle Mazurovy věty **??** platí

$$V = (U^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{bco} U}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{U}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{U}^{\sigma} = U.$$

Tedy U je $\mu(X, X^*)$-okolí 0, takže $\sigma \subset \mu(X, X^*)$.

Krok 4. Ověříme, že $\mu(X, X^*)$ je přípustná. Označíme $Y = (X, \mu(X, X^*))$ a nechť Y^* je duál k Y. Nechť tedy $f \in Y^* \subset X^\#$, tj. f je $\mu(X, X^*)$-spojitý. Pak existují vyvážené, konvexní a w^*-kompaktní množiny $B_1, \dots, B_n$ v X^* takové, že $|f(x)| \leqslant 1$ pro každé $x \in X$ splňující $p_{B_i}(x) \leqslant 1$, $i = 1, \dots, n$. Uvažujme množinu $B = \operatorname{bco}(B_1 \cup \dots \cup B_n)$. Pak B_n je konvexní, vyvážená a w^*-kompaktní (viz Věta **??**) a navíc platí

$$U = \{x \in X : p_{B_i}(x) \leqslant 1, i = 1, \dots, n\} = B_\circ.$$

Nyní pooužijeme Větu **??** pro duální pár (Y^*, Y) a obdržíme

$$f \in U^\circ (B_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{bco} B}^{\sigma(Y^*,Y)} = \overline{B}^{\sigma(Y,Y^*)}.$$

Existuje tak net $\{f_i\}$ v B takový, že $f_i \to f$ v $\sigma(Y^*, Y)$. Zároveň je však B $\sigma(X^*, X)$-kompaktní, a tedy lze přechodem k podnetu předpokládat, že net $\{f_i\}$ konverguje k nějakému $g \in B$ v topologii $\sigma(X^*, X)$. To ale znamená, že $f = g \in B \subset X^*$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Věta 5.2.9. *Nechť (X, τ) je metrizovatelný lokálně konvexní prostor. Pak $\tau = \mu(X, X^*)$.*

Důkaz. Z Věty 5.2.8 víme, že $\tau \subset \mu(X, X^*)$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme V konvexní $\mu(X, X^*)$-okolí 0. Je-li nyní $A \subset X$ τ-omezená, je i $\mu(X, X^*)$-omezená, a proto nějaký násobek V ji pohltí.

Nechť $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báze $\tau(0)$, přičemž předpokládáme, že $U_1 \supset u_2 \supset \cdots$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} U_n \subset V$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, máme elementy $x_n \in \frac{1}{n} U_n \backslash V$. Pak $x_n \to 0$ v τ, a tedy je $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τ-omezená. Z výše uvedeného plyne, že existuje $t > 0$ splňující $A \subset tV$. Pak pro index $n_0 > t$ platí díky konvexitě V inkluze $A \subset n_0 V$. To ale implikuje fakt $x_{n_0} \in n_0 V$, což je spor.

Proto máme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n} U_n \subset V$. Tedy $V \in \tau$ a důkaz je dokončen.

$\square$

5.2.3 bw^*-topologie

Definice 5.2.10. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že množin a $U \subset X^*$ je bw^*-otevřená, pokud $U \cap rB_{X^*}$ je w^*-otevřená v rB_{X^*} pro každé $r > 0$.

Lemma 5.2.11. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém bw^*-otevřených množin tvoří topologii.

(b) Každá w^*-otevřená množina je je bw^*-otevřená.

(c) Je-li $U \subset X^*$ bw^*-otevřená a $y^* \in X^*$ je libovolné, pak $y^* + U$ je též bw^*-otevřená.

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) jsou zřejmá.

Tvrzení (c) plyne z faktu, že U je bw^*-otevřená právě tehdy, když $U \cap B$ je w^*-otevřená v B pro každou uzavřenou kouli $B \subset X^*$. (Je-li totiž U bw^*-otevřená a $B \subset X^*$ je libovolná uzavřená koule, vezmeme $r > 0$ takové, že $B \subset rB_{X^*}$. Pak je

$$U \cap B = (U \cap rB_{X^*}) \cap B$$

w^*-otevřená v $U \cap B$.)

Nechť nyní $U \subset X^*$ bw^*-otevřená množina a $y^* \in X^*$ jsou dány. Nechť B je libovolná uzavřená koule v X^*. Pak existuje w^*-otevřená množin a $G \subset X^*$ taková, že $U \cap (-y^* + B) = G \cap (-y^* + B)$. Pak $(y^* + U) \cap B = (y^* + G) \cap B$ je w^*-otevřená v B. Tedy posunutí jsou vzhledem k bw^*-topologii homeomorfizmy.

□

Tvrzení 5.2.12. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak báze okolí 0 v bw^*-topologii je dána systémem*

$$A^\diamond = \{x^* \in X^* \colon \sup_{n \in \mathbb{N}} |x^*(x_n)| < 1\},$$

kde $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v X konvergující k 0.

Důkaz. Krok 1. Nejprve ukážeme, že každá množina $A^\diamond$ je bw^*-okolí 0. Nechť $r > 0$ je dáno. Pak je množina

$$A^\diamond \cap rB_{X^*} = \{x^* \in rB_{X^*} \colon |x^*(x_n)| < 1 \text{ pro ta } n \in \mathbb{N} \text{ splňující } \|x_n\| \geqslant \frac{1}{r}\}$$

w^*-otevřená v rBX^*.

Krok 2. Ukážeme, že je-li U bw^*-okolí 0 a $A \subset X$ splňuje $A^\circ \cap nB_{X^*} \subset U$, pak existuje $B \subset \frac{1}{n}B_X$ komnečná taková, že $(A \cup B)^\circ \cap (n+1)B_{X^*} \subset U$.

Mějme tedy takové U a A dány. Kdyby požadované B neexistovalo, pro každou $B \subset \frac{1}{n}B_X$ konečnou platí

$$F_B = (A \cup B)^\circ \cap (n+1)B_{X^*} \cap (X^* \backslash U) \neq \varnothing.$$

Systém

$$\{F_B \colon B \subset \frac{1}{n}B_X \text{ konečná}\}$$

pak sestává z w^*-uzavřených podmnožin $(n+1)B_{X^*}$ a má konečnou průnikovou vlastnost. Díky kompaktnosti $(n+1)B_{X^*}$ tak existuje

$$x^* \in \bigcap \{F_B \colon B \subset \frac{1}{n}B_X \text{ konečná}\}.$$

Pro každé $x \in \frac{1}{n}B_X$ pak platí $|x^*(x)| \leqslant 1$, tj. $\|x^*\| \leqslant 1$. Tedy $\|x^*\| \leqslant n$. Dostáváme tak

$$x^* \in nB_{X^*} \cap (X^* \backslash U) \cap A^\circ,$$

což je spor.

Krok 3. Nechť U je bw^*-okolí 0. Nalezneme vhodnou množinu A sestávající z členů posloupnosti konvergující k 0 takovou, že $A^\diamond \subset U$. Konstrukce bude probíhat indukcí tak, že pro $n \geqslant 2$ platí $A_n \subset \frac{1}{n-1}B_X$ a pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^\circ \cap nB_{X^*} \subset U$.

V prvním kroce indukce využijeme w^*-otevřenosti množiny $U \cap B_{X^*}$ k nalezení konečné množiny $A_1 \subset X$ takové, že $A_1^\circ \cap B_{X^*} \subset U$.

Předpokládejme nyní, že máme nalezeny množiny $A_1, \ldots A_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, které splňují $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^\circ \cap nB_{X^*} \subset U$ a $A_i \subset \frac{1}{i-1}B_X$, $i = 2, \ldots, n$. Dle třetího kroku pak existuje $A_{n+1} \subset \frac{1}{n}B_X$ takové, že

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1})^\circ \cap (n+1)B_{X^*} \subset U.$$

Tím je konstrukce ukončena.

Položme $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Pak A sestává z členů posloupnosti konvergující k 0 a navíc platí $A^\circ \subset U$. Vskutku, nechť $x^* \in A^\circ$ je libovolné. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $x^* \in nB_{X^*}$. Pak

$$x^* \in A^\circ \cap nB_{X^*} \subset (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^\circ \cap nB_{X^*} \subset U.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Důsledek 5.2.13. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (X^*, bw^*) je lokálně konvexní prostor, který je generován pseudonormami $p_A\colon x^* \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)|$, kde $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pro nějakou posloupnost $\{x_n\}$ prvků X konvergující k 0.*

Lemma 5.2.14. *Nechť X je vektorový prostor, p pseudonorma na X a f funkcionál na X. Nechť f je omezený na množině $\{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ a nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v X splňující $p(x_n) \to 0$. Pak $f(x_n) \to 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Nechť M je konstanta, kterou je f omezeno na množině $\{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$. Pak můžeme předpokládat, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|f(x_n)| \geqslant \delta$ a $p(x)n) < 2^{-n}$. Nechť $\alpha_n \in \mathbb{T}$ jsou vybrány tak, že $f(\alpha_n x_n) = |f(x_n)|$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$p\left(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n\right) \leqslant 1,$$

a tedy

$$M \geqslant \left| f\left(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n\right)\right| = \sum_{n=1}^{k} |f(x_n)| \geqslant k\delta.$$

Tento odhad však zjevně nemůže platit pro všechna $k \in \mathbb{N}$. □

Věta 5.2.15. *Nechť X je Banachův prostor. Pak $(X^*, w^*)^* = (X^*, bw^*)^*$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že každý bw^*-spojitý funkcionál f na X^* je w^*-spojitý. Nechť tedy $f \in (X^*, bw^*)^*$ je dán. Pak existuje posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k 0 taková, že $|f| \leqslant 1$ na A°, kde $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definujeme spojitý operátor $T\colon X^* \to c_0$ jako

$$Tx^* = \{x^*(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x^* \in X^*.$$

Ukážeme, že pokud $Tx^* = 0$, pak také platí $f(x^*) = 0$. Vskutku, pokud $x^*(x_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $\operatorname{span}\{x^*\} \subset \operatorname{Ker} p_A$, z čehož již rovnost $f(x) = 0$ plyne. Existuje tak funcionál $\varphi\colon \operatorname{Rng} T \to \mathbb{F}$ takový, že $f = \varphi \circ T$. Ten je navíc spojitý na $\operatorname{Rng} T$. (Vskutku, pokud $Tx_k^* \to 0$, pak $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_k^*(x_n)| = 0$, tj. $p_A(x_k^*) \to 0$. Dle Lemmatu 5.2.14 tak $f(x_n^*) \to 0$, což implikuje spojitost φ.

Rozšíříme φ na prvek $c_0^* = \ell^1$ (budeme ho značit též φ). Existuje tak $\alpha \in \ell^1$ takové, že

$$\varphi(\{z_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \alpha_n, \quad \{z_n\} \in c_0.$$

Položme $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ (to je dobře definovaný prvek díky úplnosti X). Pro $x^* \in X^*$ pak platí

$$f(x^*) = \varphi(Tx^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^*(x_n) = x^*(x),$$

tj. $f = \varepsilon_x$ je w^*-spojitý. □

Věta 5.2.16. *Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X^*$ je konvexní. Pak A je w^*-uzavřená právě tehdy, když pro každé $r > 0$ je $A \cap rB_{X^*}$ w^*-uzavřená v rB_{X^*}.*

Důkaz. Tvrzení plyne z faktu, že dvě lokálně konvexní topologie, které mají stejný duál, mají i stejné uzavřené konvexní množiny. □

Věta 5.2.17. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $S \in L(Y^*, X^*)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Existuje $T \in L(X, Y)$ takový, že $S = T'$.

(ii) Operátor S je w^*-w^* spojitý.

(iii) Platí $S'(\varepsilon(X)) \subset \varepsilon(Y)$.

Důkaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Pokud $S = T'$ a $y_i^* \xrightarrow{w^*} 0$ v prostoru Y^*, pak pro $x \in X$ platí

$$Sy_i^*(x) = T'y_i^*(x) = y_i^*(Tx) \to 0.$$

Tedy $Sy_i^* \overset{w^*}{to}$ 0.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Nechť $x \in X$ je dáno. Pak je zobrazení $S'\varepsilon_x\colon Y^* \to \mathbb{F}$ w^*-spojité. Vskutku, pokud $y_i^* \xrightarrow{w^*} 0$ v prostoru Y^*, pak

$$(S'\varepsilon_x)(y_i^*) = (Sy_i^*)(x) \to 0$$

díky předpokladu. Jelikož $(Y^*, w^*)^* = Y$, je $S'\varepsilon_x \in \varepsilon Y$.

(iii) $\implies$ (i) Položme

$$Tx = \varepsilon^{-1}(S'(\varepsilon_x)), \quad x \in X.$$

Pak $T \in L(X,Y)$ a pro $x \in X$ a $y^* \in Y^*$ platí

$$(T'y^*)(x) = y^*(Tx) = y^*(\varepsilon^{-1}(S'(\varepsilon_x))) = (S'(\varepsilon_x))(y^*) = \varepsilon_x(Sy^*) = (Sy^*)(x).$$

Tedy $T'y^* = S$ a důkaz je hotov. $\square$

Lemma 5.2.18. *Nechť X jenormovaný lineární prostor$f\colon B_X \to \mathbb{F}$ splňuje:*

- *f je konvexní,*
- *$f(0) = 0$,*
- *je-li X nad $\mathbb{C}$, platí $f(ix^*) = if(x^*)$, $x^* \in B_{X^*}$.*

Pak existuje $g \in X^\#$ takové, že $f = g$ na X.

Důkaz. Krok 1. Nechť nejprve X je reálný prostor. Definujeme funkci $g\colon X \to \mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Jelikož pro $x \in B_X$ nenulové platí

$$f(x) = f\left((1 - \|x\|)0 + \|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = g(x),$$

máme $f = g$ na B_X.

Pro $x \in X \backslash \{0\}$ a $\lambda > 0$ platí

$$g(\lambda x) = \lambda \|x\| f\left(\frac{\lambda x}{\|\lambda x\|}\right) = \lambda g(x).$$

Pro $\lambda = -1$ uvažujeme $y = \frac{x}{\|x\|}$. Protože

$$0 = f(0) = f\left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} f(y) + \frac{1}{2} f(-y),$$

máme

$$g(-x) = f\left(\frac{-x}{\|x\|}\right) = -f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = -g(x).$$

Funkce g tak splňuje $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ kdykoliv $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ukážeme nyní aditivitu g. Nechť $x, y \in X$ jsou dány. Zjevně lze předpokládat, že $x, y, x + y \neq 0$. Pokud $\|x + y\| = 1$, platí

$$g(x + y) = f(x + y) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|y\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = g(x) + g(y).$$

Pokud $\|x + y\| \neq 1$, pak z právě dokázané rovnosti plyne

$$\begin{aligned} g(x + y) &= g\left(\|x + y\| \frac{x + y}{\|x + y\|}\right) = \|x + y\| g\left(\frac{x}{\|x + y\|} + \frac{y}{\|x + y\|}\right) \\ &= \|x + y\| \left(g\left(\frac{x}{\|x + y\|}\right) + g(\left(\frac{y}{\|x + y\|}\right)\right) = g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Krok 2. Nechť je nyní X nad $\mathbb{C}$. Pišme $f = u + iv$, kde $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$. Pak u, v jsou konvexní reálné funkce splňující $u(0) = v(0) = 0$. Rozšíříme je pomocí prvního kroku na reálně lineární funkce u' a v' definované na X. pak $g = u' + iv'$ splývá s f na B_X a je navíc lineární. K tomu stačí ověřit rovnost $g(ix) = ig(x)$, $x \in X$. Jelikož ale $f(ix) = if(x)$, $x \in B_X$, platí $v(x) = -u(ix)$, $x \in B_X$. Tedy i $v'(x) = -u'(ix)$ pro $x \in X$. Z toho již máme

$$g(ix) = u'(ix) + iv'(ix) = iu'(x) - v'(x) = ig(x).$$

$\square$

Tvrzení 5.2.19. *Nechť X je Banachův prostor a $f\colon B_{X^*} \to \mathbb{F}$ splňuje:*

- *f je konvexní,*
- *$f(0) = 0$,*
- *je-li X nad $\mathbb{C}$, platí $f(ix^*) = if(x^*)$, $x^* \in B_{X^*}m$*

- *f je w^*-spojitá.*

Pak existuje $x \in X$ takové, že $f = \varepsilon_x$.

Důkaz. Dle předpokladu existuje díky Lemmatu 5.2.18 $\varphi\colon (X^*)^\#$ rozšiřující f. Ukážeme, že φ je bw^*-spojité. K tomu stačí ověřit dle Věty **??**, že $\operatorname{Ker}\varphi$ je bw^*-uzavřené, tj. že $\operatorname{Ker}\varphi \cap rB_{X^*}$ je w^*-uzavřená množina v rB_{X^*} pro každé $r > 0$. To je však již zřejmé ze spojitosti φ na každé kouli. Vskutku, uvažujeme-li net $\{x_i\}^*$ v nějaké kouli rB_{X^*} konvergující k x^*, pak $\frac{1}{r}x_i^* \overset{w^*}{\to} \frac{1}{r}x_i$. Tedy

$$\varphi(x_i^*) = r\varphi\left(\frac{x_i^*}{r}\right) = rf\left(\frac{x_i^*}{r}\right) \to rf\left(\frac{x^*}{r}\right) = g(x^*)$$

Proto je $g \in (X^*, bw^*)^* = (X^*, w^*)^* = X$. Tím je důkaz dokončen.

□

5.2.4 Slabá kompaktnost

Definice 5.2.20. Nechť X je úplně regulární topologický prostor a $A \subset X$.

- Pak A je kompaktní, pokud každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. To je ekvivalentní s tím, že každý net v A má podnet konvergující v A.
- Množina A je spočetně kompaktní, pokud každé otevřené spočetné pokrytí má konečné podpodpokrytí. To je ekvivalentní s tím, že každá posloupnost v A má podnet konvergující v A (tj. má v A hromadný bod).
- Množina A je sekvenciálně kompaktní, pokud každá posloupnost v A má podposloupnost konvergující v A.
- Dále je A je relativně kompaktní, pokud každý net v A má podnet konvergující v X.
- Množina A je relativně spočetně kompaktní, pokud každá posloupnost v A má podnet konvergující v X (tj. má v X hromadný bod).
- Množina A je relativně sekvenciálně kompaktní, pokud každá posloupnost v A má podposloupnost konvergující v X.

Tvrzení 5.2.21. *Nechť K je kompaktní prostor a $A \subset (C(K), \tau_p)$ je relativně spočetně kompaktní. Pak A je relativně kompaktní.*

Důkaz. Krok 1. Nejprve ukážeme, že pro každé $x \in K$ je množina čísel $\{f(x)\colon f \in A\}$ omezená v $\mathbb{F}$. Kdyby tomu tak nebylo, existuje $x \in K$ rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ taková, že $|f_{n_k}(x)| \to \infty$. Posloupnost $\{f_{n_k}\}$ však pak nemůže mít hromadný bod v $C(K)$.

Krok 2. Pro každé $x \in K$ vezměme $\gamma_x > 0$ takové, že $|f(x)| \leqslant \gamma_x$, $f \in A$. Pak $A \subset \prod_{x\in K} B(0,\gamma_x)$, přičemž $\prod_{x\in K} B(0,\gamma_x)$ je kompaktní množina v $(\mathbb{F}^K, \tau_p)$. Tedy τ_p-uzávěr A v $\mathbb{F}^K$ je kompaktní podmnožina $\prod_{x\in K} B(0,\gamma_x)$. K důkazu relativní kompaktnosti A v $C(K)$ tak stačí ověřit, že τ_p-uzávěr A v $\mathbb{F}^K$ leží v $C(K)$.

Nechť tedy $f \in \overline{A}^{\tau_p}$ je dáno. Pro spor předpokládejme, že f není spojitá v bodě $x \in K$. Nechť $\tau(x)$ značí systém otevřených okolí x. Existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $y \in U$ splňující $|f(y) - f(x)| \geqslant \eta$.

Zvolíme posloupnost $\eta > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > 0$, přičemž $\varepsilon_n \to 0$, a zkonstruujeme množiny $U_n \in \tau(x)$, body x_n a funkce $f_n \in A$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující výroky

(1) Platí $U_n \supset \overline{U_{n+1}}$, $U_n \in \tau(x)$ a $x_n \in U_n$.

(2) Platí $|f(x) - f(x_n)| \geqslant \eta$.

(3) Pro $k \in \{1, \ldots, n\}$ a $z \in \{x, x_1, \ldots, x_n\}$ platí $|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon_k$.

(4) Platí $\operatorname{diam} f_k(U_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

V prvním kroku konstrukce vezmeme libovolné okolí $U_1 \in \tau(x)$ a zvolíme $x_1 \in U_{x_1}$. Zvolíme $f_1 \in A$ aproximující f v bodech množiny $\{x, x_1\}$ s přesností ε_1. Nechť $U_2 \in \tau(x)$ je takové, že $\operatorname{diam} f_1(U_2) < \varepsilon_2$.

Předpokládejme nyní, že máme nalezeny objekty $x_1, \ldots, x_n$, $f_1, \ldots, f_n$ a $U_1, \ldots, U_{n+1}$. Pak zvolíme $x_{n+1} \in U_{n+1}$ tak, aby platila (2). Aproximujeme f pomocí $f_{n+1} \in A$ v bodech množiny $\{x, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ tak, že platí (3). Nakonec zvolíme U_{n+1} dle (1) a (4). Konstrukce je tak dokončena.

Nechť $g \in C(K)$ je hromadný bod $\{f_n\}$ a nechť y je hromadný bod $\{x_n\}$. Nechť $F = \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \bigcap_{n=1}^\infty \overline{U_n}$. Pak $x, y \in F$. Vskutku, $x \in F$ zjevně. Jelikož pro pevné $k \in \mathbb{N}$ je $x_n \in \overline{U_k}$, $n \geqslant k$, je $y \in \overline{U_k}$. Tedy i $y \in F$. Z vlastnosti (4) vidíme, že f_n, a tedy i g jsou vše konstantní funkce na F.

Nyní odvodíme spor. Pro $k \in \mathbb{N}$ pevné máme z (3) $\lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = f(x_k)$. Jelikož je g hromadný bod $\{f_n\}$, platí $f(x_k) = g(x_k)$. Dle (3) dále platí $f_n(x) \to f(x)$, a tedy $f(x) = g(x)$.

Jelikož je g spojitá a y je hromadný bod $\{x_n\}$, je $g(y)$ hromadná hodnota $\{g(x_n)\}$. Existuje tak rostoucí posloupnost indexů $\{n_j\}$ taková, že $g(x_{n_j}) \to g(y)$. Z toho však dostáváme

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} g(x_{n_j}) = g(y) = g(x) = f(x),$$

tedy spor s vlastností (2).

□

Tvrzení 5.2.22. *Nechť K je kompaktní prostor, $A \subset (C(K), \tau_p)$ je relativně spočetně kompaktní a $f \in C(K)$ je v τ_p-uzávěru A. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ v A taková, že $f_n \to f$.*

Důkaz. Zvolíme posloupnost kladných čísel $\{\varepsilon_n\}$ takovou, že $\varepsilon_n \searrow 0$. Induktivně nalezneme otevřená konečná pokrytí $\mathcal{U}_n$ prostoru K, konečné množiny $D_n \subset K$ a funkce $f_n \in A$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující výroky.

(1) Platí $\operatorname{diam} \phi(U) < \varepsilon_n$ pro každé $U \in \mathcal{U}_n$ a $\phi \in \{f_1, \dots, f_{n-1}, f\}$.

(2) Pokud $U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_n$ splňují $U_1 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$, pak $D_n \cap \bigcap_{i=1}^n U_i \neq \emptyset$.

(3) Pro každé $x \in D_1 \cup \dots \cup D_n$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$.

V prvním kroku vezmeme $\mathcal{U}_1$ dle požadavku (1) a nalezneme D_1 dle (2). Nakonec zvolíme $f_1 \in A$ splňující (3)

Předpokládejme, že již máme objekty $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$, $D_1, \dots, D_n$ a $f_1 \dots, f_n$ zkosntruovány. Pak zvolíme $\mathcal{U}_{n+1}$ dle (1), D_{n+1} dle (2) a $f_{n+1} \in A$ dle požadavku (3). Tím je konstrukce ukončena.

Položíme $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$. Chceme ukázat, že $f_n \to f$. Předpokládejme pro spor opak, tj. existenci $x \in K$, $\eta > 0$ a rostoucí posloupnosti indexů $\{n_k\}$ takové, že $|f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \eta$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť g je hromadný bod $\{f_{n_k}\}$. Pak také $|f(x) - g(x)| \geqslant \eta$.

Zvolíme $U_{n_k} \in \mathcal{U}_{n_k}$ obsahující x a položíme $V_k = U_{n_1} \cap \dots \cap U_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak dle (2) existuje $x_k \in V_k \cap D$. Položíme-li $F = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{V_k}$, obdržíme množinu, na které jsou funkce f_n, f i g díky bodu (1) konstatní. Nechť y je hromadný bod $\{x_k\}$. Pak $y \in F$, a tedy $g(y) = g(x)$ a $f(y) = f(x)$. Zvolme U bodu y takové, že $\operatorname{diam} f(U) + \operatorname{diam} g(U) < \frac{\eta}{3}$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ splňuje $x_j \in U$. Jelikož $f_{n_k}(x_j) \to f(x_j)$, máme $g(x_j) = g(x)$. Z toho ale již máme díky

$$\eta \leqslant |f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}\eta$$

spor.

Proto $f_n \to f$ a důkaz je dokončen. □

Definice 5.2.23. Nechť K je úplně regulární topologický prostor. Řekneme, že K je andělský, pokud jeho každá relativně spočetně kompaktní podmnožina $A \subset K$ je relativně kompaktní a pro každé $x \in \overline{A}$ existuje $\{x_n\}$ v A splňující $x_n \to x$.

Věta 5.2.24. *Nechť K je kompaktní topologický prostor. Pak $(C(K), \tau_p)$ je andělský.*

Důkaz. Důkaz plyne z Tvrzení 5.2.21 a 5.2.22. □

Věta 5.2.25. *Nechť K je kompaktní prostor a $A \subset (C(K), \tau_p)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Množina A je relativně spočetně kompaktní.

(ii) Množina A je relativně kompaktní.

(iii) Množina A je relativně sekvenciálně kompaktní.

Pododobně jsou ekvivalentní následující tvrzení.

(i') Množina A je spočetně kompaktní.

(ii') Množina A je kompaktní.

(iii') Množina A je sekvenciálně kompaktní.

Důkaz. Implikace (iii) $\Longrightarrow$ (i) platí vždy a (i) $\Longrightarrow$ (ii) plyne z Tvrzení 5.2.21.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v A. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\{f_n\}$ je prostá posloupnost (tj., že každé f_n se v ní vyskytuje právě jednou). Množina $B = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ je relativně spočetně kompaktní, a tedy existuje její hromadný bod $f \in C(K)$. Dále díky Tvrzení 5.2.22 existuje posloupnost $\{g_k\}$ v množině $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ taková, že $g_k \to f$. Pokud lze vybrat z $\{g_k\}$ prostou posloupnost, lze vybrat i podposloupnost z $\{f_n\}$ konvergující k f. Pokud je $\{g_k\}$ od jistého indexu konstantní, lze z $\{f_n\}$ též vybrat podposloupnost konvergující k f. Buď jak buď, A je relativně sekvenciálně kompaktní.

V druhé části důkazu vidíme, že implikace (iii') $\Longrightarrow$ (i') je zjevná.

(i') $\Longrightarrow$ (ii') Nechť A je spočetně kompaktní. Pak A je relativně kompaktní, tj. $\overline{A}$ je kompaktní. Stačí nyní ukázat, že $\overline{A} = A$. Nechť $f \in \overline{A}$. Dle Tvrzení 5.2.22 existuje posloupnost $\{f_n\}$ v A splňující $f_n \to f$. Nechť $g \in A$ je hromadný bod $\{f_n\}$. Pak $f = g \in A$ a důkaz je hotov.

(ii') $\Longrightarrow$ (iii') Nechť A je kompaktní a $\{f_n\}$ je posloupnost v A. Pak A je relativně sekvenciálně kompaktní, a tedy existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ a $f \in C(K)$ taková, že $f_{n_k} \to f$. Pak $f \in \overline{A} = A$, a tedy A je sekvenciálně kompaktní. □

Věta 5.2.26 (Eberlein–Šmuljan)**.** *Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X$ je množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Množina A je relativně slabě spočetně kompaktní.

(ii) *Množina A je relativně slabě kompaktní.*

(iii) *Množina A je relativně slabě sekvenciálně kompaktní.*

Pododobně jsou ekvivalentní následující tvrzení.

(i') *Množina A je slabě spočetně kompaktní.*

(ii') *Množina A je slabě kompaktní.*

(iii') *Množina A je slabě sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz. Implikace (iii) $\Longrightarrow$ (i) a (iii') $\Longrightarrow$ (i') platí vždy.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Nechť A je relativně slabě spočetně kompaktní. Pak je $\varepsilon(A)|_{B_{X^*}} \subset (C(B_{X^*}), \tau_p)$ relativně τ_p-spočetně kompaktní. tedy je relativně τ_p-kompaktní. Nechť $\{x_i\}$ je net v A. Pak existuje $f \in C(B_{X^*})$ a podnet $\{y_j\}$ netu $\{x_i\}$ takový, že $\varepsilon(y_j) \to f$ v τ_p-topologii. Pak f splňuje předpoklady Tvrzení 5.2.19, a tedy $f = \varepsilon(x)$ pro nějaké $x \in X$. Tedy $y_j \to x$ slabě a A je relativně kompaktní.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Je-li A relativně slabě kompaktní, je $\varepsilon(A)$ relativně τ_p-kompaktní v $C(B_{X^*})$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v A. Dle Věty 5.2.25 tak existuje $f \in C(B_{X^*})$ a rostouc9 posloupnost indexů $\{n_k\}$ takové, že $\varepsilon(x_{n_k}) \xrightarrow{\tau_p} f$. Jako výše odvodíme, že existuje $x \in X$ splňující $f = \varepsilon(x)$. Tedy $x_{n_k} \to x$ slabě a A je relativně slabě sekvenciálně kompaktní.

Implikace (i') $\Longrightarrow$ (ii') se dokáže stejně jako (i) $\Longrightarrow$ (ii), pouze nalezená funkce f bude ležet v A.

(ii') $\Longrightarrow$ (iii') Je-li A slabě kompaktní a $\{x_n\}$ v A je dána, je $\varepsilon(A)$ τ_p kompaktní v $C(B_{X^*})$. Množina $\varepsilon(A)$ je tak τ_p-sekvenciálně kompaktní, a tedy má $\{\varepsilon(x_n)\}$ τ_p-konvergentní podposloupnost s limitou v $\varepsilon(A)$. Tedy je tato podposloupnost slabě konvergentní. $\square$

Věta 5.2.27 (Grothendieck)**.** *Nechť K je kompaktní topologický prostor a $A \subset C(K)$ je normově omezená. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Je-li A relativně τ_p-kompaktní, je A relativně slabě kompaktní.*

(b) *Je-li A τ_p-kompaktní, je A slabě kompaktní.*

Důkaz. (a) Nechť $\{f_n\}$ v A je dána. Dle Věty 5.2.25 existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ a $f \in C(K)$ taková, že $f_{n_k} \to f$ bodově. Pro libovolnou míru $\mu \in (C(K))^*$ pak z Lebesgueovy věty platí $\int_K f_{n_k}\, d\mu \to \int_K f\, d\mu$, a tedy $f_{n_k} \to f$ slabě. Množina A je tak relativně slabě sekvenciálně kompaktní, a tedy i relativně slabě kompaktní.

Tvrzení (b) se dokáže analogicky. $\square$

Definice 5.2.28. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Pak T je slabě kompaktní, pokud $\overline{T(B_X)}$ je slabě kompaktní.

Tvrzení 5.2.29. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Je-li T slabě kompaktní, je omezený.*

(b) *Operátor T je slabě kompaktní právě tehdy, když $\overline{T(A)}^w$ je slabě kompaktní pro každou $A \subset X$ omezenou.*

(c) *Je-li T kompaktní, je i slabě kompaktní.*

(d) *Je-li T omezený a X nebo Y je reflexivní, je T slabě kompaktní.*

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z faktu, že každá slabě omezená množina je normově omezená. Zbývající jsou pak zřejmá. $\square$

Věta 5.2.30 (Gantmacher)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Operátor T je slabě kompaktní.*

(ii) *Operátor T' je slabě kompaktní.*

(iii) *Platí $T''(X^{**}) \subset \varepsilon(Y)$.*

Důkaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Bez újmy na obecnosti předpokládejme že $\|T\| \leqslant 1$. Ukážeme, že z dané posloupnosti $\{y_n^*\}$ v B_{Y^*} lze vybrat podposloupnost $\{y_{n_k}^*\}$ takovou, že konverguje slabě k nějakému prvku $y^* \in B_{Y^*}$.

Z předpokladu víme, že $K = \overline{T(B_X)}^w$ je slabý kompakt v Y. Jelikož je zobrazení

$$\begin{aligned} r\colon (B_{Y^*}, w^*) &\to (C(K), \tau_p), \\ y^* &\mapsto y^*|_K \end{aligned}$$

spojité, je $r(B_{Y^*})$ kompakt v $(C(K), \tau_p)$. Proto existuje $y \in B_{Y^*}$ a podposloupnost $\{y_{n_k}^*\}$ v B_{Y^*} taková, že $y_{n_k}^*|_K \to y|_K$ bodově. Pak ale $y_{n_k}^*|_K \to y^*|_K$ v $C(K)$ slabě (viz Věta 5.2.27).

Ukážeme, že $T'y^*_{n_k} \to T'y^*$ slabě v X^*. Nechť $\psi \in X^{**}$ je dáno. Definujeme $\varphi\colon Y^*|_K \to \mathbb{F}$ jako

$$\varphi(y^*|_K) \to \psi(T'y^*), \quad y^* \in Y^*.$$

Pak φ je dodře definovaný funkcionál na $Y^*|_K$. Vskutku, pokud $y_1^*|_K = y_2^*|_K$, pak

$$(T'y_1^*)(x) = y_1^*(Tx) = y_2^*(Tx) = (T'y_2^*)(x), \quad x \in B_X.$$

Dále je φ omezený na $C(K)$, neboť pro $y^* \in Y^*$ platí

$$\begin{aligned}|\varphi(y^*|_K)| &= \left|\psi(T'y^*)\right| \leqslant \|\psi\| \left\|T'y^*\right\| = \|\psi\| \sup_{x\in B_X} \left|T'y^*\right| = \|\psi\| \sup_{x\in B_X} |y^*(Tx)| \\ &= \|\psi\| \sup_{y\in K} |y^*(y)| = \|\psi\| \, \|y^*|_K\|_{C(K)}\,.\end{aligned}$$

Rozšíříme φ na $\varphi'\colon C(K) \to \mathbb{F}$ dle Hahnovy–Banachovy věty. Pak

$$\psi(T'y^*_{n_k}) = \varphi(y^*_{n_k}|_K) = \varphi'(y^*_{n_k}|_K) \to \varphi'(y^*|_K) = \varphi(y^*|_K) = \psi(T'y^*).$$

Tedy $T'y^*_{n_k} \to T'y^*$ slabě a T' je slabě kompaktní.

(ii) $\implies$ (iii) Je-li T' slabě kompaktní, je T'' díky právě dokázané implikaci také slabě kompaktní. Nechť nyní $x^{**} \in B_{X^{**}}$ je dáno. Chceme ukázat, že $T''x \in \varepsilon(Y)$. Dle Goldstinovy věty **??** existuje net $\{x_i\}$ v B_X takový, že $\varepsilon(x_i) \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Nechť $\{y_j\}$ je podnet $\{x_i\}$ takový, že $\{T''\varepsilon(y_j)\}$ slabě konverguje k nějakému $y^{**} \in Y^{**}$. Protože

$$T''\varepsilon(y_j) = \varepsilon(Ty_j) \in \varepsilon(Y)$$

a $\varepsilon(Y)$ je slabě uzavřený v Y^{**}, máme $y^{**} \in \varepsilon(Y)$.

Avšak $\varepsilon(y_j) \xrightarrow{w^*} x^{**}$ a T'' je w^*-w^* spojitý, tedy

$$T''x^{**} = \lim T''\varepsilon(y_j) = y^{**},$$

tj. $T''x^{**} \in \varepsilon(Y)$.

(iii) $\implies$ (i) Nechť $\{x_i\}$ je net v B_X. Hledáme jeho slabě konvergentní podnet. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\varepsilon(x_i) \xrightarrow{w^*} x^{**}$ pro nějaké $x^{**} \in B_{X^*}$. Dle předpokladu existuje $y \in Y$ takové, že $T''x^{**} = \varepsilon(y)$. Pak

$$\varepsilon(y) = T''x^{**} = w^* - \lim_i T''\varepsilon(x_i) = w^* - \lim_i \varepsilon(Tx_i).$$

Tedy $Tx_i \to y$ slabě. □

Věta 5.2.31 (Krein)**.** *Nechť X je Banachův a $K \subset X$ je slabě kompaktní. Pak jsou množiny $\overline{\mathrm{bco}}K$ a $\overline{\mathrm{co}}K$ slabě kompaktní*

Důkaz. Nejprve ukážeme případ $\overline{\mathrm{bco}}K$. Uvažujeme operátory $r\colon X^* \to C(K)$ a $i\colon \operatorname{span} K \to M(K)$ definované jako

$$r(x^*) = x^*|_K, \quad x^* \in X^* \qquad \text{a} \qquad i(\sum_{i=1}^n c_i k_i = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{k_i}, \quad \sum_{i=1}^n c_i k_i \in \operatorname{span} K$$

(zde δ_k značí Dirakovu míru v bodě $k \in K$). Jelikož

$$\operatorname{bco} K = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i k_i \colon \sum_{i=1}^n |c_i| \leqslant 1, k_1, \ldots, k_n \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

platí $i(\operatorname{bco} K) \subset B_{M(K)}$.

Všimněme si, že r je slabě kompaktní. Vskutku, K je normově omezená množina v X, a tedy je díky w^*-τ_p spojitosti restrikce r množina $r(B_{X^*})$ τ_p-kompaktní a normově omezená v $C(K)$. Díky Větě 5.2.27 je tak $r(B_{X^*})$ slabě kompaktní. Proto je r, a potažmo i duální operátor $r'\colon M(K) \to X^{**}$ slabě kompaktní.

K dokončení důkazu stačí ukázat, že $\operatorname{bco} K$ je relativně slabě sekvenciálně kompaktní (viz Věta 5.2.26). Nechť $\{x_n\}$ je daná posloupnost v $\operatorname{bco} K$. Pak lze najít její podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ takovou, že $r'(i(x_{n_k}))$ slabě konverguje k nějakému prvku v X^{**}. Vzhledem k tomu, že $\varepsilon = r' \circ i$ na $\operatorname{span} K$, leží x^{**} ve slabém uzávěru $\varepsilon(X)$, což je opět $\varepsilon(X)$. Tedy $x^{**} = \varepsilon(x)$ pro nějaké vhodné $x \in X$. Množina $\operatorname{bco} K$ je tak relativně slabě kompaktní, a tedy je její uzávěr slabě kompaktní (viz Věta 5.2.26).

□

Kapitola 6

Funkcionální analýza II. - příklady

6.1 Algebry

6.1.1 Příklady a operace

Příklad 6.1.1. Ukažte, že každá konečně rozměrná algebra je izomorfní s nějakou algebrou matic.

Příklad 6.1.2. Ukažte, že každá dvourozměrná algebra je izomorfní buď s

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}\right\} \quad \text{nebo s} \quad \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}\right\}.$$

Příklad 6.1.3. Nechť $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2\}$, A je generována funkcemi $1, \mathrm{id}$ na U a B funkcemi $1, \mathrm{id}, \frac{1}{\mathrm{id}}$. Najděte $\Delta(A)$, $\Delta(B)$, $\sigma_A(\mathrm{id})$ a $\sigma_B(\mathrm{id})$.

Příklad 6.1.4. Nechť $A = \{f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) : f \text{ holomorfní na } \mathbb{D}\}$. Najděte Δ_A.

Příklad 6.1.5. Ukažte, že $\ell^1(\mathbb{Z})$ není C^*–algebra.

Příklad 6.1.6. Nechť $A = \mathcal{C}^1([0,1])$ s bodovým násobením a normou $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Ukažte, že $\Delta(A) = \{\varepsilon_x : x \in [0,1]\}$.
2. Ukažte, že $I = \{f \in A : f(0) = f'(0) = 0\}$ je ideál v A.
3. Ukažte, že A je polojednoduchá a A/I není polojednoduchá.

Příklad 6.1.7. Ukažte, že c_0 je maximální ideál v c, ale není to maximální ideál v ℓ^∞.

Příklad 6.1.8. Pro $\alpha \in (0,1]$ je prostor Lip_α všch α-hölderovských funkcí na $[0,1]$ s normou

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 1} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha}$$

Banachova algebra.

Příklad 6.1.9. Volterrova algebra $L^1[0,1]$ s násobením

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s), \quad t \in [0,1].$$

Příklad 6.1.10. Je-li x idempotent, najděte jeho spektrum a spočtěte rezolventní funkci.

Příklad 6.1.11. Nechť $p \in [1, \infty)$. Pak $A = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f} \in L^p(\mathbb{R})\}$ s normou

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_p$$

je Banachova algebra.

Příklad 6.1.12. Nechť x, y jsou idempotentní prvky v Banachově algebře. Pak $x = y$ nebo $\|xy - yx\| \geqslant 1$.

Příklad 6.1.13. Nechť $1 \leqslant p < \infty$. Ukažte, že $\ell^p(\Gamma)$ s bodovým násobením je Banachova algebra, která nemá omezenou aproximativní jednotku, ale má neomezenou aproximativní jednotku.

Příklad 6.1.14. Nechť A je algebra s jednotkou a involucí, $u \in G(A)$ splňuje $u^* = u$. Pak $x \mapsto u^{-1}x^*u$ je involuce.

Příklad 6.1.15. Nechť $A = \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ a $T(x_n) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Ukažte, že $\sigma(TT^*) \neq \sigma(T^*T)$.

Příklad 6.1.16. Nechť X je lokálně kompaktní a $A = \mathcal{C}_0(X)$. Ukažte, že $\sigma(f) = \mathrm{Rng}(f)$ pro každou $f \in A$právě tehdy, když X není σ-kompaktní.

6.1.2 Ideály a Gelfandova transformace

Příklad 6.1.17. Nechť P je konečně-dimenzionální projekce na Hilbertově prostoru H. Pak $\mathcal{K}(H)P$ je uzavřený levý modulární ideál v $\mathcal{K}(H)$.

Příklad 6.1.18. Najděte minimální uzavřené levé ideály v $\mathcal{K}(H)$ a maximální modulární levé ideály v $\mathcal{K}(H)$.

Příklad 6.1.19. Nechť X je lokálně kompaktní a $E \subset X$ kompakt. Pak $\mathcal{C}_0(X)/I(E) = \mathcal{C}(E)$ ve smyslu Banachových algeber.

Příklad 6.1.20. Nechť $A = \mathcal{C}(X)$, kde X je kompaktní a $f \in A$. Pak $\sigma_A(f) = \mathrm{Rng}(f)$.

Příklad 6.1.21. Nechť $A = \mathcal{C}_0(X)$, kde X je lokálně kompaktní a $f \in A$. Pak $\sigma_A(f) = \mathrm{Rng}(f) \cup \{0\}$.

Příklad 6.1.22. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ s násobením pomocí konvoluce, $B = \{(x_n) \in A : x_n = 0 \text{ pro } n < 0\}$. Ukažte, že $\sigma_A(e^1) \neq \sigma_B(e^1)$.

Příklad 6.1.23. Nechť $A = \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ a $B = \{(T \in A : M \text{ je } T \text{ invariantní}\}$, kde $M = \{(x_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}) : x_n = 0 \text{ pro } n \leqslant 0\}$. Nechť $T(x_n) = (x_{n-1})$. Najděte $\sigma_A(T)$ a $\sigma_B(T)$.

Příklad 6.1.24. Nechť $A = \mathcal{C}_0(X)$ a pro $E \subset X$, $I(A) = \{f \in A : f = 0 \text{ na } E\}$. Ukžte, že

- $I(E)$ je uzavřený ideál,
- $E \mapsto I(E)$ je bijekce mezi neprázdnými uzavřenými množinami v X a vlastními uzavřenými ideály v A,
- $I(E)$ je modulární právě tehdy, když E je kompaktní,
- $I(E)$ je maximaální modulární právě tehdy, když E je singleton.

Příklad 6.1.25. Uzavřený podprostor $I \subset L^1(G)$ je ideál právě tehdy, když I je translačně invariantní.

Příklad 6.1.26. Nechť G je $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{T}$. Ukažte, že $L^1(G)$ je Banachova algebra s involucí $f(x) \mapsto \overline{f(-x)}$, ale není to C^*-algebra.

Příklad 6.1.27. $\Delta(A)$ je lineárně nezávislá množina.

Příklad 6.1.28. Najděte $\Delta(A)$, je-li $A = L(\mathbb{C}^2)$.

Příklad 6.1.29. Najděte $\Delta(A)$, je-li $A = L(H)$ a H je Hilbertův.

Příklad 6.1.30. Ukažte, že $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ s bodovým násobením je algebra, na které nelze zavést strukturu Banachovy algebry.

Příklad 6.1.31. Najděte $\Delta(A)$ pro $L^1(G)$.

Příklad 6.1.32. Nechť $1 \leqslant p < \infty$ a $A = \ell^p(\mathbb{N})$. Najděte maximální modulární ideály v A a ukažte, že existuje maximální ideál, který není modulární.

Příklad 6.1.33. Nechť A je komutativní bez jednotky a $M \subset A$ je maximální ideál. Pak M je modulární právě tehdy, když M je kodimenze 1 a neobsahuje A^2.

Příklad 6.1.34. Nechť A je algebra celých funkcí na $\mathbb{C}$ s normou $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. Pak A je neúplná normovaná algebra s jednotkou obsahující maximální ideály nekonečné kodimenze.

Příklad 6.1.35. Nechť A je komutativní a Γ je Gelfandova reprezentace. Pak Γ je izomorfizmus právě tehdy, když existuje $c > 0$, že $\|x^2\| \geqslant c\|x\|^2$, $x \in A$.

Příklad 6.1.36. Nechť A, B jsou komutativní a $A \oplus B$ je jejich ℓ^∞-suma. Identifikujte $\Delta(A \oplus B)$ s disjunktním sjednocením $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$.

Příklad 6.1.37. Nechť A je komutativní s jednotkou a I_1, I_2 jsou uzavřené netriviální ideály splňující $A = I_1 \oplus I_2$. Pak $\Delta(A)$ není souvislá.

Příklad 6.1.38. Ukažte, že zobrazení $\pi : L^1(G) \to \mathcal{L}(L^2(G))$ je prostý $*$-homomorfizmus splňující $\|\pi\| \leqslant 1$, kde $\pi(f) = \pi_f : g \to f * g$, $f \in L^1(G)$, $g \in L^2(G)$.

Příklad 6.1.39. Ukažte, že $L^1(G)$ je polojednoduchá.

Příklad 6.1.40. Najděte $\Delta(\ell^p(\mathbb{N}))$ a $\Delta(\mathrm{Lip}_\alpha([0,1]))$.

Příklad 6.1.41. Nechť $A = AC(\mathbb{T})$. Ukažte, že $\Delta(A) = \mathbb{T}$ a že funkce $f \in A$ různá od 0 všude na $\mathbb{T}$ splňuje $1/f \in A$.

Příklad 6.1.42. Nechť $A = \mathcal{C}_b(X)$ pro úplně regulární prostor X. Pak $\Delta(A) = \beta X$ a Gelfandova transformace je rozšíření $f \in \mathcal{C}_b(X)$ na $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\beta X)$.

Příklad 6.1.43. Je-li G kompaktní a $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ různé, pak $\int_G \alpha(x)\overline{\beta(x)} = 0$.

Příklad 6.1.44. Nechť $A = L^\infty([0,1])$. Pak platí:

- Existuje pravděpodobnostní Radonova míra na $\Delta(A)$ tak, že $\int_I f\,dm = \int_{\Delta(A)} \widehat{f}\,d\mu$, $f \in A$.
- $\mu(V) > 0$ pro $V \subset \Delta(A)$ otevřenou neprázdnou.
- Je-li $\varphi : \Delta(A) \to \mathbb{C}$ komplexní omezená, pak existuje $f \in A$, že $\varphi = \widehat{f}$ μ-s.v.
- Je-li $V \subset \Delta(A)$ otevřená, je $\overline{V}$ otevřená.
- Je-li $E \subset \Delta(A)$ borelovská je $\mu(\operatorname{Int} E) = \mu(E) = \mu(\overline{E})$.
- Jsou-li $U, V \subset \Delta(A)$ otevřené disjunktní, pak $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
- Je-li $\varphi \in L^\infty(\mu)$, pak existuje právě jedna $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\Delta(A))$, že $\varphi = \widehat{f}$ μ-s.v.
- Žádný bod $\Delta(A)$ není izolovaný.
- Jsou-li $E_i \subset I$ měřitelné, pak existuje $E \subset I$ měřitelná, že
  - $E_i \subset E$ m-s.v. pro všechny i,
  - splňuje-li F tuto podmínku, je $E \subset F$ m-s.v.

6.2 Neomezené operátory

6.2.1 Příklady operátorů a jejich spektra

Příklad 6.2.1. Nechť $H = L^2[0,1]$ a

$$\begin{aligned} D(T_1) &= \{f \text{ absolutně spojité} : f' \in H\}, \\ D(T_2) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1)\}, \\ D(T_3) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Nechť $T_n f = if'$, $f \in D(T_n)$ pro $n = 1, 2, 3$.

Pak

- $T_3 \subset T_2 \subset T_1$,
- $T_1^* = T_3$, $T_2^* = T_2$, $T_3^* = T_1$,
- všechny tři operátory jsou uzavřené, T_3 je symetrický, T_1 není symetrický,
- $\sigma(T_1) = -\emptyset$, $\sigma(T_2) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\sigma(T_3) = \mathbb{C}$.

Příklad 6.2.2. Naděte hustě definovaný T tak, že $D(T^*) = \{0\}$.

Příklad 6.2.3. Nechť $D(T) = \{f$ absolutně spojitá na $[0,1] : f' \in L^2([0,1]), f(0) = 0\}$ a $Tf = if'$. Pak $\sigma(T) = \emptyset$.

Příklad 6.2.4. Rovnice $f - f'' = g$ má pro každou $g \in L^2([0,1])$ řešení splňující

- f' absolutně spojitá, $f'' \in L^2([0,1])$,
- $f(0) = f(1) = 0$,
- $f'(1) = f'(0) = 0$,
- $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$.

Příklad 6.2.5. Ukažte, že složení uzavřených operátorů nemusí být uzavřený operátor.

Příklad 6.2.6. Nechť T je operátor, který lze uzavřít. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost v $D(T)$ konvergující k x a $\sup_n \|Tx_n\| < \infty$, pak $x \in D(\overline{T})$.

Příklad 6.2.7. Nechť $f, f' \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a $\{h_n\}$ je aproximativní jednotka. Pak $f * h_n \to f$ ve $W^{1,p}$ pro $p \in [1, \infty)$.

Příklad 6.2.8. Nechť $H = L^2([0,1])$, g měřitelná na $[0,1]$, $D(T) = \{f \in H : gf \in H\}$ a $Tf = gf$. Pak T je uzavřený.

Příklad 6.2.9. Nechť $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(T) = \{f$ absolutně spojitá : $f' \in H\}$ a $Tf = f'$. Pak T je uzavřený.

Příklad 6.2.10. $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ je husté v $W^{1,p}(\mathbb{R})$ pro $p \in [1, \infty)$.

Příklad 6.2.11. Nechť $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(T) = \{f$ absolutně spojitá : $f' \in H\}$ a $Tf = if'$. Nechť $D(S) = \{f \in H : -xf(x) \in H\}$ a $Sf(x) = -xf(x)$. Nechť $F : H \to H$ je Fourierova transformace. Pak $F(D(T)) = D(S)$ a $FTf = SFf$, $f \in D(T)$.

Příklad 6.2.12. Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, pak $F^{-1}f \in L^1(\mathbb{R})$ a $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Příklad 6.2.13. Prozkoumejte následující variantu příkladu (6.2.1), kde uvažujme operátor $Tf = if'$ na $L^2([0,\infty))$ s různými okrajovými podmínkami:

- $f(0) = 0$,
- $f(0) = \lim_{t\to\infty} f(t)$,
- $f(0) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Zjistěte, co s příslušnými operátory provede Laplaceova transformace.

Příklad 6.2.14. Nechť $T : H \to H$ je samoadjungovaný a $U : H \to H$ je unitární. Pokud $U(D(T)) = D(S)$ a $SU = UT$, pak S je samoadjungovaný.

Příklad 6.2.15. Nechť $H = L^2([0,1])$ a $D(T) = \{f \in H : f'$ absolutně spojitá$, f'' \in H, f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\}$ a $Tf = f''$. Najděte $\operatorname{Rng} T$ a T^*.

Příklad 6.2.16. Nechť $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(T) = \{f \in H : f$ absolutně spojitá$, f' \in H$ a absolutně spojitá$, f'' \in H\}$, $D(S) = \{f \in H : x^2 f(x) \in H\}$, $Tf = -f''$, $Sf = (\mathrm{id})^2 f$. Pak $F(D(T)) = D(S)$ a $FT = SF$.

Příklad 6.2.17. Nechť $H = L^2([0,1])$, $D(T) = f \in W^{2,2} : Tf = f'', f(0) = f(1) = 0\}$ a $Tf = f''$. Pak $T^* = T$.

Příklad 6.2.18. Nechť $H = L^2(X,\mu)$, $g : X \to \mathbb{C}$ μ-měřitelná a $Tf = gf$, kde $D(T) = \{f \in H : Tf \in H\}$. Pak $\overline{D(T)} = H$ a T je uzavřený.

Příklad 6.2.19. Nechť $H = L^2([0,1])$, $Tf = f'$, kde $D(T) = \mathscr{D}(0,1)$. Pak $\overline{T}f = f'$ a $D(\overline{T}) = W_0^{1,2}(0,1)$.

6.2.2 Cayleyova transformace a spektrální rozklad

Příklad 6.2.20. Najděte Cayleovu transformaci operátorů T_1 a T_3 z příkladu (6.2.1).

Příklad 6.2.21. Najděte Cayleovu transformaci operátoru $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$ pro φ reálnou.

Příklad 6.2.22. Najděte Cayleovu transformaci operátoru derivace na $\mathbb{R}$ (příklad (6.2.11).

Příklad 6.2.23. Najděte Cayleovu transformaci symetrických operátorů z příkladu (6.2.13).

Příklad 6.2.24. Nechť $H = L^2$ a $V = M_\varphi$ pro funkci φ s hodnotami v $\mathbb{T}$. Najděte symetrický operátor, jehož je V Cayleyovou transformací.

Příklad 6.2.25. Nechť $H = L^2(-1,1)$, H_1 jsou funkce z H nesené $(-1,0)$ a H_2 jsou funkce nesené $(0,1)$. Nechť $V : H_1 \to H_2$ je definován jako $Vf(x) = f(-x)$. Najděte symetrický operátor, jehož je V Cayleyovou transformací.

Příklad 6.2.26. Nechť $H = \{f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n, |z| < 1\}$ splňující $\|f\|^2 = \sum |c_n|^2 < \infty$. Pak $H = \ell^2$ pomocí zobrazení $f \mapsto \{c_n\}$.

- Položte $Vf(z) = zf(z)$ a najděte symetrický T splňující $V = U_T$. Ukažte, že $\operatorname{Rng}(T + iI_= H$ a kodimenze $\operatorname{Rng}(T - iI)$ je 1.
- Položte $Vf(z) = zf(z^2)$. Najděte T tak, že $V = U_T$ a spočtěte indexy defektu T.

Příklad 6.2.27. Ukažte, že $W^{1,2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Příklad 6.2.28. Nechť $H = L^2([0,2\pi])$, $D(T) = \{f \in W^{1,2}(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi)\}$ a $Tf = if'$. Nechť $K = \ell^2(\mathbb{Z})$, $D(S) = \{(a_n) \in K : (na_n) \in K\}$ a $S(a_n) = (na_n)$. Nechť $F : H \to K$ je Fourierova transformace, tj. rozvoj funkce do Fourierových koeficientů. Pak $F(D(T)) = D(S)$ a $FT = SF$.

Příklad 6.2.29. Nechť $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(T) = \{f \in H : \mathrm{id}\, f \in H\}$ a $Tf = (\mathrm{id})f$. Pak $T^* = T$ a spektrální míra $E_A f = f\chi_A$, $A \subset \mathbb{R}$ borelovská splňuje $T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}\, dE$.

Příklad 6.2.30. Najděte spektrální rozklad samoadjungovaných operátorů z předcházejících příkladů.

Kapitola 7

Nelineární funkcionální analýza

7.1 Diferenciální počet v Banachových prostorech

7.1.1 Gateauxova a Fréchetova derivace

Definice 7.1.1. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $U \subset X$ otevřená množina, $f\colon U \to Y$ je zobrazení a $x \in U$. Směrová derivace f v bodě x ve směru $h \in X$ je definována jako

$$\delta f(x;h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}, \tag{7.1}$$

pokud limita existuje.

Pokud $\delta f(x;h)$ existuje pro každé $h \in X$ a zobrazení $L\colon X \to Y$ definované jako $L(h) = \delta f(x;h)$ je prvek $L(X,Y)$, řekneme, že f je gateauxovsky diferencovatelná v x. V tomto případě značíme $L = Df(x)$.

Pokud existuje $Df(x)$ a limita (7.1) je stejnoměrná vzhledem k $h \in S_X$, řekneme, že má f v bodě x Fréchetovu derivaci. Tu pak značíme jako $f'(x)$.

Poznámky 7.1.2. (a) Z definice plyne, že $f'(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $L \in L(X,Y)$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{7.2}$$

(b) Existuje-li $f'(x)$, je f spojitá v x.

(c) Uvažujeme-li funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

existuje $Df(0,0)$, ale f je nespojitá v $(0,0)$.

Důkaz. (a) K důkazu „$\Longrightarrow$“ uvažujme $L = f'(x)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $|t| < \delta$ a $h \in S_X$ platí

$$\left\| \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - Lh \right\| < \varepsilon.$$

Nechť $u \in \delta U_X$. Pak $u = tv$, kde $v \in S_X$ a $|t| < \delta$. Pak ale máme

$$\frac{\|f(x+u)-f(x)-Lu\|}{\|u\|} = \frac{\|f(x+tv)-f(x)-L(tv)\|}{|t|} = \left\| \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} - Lv \right\| < \varepsilon.$$

„$\Longleftarrow$“ Máme-li $L \in L(X,Y)$ splňující (7.2), pro každé $h \in X$ platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)-L(th)+L(th)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)-L(h)}{t} + L(h) = L(h).$$

Tedy $L(h) = Df(x)$.

Nechť nyní $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon, \quad \|h\| < \delta.$$

Nechť $|t| < \delta$ a $h \in S_X$. Pak

$$\left\| \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - Lh \right\| = \left\| \frac{f(x+th)-f(x)-L(th)}{t} \right\| = \frac{\|f(x+th)-f(x)-L(th)\|}{\|th\|} < \varepsilon.$$

(b) Zjevně pro $L = f'(x)$ platí

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\| &= \lim_{h\to 0} \|h\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh + Lh\|}{\|h\|} \\ &\leqslant \lim_{h\to 0} \|h\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \|h\| \|L\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

(c) Pro tuto f máme $Df(0,0) = 0$, ale f zřejmě není spojitá v $(0,0)$. □

Věta 7.1.3. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $U \subset X$ a $V \subset Y$ jsou otevřené množiny. Nechť dále $g(U) \subset V$ a $f\colon V \to Z$.*

(a) Je-li g fréchetovsky diferencovatelné v $a \in U$ a f je fréchetovsky diferencovatelné v $g(a)$, pak $f \circ g\colon U \to Z$ je fréchetovsky diferencovatelné v a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a).$$

(b) Je-li f je fréchetovsky diferencovatelné v $g(a)$, $h \in X$ a $\delta g(a;h)$ existuje, pak

$$\delta(f \circ g)(a;h) = f'(g(a))\delta g(a;h).$$

(c) Je-li g gateauxovsky diferencovatelné v $a \in U$ a f je fréchetovsky diferencovatelné v $g(a)$, pak $f \circ g\colon U \to Z$ je gateauxovsky diferencovatelné v a a platí

$$D(f \circ g)(a) = f'(g(a)) \circ Dg(a).$$

(d) Je-li g gateauxovsky diferencovatelné v $a \in U$ a f je lipschitzovské a gateauxovsky diferencovatelné v $g(a)$, pak $f \circ g\colon U \to Z$ je gateauxovsky diferencovatelné v a a platí

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a).$$

Důkaz. (a) Položme $b = g(a)$ a

$$\omega(h) = g(a+h) - g(a) - g'(a)(h), \quad \eta(k) = f(b+k) - f(b) - f'(b)(k).$$

Tato zobrazení jsou definována na nějakých vhodných okolí 0. Nechť $\varepsilon \in (0,1)$ je libovolné. Pak existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

$$\|\omega(h)\| < \varepsilon \|h\|, \quad \|\eta(k)\| < \varepsilon \|k\|,$$

kdykoliv $h \in \Delta U_X$ a $k \in \Delta U_Y$. Položme $\delta = \Delta \left(1 + \|g'(a)\|\right)^{-1}$. Pak pro $h \in \delta U_X$ platí

$$\left\|g'(a)(h) + \omega(h)\right\| \leqslant \left(\left\|g'(a)\right\| + \varepsilon\right) \|h\| < \Delta$$

Proto

$$\begin{aligned}\left\|f(g(a+h)) - f(g(a)) - f'\left(g(a)\right)\left[g'(a)(h)\right]\right\| &= \left\|f\left(b + g'(a)(h) + \omega(h)\right) - f(b) - f'(b)\left[g'(a)(h)\right]\right\| \\ &= \left\|f'(b)(\omega(h)) + \eta\left(g'(a)(h) + \omega(h)\right)\right\| \\ &\leqslant \left\|f'(b)\right\| \varepsilon \|h\| + \varepsilon \left(\left\|g'(a)\right\| \|h\| + \varepsilon \|h\|\right) \\ &< \left(\left\|f'(b)\right\| + \left\|g'(a)\right\| + 1\right) \varepsilon \|h\|\end{aligned}$$

a důkaz je hotov.

(b) Je-li $h \in X$ dáno, definujme $\varphi(t) = g(a+th)$, $t \in \mathbb{R}$. Pak $\varphi'(0) = \delta g(a;h)$, přičemž

$$\varphi'(0)(t) = t\delta g(a;h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dle (a) platí

$$\begin{aligned}\delta(f \circ g)(a;h) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(g(a+th)) - f(g(a))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t) - (f\circ\varphi)(0)}{t} \\ &= (f \circ \varphi)'(0) = f'(b)\delta g(a;h).\end{aligned}$$

(c) Zjevně platí $L = f'(b) \circ Dg(a) \in L(X,Z)$. Dle (b) však platí $L = \delta(f \circ g)(a;h)$ pro každé $h \in X$.

(d) Nechť f je L-lipschitzovská. Nechť $h \in X$ je dáno. Pro $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ splňující $a + th \in U$ a $b + tDg(a)(h) \in V$ pak platí

$$\frac{1}{t}\left(f(g(a+th)) - f(g(a))\right) = \frac{1}{t}\left(f(g(a+th)) - f\left(g(a) + tDg(a)h\right)\right) + \frac{1}{t}\left(f\left(g(a) + tDg(a)(h)\right) - f(g(a))\right).$$

Druhý člen konverguje k výrazu $Df(b)(Dg(h))$, zatímco první člen díky lipschitzovskosti konverguje k 0, neboť

$$\left\|\frac{1}{t}\left(f(g(a+th))-f\left(g(a)+tDg(a)h\right)\right)\right\| \leqslant L\left\|\frac{1}{t}\left(g(a+th)-g(a)-tDg(a)(h)\right)\right\|.$$

$\square$

Příklad 7.1.4. Uvažujme funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, x^2)$, a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2, \\ x, & y = x^2, \end{cases}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pak $Df(0,0) = 0$, $g'(0) = (1,0)$ a $D(f \circ g)(0) = 1$.

Lemma 7.1.5 (O střední hodnotě)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $f\colon X \to Y$ je diferencovatelné v každém bodě úsečky spojující body $a, b \in X$ ve směru $b - a$. Pak*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|\delta f(a + t(b-a); b-a)\|$$

a

$$\|f(b) - f(a) - \delta f(a; b-a)\| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|\delta f(a + t(b-a); b-a) - \delta f(a; b-a)\|.$$

Důkaz. Pro $a, b \in X$ položme $h = b - a$. Definujeme $g(t) = f(a + th)$, $t \in [0,1]$. Nechť $y^* \in S_{Y^*}$ splňuje $\|f(b) - f(a)\| = y^*(f(b) - f(a))$. Pak

$$(y^* \circ g)'(t) = y^*(\delta f(a + th; h)), \quad t \in [0,1].$$

Existuje tak $\xi \in (0,1)$ splňující $(y^* \circ g)(1) - (y^* \circ g)(0) = (y^* \circ g)'(\xi)$. Dostáváme tak

$$\|f(b) - f(a)\| = y^*(g(1) - g(0)) = (y^* \circ g)'(\xi) \leqslant \|y^*\| \|\delta f(a + \xi h)(h)\| \|h\| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|\delta f(a + t(b-a); b-a)\|.$$

V druhém případě uvažujme

$$g(t) = y^*(f(a + th) - t\delta f(a; h)), \quad t \in [0,1],$$

kde $y^* \in S_{Y^*}$ splňuje

$$\|f(b) - f(a) - \delta f(a; b-a)\| = y^*(f(b) - f(a) - \delta f(a; b-a)).$$

Pak máme $\xi \in (0,1)$ jako výše, a dostáváme

$$\|f(b) - f(a) - \delta f(a; b-a)\| = g(1) - g(0) = g'(\xi) = y^*(\delta f(a + \xi h; h) - \delta f(a; h)) \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|\delta f(a + th; h) - \delta f(a; h)\|.$$

$\square$

Věta 7.1.6. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $a \in X$ a f je zobrazení mající spojitou Gateauxovu derivaci v a. Pak existuje $f'(a)$.*

Důkaz. Důkaz plyne z odhadu

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a) - \delta f(a; h)\| &\leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|\delta f(a + th); h) - \delta f(a; h)\| = \sup_{t \in [0,1]} \|Df(a + th)h - Df(a)(h)\| \\ &\leqslant \sup_{t \in [0,1]} \|Df(a + th) - Df(a)\| \|h\|. \end{aligned}$$

$\square$

7.1.2 Věta o inverzním zobrazení a implicitních funkcích

Definice 7.1.7. Nechť $f\colon X \times Y \to Z$, kde X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Pokud zobrazení $x \mapsto f(x, y_0)$ má derivaci (Fréchetovu nebo Gateauxovu) v bodě x_0, značíme ji $f'_x(x_0, y_0)$ (nebo $Df_G(x_0, y_0)$).

Poznámka 7.1.8. Pokud v situaci Definice 7.1.7 existuje $f'(x_0, y_0)$, existují i obě parciální derivace a platí

$$f'(x_0, y_0)(h, k) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k, \quad (h, k) \in X \times Y.$$

Důkaz. Je-li $L = f'(x_0, y_0)$, označme $L_x \in L(X, Z)$ jako $L_x h = L(h, 0)$. Pak pro funkci $\varphi(x) = f(x, y_0)$ a vektor $h \in X$ platí

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - L_x h = f((x_0, y_0) + (h, 0)) - f(x_0, y_0) - L(h, 0) = o(\|(h, 0)\|).$$

Tedy $L_x = \varphi'(x_0)$.

Podobně platí $L_y = \psi'(y_0)$, kde $L_y k = L(0, k)$ a $\psi(y) = f(x_0, y)$. Tedy

$$L(h, k) = L(h, 0) + L(0, k) = L_x h + L_y k = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k, \quad (h, k) \in X \times Y.$$

□

Lemma 7.1.9. *Nechť X je Banachův.*

(a) Pokud $f\colon X \to X$ je kontrakce, je $I - f$ homeomorfizmus X na X.

(b) Pokud $f\colon B(0, \delta) \to X$ splňuje $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$ pro nějaké $k \in [0, 1)$ a $\|f(0)\| < \delta(1 - k)$, pak $I + f$ má jednoznačný kořen ležící v $U(0, \delta)$. Navíc,

$$U(0, \rho) \subset (I + f)(U(0, \delta)),$$

kde $\rho = (1 - k)\delta - \|f(0)\|$.

Důkaz. (a) Pro dané $y \in X$ si povšimneme, že $x \mapsto f(x) + y$ je kontrakce. Tedy existuje právě jedno $x \in X$ splňující $x = f(x) + y$. To ale znamená, že zobrazení $g = I - f$ je prosté a na. Navíc odečtením vztahů

$$x_i = f(x_i) + y_i, \quad i = 1, 2,$$

dostáváme

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|y_1 - y_2\| \leqslant k\|x - 1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|.$$

Tedy

$$\left\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\right\| = \|x_1 - x_2\| \leqslant (1 - k)^{-1}\|y_1 - y_2\|,$$

a g^{-1} je tak spojité zobrazení.

(b) Jelikož

$$-\|f(0)\| + \|-f(x)\| \leqslant \|f(0) - f(x)\| \leqslant k\|0 - x\| = k\|x\|, \quad x \in B(0, \delta),$$

platí

$$\|-f(x)\| \leqslant k\|x\| + \|f(0)\| < k\delta + \|f(0)\| < \delta, \quad x \in B(0, \delta).$$

Tedy $-f\colon B(0, \delta) \to B(0, \delta)$ je kontrakce, a tedy má právě jeden pevný bod x, tj. x splňuje $x = -f(x)$. Tedy zobrazení $I + f$ má právě jeden kořen, který splňuje

$$\|x\| = \|-f(x)\| < \delta.$$

Nechť nyní $y \in U(0, \rho)$ je dáno. Položíme $g(x) = y - f(x)$, $x \in B(0, \delta)$. Pak pro $x \in B(0, \delta)$ platí

$$\|g(x)\| < \rho + \|-f(x)\| \leqslant \rho + k\|x\| + \|f(0)\| \leqslant \rho + k\delta + \|f(0)\| = \delta.$$

Tedy g je kontrakce na $B(0, \delta)$, a tudíž má právě jeden pevný bod $x \in B(0, \delta)$, který tak splňuje $x = y - f(x)$. Jelikož $\|x\| = \|g(x)\| < \delta$, zobrazení $I + f$ splňuje $U(0, \rho) \subset (I + f)(U(0, \delta))$. □

Věta 7.1.10 (O implicitních funkcích - verze 1)**.** *Nechť X, Y, Z jsou Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená množina obsahující x_0 a $V \subset Y$ otevřená množina obsahující y_0. Nechť $F\colon U \to V \to Z$ je spojité a spojitě diferencovatelné vzhledem k y. Nechť $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_{F,y}(x_0, y_0)$ je izomorfizmus Y na Z.*

Pak existují koule $B(x_0, r) \subset U$ a $B(y_0, \delta) \subset V$ takové, že pro každé $x \in U(x_0, r)$ existuje právě jedno $f(x) \in U(y_0, \delta)$ splňující $F(x, f(x)) = 0$, $x \in U(x_0, r)$. Toto zobrazení je navíc spojité.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Nechť $L = F'_{F,y}(0, 0)$ a I značí identicky zobrazení na Y. Máme

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y + \left(L^{-1}F(x, y) - y\right) = 0. \tag{7.3}$$

Pro pevné x dostatečné blízké x_0 tak uvažujme zobrazení $S(x, \cdot) = L^{-1}F(x, \cdot) - I$.

Jelikož

$$S'_{F,y}(0, 0) = L^{-1} \circ L - I = 0$$

a $S'_{F,y}$ je spojité zobrazení, existuje $k \in (0, 1)$ a $\delta > 0$ takové, že $\left\|S'_{F,y}(x, y)\right\| \leqslant k$ na $B(0, \delta) \times B(0, \delta) \subset U \times V$. Z Lemmatu 7.1.5 pak plyne odhad

$$\|S(x, y_1) - S(x, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|, \quad (x, y_i) \in B(0, \delta) \times B(0, \delta), i = 1, 2.$$

Jelikož $S(0,0) = 0$ a $S(\cdot, 0)$ je spojité, existuje $r \in (0, \delta)$ takové, že

$$\|S(x, 0)\| < \delta(1-k), \quad x \in B(0, r).$$

Pro každé $x \in B(0, r)$ nyní aplikujeme Lemma 7.1.9(b) pro zobrazení $S(x, \cdot)\colon B(0, \delta) \to Y$ a dostaneme tak jediný kořen $f(x) \in U(0, \delta)$ funkce $I + S(x, \cdot)$. Dle (7.3) pak rovnost $f(x) + S(x, f(x)) = 0$ znamená $F(x, f(x)) = 0$.

Jelikož $0 + S(0,0) = 0$, platí díky jednoznačnosti $f(0) = 0$.

Spojitost f pak plyne z následujícího odhadu. Pokud

$$0 = f(x_1) + S(x_1, f(x_1)) = f(x_2) + S(x_2, f(x_2)),$$

pak

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - f(x_2)\| &= \|S(x_1, f(x_1)) - S(x_2, f(x_2))\| \leqslant \|S(x_1, f(x_1)) - S(x_1, f(x_2))\| + \|S(x_1, f(x_2)) - S(x_2, f(x_2))\| \\ &\leqslant k\,\|f(x_1) - f(x_2)\| + \|S(x_1, f(x_2)) - S(x_2, f(x_2))\|\end{aligned}$$

implikuje odhad

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant (1-k)^{-1}\,\|S(x_1, f(x_2)) - S(x_2, f(x_2))\|\,.$$

Pokud však $x_1 \to x_2$, pravá strana konverguje k 0. Tím je spojitost f dokázána. □

Věta 7.1.11. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, U_0 je otevřené okolí x_0, $G\colon U_0 \to Y$ je spojitě diferencovatelné a splňuje $(G'_F(x_0))^{-1}$ existuje.*

Pak existuje okolí $U \ni x_0$ v U_0 takové, že $G|_U$ je homeomorfismus na okolí $G(U) \ni G(x_0)$. Dále existuje okolí $V \subset U$ bodu x_0 takové, že $(G|_U)^{-1} \in \mathcal{C}^1(G(V))$ a platí

$$\left(G|_U^{-1}\right)'(G(x)) = \left(G'(x)\right)^{-1}.$$

Dále, $G|_U^{-1}$ je tak diferencovatelné jako je diferencovatelné G.

Důkaz. Použijeme Větu 7.1.10 pro zobrazení $F\colon X \times Y \to Y$ definované jako $F(x, y) = G(x) - y$, přičemž prohodíme role x a y. Existují tak okolí $W = U(y_0, r)$ a $B(x_0, \delta) \subset U$ spolu s jednoznačným zobrazením $f\colon W \to U(x_0, \delta)$, které splňuje $f(y_0) = x_0$ a $F(f(y), y) = 0$, tj. $Gfy = y$ na W. Pak je funkce $g = G|_{U(x_0,\delta)}$ prostá a zjevně spojitá. Nyní stačí položit $U = f(W) = g^{-1}(W)$.

Ukážeme nyní diferencovatelnost f na jistém okolí $W_0 \ni y_0$. Jelikož je f spojité a $G'(f(y_0))$ je izomorfizmus, je izomorfizmus i $G'(f(y))$ pro každé y z vhodného okolí $W_0 \ni y_0$. Fixujme $y \in W_0$ a položme $L = G'f(y)^{-1}$. Označme $x = f(y)$ a $\overline{x} = f(y+h)$. Pak

$$\|f(y+h) - f(y) - Lh\| \leqslant \|L\|\,\left\|G'(f(y))\,(f(y+h) - f(y)) - h\right\| = \|L\|\,\left\|G'(x)(\overline{x} - x) - (G(\overline{x}) - G(x))\right\|.$$

Nechť $\varepsilon \in (0, \|L\|^{-1})$ je dáno. Nalezneme $\Delta > 0$ pro definice $G'(x)$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že $\|f(y+h) - f(y)\| < \Delta$ pro $h \in U(0, \delta)$. Pak

$$\|f(y+h) - f(y) - Lh\| \leqslant \|L\|\,\varepsilon\,\|\overline{x} - x\| = \|L\|\,\varepsilon\,\|f(y+h) - f(y)\|\,. \tag{7.4}$$

Speciálně tak máme

$$\|f(y+h) - f(y)\| - \|L\|\,\|h\| \leqslant \|L\|\,\varepsilon\,\|f(y+h) - f(y)\|\,,$$

tj.

$$(1 - \|L\|\,\varepsilon)\,\|f(y+h) - f(y)\| \leqslant \|L\|\,\|h\|\,.$$

Dosazením do (7.4)

$$\|f(y+h) - f(y) - Lh\| \leqslant (1 - \|L\|\,\varepsilon)^{-1}\,\|L\|^2\,\varepsilon\,\|h\|\,, \quad h \in U(0, \delta),$$

což znamená diferencovatelnost f v bodě y.

Zderivujeme-li nyní rovnici $Gfy = y$, dostaneme

$$f'(y) = G'(f(y))^{-1}.$$

Ze spojitosti funkcí na pravé straně pak plyne spojitost derivace $y \mapsto f'(y)$.

Ohledně derivace vyšších řádů postupujeme indukcí. □

Věta 7.1.12 (O implicitních funkcích - verze 2)**.** *Ve Větě 7.1.10 dědí funkce f na nějakém okolí $U(x_0, r)$ hladkost po F.*

Důkaz. Nechť $L = F'_y(x_0, y_0)$, $X_0 = X \times Y$ a $G\colon U \times V \to X_0$ je definované jako $G(x, y) = (x, L^{-1}F(x, y))$. Je-li $F \in \mathcal{C}^m(U \times V)$, je i $G \in \mathcal{C}^m(U \times V)$. Navíc je $G'(x_0, y_0)$ izomorfizmus na X_0, neboť

$$G'(x_0, y_0)(h, k) = (h, L^{-1}F'_x(x_0, y_0)h + k), \quad (h, k) \in X_0.$$

Nechť $f\colon U(x_0, r) \to U(y_0, \delta)$ je implicitní funkce z Věty 7.1.10 a nechť $W \ni (x_0, y_0)$ je takové, že $G|_W^{-1}$ je v $\mathcal{C}^m$. Jelikož pro $x \in U(x_0, r)$ platí $(x, L^{-1}F(x, y)) = (x, 0)$ právě tehdy, když $y = f(x)$, máme $G^{-1}(x, 0) = (x, f(x))$. Z diferencovatelnosti G pak plyne diferencovatelnost f. □

7.1.3 Volné a vázané extrémy

Věta 7.1.13. *Nechť $U \subset X$ je otevřená podmnožina Banachova prostoru X a $f\colon U \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in U$ lokální extrém. Pokud pro $h \in X$ existuje $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$, pak je nulová.*

Důkaz. Funkce $g(t) = f(a + th)$, $t \in \mathbb{R}$, nabývá v bodě 0 lokálního extrému. Tedy $0 = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial h}(a)$. □

Definice 7.1.14. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $f\colon X \to Y$. Pro $a, h, k \in X$ položme $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to Y$ jako $\varphi(t, s) = f(a + th + sk)$, $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Pak je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, s) = \frac{\partial f}{\partial h}(a + sk)$$

zobrazení z $\mathbb{R}$ do Y. Položme

$$\partial^2 f(a, h, k) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, s)\right)|_{s=0},$$

pokud tato limita existuje. Tento objekt se nazývá druhá směrová derivace f ve směrech h a k.

Pokud je zobrazení

$$(h, k) \mapsto \delta^2 f(a, h, k), \quad (h, k) \in X$$

spojité bilineární zobrazení, nazývá se $\delta^2(f, \cdot, \cdot)$ druhá Gateauxova derivace.

Poznámka 7.1.15. Pokud $f\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h = e_i$ a $k = e_j$, pak

$$\delta^2 f(a, e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Jelikož $\varphi(t, s) = f(a + te_i + se_j)$ a

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0, s) = \partial f(a + se_j, e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + se_j),$$

máme

$$\partial^2 f(a, e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

□

Věta 7.1.16 (Taylorovy formule)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův, $f\colon X \to Y$, $a, h \in X$ a $I = \{a + th\colon t \in [0, 1]\}$.*

(a) Je-li zobrazení $x \mapsto \delta f(x, h)$ spojité na I, platí

$$f(a + h) - f(a) = \int_0^1 \delta f(a + th, h)\, dt.$$

(b) Nechť je $x \mapsto \delta^2 f(x, h, h)$ spojité na I. Pak

$$f(a + h) = f(a) + \delta f(a, h) + \int_0^1 (1 - t)\delta^2 f(a + th, h, h)\, dt.$$

Důkaz. (a) Nechť $y^* \in Y^*$ je libovolné a $g(t) = y^*(f(a + th))$, $t \in [0, 1]$. Pak $g'(t) = y^*(\delta f(a + th, h)$. Tedy

$$y^*(f(a + h) - f(a)) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt = y^*\left(\delta f(a + th, h)\, dt\right).$$

Jelikož je y^* libovolné, je důkaz hotov.

(b) Položme

$$g(t) = (1 - t)\delta f(a + th, h), \quad t \in [0, 1].$$

Pak z definice druhé derivace plyne rovnost

$$g'(t) = -\delta f(a + th, h) + (1 - t)\delta^2 f(a + th, h, h), \quad t \in [0, 1]. \tag{7.5}$$

(Vskutku, pro $t_0 \in [0, 1]$ platí

$$\delta^2 f(a + t_0 h, h, h) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\partial f(a + t_0 h + sh, h)\right)_{s=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\partial f(a + th, h)\right)_{t=t_0}.)$$

Jelikož jsou oba členy na pravé straně (7.5) spojité, můžeme psát (viz důkaz (a))

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) = -\int_0^1 \delta f(a + th, h)\,dt + \int_0^1 (1-t)\delta^2 f(a + th, h, h)\,dt.$$

Z prvního tvrzení pak plyne

$$-\delta f(a, h) = -f(a + h) + f(a) + \int_0^1 (1-t)\delta^2 f(a + th, h, h)\,dt,$$

čímž je důkaz hotov. ☐

Definice 7.1.17. Pokud $\delta f(a, h) = 0$ pro každé $h \in X$, nazývá se a kritický bod f.

Věta 7.1.18 (Lagrangeova nutná podmínka)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ má v $a \in X$ lokální minimum. Poku pro $h \in X$ existuje $\delta^2 f(a, h, h)$, platí $\delta^2 f(a, h, h) \geqslant 0$.*

Důkaz. Položme $g(t) = f(a + th)$, $t \in \mathbb{R}$. Pak $g''(0) = \delta^2 f(a, h, h)$ a aplikací nutné podmínky pro reálně funkce reálné proměnné důkaz zakončíme. ☐

Věta 7.1.19 (Lagrangeova postačující podmínka)**.** *Nechť $a \in X$ je kritický bod $f : X \to \mathbb{R}$ a nechť existuje okolí $U \ni a$ takové, že $x \mapsto \delta^2 f(a, \cdot, \cdot)$ je spojité. Pokud existuje $\alpha > 0$ takové, že*

$$\delta^2 f(a, h, h) \geqslant \alpha \|h\|^2, \quad h \in X,$$

má f v a striktní lokální minimum.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že U je konvexní. Zvolíme takové $\delta > 0$, že pro $\|h\| < \delta$ a $t \in [0, 1]$ platí

$$\left\|\delta^2 f(a + th, \cdot, \cdot) - \delta^2 f(a, \cdot, \cdot)\right\| < \alpha.$$

Pak pro taková $h \in X$ máme díky Větě 7.1.16 odhad

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \int_0^1 (1-t)\delta^2 f(a + th, h, h)\,dt \geqslant \int_0^1 (1-t)\left(\delta^2 f(a, h, h) - \left[\delta^2 f(a + th, h, h) - \delta^2 f(a, h, h)\right]\right)\,dt \\ &\geqslant \int_0^1 (1-t)\left(\alpha - \left\|\delta^2 f(a + th, h, h) - \delta^2 f(a, h, h)\right\|\right)\|h\|^2\,dt > 0 \end{aligned}$$

☐

Věta 7.1.20. *Nechť f je konvexní funkcionál na otevřené konvexní množině $A \subset X$ a nechť $x \in A$ je kritickým bodem f. Pak f nabývá v x svého minima.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x = 0$ a $f(0) = 0$. Nechť existuje $z \in A$ takový, že $f(z) = m < 0$. Pak

$$f(tz + (1-t)0) \leqslant tf(z) + (1-t)f(0) = tm$$

implikuje

$$\frac{1}{t}(f(tz) - f(0)) \leqslant m, \quad t \in (0, 1).$$

Tedy

$$\delta f(0, z) \leqslant m < 0,$$

spor. ☐

Věta 7.1.21 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$, $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ jsou třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí bodu $a \in X$ a nechť $\{\Phi_i'(a) : i = 1, \ldots, n\}$ jsou lineárně nezávislé. Pokud má f v a lokální extrém vzhledem k množině $M = \{x \in X : \Phi(x) = 0$, pak $f'(a) \in \operatorname{span}\{\Phi_1'(a), \ldots, \Phi_n'(a)\}$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 0$. Označme $Y = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \Phi_i'(0)$. Stačí dokázat, že $Y \subset \operatorname{Ker} f'(0)$. Vezměme $u_1, \ldots, u_n \in X$ takové, že $\Phi_i'(0)u_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Položme $Z = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ a nechť $G : Y \times Z \to \mathbb{R}^n$ je definováno jako

$$G(y, z) = \Phi(y + z), \quad (y, z) \in Y \times Z.$$

Pak

$$G(0, 0) = \Phi(0) = \Phi(a) = 0$$

a pro $h = \sum_{j=1}^n h_j u_j \in Z$ máme

$$G'_Z(0,0)(h) = \Phi'(0,0)(0,h) = \left\{\Phi'_i(0,0)(0,h)\right\}_{i=1}^n = \{h_i\}_{i=1}^n.$$

Tedy jsou splněny předpoklady Věty 7.1.12, takže existuje okolí $U \ni 0$ v Y a $V \ni 0$ v Z spolu s $\mathcal{C}^1$-funkcí $\phi\colon U \to V$, která splňuje $G(y,\phi(y)) = 0$, $y \in U$, a $\phi(0) = 0$.

Pak pro $y \in Y = \operatorname{Ker}\Phi'(a)$ platí

$$0 = \delta\Phi(0)(y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Phi(ty)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(G((0,0)+t(y,0)) - G(0,0)\right),$$

a tedy

$$G'_Y(0,0) = 0.$$

Derivováním rovnice $G(y,\phi(y)) = 0$ dostaneme

$$G'_Y(0,0) + G'_Z(0,0)\phi'(0) = 0,$$

což v kombinaci s předešlým dává

$$\phi'(0) = (G'_Z(0,0))^{-1}G'_Y(0,0) = 0.$$

Funkcionál $F\colon Y \to \mathbb{R}$ definovaný jako

$$F(y) = f(y+\phi(y)), \quad y \in Y,$$

má v 0 lokální extrém, a tedy pro každé $y \in Y$ platí

$$0 = F'(0)y = f'(a)\circ(I+\phi'(0))(y) = f'(a)y.$$

Tedy $Y \subset \operatorname{Ker} f'(a)$ a důkaz je hotov. □

7.2 Němyckého operátor

Věta 7.2.1. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $f\colon G\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje Cartheódorovy podmínky:*

(i) $f(\cdot,r)\colon G\times\mathbb{R}$ je měřitelná pro každé $r \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x,\cdot)\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ je spojitá pro skoro všechna $x \in G$.

Nechť $1 \leqslant p,q < \infty$ a $k \in L^q(G)$ splňují

$$|f(x,r)| \leqslant c\,|r|^{\frac{p}{q}} + k(x), \quad \textit{skoro všechna } x \in G, r \in \mathbb{R}.$$

Pak je operátor

$$F(u)(x) = f(x,u(x)), \quad x \in G, u \in L^p(G),$$

dobře definovaný a jedná se o spojitý, omezený operátor z $L^p(G)$ do $L^q(G)$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že F zobrazeuje měřitelné funkce na měřitelné funkce. Je-li u jednoduchá funkce, řekněme $u = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}$, kde $\{A_i\}_{i=1}^n$ je dělení G, pak

$$F(u)(x) = f(x, \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}(x)) = \sum_{i=1}^n f(x,c_i)\chi_{A_i}(x)$$

je měřitelná. Jelikož je každá měřitelná funkce u bodovou limitou jednoduchých funkcí $\{u_n\}$, z podmínky (ii) máme

$$f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x)), \quad \text{pro skoro všechna } x \in G.$$

Omezenost operátoru F plyne nyní z odhadu

$$\|F(u)\|_{L^q} \leqslant c\left\|u^{\frac{p}{q}}\right\|_{L^q} + \|k\|_{L^q} = c\,\|u\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} + \|k\|_{L^q}.$$

Nechť nyní $u_n \to u$ v L^p a $\|F(u_n)-F(u)\|_{L^q} \geqslant \eta > 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\|u_n - u\|_p < 2^{-n}$ a $u_n \to u$ skoro všude. Pak je $M = |u| + \sum_{n=1}^\infty |u_n - u|$ v $L^p(G)$ a přitom

$$|u_n| \leqslant |u_n - u| + |u| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále platí

$$|F(u_n)(x)| \leqslant c\,|u_n(x)|^{\frac{p}{q}} + k(x) \leqslant c\,(M(x))^{\frac{p}{q}} + k(x) \in L^q(G), \quad n \in \mathbb{N},$$

a $F(u_n) \to F(u)$ bodově skoro všude. Z Lebesgueovy věty tak plyne $\|F(u_n)-F(u)\|_{L^q} \to 0$, spor. □

Věta 7.2.2. *Nechť* $f\colon G \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *splňuje*

(i) $f(\cdot, r)\colon G \times \mathbb{R}$ *je měřitelná pro každé* $r \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x, \cdot)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *je spojitá pro skoro všechna* $x \in G$.

Nechť $1 \leqslant p, q < \infty$ *a* $k \in L^q(G)$ *splňují*

$$|f(x,r)| \leqslant c \sum_{j=1}^{N} |r_j|^{\frac{p}{q}} + k(x), \quad \textit{skoro všechna } x \in G, r \in \mathbb{R}.$$

Pak je operátor

$$F(u)(x) = f(x, u_1(x), \dots, u_N(x)), \quad x \in G, (u_1, \dots, u_N) \in (L^p(G))^N,$$

dobře definovaný a jedná se o spojitý, omezený operátor z $(L^p(G))^N$ *do* $L^q(G)$.

7.3 Euler-Lagrangeova rovnice

Definice 7.3.1. Uvažujme následující úlohu. Nechť

$$A = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b])\colon u(a) = u_1, u(b) = u_2\}$$

a

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx, \quad u \in A,$$

kde $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace. Hledáme extrémy funkcionálu F na A.

Věta 7.3.2. *Nechť* u *je extrém* F *na* A. *Pak je funkce*

$$x \mapsto \partial_3 f(x, u(x), u'(x))$$

spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ *a splňuje rovnici*

$$\partial_2 f(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left[\partial_3 f(x, u(x), u'(x))\right] = 0, \quad x \in [a,b].$$

Důkaz. Pak pro $w \in \mathscr{D}((a,b))$ platí, že přímka $\{u_0 + tw\colon t \in \mathbb{R}\} \subset A$ a platí

$$\delta F(u,w) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(F(u+tw) - F(u) = \lim_{t \to 0} \int_a^b \frac{1}{t}\left(f(x, u(x) + tw(x), u'(x) + tw'(x)) - f(x, u(x), u'(x)\right)\, dx.$$

Položme

$$\varphi(t,x) = f(x, u(x) + tw(x), u'(x) + tw'(x)), \quad t \in \mathbb{R}, x \in [a,b].$$

Pak

$$\delta F(u,w) = \lim_{t \to 0} \int_a^b \frac{1}{t}(\varphi(t,x) - \varphi(0,x))\, dx.$$

Ukažme, že pro $x \in [a,b]$ platí

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\varphi(t,x) - \varphi(0,x)) = \varphi'(0,x) = \partial_2 f(x, u(x), u'(x))w(x) + \partial_3 f(x, u(x), u'(x))w'(x).$$

Vskutku, pro $t \neq 0$ existuje c_t mezi 0 a t takové, že

$$\frac{1}{t}(\varphi(t,x) - \varphi(0,x)) = \varphi'(c_t, x) = \partial_2 f(x, u(x) + c_t w(x), u'(x) + c_t w'(x))w(x) + \partial_3 f(x, u(x) + c_t w(x), u'(x) + c_t w'(x))w'(x).$$

Pak

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t}(\varphi(t,x) - \varphi(0,x)) - \varphi'(0,x)\right| &\leqslant \left|\partial_2 f(x, u(x) + c_t w(x), u'(x) + c_t w'(x)) - \partial_2 f(x, u(x), u'(x))\right| |w(x)| \\ &\quad + \left|\partial_3 f(x, u(x) + c_t w(x), u'(x) + c_t w'(x)) - \partial_3 f(x, u(x), u'(x))\right| \left|w'(x)\right|,\end{aligned}$$

což jsou výrazy konvergující pro $t \to 0$ k nule. Dále dle předpokladů je pravá strana odhadnuta konstantou pro $x \in [a,b]$, a tedy z Lebesgueovy věty plyne

$$\delta F(u,w) = \int_a^b \left(\partial_2 f(x, u(x), u'(x))w(x) + \partial_3 f(x, u(x), u'(x))w'(x)\right)\, dx.$$

Jelikož $0 = \delta F(u, w)$, integrací per partes obdržíme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\partial_2 f(x, u(x), u'(x))w(x) + \partial_3 f(x, u(x), u'(x))w'(x)\right)\, dx \\ &= \int_a^b \left[\partial_3 f(x, u(x), u'(x)) - \int_a^x \partial_2 f(t, u(t), u'(t))\, dt\right] w'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Distributivní derivace výrazu v hranatých závorkách je tedy 0, a proto je roven konstantě. Existuje tak $c \in \mathbb{R}$ splňující

$$\partial_3 f(x, u(x), u'(x)) - \int_a^x \partial_2 f(t, u(t), u'(t))\, dt = c, \quad x \in [a, b].$$

Proto je funkce $x \mapsto \partial_3 f(x, u(x), u'(x))$ spojitě diferencovatelná a splňuje požadovanou rovnici. □

Věta 7.3.3. *Nechť u je extrém F na A a nechť $x_0 \in (a, b)$ splňuje*

$$\partial_{33} f(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $u \in \mathcal{C}^2(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Důkaz. Položme

$$\varphi(x, z) = \partial_3 f(x, u(x), z) - \int_a^x \partial_2(t, u(t), u'(t))\, dt - c, \quad (x, z) \in [a, b] \times \mathbb{R},$$

kde c je konstanta z předchozího důkazu. Dle Věty o implicitních funkcích existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ existuje právě jedno $z(x) \in (u'(x_0) - \delta_2, u'(x_0) + \delta_2)$ takové, že $\varphi(x, z(z)) = 0$. Navíc je $z \in \mathcal{C}^1(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Ze spojitosti u' a jednoznačnosti z pak plyne existence $\delta \in (0, \delta_1)$ takového, že $u'(x) = z(x)$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

□

7.4 Přímé metody variačního počtu

Definice 7.4.1. Zobrazení $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je koercivní vhledem k $A \subset X$, pokud $\lim_{x \in A, \|x\| \to \infty} f(x) = \infty$.

Věta 7.4.2. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a $A \subset X$. Nechť dále platí následující podmínky.*

(i) Existuje $x_0 \in A$, že $f(x_0) < \infty$.

(ii) Množina A je slabě uzavřená (například uzavřená a konvexní).

(iii) Zobrazení f je koercivní vzhledem k A.

(iv) Zobrazení f je slabě sekvenciálně zdola polopspojité na A.

Pak existuje $x \in A$, že $f(x) = \min\{f(y)\colon y \in A\}$.

Důkaz. Vezměme $\{x_n\}$ v A, že

$$f(x_n) \to \inf\{f(y)\colon y \in A\}.$$

Z koercivity plyne, že $\{x_n\}$ je omezená, tj. leží v nějaké kouli $B(0, r)$. Ze slabé kompaktnosti množiny $A \cap B(0, r)$ plyne existence podposloupnosti $\{x_{n_k}\}$ slabě konvergující k nějakému $x \in A$. Díky (iv) pak platí

$$f(x) \leqslant \liminf_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \inf\{f(y)\colon y \in A\}.$$

□

Lemma 7.4.3. *Nechť X je topologický prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak f je sekvenciálně zdola polospojitá právě tehdy, když nadgraf*

$$M = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}\colon t \geqslant f(x)\}$$

je sekvenciálně uzavřený v $X \times \mathbb{R}$.

Důkaz. $\Longrightarrow$ Nechť je f sekvenciálně zdola polospojité a $(x_n, t_n) \to (x, t)$, kde (x_n, t_n) jsou prvky M. Pak

$$f(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \liminf_{n \to \infty} t_n = t,$$

a tedy $(x, t) \in M$.

$\Longleftarrow$ Nechť existuje posloupnost $x_n \to x$ splňující $f(x) > a > b > \liminf f(x_n)$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $f(x_n) < b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak ale $(x_n, b) \in M$ a konvergují k $(x, b) \notin M$, a tedy M není sekvenciálně uzavřená.

□

Věta 7.4.4. *Nechť X je Banachův prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je konvexní a sekvenciálně zdola polospojitý. Pak je slabě sekvenciálně zdola polospojitý.*

Důkaz. Jelikož je f konvexní, je i jeho nadgraf M též konvexní. Dle lemmatu je M konvexní, uzavřená množina v $X \times \mathbb{R}$, a tedy je slabě uzavřená v $X \times \mathbb{R}$. Speciálně je slabě sekvenciálně uzavřená, a tedy je f slabě sekvenciálně zdola polospojitý. □

Věta 7.4.5. *Nechť X je Banachův prostor, $A \subset X$ a $f\colon A \to \mathbb{R}$. Nechť τ značí $\|\cdot\|$, w nebo w^*-topologii. Nechť jsou splněny následující podmínky.*

(i) Každá shora f-omezená podmnožina A je sekvenciálně tau-prekompaktní v A.

(ii) Funkcionál f je sekvenciálně τ-zdola polospojitý na A.

Pak f nabývá na A svého minima.

Důkaz. Nechť je $\{x_n\}$ minimizující posloupnost v A. Pak je $P = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ shora f-omezená, a tedy lze z $\{x_n\}$ vybrat τ-konvergentní podposloupnost konvergující k $x \in A$. Pak ale

$$f(x) \leqslant \liminf f(x_n) = \inf\{f(y)\colon y \in A\}.$$

□

7.5 Klasické úlohy variačího počtu

7.6 Stupeň zobrazení v $\mathbb{R}^n$

Věta 7.6.1 (Sard)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, omezená a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ je $\mathcal{C}^1(\overline{G}, \mathbb{R}^d)$. Pak pro množinu $Z = \{x \in \overline{G}\colon Jf(x) = 0\}$ platí $|f(Z)| = 0$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že G je krychle o hraně $l > 0$. Nechť $M > 0$ je takové, že $\|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\|$, $x, y \in \overline{G}$, a $\|f'(x)\| \leqslant M$, $x \in \overline{G}$. Položme

$$T_x y = f(x) + f'(x)(y - x).$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Díky větě o střední hodnotě lze zvolit $\delta > 0$ takové, že pro $\|x - y\| < \delta$ platí $\|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\| \leqslant \varepsilon\|y - x\|$. Nechť $s \in \mathbb{N}$ splňuje $2\frac{l}{s} < \delta$. Uvažujme dělení G na s^d krychlí o hraně $\frac{l}{s}$. Nechť D je jedna taková krychle a $x \in D \cap Z$. Pro $y \in D$ pak platí $\|x - y\| < \delta$, z čehož plyne

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant 2M\frac{l}{s} \quad \text{a} \quad \|f(y) - T_x(y)\| \leqslant 2\varepsilon\frac{l}{s}.$$

Jelikož $Jf(x) = 0$, $\dim T_x(\mathbb{R}^d) \leqslant \mathbb{R}^{d-1}$, přičemž hrana $Tx(D)$ je nejvýše $2m\frac{l}{s}$. Navíc $\operatorname{dist}(f(y), Tx(D)) \leqslant 2\varepsilon\frac{l}{s}$. Tedy $f(D)$ se vejde do krychle o hranách $4M\frac{l}{s}$ v $T_x(\mathbb{R}^d)$ a aspoň jedna hrana má délku $4\varepsilon\frac{l}{s}$. Tedy

$$|f(D)| \leqslant \left(4M\frac{l}{s}\right)^{d-1} 4\varepsilon\frac{l}{s} = (4\frac{l}{s})^d M^{d-1}\varepsilon.$$

Proto

$$|f(Z)| \leqslant s^d \left(4\frac{l}{s}\right)^d M^{d-1}\varepsilon = 4^d l^d M^{d-1}\varepsilon.$$

Tedy $|f(Z)| = 0$. □

Věta 7.6.2. *Existuje právě jedno zobrazení* $\operatorname{dg}\colon (f, G, y) \to \mathbb{Z}$*, kde $f \in \mathcal{C}(\overline{G}, \mathbb{R}^d)$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená $y \in \mathbb{R}^d \backslash f(\partial G)$, takové, že*

(d1) $\operatorname{dg}(\mathrm{id}, G, y) = 1$*, $y \in G$;*

(d2) $\operatorname{dg}(f, G, y) = \operatorname{dg}(f, G_1, y) + \operatorname{dg}(f, G_2, y)$*, kde $G_1, G_2 \subset G$ jsou disjunktní otevřené a $y \notin f(\overline{G}\backslash(G_1 \cup G_2))$;*

(d3) $\operatorname{dg}(h(t,\cdot), G, y(t))$ *nezávisí na $t \in [0,1]$, kde $h\colon [0,1]\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^d$ spojité, $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ spojité a splňující $y(t) \notin h(t, \partial G)$.*

Definice 7.6.3. Nechť $f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ a $y \notin f(\partial G \cup Z_f)$. Pak definujeme

$$\operatorname{dg}(f, G, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} Jf(x)$$

($\sum_{\varnothing}$ interpretujeme jako 0.) Povšimněme si, že suma je díky předpokladům konečná, a tedy dobře definovaná.

Tvrzení 7.6.4. *Nechť f, G, y jsou jako výše a $\{\varphi_\alpha\}$ je hladká aproximační jednotka. (Tedy $\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty$, $\operatorname{spt}\varphi_1 \in B(0,1)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1 = 1$ a $\varphi_\alpha(x) = \alpha^{-d}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.)*

Pak existuje $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y,f) > 0$ takové, že

$$\operatorname{dg}(f,G,y) = \int_G \varphi_\varepsilon(f(x)-y) Jf(x)\,dx, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Důkaz. Pokud $f^{-1}(y) = \emptyset$, $\varphi_\varepsilon(f(x)-y) = 0$ pro $\varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(\overline{G}))$.

Je-li $f^{-1}(y) = \{x_1,\dots,x_m\}$, najdi koule $B(x_i,r)$ takové, že f je na nich homeomorfizmus na $V_i \ni y_i$ a $\operatorname{sgn} Jf(x) = \operatorname{sgn} Jf(x_i)$ na $B(x_i,r)$. Ať $B(y,s) \subset \bigcap_{i=1}^m V_i$ a $U_i = B(x_i,r) \cap f^{-1}(B(y,s))$. Pak $\|f(x)-y\| \geqslant \beta > 0$ pro $x \in \overline{G} \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$. Pro $\varepsilon \in (0,\beta)$ pak platí

$$\begin{aligned}\int_G \varphi_\varepsilon(f(x)-y) Jf(x)\,dx &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} Jf(x_i) \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x)-y)\,|Jf(x)|\,dx \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} Jf(x_i) \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x)-y)\,|J(f-y)(x)|\,dx = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} Jf(x_i) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z)\,dz \\ &= \operatorname{dg}(f,G,y).\end{aligned}$$

$\square$

Tvrzení 7.6.5. *Nechť $f \in \mathcal{C}^2(G, \mathrm{Re}^n)$ a pro $i,j = 1,\dots,n$ uvažujme*

$$d_{ij}(x) = (-1)^{i+1} \det f'_{ij}(x),$$

kde $f'_{ij}(x)$ vznikne z matice $f'(x)$ vynecháním i-tého sloupce a j-tého řádku.

Pak

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij}(x) = 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Důkaz. Nechť $j \in \{1,\dots,n\}$ je pevné. Pak při označení k-tého sloupce

$$f_{x_k} = \begin{pmatrix} \partial_k f_1 \\ \partial_k f_2 \\ \vdots \\ \partial_k f_{j-1} \\ \partial_k f_{j+1} \\ \vdots \\ \partial_k f_n \end{pmatrix}$$

máme

$$d_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det\left(f_{x_1},\dots,f_{x_{i-1}}, f_{x_i+1},\dots,f_{x_n}\right).$$

Jelikož je determinant lineární v každém sloupci, derivováním obdržíme

$$\partial_i d_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} \det\left(f_{x_1},\dots,f_{x_{i-1}}, f_{x_{i+1}},\dots,\partial_i f_{x_k},\dots,f_{x_n}\right).$$

Označme

$$c_{ki} = \det\left(\partial_i f_{x_k}, f_{x_1},\dots,f_{x_{i-1}}, f_{x_i+1},\dots,f_{x_{k-1}}, f_{x_{k+1}},\dots,f_{x_n}\right).$$

Ze záměnnosti druhých parciálních derivací máme $c_{ki} = c_{ik}$ pro $i \neq k$. Položíme-li

$$\sigma_{ki} = \begin{cases} 1, & k < i, \\ 0, & k = i, \\ -1, & k > i, \end{cases}$$

dostaneme z předchozího

$$(-1)^{i+j}\partial_i d_{ij}(x) = \sum_{k<i} (-1)^{k-1} c_{ki} + \sum_{k>i} (-1)^{k-2} c_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k_1} \sigma_{ki} c_{ki},$$

tj.

$$(-1)^j \partial_i d_{ij}(x) = (-1)^i \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} c_{ki}.$$

Sečtením a následným přeznačením tak dostáváme

$$\begin{aligned}(-1)^j \sum_{i=1}^n \partial_i d_{ij}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1+i} \sigma_{ki} c_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \sigma_{ik} c_{ik} \\ &= (-1) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1+i} \sigma_{ki} c_{ki}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1+i} \sigma_{ki} c_{ki} = 0$$

□

Tvrzení 7.6.6. *Nechť* $f \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$, $y_0 \notin f(\partial G)$, $\alpha = \operatorname{dist}(y_0, f(\partial G))$, $y_1, y_2 \in U(y_0, \alpha) \backslash f(Z_f)$. *Pak* $\operatorname{dg}(f, G, y_1) = \operatorname{dg}(f, G, y_2)$.

Důkaz. Položme

$$\delta = \alpha - \max\{|y_1 - y_0|, |y_2 - y_0|\}$$

a ať $\varepsilon \in (0, \delta)$ splňuje

$$\operatorname{dg}(f, G, y_i) = \int_G \varphi_\varepsilon(f(x) - y_i) Jf(x)\, dx, \quad i = 1, 2.$$

Nyní chceme ukázat, že pro vhodné funkce v, w platí

$$\operatorname{dg}(f,G,y_1) - \operatorname{dg}(f,G,y_2) = \int_G [\varphi_\varepsilon(f(x) - y_1) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y_2)]\, Jf(x)\, dx = \int_G \operatorname{div} w(fx) Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v(x)\, dx = 0,$$

přičemž poslední rovnost bude platiti díky faktu, že $\operatorname{spt} v \subset G$.

Položme nyní

$$w(z) = (y_1 - y_2) \int_0^1 \varphi_\varepsilon(z - y_1 + t(y_1 - y_2))\, dt, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Pak pro $g(t) = \varphi_\varepsilon(z - y_1 + t(y_2 - y_1))$ platí $g(0) = \varphi_\varepsilon(z - y_1)$ a $g(1) = \varphi_\varepsilon(z - y_2)$. Platí

$$\begin{aligned}g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(t)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon(z - y_1 + t(y_1 - y_2))(y_1(i) - y_2(i))\, dt \\ &= (y_1 - y_2) \cdot \int_0^1 \nabla \varphi_\varepsilon(z - y_1 + t(y_1 - y_2))\, dt\end{aligned}$$

Jelikož

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(z) = (y_1(i) - y_2(i)) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon(z - y_1 + t(y_1 - y_2))\, dt,$$

z předchozího máme

$$\varphi_\varepsilon(z - y_2) - \varphi_\varepsilon(z - y_1) = g(1) - g(0) = \operatorname{div} w(z).$$

Povšimněme si ještě, že $\operatorname{spt} w \subset B(y_0, r)$, kde $r = \alpha - (\delta - \varepsilon) < \alpha$. Speciálně tedy $f(\partial G) \cap \operatorname{spt} w = \emptyset$.

Položme nyní

$$v_i(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) d_{ij}(x), & x \in \overline{G}, \\ 0, & x \notin \overline{G}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak $\operatorname{spt} v \subset G$ a platí

$$\partial_i v_i(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ij}(x) \partial_k w_j(f(x)) \partial_i f_k(x) + \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) \partial_i d_{ij}(x),$$

a tedy dle předchozího tvrzení máme

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v(x) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n d_{ij}(x) \partial_k w_j(f(x)) \partial_i f_k(x) + \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) \sum_{i=1}^n \partial_i d_{ij}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_k w_j(f(x)) \delta_{jk} Jf(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k w_k(f(x)) Jf(x) \\ &= \operatorname{div} w(f(x)) Jf(x)\end{aligned}$$

V druhém rovnítku jsme použili vztah

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij}(x)\partial_i f_k(x) = \begin{cases} Jf(x), & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Tedy

$$\mathrm{dg}(f,G,y_1) - \mathrm{dg}(f,G,y_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_n = 0,$$

kde krychle $[-a,a]^n$ je nadmnožinou G.

□

Definice 7.6.7. Nechť $f \in \mathcal{C}^2(G) \cap C(\overline{G})$, $y \notin f(\partial G)$. Pak definujme

$$\mathrm{dg}(f,G,y) = \mathrm{dg}(f,G,\widetilde{y}), \quad \text{kde } \widetilde{y} \in U(y, \mathrm{dist}(y, f(\partial G))) \backslash f(Z_f)$$

Tvrzení 7.6.8. *Nechť $f,g \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ a $y \notin f(\partial G)$. Pak existuje $\delta = \delta(f,g,y) > 0$ takové, že $\mathrm{dg}(f+tg,G,y) = \mathrm{dg}(f,G,y)$, $|t| < \delta$.*

Důkaz. Pokud $f^{-1}(y) = \varnothing$, pro malá t pak bude platit $y \notin (f+tg)(\overline{G})$.

Pokud $f^{-1} = \{x_1,\ldots,x_m\}$ a $y \notin f(Z_f)$, označíme $f_t = f + tg$ a $h(t,x) = f_t(x) - y$. Pak $h(0,x_i) = f(x_i) - y$ a $h'_x(0,x_i) = f'(x_i)$. Dle věty o implicitních funkcích tak existuje $\widetilde{r}, r > 0$ takové, že koule $\{B(x_1,r),\ldots,B(x_m,r)\}$ jsou disjunktní a pro něž existují spojité funkce $r^i \colon (\widetilde{r},\widetilde{r}) \to B(x_i,r)$ splňující $f_t^{-1}(y) \cap B(x_i,r) = r^i(t)$. Navíc lze zařídit, aby $]sgn Jf(x) = \operatorname{sgn} Jf(x_i)$ na $B(x_i,r)$.

Nechť $\beta > 0$ je takové, že $\|f(x) - y\| \geqslant \beta$ pro $x \in \overline{G} \backslash \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)$. Pak pro $|t| < \delta_0 = \min\{\widetilde{r}, \beta \|g\|_\infty^{-1}\}$ platí $f_t^{-1} = \{r^1(t),\ldots,r^m(t)\}$. (Pro $x \in \overline{G} \backslash \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)$ totiž máme

$$\|f_t(x) - y\| \geqslant \|f(x) - y\| - \|f(x) - f_t(x)\| \geqslant \beta - t\|g\|_\infty > 0$$

Funkce $(t,x) \mapsto Jf_t(x)$ je spojitá, a tedy existuje $\delta \leqslant \delta_0$ takové, že pro $V = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)$ platí

$$|Jf_t(x) - Jf(x)| < \min\{|Jf(z)| : z \in V\}, \quad |t| < \delta, x \in V$$

Pak

$$\operatorname{sgn} Jf_t(r^i(t)) = \operatorname{sgn} Jf(r^i(t)) = \operatorname{sgn} Jf(x_i),$$

a tedy

$$\mathrm{dg}(f_t,G,y) = \mathrm{dg}(f,G,y).$$

Pokud $y \in f(Z_f)$, položíme $\alpha = \mathrm{dist}(y, f(\partial G))$ a nalezneme $y_0 \in U(y, \frac{\alpha}{3}) \backslash f(Z_f)$. Nechť $\delta_0 > 0$ splňuje $\mathrm{dg}(f_t,G,y_0) = \mathrm{dg}(f,G,y_0)$ pro $|t| < \delta_0$. Nechť $\delta = \min\{\delta_0 \frac{1}{3} \|g\|_\infty^{-1} \alpha\}$. Pak pro $x \in \partial G$ a $|t| < \delta$ platí

$$\|y_0 - f_t(x)\| \geqslant \|y_0 - f(x)\| - |t|\,\|g(x)\| \geqslant \|y - f(x)\| - \|y - y_0\| - |t|\,\|g\| > \alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{3}.$$

Tedy

$$\|y_0 - y\| < \frac{\alpha}{3} \leqslant \mathrm{dist}(y_0, f_t(\partial G)), \quad |t| < \delta,$$

z čehož plyne (viz Definice 7.6.7), že

$$\mathrm{dg}(f,G,y) = \mathrm{dg}(f,G,y_0) = \mathrm{dg}(f_t,G,y_0) = \mathrm{dg}(f_t,G,y), \quad |t| < \delta.$$

□

Tvrzení 7.6.9. *Nechť $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$, $y \notin f(\partial G)$. Pokud $g_1,g_2 \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ splňují $\|g_i - f\| < \mathrm{dist}(y, f(\partial G))$, $i = 1,2$, pak $\mathrm{dg}(g_1,G,y) = \mathrm{dg}(g_2,G,y)$.*

Důkaz. Nechť $h(t,x) = g_1(x) + t(g_2(x) - g_1(x))$, $t \in [0,1]$. Pak pro $\alpha = \mathrm{dist}(y, f(\partial G)$, $t \in [0,1]$ a $x \in \partial G$ platí

$$\|h_t(x) - f(x)\| \leqslant t\,\|g_2(x) - f(x)\| + (1-t)\,\|g_1(x) - f(x)\| < t\alpha + (1-t)\alpha = \mathrm{dist}(y, f(\partial G)),$$

a tedy $y \neq h_t(x)$.

Označme $\varphi(t) = \mathrm{dg}(h_t,G,y)$. Je-li $t_0 \in [0,1]$, pak z Tvrzení 7.6.8 existuje okolí t_0, kde φ je konstantní (máme $h_t = h_{t_0} + (t - t_0)(g_1 - g_2)$). Tedy je φ spojité. Jelikož má celočíselné hodnoty, je konstatní na $[0,1]$. Proto $\mathrm{dg}(g_1,G,y) = \varphi(0) = \varphi(1) = \mathrm{dg}(g_2,G,y)$.

□

Definice 7.6.10. Nechť $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$, $y \notin f(\partial G)$. Položme

$$\operatorname{dg}(f,G,y) = \operatorname{dg}(g,G,y), \quad g \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}), \|f-g\|_\infty < \operatorname{dist}(y, f(\partial G)).$$

Důkaz Věty 7.6.2. (d1) Platí $\operatorname{dg}(\mathrm{id}, G, y) = \sum \operatorname{sgn} I = 1$.

(d2) Nechť $G_1, G_2 \subset G$ jsou disjunktní a otevřené a $y \notin f(\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$. Pokud lze použít Definice 7.6.3, požadovaná rovnost platí. Jinak nechť

$$0 < \alpha < \min\{\operatorname{dist}(y, f(\partial G)), \operatorname{dist}(y, f(\partial G_1)), \operatorname{dist}(y, f(\partial G_2))\} \quad \text{a} \quad r > 0$$

je navíc voleno tak, že pro $g \in \mathcal{C}(\overline{G})$ splňující $\|f-g\| < \alpha$ platí $B(y,r) \cap g(\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2)) = \varnothing$. Nechť $g \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ splňuje $\|f-g\| < \alpha$ a ať $\widetilde{y} \in U(y,r) \setminus g(Z_g)$, kde r navíc splňuje

$$r < \min\{\operatorname{dist}(y, g(\partial G)), \operatorname{dist}(y, g(\partial G_1)), \operatorname{dist}(y, g(\partial G_2))\}.$$

Pak $\widetilde{y} \notin g(\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$, a tedy $\operatorname{dg}(g,G,\widetilde{y}) = \operatorname{dg}(g,G_1,\widetilde{y}) + \operatorname{dg}(g,G_2,\widetilde{y})$. Proto

$$\begin{aligned}\operatorname{dg}(f,G,y) &= \operatorname{dg}(g,G,y) = \operatorname{dg}(g,G,\widetilde{y}) = \operatorname{dg}(g,G_1,\widetilde{y}) + \operatorname{dg}(g,G_2,\widetilde{y}) = \operatorname{dg}(g,G_1,y) + \operatorname{dg}(g,G_2,y) \\ &= \operatorname{dg}(f,G_1,y) + \operatorname{dg}(f,G_2,y).\end{aligned}$$

(d3) Nechť

$$\alpha = \min_{t \in [0,1]} \operatorname{dist}(y(t), h_t(\partial G))$$

a $\varphi(t) = \operatorname{dg}(h_t, G, y(t))$. Chceme ukázat konstantnost φ. K tomu stačí ukázat konstantnost φ lokálně. Nechť $t_0 \in [0,1]$ je pevné a zvolme $\delta > 0$, že $\|y(t) - y(t_0)\| < \frac{\alpha}{3}$ a $\|h_t - h_{t_0}\| < \frac{\alpha}{3}$, kdykoliv $|t - t_0| < \delta$. Zvolme $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ pevné a nechť $g \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ splňuje $\|g - h_t\| < \frac{\alpha}{3}$. Pak $\operatorname{dg}(h_t, G, y(t)) = \operatorname{dg}(g, G, y(t))$ a navíc platí

$$\|g - h_{t_0}\| \leqslant \|g - h_t\| + \|h_t - h_{t_0}\| < \frac{2\alpha}{3}.$$

Dostaneme tak $\operatorname{dg}(g, G, y(t_0)) = \operatorname{dg}(h_{t_0}, G, y(t_0))$.

Pro každé $x \in \partial G$ platí $\|g(x) - y(t_0)\| \geqslant \frac{\alpha}{3}$, a tedy

$$\|g(x) - y(t_0)\| \geqslant \|h_{t_0}(x) - y(t_0)\| - \|g(x) - h_{t_0}(x)\| > \alpha - \frac{2}{3}\alpha = \frac{\alpha}{3}.$$

Tedy $\|y(t) - y(t_0)\| < \operatorname{dist}(y(t_0), g(\partial G))$, a tedy

$$\operatorname{dg}(g, G, y(t_0)) = \operatorname{dg}(g, G, y(t)).$$

Celkově tak máme

$$\operatorname{dg}(h_t, G, y(t)) = \operatorname{dg}(g, G, y(t)) = \operatorname{dg}(g, G, y(t_0)) = \operatorname{dg}(h_{t_0}, G, y(t_0)).$$

□

Věta 7.6.11. *Dále platí následující tvrzení.*

(d4) Pokud $\operatorname{dg}(f,G,y) \neq 0$*, platí* $f^{-1}(x) \neq \varnothing$*.*

(d5) Zobrazení $\operatorname{dg}(\cdot, G, y)$ *je konstantí na* $\{g \in \mathcal{C}(\overline{G})\colon \|f-g\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial G))\}$ *a* $\operatorname{dg}(f,G,\cdot)$ *je konstantní na* $U(y, \operatorname{dist}(y, f(\partial G)))$*. Navíc je* $d(f,G,\cdot)$ *konstatní na každé komponentě* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$*.*

(d6) Pokud $f = g$ *na* ∂G *a* $y \notin f(\partial G)$*, pak* $\operatorname{dg}(f,G,y) = \operatorname{dg}(g,G,y)$*.*

(d7) Pokud $G_2 \subset G$ *otevřená a* $y \notin f(\overline{G} \setminus G_1)$*, pak* $\operatorname{dg}(f,G,y) = \operatorname{dg}(f,G_1,y)$*.*

Důkaz. (d4) Pokud $\operatorname{dg}(f,G,y) \neq 0$ a $f^{-1}(y) = \varnothing$, pak (d2) použité pro $G_1 = G_2 = \varnothing$ dává (máme $y \notin f(\overline{G})$)

$$0 \neq \operatorname{dg}(f,G,y) = \operatorname{dg}(f,\varnothing,y) + \operatorname{dg}(f,\varnothing,y) = 0,$$

tj. spor.

(d5) Nechť $\|g - f\| \, \alpha = \operatorname{dist}(y, f(\partial G))$. Nechť $\{g_n\}$ jsou hladké funkce stejnomerně konvergující ke g. Pak od jistho indexu n_0 platí $\operatorname{dg}(g,G,y) = \operatorname{dg}(g_n,G,y)$, $n \geqslant n_0$. Pro $n \geqslant n_0$ splňující $\|g_n - f\| < \alpha$ tak máme

$$\operatorname{dg}(g,G,y) = \operatorname{dg}(g_n,G,y) = \operatorname{dg}(f,G,y)$$

Pro důkaz druhé části uvažme $\alpha = \operatorname{dist}(y, f(\partial G))$. Nechť $\widetilde{y} \in U(y,\alpha)$ a $y(t) = y + t(\widetilde{y} - y)$, $h(t,x) = f(x)$ pro $t \in [0,1]$. Pak

$$\operatorname{dg}(f,G,y) = \operatorname{dg}(h_0,G,y_0) = \operatorname{dg}(h_1,G,y_1) = \operatorname{dg}(f,G,\widetilde{y}).$$

Pokud y, y' jsou ve stejné komponentě $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial G)$, existuje z obloukové souvislosti křivka $y(t)$ v této komponentě spojující y a y'. Stejně jako výše pak platí rovnost stupně.

(d6) Pokud $f = g$ na ∂G, položme $h(t, x) = tf(x) = (1-t)g(x)$, $t \in [0, 1]$. Pak $y \notin h_t(\partial G)$, a tedy dle (d3) platí rovnost stupně.

(d7) Použijeme (d2) pro $G = G_1$ a $G_2 = \varnothing$. Pak

$$\operatorname{dg}(f, G, y) = \operatorname{dg}(f, G_1, y) + \operatorname{dg}(f, \varnothing, y) = \operatorname{dg}(f, G_1, y) + 0.$$

□

Tvrzení 7.6.12. *Nechť H je Hilbertův prostor a $K \subset H$ je uzavřená, konvexní. Pak je metrická projekce $p_K \colon H \to K$ spojitá.*

Důkaz. Nechť máme $x_n \to x$ a $\eta > 0$ splňující $\|p_K(x_n) - p_K(x)\| \geqslant \eta$. Označme $y_n = p_K(x_n)$.

Fakt. Bod $y \in K$ splňuje $p_K(x) = y$ právě tehdy, když $\operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$, $z \in K$.

Vskutku, pokud $y = p_K(x)$ a $z \in K$, pak pro $t \in [0, 1]$ platí

$$\|x - y\|^2 \leqslant \|x - (y + t(z - y))\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2 \|z - y\|^2 - 2t \operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle.$$

Tedy

$$0 \leqslant t \|z - y\|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle.$$

Pošleme-li t k nule, máme $\operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$.

Obráceně, je=li $z \in K$ dáno, pak

$$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x - y, y - z\rangle \geqslant \|x - y\|^2,$$

a tedy $y = p_K(x)$.

Nyní máme z Faktu 1 odhad

$$\|x - y_n\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 + \|y - y_n\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 + \eta^2.$$

Nechť $\|x - x_n\| < \varepsilon$ pro ε malé. Pak

$$\begin{aligned}\|x_n - y_n\| &\geqslant \|x - y_n\| - \varepsilon \geqslant \sqrt{\|x - y\|^2 + \eta^2} - \varepsilon \geqslant \sqrt{(\|x_n - y\| - \varepsilon)^2 + \eta^2} - \varepsilon \\ &\geqslant \sqrt{(\|x_n - y_n\| - \varepsilon)^2} - \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy

$$(\varepsilon + \|x_n - y_n\|)^2 \geqslant (\|x_n - y_n\| - \varepsilon)^2 + \eta^2.$$

Volboun dostatečně malého ε pak máme spor. □

Věta 7.6.13 (Brouwer)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, konvexní. Pak každé spojité zobrazení $f \colon K \to K$ má pevný bod.*

Důkaz. Nechť $K = B(0, 1)$. Pokud existuje $x \in \partial K$ splňující $f(x) = x$, jsme hotovi. Jinak uvažujme $h(t, x) = x - tf(x)$, $t \in [0, 1]$. Pak $0 \notin h_t(\partial K)$, neboť

$$\|h(t, x)\| \geqslant \|x\| - t \|f(x)\| \geqslant (1 - t) > 0, \quad t \in [0, 1), x \in \partial K,$$

a $h(1, x) \neq 0$, $x \in \partial K$.

Proto

$$\operatorname{dg}(\operatorname{id} - f, U(0, 1), 0) = \operatorname{dg}(\operatorname{id}, U(0, 1), 0) = 1,$$

a tedy rovnice $\operatorname{id} - f = 0$ má řešení v $U(0, 1)$.

Je-li $K \subset \mathbb{R}^n$ obecná, nalezneme $r > 0$, že $K \subset B(0, r)$ a uvažujeme metrickou projekci $p_K \colon B(0, r) \to K$. Pak funkce $f \circ p_K$ má pevný bod $x \in B(0, r)$. To je však již nutně bod v K, a tedy

$$x = f(p_K(x)) = f(x).$$

□

Věta 7.6.14. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ liché, $0 \in G$, G otevřená, omezená a $f \partial G \colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ spojité. Pak existuje $x \in \partial G$ a $\lambda \neq 0$, že $f(x) = \lambda x$.*

Důkaz. Pomocí Tietzeho věty rozšíříme f na prvek $\mathcal{C}(\overline{G})$. Platí $\operatorname{dg}(-\operatorname{id}, G, 0) = -1$ díky lichosti n.

Případ 1. Pokud $\operatorname{dg}(f, G, 0) \neq -1$, homotopie $h(t,x) = (1-t)f(x) + t(-x)$ deformuje f na $-\operatorname{id}$. Kdyby $0 \notin h_t(\partial G)$, máme $\operatorname{dg}(f, G, 0) = \operatorname{dg}(-\operatorname{id}, G, 0) = -1$; spor. Tedy existuje $t_0 \in [0,1]$ a $x_0 \in \partial G$, že $h(t_0, x_0) = 0$. Pokud $t_0 = 0$, pak $f(x_0) = 0$; spor. Pokud $t_0 = 1$, pak $-x_0 = 0$; spor. tedy $t_0 \in (0,1)$ a máme $(1-t_0)f(x_0) = t_0 x_0$, tj. $\lambda = \frac{t_0}{1-t_0}$ je ono hledané.

Případ 2. Pokud $\operatorname{dg}(f, G, 0) = -1$, uvažujeme homotopii $h(t,x) = (1-t)f(x) + tx$. □

Důsledek 7.6.15. *Neexistuje spojité nenulové zobrazení $f\colon S^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $\langle f(x), x\rangle = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.*

Důkaz. Dle předchozí věty existuje $x \in S^3$ a $\lambda \neq 0$ takové, že $f(x) = \lambda x$. Pak ovšem $0 = \langle f(x), x\rangle = |\lambda| \langle x, x\rangle \neq 0$; spor. □

Lemma 7.6.16. *Nechť $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou diferencovatelné. Pak*

$$(gf)'(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \nabla g(x) + g(x) f'(x).$$

Důkaz. Máme

$$(gf)'(x) = \begin{pmatrix} \nabla(gf_1)(x) \\ \vdots \\ \nabla(gf_n)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} f_1 + g \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} f_1 + g \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} f_n + g \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} f_n + g \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

□

Věta 7.6.17 (Borsuk)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, omezená, symetrická, $0 \in G$. Je-li $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$ lichá a $0 \notin f(\partial G)$, pak $\operatorname{dg}(f, G, 0)$ je lichý.*

Důkaz. Krok 1. Lze zařídit, že $f \in \mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{C}^1(G)$ a $f'(0)$ je regulární.

Vskutku, nechť $h \in \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{C}^(G)$ splňuje $\|h - f\| < \varepsilon_1$. Pak $g(x) = \frac{1}{2}(h(x) - h(-x))$, $x \in \overline{G}$, je lichá a též $\|f - g\| < \varepsilon_1$. Nechť $\varepsilon_2 > 0$ splňuje $\varepsilon_2 \notin \sigma(g'(0))$. Pak $u = g - \varepsilon_2 \operatorname{id}$ splňuje, že $\|u - f\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \operatorname{diam} G$ a $u'(0) = g'(0) - \varepsilon_2 \operatorname{id}$ je regulární. Volbou $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ pak zařídíme, že $\operatorname{dg}(u, G, 0) = \operatorname{dg}(f, G, 0)$.

Krok 2. Nyní stačí najít lichou $g \in \mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{C}^1(G)$ blízko f takovou, že $0 \notin g(Z_g)$. Pak je totiž

$$\operatorname{dg}(f, G, 0) = \operatorname{dg}(g, G, 0) = \operatorname{sgn} Jg(0) + \sum_{x \in g^{-1}(0), x \neq 0} \operatorname{sgn} Jg(x)$$

liché číslo, neboť $\sum_{x \in g^{-1}(0), x \neq 0} \operatorname{sgn} Jg(x)$ je číslo sudé ($g(x) = 0$ právě tehdy, když $g(-x) = 0$ a $g'(-x) = g'(x)$).

Krok 3. Nalezení takové g bude provedeno indukcí. Nechť $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lichá $\mathcal{C}^1$ taková, že $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi(t) = 0$ právě tehdy, když $t = 0$. Nechť $\delta > 0$ je takové, že stupeň se nemění na δ-okolí f. Dále nalezneme $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ závisející na f, φ, δ. Induktivně hledáme vektory $y^1, \ldots, y^n \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro $g_i = g_{i-1} - \varphi(x_i) y^i$ a $g_0 = f$ víme, že g_i je ε_i-blízko g_{i-1} a $0 \notin g_i(Z_{g_i}(G_i))$, kde

$$G_i = \{x \in G\colon x_j \neq 0 \text{ pro nějaké } j \leqslant i\}.$$

1. krok konstrukce: Položme $U_1 = G_1 = \{x \in G\colon x_1 \neq 0\}$ a

$$h(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x_1)}, \quad x \in U_1.$$

Vezmeme $y^1 \notin h(Z_h(U_1))$, že y^1 je dost malé vzhledem k ε_1. Pak $g_1(x) = f(x) - \varphi(x_1) y^1$ splňuje, že 0 je regulární hodnota g_1 na G_1. Nechť $g_1(x) = 0$, chceme pak, že $g_1'(x)$ je regulární.

Pak $0 = f(x) - \varphi(x_1) y^1$ implikuje $h(x) = y^1$. Tedy $h'(x)$ je regulární. Ukážeme, že

$$g_1'(x) = \varphi(x_1) h_1'(x).$$

K tomuto účelu počítejme

$$g_1' = f' - \begin{pmatrix} y^1 \end{pmatrix} (\varphi \circ P^1)' = f' - \begin{pmatrix} y^1 \end{pmatrix} \varphi' \circ P^1) \left(\quad P^1 \quad \right)$$

a

$$\begin{aligned}
h' &= \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} \big((\varphi \circ P^1)^{-1}\big)' + (\varphi \circ P^1)^{-1} \begin{pmatrix} \quad f' \quad \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} (-1)(\varphi \circ P^1)^{-1} (\varphi' \circ P^1) \big(\quad P^1 \quad \big) + (\varphi \circ P^1)^{-1} \begin{pmatrix} \quad f' \quad \end{pmatrix} \\
&= (\varphi \circ P^1)^{-2} \left[(\varphi \circ P^1) \begin{pmatrix} \quad f' \quad \end{pmatrix} - (\varphi' \circ P^1) \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} \big(\quad P^1 \quad \big) \right]
\end{aligned}$$

Pro x splňující $f(x) = \varphi(x_1)y^1$ tak máme

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (\varphi(P^1x))^{-1} \left[\varphi(P^1x) \begin{pmatrix} \quad f'(x) \quad \end{pmatrix} - \varphi'(P^1x)\varphi(P^1x) \begin{pmatrix} y^1 \end{pmatrix} \big(\quad P^1x \quad \big) \right] \\
&= (\varphi(P^1(x))^{-1} \left[\begin{pmatrix} \quad f'(x) \quad \end{pmatrix} - \varphi'(P^1x) \begin{pmatrix} y^1 \end{pmatrix} \big(\quad P^1x \quad \big) \right] \\
&= (\varphi(P^1x))^{-1} g_1'(x).
\end{aligned}$$

Tedy $g_1'(x)$ je regulární.

$i+1$ *krok konstrukce:* Máme nyní g_i, že $0 \notin g_i(Z_{g_i}(G_i))$. Provedeme první krok konstrukce pro $f := g_i$, $U_{i+1} = \{y \in G \colon y_{i+1} \neq 0\}$ a projekci P^{i+1}. Dostaneme tak y^{i+1} malé takové, že 0 je regulární hodnota pro $g_{i+1} = g_i - \varphi(x_{i+1})y^{i+1}$ na U_{i+1}.

Dostáváme však dokonce, že 0 je regulární hodnota g_{i+1} na G_{i+1}. Vskutku, nechť $g_{i+1}(x) = 0$ pro nějaké $x \in G_{i+1}$. Pokud $x \in U_{i+1}$, je $g_{i+1}'(x)$ regulární. Pokud $x \notin U_{i+1}$, je $x \in G_i$. Jelikož

$$0 = g_{i+1}(x) = g_i(x) - \varphi(x_{i+1})y^{i+1} = g_i(x)$$

a

$$g_{i+1}'(x) = g_i'(x) - \varphi'(x_{i+1}) \begin{pmatrix} y^{i+1} \end{pmatrix} \big(\quad P^{i+1}x \quad \big) = g_i'(x)$$

je $g_{i+1}'(x)$ regulární.

Funkce $g = g_n$ je pak lichá a $0 \notin g(Z_g(G_n)) = g(Z_g(G \backslash \{0\}))$. Nicméně

$$g'(0) = g_{n-1}'(0) = \cdots = f'(0)$$

je též regulární. Tedy $0 \notin g(Z_g(G))$ a g je blízko f. Tím je důkaz dokončen. □

Věta 7.6.18 (Borsuk-Ulam)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, otevřená, syemtrická a $0 \in G$. Nechť $f \colon \partial G \to \mathbb{R}^m$ spojité, kde $m < n$. Pak existuje $x \in \partial G$ takové, že $f(x) = f(-x)$.*

Důkaz. Uvažujme $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ a $g(x) = f(x) - f(-x)$. Pokud je g různá od 0 na ∂G, uvažujme její rozšíření na $\overline{G}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^m$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že toto rozšíření je liché. Nyní existuje $r > 0$, že $\operatorname{dg}(g, G, 0) = \operatorname{dg}(g, G, y)$ pro $y \in rB_{\mathbb{R}^n}$. Dle Věty 7.6.17 je $\operatorname{dg}(g, G, 0) \neq 0$, a tedy $\operatorname{dg}(g, G, y) \neq 0$ pro $y \in rB_{\mathbb{R}^n}$. Tedy

$$rB_{\mathbb{R}^n} \subset g(\overline{G}) \subset \mathbb{R}^m;$$

spor. Proto existuje $x \in \partial G$, že $f(x) = f(-x)$. □

Věta 7.6.19. *Pokud $n > m$, není $\mathbb{R}^n$ homeomorfní s $\mathbb{R}^m$.*

Důkaz. Pokud $f\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je homeomorfizmus, existuje $x \in S_{\mathbb{R}^n}$, že $f(x) = f(-x)$. To je ale spor. □

Věta 7.6.20. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité a lokálně prosté. Pak f je otevřené.*

Důkaz. Fixujme $x_0 \in G$, přčmež nechť $x_0 = 0$ a $f(x_0) = 0$. Hledáme $U(0, s) \subset f(G)$.

Nechť f je prosté na $U(0, r)$. Položme

$$h(t, x) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}x\right), \quad (x, t) \in U(0, r) \times [0, 1].$$

Pak $h_0(x) = f(x)$ a $h_1(x) = f(\frac{x}{2}) - f(-\frac{x}{2})$. Navíc $h_t(\partial U(0,r)) \not\ni 0$. Vskutku, $h_0(x)$ to splňuje. Když $t > 0$ a

$$0 = h(t,x) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}x\right),$$

pak z prostoty f máme

$$\frac{x}{1+t} = -\frac{tx}{1+t},$$

neboli $x = 0$.

Tedy

$$\mathrm{dg}(f, U(0,r), 0) = \mathrm{dg}(h_1, U(0,r), 0) \neq 0$$

z Věty 7.6.17. Tedy $\mathrm{dg}(f, U(0,r), y) \neq 0$ pro $y \in U(0,s)$, kde $s > 0$ je dosti malé. Proto $f(U(0,r)) \supset U(0,s)$. □

7.6.1 Leray-Schauderův stupeň

Lemma 7.6.21. *Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $\varepsilon > 0$. Pak existuje konečná množina $F \subset K$ a spojité zobrazení $P\colon X \to \operatorname{co} F$ takové, že $\|Px - x\| < \varepsilon$, $x \in K$.*

Důkaz. Nechť $F = \{x_1, \dots, x_m\}$ je ε-síť pro K. Položme

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & x \in B(x_i, \varepsilon), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

a

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m \phi_i(x).$$

Pak $\phi > 0$ na K a lze definovat

$$Px = \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i, \quad x \in K.$$

Pak

$$\|Px - x\| = \left\| \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (x_i - x) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \|x_i - x\| < \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \varepsilon = \varepsilon.$$

□

Definice 7.6.22. Nechť X je Banachův prostor a $U \subset X$ je množina. Pak $f\colon U \to X$ je kompaktní, pokud je spojité a $\overline{f(U)}$ je kompaktní.

Dále položme pro $C \subset U$ $r(C) = \inf\{\|x - f(x)\| : x \in C\}$.

Věta 7.6.23 (Schauder)**.** *Nechť $C \subset X$ je uzavřená, konvexní a $f\colon C \to C$ je spojité, kompaktní. Pak f má pevný bod.*

Důkaz. Nechť $K = \overline{f(C)}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, nechť $P_n\colon K \to \operatorname{co} F_n$ je projekce daná Lemmatem 7.6.21 a $\frac{1}{n}$-sítí $F_n \subset K$. Položme $f_n\colon \operatorname{co} F_n \to \operatorname{co} F_n$ jako $f_n(x) = P_n f(x)$, $x \in \operatorname{co} F_n$. Nechť y_n je pevný bod pro f_n. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f(y_n) \to y$. Jelikož $\|P_n f(y_n) - f(y_n)\| < \frac{1}{n}$. Platí $y_n = f_n(y_n) \to y$. Tedy $f(y_n) \to f(y)$, což dává $f(y) = y$.

□

Lemma 7.6.24. *Nechť $f\colon \overline{U} \to X$ je kompaktní a $C \subset \overline{U}$ je uzavřená. Pak $(\mathrm{id} - f)(C)$ je uzavřená.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\} \in C$ splňuje $(x_n - f(x_n)) \to y$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $f(x_n) \to z$. Pak $x_n \to y + z$. Položíme-li $x = y + z$, máme $x \in C$ a

$$(\mathrm{id} - f)(x) = \lim_{n \to \infty} (\mathrm{id} - f)(x_n) = y + z - z = y.$$

□

Lemma 7.6.25. *Nechť $0 \notin (\mathrm{id} - f)(\partial U)$, P_ε je schauderovská projekce na $f(\overline{U})$ a $r = r(\partial U)$. Pokud $\varepsilon < \frac{r}{2}$, pak $\|x - P_\varepsilon f(x)\| \geqslant \frac{r}{2}$, $x \in \partial U$.*

Důkaz. Jelikož $\|P_\varepsilon y - y\| \leqslant \varepsilon$ na kompaktu $f(\overline{U})$, máme

$$\|x - P_\varepsilon f(x)\| = \geqslant \|x - f(x)\| - \|f(x) - P_\varepsilon f(x)\| \geqslant r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

□

Lemma 7.6.26. *Nechť X je topologický vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{R}$ a $h\colon X \to \mathbb{R}^n$ je izomorfizmus. Definujme $\mathrm{dg}(f, G, y)$ pro $y \notin f(\partial G)$ jako $\mathrm{dg}(h \circ f \circ h^{-1}, h(G), h(y))$. Pak tato definice nezávisí na volbě h.*

Důkaz. Nechť $h_1, h_2\colon X \to \mathbb{R}^n$ jsou dva izomorfizmy. Nechť $h = h_2 \circ h_1^{-1}$. Pak funkce $f_i = h_i \circ f \circ h_i^{-1}$ splňují $f_1 = h^{-1} \circ f \circ h$. Předpokládejme nejprve, že f_1 je diferencovatelné a $y_1 = h_1 y$ splňuje $f_1(x_1) = y_1$ pro regulární bod x_1. Pak je i f_2 diferencovatelné a $y_2 = h_2 y = h y_1$ splňuje $f_2(x_2) = y_2$, kde $x_2 = h(x_1)$ je regulární bod f_2. Pak

$$J_{f_2}(x_2) = \det h J f_1(x_1) \det h^{-1} = J f_1(x_1),$$

a tedy $\mathrm{dg}(f_2, h_2(G), y_2) = \mathrm{dg}(f_1, h_1(G), y_1)$.

V obecném případě pak aproximujeme f hladkou funkcí. □

Definice 7.6.27. Nechť X je reálný topologický prostor konečné dimenze. Pak definujeme $\mathrm{dg}(f, G, y)$ pomocí Lemmatu 7.6.26.

Věta 7.6.28. *Nechť $\dim X_n = n$ a $X_m \subset\subset X_n$ splňuje $\dim X_m = m < n$. Nechť $G \subset X_n$ je omezená, otevřená, $f\overline{G} \to X_m$ je spojité a $y \notin X_m \backslash (\mathrm{id} - f)(\partial G)$. Pak*

$$\mathrm{dg}((\mathrm{id} - f), G, y) = \mathrm{dg}((\mathrm{id} - f)|_{\overline{G \cap X_m}}, G \cap X_m, y).$$

Důkaz. Označme $g = \mathrm{id} - f$. Můžeme předpokládat, že $X_n = \mathbb{R}^n$, $X_m = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}$, $f \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ a $y \notin g(Z_g)$. Nechť $g(x) = y$ pro nějaké $x \in G$. Pak $x \in G \cap \mathbb{R}^m$, a tedy pro $g_m = (\mathrm{id} - f)|_{\overline{G \cap \mathbb{R}^m}}$ máme $g_m(x) = y$. Jelikož

$$Jg(x) = \det \begin{pmatrix} I_m - (\partial_j f_i(x)) & -(\partial_j f_i(x)) \\ (0) & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

a

$$Jg_m(x) = \det(I_m - (\partial_j f_i(x))\,,$$

rozvojem první matice podle posledních $n - m$ řádků dostaneme $Jg(x) = Jg_m(x)$. □

Definice 7.6.29. Nechť X je reálný Banachův prostor, $G \subset X$ je otevřená omezená, $f\colon \overline{G} \to X$ kompaktní a $0 \notin (\mathrm{id} - f)(\partial G)$. Zvolme $\varepsilon > 0$, že $\|x - P_\varepsilon f(x)\| \geqslant \frac{r}{2}$, $x \in \partial G$. Nechť K je kompakt obsahující $f(\overline{G})$ a P_ε je zobrazení z Lemmatu 7.6.24 splňující $\|x - P_\varepsilon x\| < \varepsilon$. Nechť $\mathrm{id}_\varepsilon\colon X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ je identita. Definujme

$$\mathrm{dg}(\mathrm{id} - f, G, 0) = \mathrm{dg}(\mathrm{id}\,\varepsilon - f_\varepsilon, G_\varepsilon, 0),$$

kde $G_\varepsilon = G \cap X_\varepsilon$ a $f_\varepsilon(x) = P\varepsilon f(x)$, $x \in \overline{U_\varepsilon}$.

(Poznamenejme, že definice je korektní, neboť $\|x - f_\varepsilon x\| \geqslant \frac{r}{2}$, $x \in \partial U_\varepsilon$.)

Pokud $y \notin (\mathrm{id} - f)(\partial G)$, položíme $\mathrm{dg}((\mathrm{id} - f), G, y) = \mathrm{dg}((\mathrm{id} - f - y), G, 0)$.

Věta 7.6.30. *Definice 7.6.29 nezávisí na volbě kompaktu K, $\varepsilon \in (0, \frac{r}{2})$, prostoru X_ε a zobrazení P_ε.*

Důkaz. Mějme objekty ε_i, K_i, X_i, P_i, U_i a f_i, kde $f_i\colon \overline{U_i} \subset \overline{U} \to X_i$ je definováno jako $f_i(x) = P_i f(x)$, přičemž $U_i = U \cap X_i$. Nechť Y je konečně dimenzionální prostor obsahující X_1 a X_2. Položme $V = U \cap Y$ a $g_1\colon \overline{V} \to Y$ definované jako $g_1(x) = P_1 f(x) \in Y$. Použitím Věty 7.6.28 dostáváme

$$\mathrm{dg}((\mathrm{id}_Y - g_1), V, 0) = \mathrm{dg}((\mathrm{id}_Y - g_1)|_{\overline{V} \cap X_1}, V \cap X_1, 0) = \mathrm{dg}(\mathrm{id}_{X_1} - f_1, U_1, 0)$$

Analogickým postupem dostaneme $g_2(x) = P_2 f(x)$ na $\overline{V}$ splňující

$$\mathrm{dg}((\mathrm{id}_Y - g_2), V, 0) = \mathrm{dg}(\mathrm{id}_{X_2} - f_2, U_2, 0).$$

Uvažujme nyní homotopii H na $Y \times [0,1]$ definovanou jako

$$H(x,t) = t(\mathrm{id}_Y - g_1)(x) + (1-t)(\mathrm{id}_Y - g_2)(x) = \mathrm{id}_Y - (t g_1(x) + (1-t) g_2(x)).$$

Pak $0 \notin H(\cdot, t)(\partial V)$. Vskutku, je-li $x \in \partial V$, platí $x \in \partial U$, a tedy

$$\begin{aligned}\|H(x,t) - (\mathrm{id}_Y - f)(x)\| &= \|x - t g_1(x) - (1-t) g_2 - x + f(x)\| \leqslant t\,\|g_1(x) - f(x)\| + (1-t)\,\|f(x) - g_2(x)\| \\ &\leqslant t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2 \leqslant \frac{r}{2}.\end{aligned}$$

Na druhou stranu platí $\|x - f(x)\| \geqslant r$, takže $\|H(x,t)\| \geqslant \frac{r}{2}$.

Tedy $\mathrm{dg}(H(\cdot, 0), V, 0) = \mathrm{dg}(H(\cdot, 1), V, 0)$, čímž je důkaz dokončen. □

Věta 7.6.31. *Existuje právě jedno zobrazení* $\mathrm{dg}(\mathrm{id}-f, G, y)$, *kde* $G \subset X$ *otevřená, omezená,* $y \notin (\mathrm{id}-f)(\partial G)$, f *kompaktní takové, že splňuje (d1)-(d3). Navíc splňuje (d4)-(d7).*

Důkaz. (d4) Nechť $\mathrm{dg}(\mathrm{id}-f, G, 0) \neq 0$ a $f(x) \neq x$ na $\overline{U}$. Pak $r(\overline{U}) > 0$ a pro $\varepsilon < \frac{r(\overline{U})}{2}$ platí $\|x - P_\varepsilon f(x)\| \geqslant \frac{r(\overline{U})}{2}$, $x \in \overline{U}$. Tedy

$$0 \neq \mathrm{dg}((\mathrm{id}-f), G, 0) = \mathrm{dg}(\mathrm{id}_{X_\varepsilon} - f_\varepsilon, G \cap X_\varepsilon, 0) = 0;$$

spor. □

7.6.2 Monotónní operátory

Věta 7.6.32. *Nechť* X *je Hilbertův prostor a* $f \colon X \to X$ *splňuje následující podmínky:*

(1) existuje $\lambda > 0$, *že* $\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geqslant \lambda \|x - y\|^2$, $x, y \in X$;

(2) existuje $K > 0$, *že* $\|f(x) - f(y)\| \leqslant K \|x - y\|$, $x, y \in X$.

Pak je f *bijekce* X *na* X.

Důkaz. Nechť $z \in X$ je dáno. Hledáme $x \in X$ splňující $f(x) = z$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $z = 0$ (jinak uvažujeme $g(x) = f(x) - z$). Vezměme $\varepsilon > 0$ splňující $\varepsilon < \frac{2\lambda}{K^2}$ a operátor $g(x) = x - \varepsilon f(x)$. Pak pro $x, y \in X$ máme

$$\begin{aligned}\|g(y) - g(x)\|^2 &= \langle y - \varepsilon f(y) - x + \varepsilon f(x), y - \varepsilon f(y) - x + \varepsilon f(x)\rangle \\ &= \|y - x\|^2 - 2\varepsilon\langle f(y) - f(x), y - x\rangle + \varepsilon^2 \|f(y) - f(x)\|^2 \\ &\leqslant \|y - x\|^2 \left(1 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2 K^2\right)\end{aligned}$$

Jelikož $1 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2 K^2 < 1$, je g kontrakce. Tedy existuje právě jeden bod splňující $g(x) = x$. Pak ovšem rovnost

$$x = g(x) = x - \varepsilon f(x)$$

implikuje $f(x) = 0$.

Nechť nyní $f(x) = f(y) = z$. Pak

$$0 = \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geqslant \lambda \|x - y\|^2$$

implikuje $x = y$. □

Definice 7.6.33. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $f \colon X \to Y$ je zobrazení. Pak f je

- omezené, pokud posílá omezené množiny na omezené množiny,
- demispojité, pokud je $\|{-}\|\ w$ spojité (tedy pokud $x_n \to x$ implikuje $f(x_n) \rightharpoonup f(x)$)

Nechť $Y = X^*$, kde X je reflexivní. Pak f je

- monotónní, pokud $\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geqslant 0$, $x, y \in X$;
- hemispojité, pokud pro každé $x, y \in X$ je funkce $t \mapsto \langle f(x + ty), y\rangle$ spojitá;
- typu M, pokud $x_n \rightharpoonup x$, $f(x_n) \rightharpoonup x^*$ a $\limsup\langle f(x_n), x_n\rangle \leqslant x^*(x)$ implikují $f(x) = x^*$.

Lemma 7.6.34. *(a) Pokud je* f *hemispojitý a monotónní, je typu* M.

(b) Je-li f *omezený a typu* M, *je demispojitý.*

Důkaz. (a) Nechť $\{x_n\}$, x a x^* jsou jako v definici. Pak nerovnost

$$\langle f(x_n) - f(y), x_n - y\rangle \geqslant 0, \quad y \in X,$$

implikuje

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \limsup\left(\langle f(x_n), x_n\rangle - \langle f(x_n), y\rangle - \langle f(y), x_n\rangle + \langle f(y), y\rangle\right) \\ &\leqslant \langle x^*, x\rangle - \langle x^*, y - \langle f(y), x\rangle + \langle f(y), y\rangle = \langle x^* - f(y), x - y\rangle, \quad y \in X.\end{aligned}$$

Pro každé $z \in X$ uvažujme $y = x - tz$, $t > 0$. Pak máme

$$0 \leqslant \langle x^* - f(x - tz), tz\rangle,$$

a tedy

$$0 \leqslant \langle x^* - f(x - tz), z\rangle.$$

Z hemispojitosti pak máme

$$0 \leqslant \langle x^* - f(x), z\rangle, \quad z \in X,$$

což implikuje $f(x) = x^*$.

(b) Nechť $x_n \to x$ v X. Protože je f omezený, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $f(x_{n_k}) \rightharpoonup x^*$. Vzhledem k tomu, že

$$|f(x_{n_k})(x_{n_k}) - x^*(x)| \leqslant |f(x_{n_k})(x_{n_k} - x + x) - x^*(x)| \leqslant \|f(x_{n_k})\| \|x_{n_k} - x\| + |(f(x_{n_k}) - x^*)(x)| \to 0,$$

platí $\lim f(x_{n_k})(x_{n_k}) = x^*(x)$. Jelikož je f typu M, platí $f(x) = x^*$, a tedy $f(x_{n_k}) \rightharpoonup f(x)$.

Jelikož taková podposloupnost lze vybrat z každé podposloupnosti $\{x_n\}$, platí $f(x_n) \rightharpoonup f(x)$. □

Důsledek 7.6.35. *Nechť* $\dim X < \infty$*,* Y *je reflexivní prostor,* $j\colon X \to Y$ *je isomozorfizmus a* $j'\colon Y^* \to X^*$ *je duální operátor. Nechť* $f\colon Y \to Y^*$ *je omezený a typu* M*. Pak* $j' \circ f \circ j\colon X \to X*$ *je spojitý.*

Důkaz. Pokud $x_n \to x$ v X, pak $f(j(x_n)) \rightharpoonup f(j(x))$ v Y'. Tedy i $j'(f(j(x_n))) \rightharpoonup j'(f(j(x)))$. Vzhledem k tomu, že $\dim X^* < \infty$, $j'(f(j(x_n))) \to j'(f(j(x)))$. □

Lemma 7.6.36. *Nechť* $f\colon B_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ *je spojité a* $\langle f(x), x\rangle \geqslant 0$*,* $x \in S_{\mathbb{R}^n}$*. Pak* f *má kořen.*

Důkaz. Pokud by tomu tak nebylo, zobrazení $x \mapsto -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ má pevný bod x_0. Pro ten pak platí

$$\|x_0\| = \left\| -\frac{f(x_0)}{\|f(x_0)\|} \right\| = 1$$

a

$$\langle f(x_0), x_0\rangle = -\|f(x_0)\| < 0;$$

spor. □

Věta 7.6.37. *Nechť* X *je separabilní, reflexivní a* $x^*ßX^*$*. Nechť* $f\colon X \to X^*$ *je typu* M *a omezený a existuje* $\rho > 0$ *splňující*

$$\langle f(x), x\rangle > x^*(x), \quad x \in X \backslash \rho B_X. \tag{7.6}$$

Pak $x^* \in \operatorname{Rng} f$*.*

Důkaz. Nechť $\{w_1, w_2, \dots\}$ jsou lineárně nezávislé vektory v X, jejichž lineární obal je hustý. Položme $X_m = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Pro pevné $m \in \mathbb{N}$ uvažujme úlohu

$$\langle f(u), w_j\rangle = x^*(w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad u \in X_m. \tag{7.7}$$

Nechť $j\colon \mathbb{R}^m \to V_m$ je izomorfizmus posílající e_k na w_k, $k = 1, \dots, m$. Pak (7.7) je ekvivalentní s řešením rovnice

$$F(v) = 0, \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

kde $F\colon \mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^m)^*$ je definováno jako

$$F(u) = (j'fj)(u) - j'x^*, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Pro vektor $v \in \mathbb{R}^m$ splňující $F(v) = 0$ pak totiž $j(v)$ je řešení (7.7). Je-li však $u \in \mathbb{R}^m$ o normě větší než ρ,z (7.6) dává

$$\langle F(u), u\rangle = \langle (j'fj)(u) - j'x^*, u\rangle = \langle f(j(u)) - x^*, j(u) > 0,$$

takže z Lemmatu 7.6.36 plyne existence u_m splňujícího (7.7).

Pak $\langle f(u_m), u_m\rangle = x^*(u_m)$, takže z (7.6) plyne $\|u_m\| \leqslant \rho$, $m \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti nechť $u_m \rightharpoonup u$ a $f(u_m) \rightharpoonup y^*$ (f je omezený). Pak $y^* = x^*$.

Vskutku, nechť w_i je libovolné. Pak pro $m \geqslant w_i$ platí $\langle f(u_m), w_i\rangle = x^*(w_i)$, a tedy limitním přechodem platí $y^*(w_i) = x^*(w_i)$. Z hustoty pak $y^* = x^*$.

Konečně máme

$$\langle f(u_m), u_m\rangle = x^*(u_m) \to x^*(u).$$

Jelikož f je typu M, platí $f(u) = x^*$. □

Definice 7.6.38. Funkce $f\colon X \to X^*$ je koercivní, pokud

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)(x)}{\|x\|} = \infty.$$

Důsledek 7.6.39. *Nechť* f *je omezený, koercivní a typu* M *na separabilním Banachově prostoru. Pak* f *je surjektivní.*

Definice 7.6.40. Funkce $f: X \to X^*$ je striktně monotónní, pokud

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle > 0, \quad x \neq y;$$

a silně monotónní, pokud

$$\langle f(x) - f(y), x - u \rangle \geqslant c \|x - y\|^2, \quad x, y \in X,$$

pro nějaké $c > 0$.

Poznámka 7.6.41. (a) Silně monotónní operátor je koercivní.
(b) Pokud je f striktně monotónní, je prostý.

Věta 7.6.42 (Minty)**.** *Nechť $f: X \to X^*$ je monotónní a hemispojitý.*

(a) Nechť $x^* \in X^*$. Pak $f(x) = x^*$ právě tehdy, když $\langle f(z) - x^*, z - x \rangle \geqslant 0$ pro všechny $z \in X$.

(b) Pokud f je omezený a splňuje (7.6) *pro nějaké x^*, je množina řešení $\{x \in X : f(x) = x^*\}$ uzavřená, konvexní, neprázdná a omezená.*

Důkaz. (a) Pokud $f(x) = x^*$, $\langle f(z) - x^*, z - x \rangle \geqslant 0$ pro všechny $z \in X$. Obráceně, nechť podmínka platí. Uvažujme pro $w \in X$ vektory $z = x + tw$, $t > 0$. Pak

$$0 \leqslant f(x + tw) - x^*, tw \rangle, \quad t > 0,$$

a hemispojitost implikuje $0 \leqslant f(x) - x^*, w \rangle$, $w \in X$. Tedy $f(x) = x^*$.
(b) Z (a) máme

$$\{x \in X : f(x) = x^*\} = \bigcap_{v \in X} \{u \in X : \langle f(v) - x^*, v - u \rangle\},$$

a tedy se jedná o uzavřenou, konvexní množinu. Z (7.6) plyne její omezenost a neprázdnost. □

Věta 7.6.43 (Browder-Minty)**.** *Nechť X je separabilní, reflexivní prostor a $f: X \to X^*$ je monotónní, demispojitý a $x^* \in X^*$ splňuje* (7.6)*. Pak $x^* \in \operatorname{Rng} f$.*

Důkaz. Pomocí demispojitosti obdržíme jako v důkaze Věty 7.6.37 vektory $u_m \in X_m$ splňující $\langle f(u_m) - x^*, w \rangle = 0$, $w \in X_m$. Bez újmy na obecnosti lze díky (7.6) předpokládat, že $u_m \rightharpoonup u$. Pro $v \in X_n$ a libovolné $m \geqslant n$ platí

$$0 \leqslant \langle f(v) - f(u_m), v - u_m \rangle = \langle f(v) - x^*, v - u_m \rangle,$$

a tedy limitním přechodem

$$0 \leqslant \langle f(v) - x^*, v - u \rangle, \quad v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Jelikož je f demispojitý a $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ hustý v X, platí

$$0 \leqslant \langle f(v) - x^*, v - u \rangle, \quad v \in X.$$

Dle Tvrzení 7.6.42 platí $f(u) = x^*$. □

Věta 7.6.44. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná, $f: G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje Cartheódoryovy podmínky a navíc pro $p \in (1, \infty)$ a $k \in L^{p'}(G)$ platí*

$$|f(x, r)| \leqslant c |r|^{p-1} + k(x), \quad \textit{skoro všechna } x \in G.$$

Pak $F: L^p \to L^{p'} = (L^p)^*$ je omezený a spojitý. Pokud je též $f(x, \cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající, je F monotónní.

Důkaz. První část důkazu plyne z Věty 7.2.1, položíme-li $q = p'$. Pak totiž platí $\frac{p}{p'} = p - 1$
Monotonie pak plyne z odhadu

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle = \int_G (f(x, u(x)) - f(x, v(x)) (u(x) - v(x)) \, dx \geqslant 0,$$

který platí díky nerovnosti

$$(f(x, r_1) - f(x, r_2)) (r_1 - r_2) \geqslant 0, \quad x \in G, r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Kapitola 8

Funkcionální analýza III. - příklady

8.1 Topologické vektorové prostory

8.1.1 Příklady a elementární vlastnosti

Příklad 8.1.1. Ukažte, že $\mathcal{C}(\Omega)$, $H(\Omega)$, $\mathscr{D}(K)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ jsou Fréchetovy prostory.

Příklad 8.1.2. Prozkoumejte vlastnosti následujících prostorů: $(\mathbb{R}^\gamma, \tau_p)$, $(\mathcal{C}(X), \tau_K)$, slabou topologii na Banachově prostoru, slabou* topologii na duálu, měřitelné funkce na $[0,1]$ na konveregencí v míře

Příklad 8.1.3. Uvažujte $L_p(0,1)$ pro $0 < p < 1$. Ukažte, že

- je to lokálně omezený F-prostor,
- neobsahuje netriviální otevřené konvexní množiny,
- jeho duál je triviální.

Příklad 8.1.4. Ve vektorovém prostoru X platí následující:

- $2A \subset A + A$ a rovnost obecně neplatí,
- A je konvexní právě tehdy, když $(s+t)A = sA + tA$ pro každé $s, t \geqslant 0$,
- vyvážené množiny jsou stabilní vzhledem ke sjednocením a průnikům,
- konvexní množiny jsou stabilní vzhledem k průnikům a nahoru usměrněným sjednocením,
- $A + B$ je konvexní, pokud A, B jsou konvexní,
- $A + B$ je vyvážené, pokud A, B jsou vyvážené.

Příklad 8.1.5. Ve TVS X platí následující:

- konvexní obal otevřené množiny je otevřená,
- konvexní obal omezené množiny je omezená, pokud X je LCS,
- předchozí tvrzení neplatí v TVS,
- konvexní obal totálně omezené množiny je totálně omezená, pokud X je LCS,
- $A + B$ je omezená, pokud A, B jsou omezené,
- $A + B$ je kompaktní, pokud A, B jsou kompaktní,
- $A + B$ je uzavřená, pokud A uzavřená a B kompaktní.

Příklad 8.1.6. Najděte vyváženou $B \subset \mathbb{C}^2$, jejíž vnitřek není vyvážený.

Příklad 8.1.7. Nechť $\{x_n\}$ ve LCS X konverguje k 0. Pak $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i \to 0$.

Příklad 8.1.8. Nechť X je Banachův nekonečné dimenze. Ukažte, že X lze napsat jako sjednocení dvou disjunktních hustých konvexních množin.

Příklad 8.1.9. Ukažte, že

- konvexní obal kompaktních konvexních množin je kompaktní,
- konvexní obal kompaktní množiny je kompaktní v konečně dimenzionálních prostorech,
- konvexní obal kompaktní množiny nemusí být kompaktní ani v Hilbertově prostoru,
- uzavřený konvexní obal kompaktní množiny je kompaktní ve Fréchetově prostoru,

- vyvážený obal kompaktní množiny je kompaktní.

Příklad 8.1.10. Ukažte, že A v TVS je omezená, pokud každá její spočetná podmnožina je omezená.

Příklad 8.1.11. Uvažujte $X = \mathcal{C}_p([0,1])$. Najděte $\{f_n\}$ v X konvergující k 0 takovou, že $\{\gamma_n f_n\}$ nekonverguje k 0 pro každou posloupnost $\{\gamma_n\}$ jdoucí k ∞.

Příklad 8.1.12. Nechť X, Y jsou TVS, přičemž Y je konečně-dimenzionální, $T : X \to Y$ lineární surjekce. Ukažte, že T je otevřené. Navíc, T je spojité, pokud jeho jádro je uzavřené.

Příklad 8.1.13. Ukažte, že každé prostor konečné kodimenze v L_p pro $0 < p < 1$ je hustý.

Příklad 8.1.14. Uvažujte $X = \mathcal{C}([0,1])$ s metrikou $d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|}$. Nechť σ značí topologii definovanou d a τ značí bodovou topologii. Pak:

- každá τ-omezená množina je i σ-omezená,
- $I : (X,\tau) \to (X,\sigma)$ je omezené nespojité sekvenciálně spojité zobrazení,
- τ není metrizovatelná,
- τ nemá spočetnou bázi,
- každý spojitý funkcionál na (X,τ) je tvaru $f \mapsto \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$.
- (X,σ) má pouze triviální otevřené konvexní množiny,
- $I : (X,\sigma) \to (X,\tau)$ není spojité,
- konvergence v σ odpovídá konvergenci v míře.

Příklad 8.1.15. Ukažte, že topologie $\mathcal{C}(\Omega)$ (respektive $H(\Omega)$) nezávisí na volbě kompaktů.

Příklad 8.1.16. Ukažte, že lineární operátor z hustého podprostoru TVS X do F-prostoru Y lze jednoznačně rozšířit.

Příklad 8.1.17. Uvažujte bázi $X = \ell_2(\mathbb{Z})$ a vektory $f_n = e_{-n} + ne_n$. Nechť X_1 je uzavřený lineární obal vektorů $\{e_0, e_1, \dots\}$ a X_2 je uzavřený lineární obal $\{f_1, f_2 \dots\}$. Pak $X_1 + X_2$ je hustý v X, ale neobsahuje $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_{-n}$.

Příklad 8.1.18. Uvažujte $X = \mathcal{C}(0,1)$ s topologií generovanou koulemi ve stejnoměrné metrice. Ukažte, že X není TVS.

Příklad 8.1.19. Uvažujte $X = L^2([-1,1])$ a $X_\alpha = \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) : f(0) = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak X_α jsou disjunktní husté prostory, které tedy nemohou být odděleny spojtým funkcionálem.

Příklad 8.1.20. Jsou-li X_i TVS, pak $\prod X_i$ se součinovou topologií je TVS, stejně jako $\sum X_i = \{x \in \prod X_i : \operatorname{spt} x \text{ konečný}\}$. Ukažte, že:

- součin i suma jsou LCS, pokud X_i jsou LCS,
- $(\prod X_i)^* = \sum X_i^*$.
- $(\sum X_i)^* = \prod X_i^*$.

Příklad 8.1.21. Ukažte, že $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^* = (c_{00}, \tau_p)$.

8.1.2 Slabé topologie

Příklad 8.1.22. Uvažujte $X = \ell_p$ pro $0 < p < \infty$. Pak

- pro $1 < p < \infty$ prostor X obsahuje slabě konvergentí posloupnost, která nekonverguje v normě,
- pro $p = 1$ normově konvergentní posloupnosti splývají se slabě konvergentními,
- pro $0 < p < 1$ je X lokálně omezený F-prostor splňující $X^* = \ell_\infty$,
- pro $0 < p < r \leqslant 1$ uvažujte na ℓ_∞ slabou* topologie τ_p a τ_r indukované ℓ_p a ℓ_r a ukažte, že jsou různé na celém prostoru a splývají na normově omezených množinách ℓ_∞.

Příklad 8.1.23. Ukažte, že $e_n = e^{int}$ konvergují v $L^p(-\pi,\pi)$ slabě k 0 pro $1 \leqslant p < \infty$.

Příklad 8.1.24. Ukažte, že $\mathcal{C}([0,1])$ je slabě* husté v $L^\infty([0,1])$.

Příklad 8.1.25. Uvažujte komplexní prostor $X = \mathcal{C}([0,1])$. Najděte $f \in X^*$ zobrazující B_X na otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$.

Příklad 8.1.26. Uvažujte prostor $X = \ell_2$ a E sestává z prvků $e_{m,n} = e_m + me_n$. Nechť E_1 značí slabý sekvenciální uzávěr E.

- Najděte E_1.
- Najděte slabý uzávěr E.
- Ukažte, že $0 \in \overline{E}^w \setminus E_1$.

Příklad 8.1.27. Nechť X je vektorový prostor, $M \subset\subset X^{\#}$, pak $(X, \sigma(X, M))$ je metrizovatelný právě tehdy, když M má spočetnou bázi.

Příklad 8.1.28. • Slabá topologie na NLP X nekonečné dimenze není metrizovatelná.

- Slabá* topologie na duálním X^* je metrizovatelná právě tehdy, když X má spočetnou bázi (tj. pro nekonečně dimenzionální Banachův X není slabá* topologie metrizovatelná).

Příklad 8.1.29. • (B_X, w) je metrizovatelná právě tehdy, když X^* separabilní.

- (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná právě tehdy, když X separabilní.

Příklad 8.1.30. Nechť $\dim X = \infty$, pak $\overline{S_X}^w = B_X$.

Příklad 8.1.31 (Helly)**.** Nechť X Banachův, $f \in X^{**}$ a $F \subset\subset X^*$ konečné dimenze a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $x \in X$ takové, že $\|x\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|$ a $x = f$ na F.

Příklad 8.1.32. Nechť X je Banachův. Ukažte, že normová a slabá topologie splývá na B_X právě tehdy, když X je konečně dimenzionální.

Příklad 8.1.33. Nechť X je LCS. Ukažte, že (X, w) má omezené okolí právě tehdy, když X je konečně dimenzionální.

Příklad 8.1.34. Na X je $\|\cdot\|$ slabě zdola polospojitá, na X^* je slabě* zdola polospojitá.

Příklad 8.1.35. Pro X Banachův je S_X G_δ v B_X ve slabé topologii, S_{X^*} je slabě* G_δ v B_{X^*}.

Příklad 8.1.36. Nechť X je Banachův. Ukažte, že $A \subset X^*$ je slabě* omezená právě tehdy, když A je normově omezená.

Příklad 8.1.37. Norma není pro $\dim X = \infty$ slabě spojitá, ani není slabě* spojitá na duálu.

Příklad 8.1.38. Je-li X Banach a $K \subset X$ slabě kompaktní, pak pro každé $x \in X$ existuje v K k němu nejbližší prvek. Podobně pro slabě* kompaktní podmnožinu duálu.

Příklad 8.1.39. Nechť K je kompakt. Ukažte, že $\mathcal{C}(K)$ je separabilní právě tehdy, když K je metrizovatelný.

Příklad 8.1.40. Nechť X je Banachův a $Y \subset\subset X$ je hustý. Ukažte, že X^* je izometricky izomorfní s Y^*, přičemž tento izomorfizmus je homeomorfizmus mezi w* topologiemi právě tehdy, když $Y = X$.

Příklad 8.1.41. Uvažujte ℓ_1 jako

- duál k c_0 (pomocí duality $x \mapsto \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$, $x \in c_0$, $y \in \ell_1$) s topologií $\sigma_1 = \sigma(\ell_1, c_0)$,
- duál k c_{00} (pomocí duality $x \mapsto \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$, $x \in c_0$, $y \in \ell_1$) s topologií $\sigma_2 = \sigma(\ell_1, c_{00})$,
- duál k c (pomocí duality $x \mapsto (\lim x) y_1 + \sum_{i=1}^\infty x_i y_{i+1}$, $x \in c_0$, $y \in \ell_1$) s topologií $\sigma_3 = \sigma(\ell_1, c)$.

Rozmyslete si,

- pro jaké topologie je identické zobrazení na ℓ_1 spojité či homeomorfní,
- pro jaké topologie je identické zobrazení na B_{ℓ_1} spojité či homeomorfní,
- stejné otázky pro pravý a levý shift T a S, tj. $T(y_1, y_2, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots)$ a $S(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$.

Příklad 8.1.42. Nechť $T : X \to Y$ je operátor mezi normovanými lineárními prostory. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojitý,
(ii) $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, w)$ je spojitý,
(iii) $T : (X, w) \to (Y, w)$ je spojitý,
(iv) $T : (X, w) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojitý.

Příklad 8.1.43. Nechť $T : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ je operátor mezi lokálně kovexními prostory. Rozmyslete si implikace mezi následujícími výroky:

(i) $T : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ je spojitý,
(ii) $T : (X, w) \to (Y, w)$ je spojitý,
(iii) $T : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ je spojitý pro nějaké přípustné topologie τ_1 na X a σ_1 na Y,
(iv) $T : (X, \tau) \to (Y, w)$ je spojitý,
(v) $T : (X, w) \to (Y, \sigma_1)$ je spojitý.

Příklad 8.1.44. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor a $X_{\mathbb{R}}$ je reálná verze X. Ukažte, že $I : X^* \to (X_{\mathbb{R}})^*$, $x^* \mapsto \operatorname{Re} x^*$, je izometrický w^*-w^* homeomorfizmus.

8.1.3 Poláry a extremální body

Příklad 8.1.45. Najděte poláry množin A v prostoru X:

- $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1,1)\}$,
- $X = \mathbb{C}^3$, $A = \{(1,i,-i)\}$,
- $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in X : 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,
- $X = \mathbb{C}$, $A = \{t(1,1) : t \in [0,1]\}$,
- $X = \mathbb{C}^2$, $A = \{z\,((1,0),(0,1)) : |z| \leqslant 1\}$.

Příklad 8.1.46. Nechť X je NLP a $A \subset X$. Ukažte, že $(A^0)^0 = \overline{\text{bco}}^{w^*}(\varepsilon(A))$.

Příklad 8.1.47. Najděte kompaktní konvexní množinu $K \subset \ell_2$ tak, že $K \neq \operatorname{co}\operatorname{ext} K$.

Příklad 8.1.48. Najděte extremální body jednotkové koule prostoru c_0, $C(K)$, $L_1([0,1])$, ℓ_p pro $p \in [1,\infty]$ a $\mathcal{M}(K)$.

Příklad 8.1.49. Nechť X je Banachův nekonečné dimenze a $\operatorname{ext} B_X$ je konečná. Ukažte, že X není izometricky izomorfní žádnému duálnímu prostoru.

Příklad 8.1.50. Najděte $\operatorname{ext}\mathcal{M}^1(K)$, $\overline{\text{co}}^{w^*}\operatorname{ext}\mathcal{M}^1(K)$ a $\overline{\text{co}}^{\|\cdot\|}\operatorname{ext}\mathcal{M}^1(K)$ pro kompaktní prostor K.

Příklad 8.1.51. Najděte $X = \ell_1$, pak $B_X = \overline{\text{co}}^{\|\cdot\|}\operatorname{ext} B_X$.

Příklad 8.1.52. Nechť X je Banachův a $x \in X$. Pak existuje $x^* \in \operatorname{ext} B_{X^*}$, že $\|x^*\| = |x^*(x)|$.

8.1.4 Slabá a slabá* separabilita, slabá kompaktnost

Příklad 8.1.53. Ověřte následující pro topologický prostor X:

- relativně kompaktní je relativně spočetně kompaktní a kompaktní je spočetně kompaktní,
- relativně sekvenciálně kompaktní je relativně spočetně kompaktní a sekvenciálně kompaktní je spočetně kompaktní,

Příklad 8.1.54. Ověřte následující příklady:

- Nechť $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$, $A = \{x \in X : \operatorname{spt} x \text{ spočetný }\}$. Pak A je sekvenciálně kompaktní a $\overline{A} = X$.
- Nechť $X = \beta\mathbb{N}\backslash\{u\}$ pro nějaké $u \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Pak X je spočetně kompaktní a není kompaktní.
- Nechť $X = \beta\mathbb{N}$. Pak X je kompaktní a není sekvenciálně kompaktní.
- Nechť $X = [0,\omega_1)$. Pak X je sekevenciálně kompaktní a nekompaktní.

Příklad 8.1.55.

- Nechť $X = c_0(\Gamma)$ a $A = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě kompaktní.
- Nechť $X = \ell_1(\Gamma)$ a $A = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě* kompaktní a není slabě kompaktní.
- Nechť $X = \ell_2(\Gamma)$ a $A = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě kompaktní.
- Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$. Najděte posloupnost (f_n) v X konvergující k 0 v τ_p a nekonvergující slabě.
- Nechť $X = L_p([0,1])$, $1 \leqslant p < \infty$, a $A = \{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Pak A je slabě kompaktní.

Příklad 8.1.56. Nechť X je separabilní NLP a $A \subset X$ relativně slabě spočetně kompaktní. Pak A je relativně slabě kompaktní.

Příklad 8.1.57. Rozmyslete si Eberlein-Šmuljanovu větu pro normované lineární prostory.

Příklad 8.1.58. Nechť $\varphi : K \to L$ je spojitá surjekce kompaktu K na L a $g : L \to M$ je zobrazení do topologického prostoru M. Pak g je spojité právě tehdy, když $g \circ \varphi$ je spojité.

Příklad 8.1.59. Nechť $A \subset (\mathcal{C}(K), \tau_p)$ je separabilní relativně spočetně kompaktní. Pak A je metrizovatelná.

Příklad 8.1.60. Nechť $A \subset (\mathcal{C}(K), \tau_p)$. Pak A je τ_p-separabilní právě tehdy, když A je slabě separabilní právě tehdy, když A je $\|\cdot\|$-separabilní.

Příklad 8.1.61. Nechť X je Banachův a $A \subset X$. Ukažte, že A je slabě kompaktní právě tehdy, když $A \cap Y$ je slabě kompaktní pro každý uzavřený separabilní $Y \subset\subset X$.

Příklad 8.1.62. Nechť $A \subset X$, kde X je NLP. Pak A je slabě separabilní právě tehdy, když A je $\|\cdot\|$-separabilní.

Příklad 8.1.63. Je-li X separabilní, pak X^* je slabě* separabilní. (Obrácená implikace obecně neplatí.)

Příklad 8.1.64. Nechť X je Banachův a $K \subset X$ je slabě kompaktní a separabilní. Pak (K, w) je metrizovatelný.

Příklad 8.1.65. Nechť K je separabilní kompaktní prostor, $A \subset \mathcal{C}(K)$ je slabě kompaktní. Pak je metrizovatelná ve slabé topologii a normově separabilní.

Příklad 8.1.66. Banachův prostor X ve slabé topologii není úplný.

Příklad 8.1.67. Nechť X je Banachův prostor. Pak B_{X^*} je w^* separabilní právě tehdy, když S_{X^*} je w^* separabilní. Pokud B_{X^*} je w^* separabilní, je i X^* w^* separabilní (obráceně neplatí).

Příklad 8.1.68. Nechť X je Banachův. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) X^* je w^* separabilní.

(ii) Existuje spojité prosté zobrazení X do separabilního reflexivního prostoru.

(iii) Existuje spojité prosté zobrazení X do separabilního prostoru.

Příklad 8.1.69. Nechť K je kompakt. Pak K je separabilní právě tehdy, když $B_{\mathcal{M}(K)}$ je w^* separabilní.

Příklad 8.1.70. Nechť X je separabilní Banachův prostor. Pak X^{**} je w^* separabilní.

Příklad 8.1.71. Ukažte, že $(\ell_\infty)^*$ je slabě* separabilní.

Příklad 8.1.72. Ukažte, že $\mathcal{C}(K)$ je reflexivní právě tehdy, když K je konečný.

Příklad 8.1.73. Ukažte, že slabě kompaktní operátory tvoří levý i pravý ideál.

8.2 Stupeň zobrazení a věty o pevných bodech

8.2.1 Stupeň zobrazení

Příklad 8.2.1. Je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, pak $\det e^A > 0$.

Příklad 8.2.2. Je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\det e^A > 0$, pak existuje spojité zobrazení $H : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tak, že $H(0) = I$, $H(1) = A$ a $\det H(t) > 0$ pro $t \in [0,1]$.

Příklad 8.2.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval obsahující 0.

- Nechť $f(x) = cx^k$, kde $c \neq 0$. Pak $d(f, \Omega, 0) = 0$ pro k sudé a $d(f, \Omega, 0) = \operatorname{sgn} c$ pro k liché.
- Nechť $g(x) = f(x) + \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i$. Pak $d(g, (-r, r), 0) = d(f, (-r, r), 0)$ pro dostatečně velké $r > 0$.

Příklad 8.2.4. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňuje $f(a)f(b) \neq 0$. Pak $d(f, (a, b), 0) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} f(b) - f(a))$.

Příklad 8.2.5. Nechť $n = 1$ a $m \in \mathbb{Z}$. Najděte f a Ω tak, že $d(f, \Omega, 0) = m$.

Příklad 8.2.6. Nechť $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a $a = (1, 0)$. Je-li Ω otevřená koule o středu 0 a poloměru 2 v $\mathbb{R}^2$. Pak $d(f, \Omega, a) = 3$.

Příklad 8.2.7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená, $f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ a $|g| < |f|$ na $\partial\Omega$. Pak $d(f + g, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0)$.

Příklad 8.2.8. Systém

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x + y) &= 0, \\ x - 2y + \cos(x + y) &= 0 \end{aligned}$$

má řešení v kouli o středu 0 a poloměru $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Příklad 8.2.9. Nechť Ω je otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ a $0 \notin f(\overline{\Omega})$. Pak existují $x, y \in \partial\Omega$ a $\lambda > 0$, $\mu < 0$ tak, že $f(x)\lambda x$ a $f(y) = \mu y$.

Příklad 8.2.10. Nechť Ω je otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^{2m+1}$ a $f : \partial\Omega \to \partial\Omega$ je spojitá. Pak existuje $x \in \partial\Omega$ tak, že buď $f(x) = x$ nebo $f(x) = -x$.

Příklad 8.2.11. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n$ splňuje $\det A \neq 0$ a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ splňuje $|x - Af(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta$ pro nějaké $\alpha \in [0, 1)$ a $\beta \geqslant 0$. Pak $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

8.2.2 Věty o pevných bodech

Příklad 8.2.12. • Nechť (K, ρ) je kompaktní metrický prostor a $f : K \to K$ splňuje $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ pro $x \neq y$ v K. Pak f má jednoznačně určený pevný bod.

- Pevný bod nemusí existovat, splňuje-li f pouze $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$.

Příklad 8.2.13. • Nechť (K, ρ) je úplný metrický prostor, $q > 1$ a $f : K \to K$ splňuje $\rho(f(x), f(y) \geqslant q\rho(x, y)$ pro $x \neq y$ v K. Je-li navíc f surjektivní, má jednoznačně určený pevný bod.

- Tvrzení o existenci neplatí bez předpokladu surjektivity.

Příklad 8.2.14. Nechť $K = \{(x, \sin x) : x \in (0, 1]\}$ s metrikou roviny. Ukažte, že každá kontrakce na K má pevný bod, přestože K není úplný.

Příklad 8.2.15. Najděte kontrakci na metrickém prostoru bez pevného bodu.

Příklad 8.2.16. Nechť (K, ρ) je úplný metrický omezený prostor a $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ splňuje $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(t) < t$ pro $t > 0$.

- Nechť $f : K \to K$ splňuje $\rho(f(x), f(y) \leqslant \varphi(\rho(x, y))$ pro x, y v K. Pak f má jednoznačně určený pevný bod.
- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f : K \to K$ takové, že $\rho(f^n(x), f^n(y) \leqslant \varphi(\rho(x, y))$ pro x, y v K. Pak f má pevný bod.
- Je v předchozím tvrzení pevný bod jednoznačně určený?

Příklad 8.2.17. Nechť $\varphi : K \to K$ je homeomorfizmus kompaktního prostoru K a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(K))$ je definován jako $Tf = f \circ \varphi$.

- Má-li φ pevný bod, má ho i $T^* : \mathcal{M}^1(K) \to \mathcal{M}^1(K)$.
- Zobrazení $T^* : \mathcal{M}^1(K) \to \mathcal{M}^1(K)$ má vždy pevný bod.
- Najděte příklad, kdy φ nemá pevný bod.

Příklad 8.2.18 (Alspach)**.** Nechť $X = L_1([0, 1])$, $K = \{f \in X : \int_0^1 f = 1, 0 \leqslant f \leqslant 2\}$ a $T : K \to K$ je definováno jako

$$Tf(t) = \begin{cases} \min\{2f(2t), 2\}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \max\{2(f(2t-1) - 2, 0\}, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Pak

- K je slabý kompakt,
- T je izometrie na K,
- T nemá pevný bod,
- T není slabě spojité zobrazení.

Příklad 8.2.19. Nechť $X = \ell_2$ a $T : B_X \to B_X$ je definováno jako

$$T(x_n) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots), \quad x \in B_X.$$

Pak

- T je spojité,
- T nemá pevný bod,
- T není slabě spojité.,
- T není neexpanzivní.

Příklad 8.2.20. Nechť X je Banachův prostor, $C \subset X$ omezená uzavřená a $f : C \to C$ spojitá. Pokud $f(C)$ je relativně kompaktní, pak f má pevný bod v C.

Příklad 8.2.21. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$ spojitá a $(x_0, y_0) \in G$. Pak úloha

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

má řešení na nějakém okolí x_0. Je-li navíc f lipschitzovská v druhé souřadnici, má x_0 okolí, na kterém existuje pouze jedno řešení této rovnice.

Kapitola 9

Appendix

9.1 Topologické prostory

9.1.1 Základní pojmy

Definice 9.1.1. Nechť X je množina a τ je systém podmnožin X. Řekneme, že $X, \tau)$ je topologický prostor, pokud má τ následující vlastnosti.

- Platí $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$.
- Pokud $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.
- Je-li $\mathcal{U} \in \tau$ konečný, je i množina $\bigcap \mathcal{U} \in \tau$.

Množiny z τ se nazývají otevřené.

Lemma 9.1.2. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

- *Množina $\varnothing$ i X je uzavřená.*
- *Systém uzavřených množin je uzavřený vhledem k libovolným průnikům a konečným sjednocením.*

Definice 9.1.3. Nechť (X, τ) je topologický prostor.
Nechť $A \subset X$.

- Pokud $X \backslash A \in \tau$, nazývá se A uzavřená.
- Množina $\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : A \subset F, F \text{ uzavřená}\}$ se nazývá uzávěrem A.
- Množina $\operatorname{Int} A = \bigcup \{U \subset X : U \subset A, U \text{ otevřená}\}$ se nazývá vnitřkem A.
- Množina $\operatorname{bd} A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$ se nazývá hranicí A.

Definice 9.1.4. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ je dáno. O množině $A \subset X$ řekneme, že je okolím x, pokud $x \in \operatorname{Int} A$. Označme

$$\tau(x) = \{U \subset X : U \text{ je okolí } x\}.$$

Lemma 9.1.5. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $A, B \subset X$ platí $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(b) Pro každé $A, B \subset X$ platí $\operatorname{Int} X = X$, $\operatorname{Int} A \subset A$, $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$, $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A)$.

Definice 9.1.6. (a) Nechť $(I, \leqslant)$ je nahoru usměrněná uspořádaná množina, tj. $\leqslant$ je uspořádání na I a pro každou dvojici $i, j \in I$ existuje $k \in I$ splňující $i \leqslant k$ a $j \leqslant k$. Množina $I' \subset I$ je kofinální, pokud pro každé $i \in I$ existuje $j \in I'$ splňující $i \leqslant j$.

(b) Nechť X je množina. Je-li $f : I \to X$ libovolná funkce, nazýváme ji netem (zobecněnou posloupností) a značíme $\{x_i\}_{i \in I}$, kde $x_i = f(i)$. Pokud $(J, \leqslant)$ je též nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina a $\phi : J \to I$ splňuje, že pro každé $i_0 \in I$ existuje $j_\in J$ takové, že pro $j \geqslant j_0$ platí $\phi(j) \geqslant i_0$, nazveme net $\{x_{\phi(j)}\}_{j \in J}$ podnetem netu $\{x_i\}$.

(c) Nechť (X, τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ a $\{x_i\}$ je net. Pak $x = \lim_{i \in I} x_i$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $i_i \in I$ takové, že $x_i \in U$ pro $i \geqslant i_0$.

Bod x je hromadným bodem $\{x_i\}$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ a $i_0 \in I$ existuje $i \geqslant i_0$ splňující $x_i \in U$.

Lemma 9.1.7. *Nechť (X, τ) je topologický prostor a $\{x_{\phi(j)}\}_{j \in J}$ je podnet netu $\{x_i\}_{i \in I}$. Pokud $x_i \to x$, pak také $x_{\phi(j)} \to x$.*

Lemma 9.1.8. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Nechť $A \subset X$ a $x \in X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Platí $x \in \overline{A}$.

(ii) Pro každé $U \in \tau(x)$ platí $U \cap A \neq \emptyset$.

(iii) Existuje net $\{x_i\}$ obsažený v A a konvergující k x.

Definice 9.1.9. Nechť X je množina a $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(X)$.

(a) Pak $\mathcal{F}$ je filtr, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,
- $H \in \mathcal{F}$, kdykoliv $F \in \mathcal{F}$ a $H \supset F$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je báze filtru, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existuje $F_3 \in \mathcal{F}$ splňující $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

(c) Systém $\mathcal{F}$ je ultrafiltr, pokud $\mathcal{F}$ je maximální filtr vhledem k inkluzi, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, kdykoliv $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ a$\mathcal{G}$ je filtr.

Definice 9.1.10. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathscr{P}(X)$ je báze filtru. Řekneme, že $\mathcal{F}$ konverguje k x (píšeme $x = \lim \mathcal{F}$), pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F \subset U$.

Tvrzení 9.1.11. *Nechť X je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $\mathcal{F}$ je báze filtru v X a nechť $x = \lim \mathcal{F}$. Uvažujme $\mathcal{F}$ uspořádaná obrácenou inkluzí a pro každé $F \in \mathcal{F}$ zvolíme $x_F \in F$. Pak $\{x_F\}$ je net a $\lim x_F = x$.

(b) Nechť $\{x_i\}$ je net v X a $x \in X$ je jeho limita. Pro každé $i \in I$ položme $F_i = \{x_j : j \geqslant i\}$. Pak systém $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ je báze filtru a $x = \lim \mathcal{F}$.

Tvrzení 9.1.12. *Nechť X je množina. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(X)$ báze filtru, je množina

$$\{H \subset X : \exists F \in \mathcal{F} \text{ splňující } F \subset H\}$$

filtr.

(b) množina $\mathcal{F}$ filtr, existuje ultrafiltr $\mathcal{G}$ obsahující $\mathcal{F}$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé a k ověření (b) stačí aplikovat Zornovo lemma. □

Definice 9.1.13. Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Zobrazení f nazveme spojitým, pokud $f^{-1}(V) \in \tau$ pro každou $V \in \sigma$.

Lemma 9.1.14. *Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Zobrazení f je spojité.

(ii) Pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F)$ uzavřená.

(iii) Pro každou $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(iv) Pro každý bod $x \in X$ a každé $V \in \sigma(f(x))$ existuje $U \in \tau(x)$ splňující $f(U) \subset V$.

(v) Pro každý net $\{x_i\}$ v X konvergující k $x \in X$ platí $f(x_i) \to f(x)$.

Definice 9.1.15. Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je sekvenciálně spojité, pokud $f(x_n) \to f(x)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k $x \in X$.

Příklady 9.1.16. (a) Je-li (X, ρ) metrický prostor, zahrňme do τ_ρ ty množiny $U \subset X$, které splňují

$$\forall x \in U \ \exists r > 0 : B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\} \subset U.$$

Pak (X, τ_ρ) je topologický prostor

(b) Nechť X je množina. Pokud $\tau = \mathscr{P}(X)$, dostáváme diskrétní topologii, pokud $\tau = \{\emptyset, X\}$, máme indiskrétní topologii.

Definice 9.1.17. Topologický prostor (X, τ) se nazývá metrizovatelný, pokud na něm existuje metrika ρ splňující $\tau = \tau_\rho$.

Tvrzení 9.1.18. *Nechť (X_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$, jsou metrizovatelné prostory. Pak je prostor $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$ metrizovatelný metrikou*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \min\{\rho_n(x_n, y_n), 1\}, \quad x = \{x_n\}, y = \{y + n\} \in X.$$

9.1.2 Oddělovací axiomy

Definice 9.1.19. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X je T_1, pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje otevřená množina U splňující $x_1 \in U$ a $x_2 \notin U$.

(b) Prostor X je T_2 (Hausdorffův), pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$.

(c) Prostor X je T_3 (regulární), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_1 \in U_1$ a $F \subset U_2$.

(d) Prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ (úplně regulární či Tichonovův), pokud je T_1 a každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existuje $f: X \to [0, 1]$ spojitá taková, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na F.

(e) Prostor X je T_4 (normální), pokud je T_1 a pro každé dvě uzavřené, disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ existují disjunktní, otevřené množiny $U_1, U_2 \subset X$ takové, že $F_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

Tvrzení 9.1.20. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $i, j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$, $i \leqslant j$ a X je T_j, pak je i T_i.

(b) Prostor X je T_1 právě tehdy, když pro každý bod $x \in X$ je $\{x\}$ uzavřená množina.

(c) Prostor X je regulární, pokud pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existuje $V \in \tau(x)$ splňující $\overline{V} \subset U$.

Příklad 9.1.21. Každý metrický prostor je normální.

Lemma 9.1.22 (Urysohn)**.** *Nechť (X, τ) je normální topologický prostor. Pak pro každé dvě disjunktní, neprázdné uzavřené množiny $F_1, F_2 \subset X$ existuje spojitá funkce $f: X \to [0, 1]$ taková, že $f(F_1) \subset \{0\}$ a $f(F_2) \subset \{1\}$.*

Věta 9.1.23. *Nechť (X, τ) je normální topologický prostor. Nechť $F \subset X$ je neprázdná, uzavřená množina a $f: F \to \mathbb{F}$ je spojitá funkce. Pak existuje $g: X \to \mathbb{F}$ spojité zobrazení taková, že $g = f$ na F a $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f \neq 0$. Pokud $Y = \mathbb{R}$, je tvrzení známé. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, rozšíříme f po složkách a dostaneme tak $h: X \to \mathbb{C}$ rozšiřující f. Pokud $r = \|f\|_\infty = \infty$ jsme hotovi. V opačném případě uvažujme zobrazení $p: \mathbb{C} \to B(0, r)$ definované jako

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \in \mathbb{C} \backslash B(0, r), \\ z, & z \in B(0, r). \end{cases}$$

Pak p je spojitá funkce, a tedy je $g = p \circ h$ požadované rozšíření.

□

9.1.3 Generování topologií

Definice 9.1.24. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém $\mathcal{B} \subset \tau$ se nazývá báze τ, pokud pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ platí $U = \bigcup\{V \in \mathcal{B}: V \subset U\}$.

Definice 9.1.25 (Podprostor)**.** Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pokud $Y \subset X$, pak $\sigma = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ je topologie na Y. Prostor (Y, σ) se nazývá podprostorem X.

Definice 9.1.26.][Homeomorfizmus] Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f: X \to Y$ je zobrazení. Pak f je homeomorfizmus X na $f(X)$), pokud f i $f^{-1}: f(X) \to X$ jsou spojité.

Definice 9.1.27 (Projektivní generování)**.** Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f: X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Položme

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i ß F} f_i^{-1}(V_i): U_i \in \tau_i, F \in \mathcal{F}(I)\}.$$

Pro $U \in X$ položme $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B}: B \subset U\}$. Pak systém

$$\tau = \{U \subset X : U = \bigcup \mathcal{B}_U\}$$

tvoří topologii na X. Tato topologie se nazývá projektivně generovaná prostory X_i a zobrazením f_i, $i \in I$.

Tvrzení 9.1.28. *Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f: X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Nechť τ je systém definovaný v Definici 9.1.27. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém τ je topologie.

(b) Pokud (Y, σ) je topologický prostor a $f: Y \to X$ je zobrazení, pak f je spojité právě tehdy, když $f_i \circ f$ je spojité pro každé $i \in I$.

Definice 9.1.29 (Součin prostorů)**.** Nechť (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $X = \prod_{i \in I} X_i$. Uvažujme kanonické projekce $p_i: X \to X_i$, $j \in I$. Nechť τ je topologie projektivně generovaná tímto systémem. Pak τ se nazývá součinová topologie.

Tvrzení 9.1.30. *Operace podprostoru i součinu zachovávají vlastnosti T_j, $j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$.*

Úmluva 9.1.31. *Nebude-li řečeno jinak, budeme v dalším textu pracovat pouze s Huasdorffovými prostory.*

9.1.4 Kompaktní a lokálně kompaktní prostory

Definice 9.1.32. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Pak X je kompaktní, pokud pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X (tj. $\mathcal{U}$ sestává z otevřených množin a $K \subset \bigcup \mathcal{U}$) existuje konečný podsystém $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ splňující $K \subset \bigcup \mathcal{U}'$.

(b) Množina $A \subset X$ je relativně kompaktní, pokud $\overline{A}$ je kompaktní.

(c) Prostor X je lokálně kompaktní, pokud pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existuje relativně kompaktní $V \in \tau(x)$ splňující $V \subset U$.

Lemma 9.1.33. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak systém všech kompaktních podmnožin X je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky.*

Tvrzení 9.1.34. *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Každá uzavřená množina v X je kompaktní.

(b) Prostor X je normální.

(c) Prostor X je lokálně kompaktní.

(d) Pokud Y je topologický prostora X je jeho podprostorem, je X v Y uzavřený.

(e) Pokud Y je topologický prostora $f\colon X \to Y$ je spojité, je $f(X)$ kompaktní. Pokud X je prosté, je f homeomorfizums.

Tvrzení 9.1.35. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) Prostor X je kompaktní.

(b) Každý net v X má konvergentní podnet.

(c) Má-li neprázdný systém $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}X$ složený z uzavřených množin konečnou průnikovou vlastnost (tj. $\bigcap \mathcal{F}' \neq \varnothing$ pro každou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ konečnou), je $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Věta 9.1.36 (Tichonov)**.** *Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

Lemma 9.1.37. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak každá je ho otevřená podmnožina je lokálně kompaktní.*

Tvrzení 9.1.38. *Součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní.*

Definice 9.1.39. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Je-li $f\colon X \to \mathbb{F}$ funkce, množinu $\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}}$ nazýváme nosičem funkce f. Symbol $C_c(X)$ pak značí prostor všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem.

(b) Je-li X lokálně kompaktní, značíme $C_0(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X s vlastností, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in X\colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ kompaktní.

Definice 9.1.40. Nechť (X, τ) je lokálně kompaktní prostor a α je bod do X nenáležící. Položme $\alpha X \cup \{\alpha\}$ a definujme topologii σ na αX takto. Množina $U \subset \alpha X$ je σ otevřená, pokud $U \cap X$ je τ-otevřená a je-li $\alpha \in U$, pak existuje kompaktní množina $F \subset X$ taková, že $\{\alpha\} \cup (X \backslash F) \subset U$.

Prostor αX se nazývá jednobodová (nebo Alexandrovova) kompaktifikace X.

Tvrzení 9.1.41. *Nechť (X, τ) je lokálně kompaktní prostor a αX je zkonstruováno jako výše. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Prostor αX je kompaktní.

(b) Bod α je v uzávěru X právě tehdy, když X není kompaktní.

(c) Každé $f \in C_0(X)$ dodefinujeme na $\widetilde{f} \in C(\alpha X)$ v bodě α hodnotou 0. Pak toto zobrazení zprostředkovává izometrický izomorfizums $C_0(X)$ a $\{f \in C(\alpha X)\colon f(\alpha) = 0\}$.

Věta 9.1.42 (Urysohn a Tietze)**.** , *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $U \subset X$ otevřená množina splňuje $K \subset U$, pak existuje $f\colon X \to [0, 1]$ spojitá splňující $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \backslash U$.

(b) Je-li $g\colon K \to \mathbb{F}$ spojitá, existuje $f \in C_c(X)$ rozšiřující g, ketrá splňuje $\|f\| = \|g\|$.

Důkaz. Uvažujme kompaktifikaci αX. Pak K je uzavřená a U otevřená v αX, a tedy (a) i (b) plyne z normality prostoru αX. ☐

Lemma 9.1.43. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a K je jeho kompaktní podmnožina. Nechť a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují funkce $g_1, \dots, g_n \in C_c(X)$ splňující $0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}$, $\operatorname{spt} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$.*

Důkaz. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \ldots, n\}$ a otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečná množina $x_1, \ldots, x_m$ v K taková, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i jako

$$F_i = \bigcup \{\overline{V_{x_j}} : \overline{V_{x_j}} \subset U_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nechť V_i jsou otevřené množiny splňující $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Najdeme spojité funkce $f_1, \ldots, f_n$ na K takové, že $\chi_{F_i} \leqslant f_i \leqslant \chi_{V_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Pak $\operatorname{spt} f_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ a $\sum_{i=1}^n f_i > 0$ na K. Položme

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)}, \; x \in K, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pak g_i jsou spojité, splňují $0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}$, $\operatorname{spt} g_i \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$, a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$ na K. □

Věta 9.1.44 (Stone–Weierstrass pro $C(X, \mathbb{R})$)**.** *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ je vektorový prostor obsahující konstanty a oddělující body X. Nechť dále*

- *$\mathcal{A}$ je algebra nebo*
- *$\mathcal{A}$ je svaz, tj. $\min\{f, g\}$ a $\max\{f, g\}$ jsou elementy $\mathcal{A}$ kdykoliv $f, g \in \mathcal{A}$.*

Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $C(X, \mathbb{R})$).

Věta 9.1.45 (Stone–Weierstrass pro $C(X, \mathbb{C})$)**.** *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{C})$ je vektorový prostor obsahující konstanty, oddělující body X a uzavřený na komplexní sdružení. Pokud $\mathcal{A}$ je algebra, je $\mathcal{A}$ je hustý v $C(X, \mathbb{C})$.*

Věta 9.1.46 (Stone–Weierstrass pro lokálně kompaktní prostory)**.** *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C_0(X, \mathbb{C})$ je vektorový prostor obsahující konstanty, oddělující body X a uzavřený na komplexní sdružení. Pokud $\mathcal{A}$ je algebra, je $\mathcal{A}$ je hustý v $C_0(X)$.*

Důkaz. Uvažujme prostor αX. Dodefinováním funkcí z $C_0(X, \mathbb{F})$ hodnotou 0 v α lze předpokládat, že $\mathcal{A} \subset C(\alpha X, \mathbb{F})$. Uvažujme systém

$$\mathcal{B} = \{f + c \colon f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{F}\}.$$

Pak systém $\mathcal{B}$ splňuje předpoklady Věty 9.1.44 nebo Věty 9.1.45, a tedy $\overline{\mathcal{B}} = C(\alpha X, \mathbb{F})$.

Nechť $f \in C_0(X)$ je libovolná. Pak existují $g_n \in \mathcal{A}$ a $c_n \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že funkce tvaru $f_n = g_n + c_n$ konvergují stejnoměrně k f. Jelikož

$$0 = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (g_n(0) + c_n) = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

máme

$$g_n = (g_n + c_n) - c_n = f_n + c_n \rightrightarrows f.$$

Tedy $\overline{\mathcal{A}} = C_0(X, \mathbb{F})$. □

Tvrzení 9.1.47. *Nechť X je kompaktní prostor. Pokud existuje spočetný systém $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$ oddělující body, je X metrizovatelný.*

Důkaz. Uvažujme zobrazení

$$\varphi \colon X \to \prod_{n=1}^{\infty} f_n(X),$$

$$\varphi(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pak $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)$ je metrizovatelný a φ je homeomorfizmus X na $\varphi(X)$. Tedy i X je metrizovatelný. □

Tvrzení 9.1.48. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostorse spočetnou bází. Pak existují kompaktní množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, s následujícími vlastnostmi:*

(1) platí $X_n \subset \operatorname{Int} X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,

(2) platí $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$,

(3) pro každý kompakt $K \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \operatorname{Int} X_n$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} = \{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ značí spočetnou bázi otevřených množin. Vzhledem k tomu, že je X lokálně kompaktní, můžeme po eventuálním vynechání některých prvků $\mathcal{B}$ předpokládat, že $\mathcal{B}$ sestává z relativně kompaktních množin. Indukcí nyní sestrojíme posloupnost kompaktních množin $\{X_n\}$ takovou, že $U_n \subset X_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\{X_n\}$ splňuje (1) a (2).

V prvním kroku položíme $X_1 = \overline{U_1}$. Předpokládejme nyní, že máme pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ zkonstruovány kompakty X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, takové, že $X_i \subset \operatorname{Int} X_{i+1}$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Díky kompaktnosti X_n nalezneme konečný systém $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ takový, že $X_n \subset \bigcup \mathcal{C}$. Pak je $X_{n+1} = \overline{\bigcup \mathcal{C}} \cup \overline{U_{n+1}}$ kompaktní množina, která obsahuje U_{n+1} a splňuje

$$X_n \subset \bigcup \mathcal{C} \subset \operatorname{Int} X_{n+1} \subset X_{n+1}.$$

Tím je konstrukce ukončena.

Nalezená posloupnost očividně splňuje (1) a (2). Je-li $K \subset X$ libovolný kompakt, existuje $N \subset \mathbb{N}$ konečná taková, že $K \subset \bigcup_{n \in N} U_n$. Pak pro $n = \max N$ platí $K \subset X_n$.

□

9.1.5 Souvislé prostory

Definice 9.1.49. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Pak X je souvislý, pokud neexistují neprázdné, otevřené, disjunktní množiny $U, V \subset X$ splňující $X = U \cup V$.

(b) Prostor X je lokálně souvislý, pokud pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existuje souvislá $V \in \tau(x)$ splňující $V \subset U$.

(c) Prostor X je křivkově souvislý, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje spojité zobrazení $f\colon [0,1] \to X$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.

(d) Pro $x \in X$ označme

$$C_x = \bigcup \{C \subset X : C \text{ souvislá}, x \in C\}.$$

Tvrzení 9.1.50. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Komponenty souvislosti jsou souvislé, uzavřené podmnožiny X. Pokud $x, y \in X$, pak buď $C_x = C_y$, nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.

(b) Je-li X lokálně souvislý, jsou komponenty souvislosti otevřené.

(c) Křivkově souvislý prostor je souvislý.

(c) Je-li X souvislý, Y topologický prostora $f\colon X \to Y$ spojitá, pak $f(X)$ je souvislý.

Příklad 9.1.51. Každá konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru je souvislá.

9.2 Prostory měr

9.2.1 Komplexní míry

Definice 9.2.1. (a) Nechť X je množina a Σ je σ-algebra na X. Pak dvojici (X, Σ) nazýváme měřitelným prostorem a prvky Σ jsou měřitelné množiny.

(b) Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor. Pak $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ je nezáporná míra, pokud $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ pro každý disjunktní, spočetný systém měřitelných množin. Pokud $\mu(X) < \infty$, je μ konečná. Pokud lze psát $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ a $\mu(X_n) < \infty$, je μ σ-konečná.

(c) Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor. Pak $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{F}$ je (znaménková nebo komplexní) míra, pokud $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ pro každý disjunktní, spočetný systém měřitelných množin.

(d) Nechť μ je míra na (X, Σ). Pro $A \in \Sigma$ označme $\pi(A)$ systém všech spočetných, měřitelných rozkladů A, tj. $\mathcal{A} \in \pi(A)$ právě tehdy, když $A = \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \Sigma$ a $\mathcal{A}$ je spočetný. Zobrazení $|\mu| : \Sigma \to [0, \infty)$ definované jako

$$|\mu|(A) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)|, \quad A \in \Sigma,$$

je konečná míra.

Definice 9.2.2. Nechť μ, ν jsou míry na (X, Σ).

(a) Řekneme, že $\nu \ll \mu$, pokud $\nu(A) = 0$, kdykoliv $\mu(A) = 0$.

(b) Pokud existují disjunktní množiny $A, B \in \Sigma$ takové, že $X = A \cup B$ a pro každou $C \in \Sigma$ platí $\mu(B \cap C) = \nu(A \cap C) = 0$, řekneme, že μ, ν jsou navzájem singulární (píšeme $\mu \perp \nu$).

Věta 9.2.3 (Radon–Nikodým). *Nechť μ je σ-konečná (nezáporná) míra na (X, Σ) a λ je komplexní míra na (X, Σ). Pak platí následující tvrzení.*

(a) Existuje právě jedna dvojice měr λ_a, λ_s taková, že $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ a $\lambda_s \perp \mu$.

(b) Existuje právě jedna funkce $h \in L^1(\mu)$ splňující

$$\lambda_a(A) = \int_A h \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Navíc platí

$$|\lambda|(A) = \int_A |h| \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Věta 9.2.4 (Hahnův rozklad)**.** *Nechť μ je reálná míra na (X, Σ). Položme*

$$\mu^{+} = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad a \quad \mu^{-} = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Pak $\mu^{+} \perp \mu^{-}$.

Věta 9.2.5 (Jordanova dekompozice)**.** *Nechť μ je míra na (X, Σ). Pak existují nezáporné konečné míry μ_j, $j = 0, 1, 2, 3$, takové, že $\mu = \sum_{j=1}^{3} i^j \mu_j$ a platí*

$$\mu_j(A) \leqslant |\mu|(A), \quad A \in \Sigma, j = 0, 1, 2, 3.$$

Důkaz. Pišme $\mu = \alpha + i\beta$, kde α, β jsou reálné míry na Σ. Vzhledem k tomu, že $\alpha^{+} \perp \alpha^{-}$, existuje množina $Y \in \Sigma$ taková, že $\alpha^{+}(X \backslash Y) = \alpha^{-}(Y) = 0$. Pak pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\begin{aligned} \alpha^{+}(A) &= \left|\alpha^{+}(A)\right| = \left|\alpha^{+}(A \cap Y)\right| = \left|\alpha^{+}(A \cap Y) + \alpha^{-}(A \cap Y)\right| = |\alpha(A \cap Y)| \leqslant |\alpha(A \cap Y) + i\beta(A \cap Y)| \\ &= |\mu(A \cap Y)| \leqslant |\mu|(A \cap Y) \leqslant |\mu|(A). \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že míry $\alpha^{-}, \beta^{+}, \beta^{-}$ jsou majorizovány $|\mu|$. Tedy

$$\mu = \alpha^{+} - \alpha^{-} + i(\beta^{+} - \beta^{-})$$

je hledaný rozklad. □

Tvrzení 9.2.6. *Nechť μ je míra na (X, Σ). Pak pro každé $f \in L^1(|\mu|)$ je $\int_X f\, d\mu$ dobře definovaný a platí*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leqslant \int_X |f|\, d|\mu|.$$

Speciálně pro každé $A \in \Sigma$ platí $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$.

Definice 9.2.7. Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor. Nechť $M(X)$ značí prostor všech měr na (X, Σ), kde vektorové operace definujeme bodově a uvažujeme normu $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Věta 9.2.8. *Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor, pak $M(X)$ je Banachův prostor. Navíc platí $|\mu + \nu| \leqslant |\mu| + |\nu|$, $\mu, \nu \in M(X)$.*

Důkaz. Zjevně je $M(X)$ vektorový prostor. Pro $\mu, \nu \in M(X)$ máme

$$|(\mu + \nu)(A)| \leqslant |\mu(A)| + |\nu(A)| \leqslant |\mu|(A) + |\nu|(A), \quad A \in \Sigma.$$

Z této nerovnosti již snadno plyne odhad $|\mu + \nu| \leqslant |\mu| + |\nu|$.

Krok 1. Pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{F}$ platí

$$|c\mu|(X) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |c\mu(B)| = |\mu|(A) = |c| \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| = |c|\,\|\mu\|.$$

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ platí

$$\begin{aligned} \|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(X) &= \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu + \nu(B)| \\ &\leqslant \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| + \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B)| = \|\mu\| + \|\nu\|. \end{aligned}$$

Konečně pokud $\|\mu\| = 0$, tj. $|\mu|(X) = 0$, pak pro každé $A \in \Sigma$ máme

$$|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A) \leqslant |\mu|(X) = 0,$$

a tedy $\mu = 0$. Proto je $M(X)$ normovaný prostor.

Krok 2. K důkazu úplnosti použijeme Větu 1.1.17. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ je absolutně konvergentní řada v $M(X)$. Pro libovolné $A \in \Sigma$ pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(A)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n\| < \infty,$$

a tedy lze položit

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \Sigma.$$

Zjevně je pak μ konečně aditivní a platí $\mu(\varnothing) = 0$.

Nechť $\{C_k\}$ je klesající posloupnost měřitelných množin splňujících $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \varnothing$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} |\mu_n|(A_k) = 0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\mu_n|(C_k) < \frac{\varepsilon}{n_0}$, $n = 1, \dots, n_0$. Pak pro $k \geqslant k_0$ platí

$$|\mu(C_k)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C_k)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{n_0} \mu_n(C_k)\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu_n(A_k)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} |\mu_n|(A_k) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu(C_k) \to 0$.

Nechť nyní $\{A_j\}$ je disjunktní systém měřitelných množin a $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Položme $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ a $C_n = A \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{C_n\}$ je klesající posloupnost s vlastností $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$. Dle předcházející úvahy tedy máme pro

$$\left|\mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\right| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(B_n)| = |\mu(C_n)| \to 0.$$

Tedy $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Krok 3. Ověřme nyní, že $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\nu_n(A) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(A), \quad A \in \Sigma.$$

Dle předcházejícího jsou míry ν_n v $M(X)$ a platí $\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \nu_n$. Pro libovolné $\mathcal{B} \in \pi(X)$ nyní máme

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \left|(\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k)(B)\right| = \sum_{B\in\mathcal{B}} |\nu_n(B)| \leqslant \sum_{B\in\mathcal{B}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k(B)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}} |\mu_k(B)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mu_k\|.$$

Tedy $\|\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\| \to 0$. □

9.2.2 Borelovské množiny a funkce

Definice 9.2.9. (a) Nechť (X, τ) je topologický prostor. Symbolem $\mathrm{Bs}(X)$ označíme σ-algebru genrovanou τ.

(b) Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f\colon X \to Y$ je zobrazení. Pak f je borelovské, pokud $f^{-1}(V) \in \mathrm{Bs}(X)$ pro každou $V \in \sigma$.

Tvrzení 9.2.10. *Nechť X je topologický prostora $Y \subset X$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí

$$\mathrm{Bs}(Y) = \{Y \cap B \colon B \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

(b) Pokud $Y \in \mathrm{Bs}(X)$, pak $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathrm{Bs}(X)$.

Důkaz. (a) Pišme σ pro topologii Y. Označme $\mathcal{A} = \{Y \cap A \colon A \in \mathrm{Bs}(X)\}$. Zjevně je $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující otevřené množiny Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{A}$. Nechť nyní $\mathcal{B}$ je libovolná σ-algebra v Y obsahující σ. Položme

$$\mathcal{C} = \{C \subset X : Y \cap C \in \mathcal{B}\}.$$

Pak $\mathcal{C}$ je σ-algebra v X obsahující τ. Tedy $\mathcal{C} \supset \mathrm{Bs}(X)$, z čehož plyne $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Jelikož $\mathcal{B}$ byla libovolná, platí $\mathcal{A} \subset \mathrm{Bs}(Y)$.

Tvrzení (b) nyní plyne z (a).

□

Tvrzení 9.2.11. *Nechť X, Y, Z jsou topologické prostory. Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ jsou borlovská zobrazení. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $B \in \mathrm{Bs}(Y)$ platí $f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)$.

(b) Zobrazení $g \circ f$ je borelovské.

Důkaz. (a) Označme

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

Pak $\mathcal{B}$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny prostoru Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{B}$.

Tvrzení (b) okamžitě plyne z (a). □

9.2.3 Aproximace spojitými funkcemi

Věta 9.2.12 (Luzin). *Nechť X je topologický prostor, $\mathscr{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná (nezáporná) míra na $\mathscr{S}$, která splňuje*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \colon U \supset A \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F) \colon F \subset A \text{ uzavřená}\}, \quad A \in \mathscr{S}. \tag{9.1}$$

Nechť Y je topologický prostor se spočetnou bází. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f \colon X \to Y$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \backslash F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá.

Důkaz. Nechť $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v Y. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z regularity μ uzavřenou množinu F_n a otevřenou množinu U_n v X takové, že

$$F_n \subset f^{-1}(V_n) \cap U_n \quad \text{a} \quad \mu(U_n \backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pak je $F = X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \backslash F_n)$ uzavřená a platí $\mu(X \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně je $f|_F$ spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$(f|_F)^{-1}(V_n) = f^{-1}(V_n) \cap F = U_n \cap F$$

otevřená v F. □

Důsledek 9.2.13. *Nechť X je normální topologický prostor, $\mathscr{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná míra na $\mathscr{S}$ splňující* (9.1)*. Pak platí následující tvrzení.*

- *(a) Je-li Y topologický prostorse spočetnou bází a $f \colon X \to Y$ je μ-měřitelná funkce, existuje borelovská funkce $g \colon X \to Y$ rovnající se f μ-skoro všude.*
- *(b) Nechť $f \colon X \to \mathbb{F}$ je μ-měřitelná. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ a $f_n \to f$ μ-skoro všude.*
- *(c) Nechť $p \in [1, \infty)$. Pak $C^b(X)$ je hustý v $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$.*

Důkaz. (a) Pišme $X = \bigcup X_n$, kde $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ jsou konečné míry. Díky (9.1) μ můžeme předpokládat, že X_n jsou borelovské. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme měřitelný prostor $(X_n, \mathscr{S}_n, \mu_n)$, kde $\mathscr{S}_n = \{A \cap X_n \colon A \in \mathscr{S}\}$ a $\mu_n(B) = \mu(A \cap X_n)$ pro libovolnou množinu $A \in \mathscr{S}$ splňující $A \cap X_n = B$. Pak μ_n splňuje předpoklady Věty 1.5.16, a tedy existuje množina $H_n \subset X_n$ taková, že H_n je uzavřená v X_n, $f|_{H_n}$ je spojitá a $\mu_n(X_n \backslash H_n) < 2^{-n-1}$. Dále nalezneme $V_n \subset X_n$ uzavřenou v X splňující $\mu(X_n \backslash V_n) < 2^{-n-1}$. Pak $F_n = H_n \cap V_n$ je podmnožina X_n, která je uzavřená v X a $f|_{F_n}$ je spojitá. Nakonec si povšimněme, že

$$\mu(X_n \backslash F_n) \leqslant \mu(X_n \backslash H_n) + \mu(X_n \backslash V_n) = \mu_n(X_n \backslash H_n) + \mu(X_n \backslash V_n) < 2 \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n}.$$

Tedy jsme zkonstruovali posloupnost $\{F_n\}$ uzavřených množin v X takovou, že $F_n \subset X_n$, $f|_{F_n}$ je spojitá a $\mu(X_n \backslash F_n) < 2^{-n}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$. Zvolíme $y_0 \in Y$. Pak je funkce

$$g = \begin{cases} f & \text{na } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \\ y_0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

borelovská a rovna f μ-skoro všude. Označíme-li totiž $A = \{x \in X \colon f(x) = g(x)\}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\mu(X_k \backslash A) \leqslant \mu(X_k \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \leqslant \mu(X_n \backslash F_n) < 2^{-n}, \quad n \geqslant k.$$

Tedy $\mu(X_k \backslash A) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $\chi_{X_k \backslash A} \nearrow \chi_{X \backslash A}$, díky Leviho větě dostáváme

$$\mu(X \backslash A) = \int \chi_{X \backslash A} \, d\mu = \int \lim_{k \to \infty} \chi_{X_k \backslash A} \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \mu(X_k \backslash A) = 0.$$

(b) Nechť X_n a F_n jsou jako výše. Díky Tietzově větě najdeme spojité funkce $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ splňující $f_n = f|_{F_n}$ a $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f|_{F_n}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Pak $f_n \to f$ na $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, tedy μ-skoro všude.

(c) Nechť $f \in L^p(\mu)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Položme

$$A = \{x \in X \colon |f(x)| > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in X \colon \frac{1}{n} \leqslant |f(x)| \leqslant n\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\chi_{A_n} \nearrow \chi_A$, a tedy

$$\int_{A_n} |f|^p \, d\mu \to \int_A |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu.$$

Lze tak nalézt $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{X\setminus A_n} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$.

Podobně nalezneme uzavřenou množinu $H \subset A_n$ a otevřenou množinu $U \supset A_n$ tak, aby $\int_{U\setminus H} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$ a $\mu(U\setminus H) < \frac{\varepsilon}{n^p}$. Jelikož $\mu(H) < \infty$, dle Luzinovy věty 9.2.12 existuje $F \subset H$ uzavřená množina taková, že $\mu(H\setminus F) < \frac{\varepsilon}{n^p}$ a $f|_F$ je spojitá. Nechť $g \in C_c(X)$ splňuje $g = f$ na F, $\operatorname{spt} g \subset U$ a $\|g\|_\infty \leqslant \|f|_F\|_\infty \leqslant n$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_X |g-f|^p \, d\mu &= \int_{X\setminus U} |g-f|^p \, d\mu + \int_{U\setminus F} |g-f|^p \, d\mu + \int_F |g-f|^p \, d\mu \\
&\leqslant \int_{X\setminus U} |f|^p \, d\mu + 2^{p-1}\left(\int_{U\setminus F} |g|^p \, d\mu + \int_{U\setminus F} |f|^p \, d\mu\right) \\
&\leqslant \int_{X\setminus A_n} |f|^p \, d\mu + 2^{p-1}\left(n^p\mu(U\setminus F) + \int_{U\setminus H} |f|^p \, d\mu + \int_{H\setminus F} |f|^p \, d\mu\right) \\
&\leqslant \varepsilon + 2^{p-1}\left(n^p(\mu(U\setminus H) + \mu(H\setminus F)) + \varepsilon + n^p\mu(H\setminus F)\right) \\
&= \varepsilon(1 + 4\cdot 2^{p-1}).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

9.2.4 Radonovy míry

Věta 9.2.14 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_c(X)$)**.** *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor a $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ je lineární forma splňující $Tf \geqslant 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ nezápornou. Pak existuje σ-algebra Σ a nezáporná míra μ na (X, Σ) s následujícími vlastnostmi.*

(a) Platí $\mathrm{Bs}(X) \subset \Sigma$.

(b) Pro každou kompaktní množinu $K \subset X$ platí $\mu(K) < \infty$.

(c) Pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U)\colon A \subset U, U \text{ otevřená}\}. \tag{9.2}$$

(d) Je-li A otevřená nebo $A \in \Sigma$ splňuje $\mu(A) < \infty$, platí

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A, K \text{ kompakt}\}. \tag{9.3}$$

(e) Míra μ je úplná, tj. $A \in \Sigma$, pokud existuje $B \in \Sigma$ splňující $A \subset B$ a $\mu(B) = 0$.

(f) Pro každou $f \in C_c(X)$ platí $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$.

(g) Míra μ je vlastnostmi (a)–(f) určena jednoznačně.

Důkaz. Důkaz je veden následujícím způsobem. Pomocí funkcionálu Λ zkonstruujeme vhodnou vnější míru, na kterou použijemm Carathódoryovu konstrukci. O vzniklé míře pak dokážeme, že splňuje požadované podmínky.

Krok 1. Položme

$$\mu'(U) = \sup\{\Lambda f\colon f \in C_c(X), 0 \leqslant f \leqslant \chi_U, \operatorname{spt} f \subset U\}, \quad U \subset X \text{ otevřená}.$$

Pak zjevně platí

- $\mu'(\emptyset) = 0$,
- $\mu'(U) \leqslant \mu'(V)$, jsou-li $U, V \subset X$ otevřené a $U \subset V$.

Nyní definujeme funkci μ^* na podmnožinách X jako

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu'(U)\colon U \supset E \text{ otevřená}\}, \quad E \subset X.$$

Pak μ^* je monotónní subaditivní množinová funkce definovaná na všech podmnožinách X, která se rovná μ' na otevřených množinách X.

Monotonie je zřejmá. Abychom uk8zali subaditivitu, nechť $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, jsou dány. Položme $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\mu^*(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$.

Vezměme $U_n \supset E_n$ splňující $\mu'(U_n) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Položme $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $0 \leqslant f \leqslant \chi_U$, $\operatorname{spt} f \subset U$ a $\mu'(U) < \Lambda(f) + \varepsilon$. Položíme-li $L = \operatorname{spt} f$, dostaneme kompaktní podmnožinu U. Existuje tedy index $m \in \mathbb{N}$ takový, že $L \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$. Dle Lemmatu 9.1.43 existují funkce $g_1, \ldots, g_m \in C_c(X)$ splňující

$$0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}, \ \operatorname{spt} g_i \subset U_i, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^m g_i = 1 \text{ na } L.$$

Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak

$$0 \leqslant h_i \leqslant \chi_{U_i}, \ \operatorname{spt} h_i \subset U_i, \quad i = 1, \dots, m, \qquad \text{a} \qquad f = \sum_{i=1}^{m} h_i.$$

Tedy

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{m} \Lambda(h_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu'(U_i) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Jelikož $f \in C_c(X)$ splňující $0 \leqslant f \leqslant \chi_U$ a $\operatorname{spt} f \subset U$ byla libovolná, platí $\mu'(U) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. Z definice μ' plyne $\mu^*(E) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. Tedy μ^* je vnější míra na X.

Krok 2. Ukažme, že pro disjunktní otevřené množiny U, V platí $\mu^*(U \cup V) = \mu^*(U) + \mu^*(V)$.

Je třeba ukázat nerovnost „$\geqslant$". Pokud $\mu^*(U \cup V) = \infty$, nerovnost platí triviálně. Předpokládejme tedy konečnost čísla $\mu^*(U \cup V)$. Pak také $\mu^*(U)$ i $\mu^*(V)$ jsou konečná.

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $f, g \in C_c(X)$ spojité funkce splňující $0 \leqslant f \leqslant \chi_U$, $\operatorname{spt} f \subset U$ a $0 \leqslant g \leqslant \chi_V$, $\operatorname{spt} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \geqslant \mu^*(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \geqslant \mu^*(V) - \varepsilon$. Pak $0 \leqslant f + g \leqslant \chi_{U \cup V}$ a $\operatorname{spt}(f+g) \subset U \cup V$, a tedy

$$\mu^*(U \cup V) \geqslant \Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g \geqslant \mu^*(U) + \mu^*(V) - 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu^*(U \cup V) \geqslant \mu^*(U) + \mu^*(V)$. Tím je důkaz hotov.

Krok 3. Označme

$$\Sigma = \{E \subset X \colon \mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \backslash E), T \subset X\}.$$

Dle Caratheódoryho konstrukce je pak Σ σ-algebra a $\mu = \mu^*|_{\Sigma}$ je úplná míra.

Je třeba ukázat, že Σ obsahuje všechny borelovské podmnožiny X. K tomu stačí ověřit, že Σ obsahuje všechny otevřené množiny, tj. že platí

$$\forall U \subset X \text{ otevřená } \forall T \subset X \colon \mu^*(T) = \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \backslash U). \tag{9.4}$$

Mějme tedy otevřenou neprázdnou množinu $U \subset X$ a testovací množinu $T \subset K$. Díky σ-aditivitě μ^* stačí ukázat nerovnost „$\geqslant$". Lze tedy předpokládat, že $\mu^*(T) < \infty$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $W \supset T$ otevřenou splňující $\mu^*(W) \leqslant \mu^*(T) + \varepsilon$. Z definice nalezneme $f \in C_c(X)$ takovou, že $0 \leqslant f \leqslant \chi_{W \cap U}$, $\operatorname{spt} f \subset W \cap U$ a $\Lambda f > \mu^*(W \cap U) - \varepsilon$. Protože $\operatorname{spt} f \subset W \cap U$, existuje otevřená množina V splňující

$$\operatorname{spt} f \subset V \subset \overline{V} \subset W \cap U.$$

Pak

$$\mu^*(V) \geqslant \Lambda f \geqslant \mu^*(W \cap U) - \varepsilon.$$

Pak V a $W \backslash \overline{V}$ jsou disjunktní otevřené množiny. Použitím Lemmatu **??**(c) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &\geqslant \mu^*(W) - \varepsilon \geqslant \mu^*(V \cup (W \backslash \overline{V})) - \varepsilon = \mu^*(V) + \mu^*(W \backslash \overline{V}) - \varepsilon \\ &\geqslant \mu^*(W \cap U) + \mu^*(W \backslash U) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \backslash U) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\mu^*(T) \geqslant \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \backslash U)$ pro každou $T \subset K$. Protože obrácená nerovnost plyne ze subaditivity μ^*, platí (9.4).

Krok 4. Ověříme nyní vlastnosti (a)-(e). Vlastnost (a) plyne z předchozího.

Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pro každé $x \in K$ nalezneme relativně kompaktní, otevřenou množinu U_x obsahující x. Vybereme konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_n \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Pak U je otevřená množina s kompaktním uzávěrem. Sestrojíme-li tedy funkci $f \in C_c(X)$ splňující $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$ a $\operatorname{spt} f \subset U$, máme

$$\mu(K) \leqslant \int_X f \, d\mu = \Lambda f < \infty.$$

Vlastnost (b) proto platí.

Jelikož pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu'(U) \colon U \supset E \text{ otevřená}\} = \inf\{\mu(U) \colon U \supset E \text{ otevřená}\},$$

platí (c).

Je-li A otevřená, platí $\mu(A) = \mu'(A)$. Nechť $a \geqslant 0$ splňující $\mu(A) > a$ je dáno. Nalezneme $f \in C_c(X)$ takovou, že $\Lambda f > a$, $\operatorname{spt} f \subset U$ a $0 \leqslant f \leqslant \chi_U$. Sestrojíme $g \in C_c(X)$ splňující $\chi_{\operatorname{spt} f} \leqslant g \leqslant \chi_U$. Pak pro $K = \operatorname{spt} f$ máme

$$\mu(K) \geqslant \int_X g \, d\mu \geqslant \int_X f \, d\mu > a.$$

Tedy (d) platí pro A otevřenou.

Nechť $A \in \Sigma$ má konečnou míru. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $U \subset X$ otevřenou, která obsahuje A a má konečnou míru. Dále zvolíme kompakt $L \subset U$ splňující $\mu(U \backslash L) < \varepsilon$. Konečně nechť V je otevřená nadmnožina $U \backslash A$ splňující $\mu(V \backslash (U \backslash A)) < \varepsilon$. Položme $K = L \cap (X \backslash V)$. Pak K je kompaktní množina a máme

$$A \backslash K \subset (U \backslash L) \cup (A \cap V) \subset (U \backslash L) \cup (V \backslash (U \backslash A)).$$

Tedy $\mu(A \backslash K) < 2\varepsilon$ a vlastnost (d) je ověřena. Úplnost μ, jak již bylo zmíněno, plyne přímo z Caratheódoryovy konstrukce.

Krok 5. Ukažme, že $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$ pro každou $f \in C_c(X)$. Zjevně stačí dokázat tuto rovnost pro každou reálnou spojitou funkci, což díky linearitě znamená ověřit nerovnost $\Lambda f \leqslant \int f \, d\mu$ pro každou reálnou $f \in C_c(X)$. Je-li reálná $f \in C_c(X)$ dána, zvolme $a \in (0, \infty)$ tak, aby $\operatorname{Rng} f \subset [-a, a]$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a body $y_0 < -a < y_1 < \cdots < y_{n-1} \leqslant a < y_n$, kde $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak množiny

$$E_i = \{x \in \operatorname{spt} f : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

tvoří borelovský rozklad $\operatorname{spt} f$ pomocí množin konečné míry. Pro $i = 1, \ldots, n$, nechť U_i jsou otevřené množiny splňující

$$\mu(U_i) \leqslant \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{a} \quad E_i \subset U_i \subset \{x \in \operatorname{spt} f \colon f(x) < y_i + \varepsilon\}$$

(takové množiny existují díky (d) a spojitosti f). Systém $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí $\operatorname{spt} f$, a tedy z Lemmatu 9.1.43 existují funkce $g_1, \ldots, g_n \in C_c(X)$ splňující

$$0 \leqslant g_i \leqslant \chi_{U_i}, \ \operatorname{spt} g_i \subset U_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} g_i = 1.$$

Pak máme $g_i f \leqslant (y_i + \varepsilon) g_i$ a $(y_i - \varepsilon)\chi_{E_i} \leqslant f \chi_{E_i}$, $i = 1, \ldots, n$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \Lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i f\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda(g_i f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \Lambda g_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \mu(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} (y_i - \varepsilon) \, d\mu + 2\varepsilon \mu(\operatorname{spt} f) + \frac{\varepsilon}{n} n(a + 2\varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f \, d\mu + \varepsilon(2\mu(\operatorname{spt} f) + a + 2\varepsilon) \\
&= \int_K f \, d\mu + \varepsilon(2\mu(\operatorname{spt} f) + a + 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz třetího kroku dokončen.

Krok 6. Nechť μ, ν jsou dvě míry splňující $\int_K f \, d\mu = \Lambda f = \int_K f \, d\nu$ pro každou $f \in \mathcal{C}_c(X)$. Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pro $\varepsilon > 0$ nalezneme otevřenou množinu U splňující $\mu(U) < \mu(K) + \varepsilon$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$. Pak

$$\nu(K) \leqslant \int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\mu \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$$

Tedy $\nu(K) \leqslant \mu(K)$ pro každý kompakt K. Prohozením rolí μ a ν dostaneme rovnost μ a ν na kompaktních množinách, což díky vlastnostem (c) a (d) znamená $\mu = \nu$. □

Věta 9.2.15. *Nechť X je lokálně kompaktní, σ-kompaktní topologický prostor. Nechť Σ a μ mají vlastnosti popsané ve Větě 9.2.14. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $A \in \Sigma$ a $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená množina F a otevřená množina U taková, že $F \subset A \subset U$ a $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$.

(b) Pro každou $A \in \operatorname{Bs}(X)$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \colon A \subset U, U \ \textit{otevřená}\} = \sup\{\mu(K) \colon K \subset A, K \ \textit{kompakt}\}.$$

Věta 9.2.16 (Hustota $C_c(X)$)**.** *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostora μ je nezáporná míra splňující vlastnosti (a)–(e) z Věty 9.2.14. Nechť $p \in [1,\infty)$. Pak $C_c(X)$ je hustý podprostor $L^p(\mu)$.*

Důkaz. Symbolem Σ označme systém všech μ-měřitelných množin. Nechť $f \in L^p(\mu)$ je nenulová a $\varepsilon > 0$ je dáno. Položme

$$A = \{x \in X\colon\ |f(x)| > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in X\colon \frac{1}{n} \leqslant |f(x)| \leqslant n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\chi_{A_n} \nearrow \chi_A$, a tedy

$$\int_{A_n} |f|^p \, d\mu \to \int_A |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu.$$

Lze tak nalézt $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{X\setminus A_n} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$.

Podobně nalezneme kompakt $K \subset A_n$ a otevřenou množinu $U \supset A_n$ tak, aby $\int_{U\setminus K} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$ a $\mu(U\setminus K) < \frac{\varepsilon}{n^p}$. Jelikož $\mu(K) < \infty$, dle Luzinovy věty 9.2.12 existuje $F \subset K$ uzavřená množina taková, že $\mu(K\setminus F) < \frac{\varepsilon}{n^p}$ a $f|_F$ je spojitá. Nechť $g \in C_c(X)$ splňuje $g = f$ na F, $\operatorname{spt} g \subset U$ a $\|g\|_\infty \leqslant \|f|_F\|_\infty \leqslant n$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_X |g-f|^p \, d\mu &= \int_{X\setminus U} |g-f|^p \, d\mu + \int_{U\setminus F} |g-f|^p \, d\mu + \int_F |g-f|^p \, d\mu \\
&\leqslant \int_{X\setminus U} |f|^p \, d\mu + 2^{p-1} \left(\int_{U\setminus F} |g|^p \, d\mu + \int_{U\setminus F} |f|^p \, d\mu \right) \\
&\leqslant \int_{X\setminus A_n} |f|^p \, d\mu + 2^{p-1} \left(n^p \mu(U\setminus F) + \int_{U\setminus K} |f|^p \, d\mu + \int_{K\setminus F} |f|^p \, d\mu \right) \\
&\leqslant \varepsilon + 2^{p-1} \left(n^p(\mu(U\setminus K) + \mu(K\setminus F)) + \varepsilon + n^p \mu(K\setminus F) \right) \\
&= \varepsilon(1 + 4 \cdot 2^{p-1}).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 9.2.17 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_0(X)$)**.** *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor a $T \in (C_0(X))^*$. Pak existuje σ-algebra Σ a komplexní míra μ na (X,Σ) taková, že*

(a) $|\mu|$ a Σ splňují (a)-(e) z Věty 9.2.14.

(b) Pro každou $f \in C_0(X)$ platí $Tf = \int_X f \, d\mu$.

(c) Platí $\|T\| = \|\mu\|$.

(d) Míra μ je vlastnostmi (a),(b) určena jednoznačně.

Důkaz. Krok 1. Je-li $\mu \in M(K)$, máme

$$|\varphi_\mu(f)| \leqslant |\int_k f \, d\mu| \leqslant \int_K |f| \, d|\mu| \leqslant |\mu|(K)\|f\|, \quad f \in C(K).$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| \leqslant |\mu|(K) = \|\mu\|$. Na druhou stranu, existuje borelovská funkce h splňující $|h| = 1$ a $d\mu = hd|\mu|$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí nepřesahujících v normě 1 taková, že $f_n \to \overline{h}$ $|\mu|$-skoro všude (viz Věta 1.5.17(b)). Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n \, d\mu = \int_K \overline{h} h \, d|\mu| = \int_K 1 \, d|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|\,.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| \geqslant \|\mu\|$.

Krok 2. Ukažme, že I je na. Nechť $\Phi \in (C(X))^*$ o normě 1 je dáno. Nechť $C_c^+(X)$ a $C_c(X,\mathbb{R})$ značí nezáporné, respektive reálné funkce z $C_c(X)$. Položme

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi h|\colon h \in C_c(X), |h| \leqslant f\}, \quad f \in C_c^+(X).$$

Pak pro $f \in C_c^+(X)$ platí

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi h|\colon h \in C_c(X), |h| \leqslant f\} \leqslant \sup\{\|\Phi\|\,\|h\| : h \in C_c(X), |h| \leqslant f\} \leqslant \|\Phi\|\,\|f\| \leqslant \|f\|\,,$$

a tedy je Λ dobře definované zobrazení. Dále platí

$$\Lambda(C_c^+(K)) \subset [0,\infty), \quad \Lambda f_1 \leqslant \Lambda f_2 \text{ pro } f_1 \leqslant f_2 \text{ v } C_c^+(K), \quad \Lambda(cf) = c\Lambda f,\ c \geqslant 0, f \in C_c+(K).$$

Ukážeme, že

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g, \quad f,g \in C_c^+(K). \tag{9.5}$$

Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $h_1, h_2 \in C_c(X)$ takové, že $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$ a

$$\Lambda f \leqslant |\Phi(h_1)| + \varepsilon \quad \text{a} \quad \Lambda g \leqslant |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Nechť α_1, α_2 jsou komplexní jednotky splňující $\alpha_i \Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$, $i = 1, 2$. Pak

$$\begin{aligned}\Lambda f + \Lambda g &\leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon = \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leqslant \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \leqslant \Lambda(f+g) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Obráceně, nechť $h \in C_c(X)$ splňuje $|h| \leqslant f + g$. Položme

$$V = \{x \in K : f(x) + g(x) > 0\}$$

a

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & x \in V, \\ 0, & x \in X \backslash V, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & x \in V, \\ 0, & x \in X \backslash V, \end{cases}$$

Funkce h_i jsou zjevně spojité v bodech množiny V, v bodech doplňku se spojitost odvodí díky odhadu $|h_i| \leqslant |h|$ a vlastnosti $|h| = 0$ na $X \backslash V$. Kelikož je V relativně kompaktní množina, máme $h_i \in C_c(X)$, $i = 1, 2$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$, máme

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leqslant \Lambda f + \Lambda g.$$

Rovnost (9.5) je tedy ověřena.

Zobrazení Λ lze nyní lineárně rozšířit na $C_c(X, \mathbb{R})$ pomocí předpisu

$$\Lambda f = \Lambda f_1 - \Lambda f_2, \quad f = f_1 - f_2, f_1, f_2 \in C_+(K), f \in C_{\mathbb{R}}(K).$$

Poznamenejme, že tato definice je korektní, jelikož máme-li $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, kde $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_c^+(X)$, pak

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2,$$

a tedy $\Lambda(f_1) - \Lambda(f_2) = \Lambda(g_1) - \Lambda(g_2)$.

Dále dodefinujeme Λ na $C_c(X)$ pomocí vzorce

$$\Lambda f = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f), \quad f \in C_c(X).$$

Tím jsme obdrželi nezáporný funkcionál Λ na $C_c(X)$ s vlastností

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|), \quad f \in C_c(X).$$

Dle Věty 1.2.21 existuje nezáporná míra λ s vlastnostmi (a)–(f) Z Věty 9.2.14. Pak platí

$$\lambda(X) = \|\Phi\|. \tag{9.6}$$

Vskutku, naleznenem kompakty K_n, $n \in \mathbb{N}$, splňující $\lambda(K_n) \nearrow \lambda(X)$ a zvolíme $f_n \in C_c(X)$ takové, že $\chi_K \leqslant f \leqslant 1$. Pak

$$\lambda(X) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Lambda(f_n) \leqslant \|\Phi\|.$$

Na druhou stranu pro $f \in C_0(X)$ o normě 1 platí

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|) = \int_X |f| \, d\lambda \leqslant \lambda(X).$$

Protože

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|) = \int_X |f| \, d\lambda = \|f\|_{L^1(\lambda)} \lambda(X) = \|f\|_{L^1(\lambda)} \|\Phi\|, \quad f \in C_c(X),$$

a $C_c(X)$ je hustý podprostor $L^1(\lambda)$ (viz Věta 1.5.17(c)), lze Φ chápat jako prvek prostoru $(L^1(\lambda))^*$ (viz Věta 1.1.37). Tedy dle Věty 1.2.19(e) existuje $g \in B_{L^\infty(\lambda)}$ taková, že

$$\Phi(f) = \int_X fg \, d\lambda, \quad f \in C_c(X).$$

Nechť Σ značí σ-algebru všech λ-měřitelných množin. Položme

$$\mu(A) = \int_A g \, d\lambda, \quad A \in \Sigma.$$

Ověříme, že se jedná o požadovaný prvek $M(X)$ reprezentující Φ.

Vlastnosti (a), (e) a (f) plynou přímo z definice.

Dále dle Věty 9.2.3 platí

$$|\mu|(A) = \int_A |g| \, d\lambda, \quad A \in \Sigma.$$

Tedy pro $K \subset X$ kompaktní platí

$$|\mu|(K) = \int_K |g| \, d\lambda \leqslant \lambda(K) < \infty.$$

Tedy (b) platí.

Je-li $A \in \Sigma$ dána, nechť $\{U_n\}$ je nereostouc posloupnost otevřených nadmnožin A splňující $\lambda(U_n) \searrow \lambda(A)$. Pak $\chi_{U_n} |g| \to \chi_A |g|$ λ-skoro všude, a z Lebesgueovy věty tak máme

$$|\mu|(A) = \int_A |g| \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} |g| \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} |\mu|(K_n).$$

Tedy (c) platí.

Je-li $A \in \Sigma$, nechť $\{K_n\}$ je neklesající posloupnost kompaktů v A splňující $\lambda(K_n) \nearrow \lambda(A)$. Pak jako výše z Lebesgueovy věty máme

$$|\mu|(A) = \int_A |g| \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} |g| \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} |\mu|(K_n).$$

Tedy $|\mu|$ splňuje (d) platí.

Nechť nyní $f \in C_0(X)$ je libovolná. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ v $C_c(X)$ nepřevyšující v normě $\|f\|$ taková, že $f_n \rightrightarrows f$. Pak

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Tedy μ reprezentuje Φ a důkaz surjektivity I je dokončen.

Krok 3. Ukážeme, že míra μ je jednozančně určena. Předpokládejme, že též ν splňuje (a)–(c) z tvrzení. Symbolem Υ označme σ-algebru všech ν-měřitelných množine.

Nechť $A \in \mathrm{Bs}(X)$ je libovolná. Nalezneme neklesající posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ a nerostoucí posloupnost otevřených množin $\{U_n\}$ takové, že $K_n \subset A \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$, a

$$|\mu|(U_n \backslash K_n) + |\nu|(U_n \backslash K_n) \to 0.$$

Nalezenem funkce $f_n \in C_c(X)$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\chi_{K_n} \leqslant f \leqslant \chi_{U_n}$. Pak $f_n \to \chi_A$ skoro všude vzhledem k míře $|\mu|$ ia $|\nu|$. Tedy

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\nu = \nu(A).$$

Tedy $\mu = \nu$ na borelovských podmnožinách X.

Nechť nyní $A \in \Sigma$ je libovolná. Pak existují posloupnost $\{B_n\}$ a $\{C_n\}$ borelovských množin v X takové, že $B_n \subset A \subset C_n$, $n \in \mathbb{N}$, $|\mu| C_n \backslash B_n \searrow 0$. Položme $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Pak

$$A \backslash B \subset C \backslash B$$

a $|\nu|(C\backslash B) = |\mu|(C\backslash B) = 0$. Tedy $A\backslash B$ je podmnožina množiny $|\nu|$-míry 0, takž je obsažena v Υ. Proto i $A = B \cup (A\backslash B)$ je v Υ a máme

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A\backslash B) = \nu(B) + \nu(A\backslash B) = \nu(A).$$

Tedy $\Sigma \subset \Upsilon$ a $\mu = \nu$ na Σ.

Prohozením rolí μ a ν dostaneme požadovanou rovnost $\Sigma = \Upsilon$ a $\mu = \nu$. □

Definice 9.2.18. Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. O míře μ na X řekneme, že je Radonova, pokud je definována na σ-algebře Σ takovým způsobem, že $|\mu|$ a Σ splňují (a)-(e) z Věty 9.2.14. Jsou-li μ, ν dvě Radonovy míry, položíme

$$T_{\mu+\nu} f = \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Dle Věty 9.2.17 existuje právě jedna míra $\lambda \in M(X)$ splňující

$$\int_X f \, d\lambda = T_{\mu+\nu}, \quad f \in C_0(X).$$

Tuto míru označíme jako $\mu + \nu$. Podobně budeme chápat míru $c\mu$, kde $c \in \mathbb{F}$ a $\mu \in M(X)$.

Dále na $M(X)$ uvažujme normu danou totální variací, tj. $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Věta 9.2.19. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak $M(X)$ je Banachův prostor, který je pomocí zobrazení $\mu \mapsto T_\mu$, kde*

$$T_\mu(f) = \int_X f\,d\mu, \quad f \in C_0(X),$$

izometricky izomorfní prostoru $(C_0(X))^*$.

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ a $a, b \in \mathbb{F}$ platí

$$(a\mu + b\nu)(A) = a\mu(A) + b\nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Důkaz. Vzhledem k identifikaci $M(X)$ s $(C_0(X))^*$ je $M(X)$ jakožto duální prostor úplný.

Nechť $\mu, \nu \in M(X)$ jsou dány. Definujeme komplexní míru λ na $\mathrm{Bs}(X)$ jako

$$\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Pak $|\lambda|$ splňuje (b),(c),(d) Věty 9.2.14. Ihned totiž vidíme, že $|\lambda| \leqslant |\mu| + |\nu|$, takže z platnosti těchto vlastností pro míry $|\mu|$ a $|\nu|$ snadno odvodíme jejich splnění i pro míru $|\lambda|$.

Dále platí, že $\int_X f\,d\lambda = \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\nu$ pro každou $f \in C_0(X)$. Pro jednoduchou borelovskou funkci tvaru $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ totiž platí

$$\int_X f\,d\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k(\mu(A_k) + \nu(A_k)) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + \sum_{k=1}^n c_k \nu(A_k) = \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\nu.$$

Jelikož lze každou funkci $f \in C_0(X)$ stejnoměrně aproximovat takovýmito funkcemi, platí požadovaná rovnost.

Nechť $\omega \in M(X)$ je dána definicí $\mu + \nu$, tj. ω je ten jednoznačně určený prvek $M(X)$ splňující

$$\int_X f\,d\omega = \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Chceme ukázat, že $\omega = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(X)$.

Nechť nejprve $U \subset X$ je otevřená a $K \subset X$ je kompaktní splňující $K \subset U$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $\mathrm{Rng}\, f \subset [0,1]$, $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \backslash U$. Pak

$$\left|\omega(U) - \int_X f\,d\omega\right| = \left|\int_U (1-f)\,d\omega\right| \leqslant \int_{U\backslash K} |1-f|\;d\,|\omega| \leqslant |\omega|\,(U\backslash K). \tag{9.7}$$

Analogickou nerovnost odovodíme i pro λ.

Nechť nyní $A \in \mathrm{Bs}(X)$ je libovolná. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U splňující $K \subset A \subset U$ a $|\omega|\,(U\backslash K) + |\lambda|\,(U\backslash K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme $f \in C_c(X)$ jako výše. Pak díky (9.7) máme

$$\begin{aligned}
|\omega(A) - \lambda(A)| &= |\omega(U) - \omega(U\backslash A) - \lambda(U) + \lambda(U\backslash A)| \\
&\leqslant \left|\omega(U) - \int_X f\,d\omega\right| + |\omega(U\backslash A)| + \left|\int_X f\,d\omega - \int_X f\,d\lambda\right| + \left|\int_X f\,d\lambda - \lambda(U)\right| + |\lambda(U\backslash A)| \\
&\leqslant |\omega|\,(U\backslash K) + |\omega|\,(U\backslash A) + |\lambda|\,(U\backslash K) + |\lambda|\,(U\backslash A) \\
&\leqslant 2(|\omega|\,(U\backslash K) + |\lambda|\,(U\backslash K)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\lambda(A) = \omega(A)$, což znamená

$$\lambda(A) = \omega(A) = (\mu + \nu)(A).$$

Důkaz rovnosti $(c\mu)(A) = c\mu(A)$ pro $A \in \mathrm{Bs}(X)$ a $c \in \mathbb{F}$ je analogický (a výrazně jednodušší).

$\square$

Definice 9.2.20. Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $\mu \in M(X)$.

(a) Řekneme, že μ je spojitá, pokud $|\mu|\,(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in X$. Množinu všech spojitých měr značíme $M_{\mathrm{c}}(X)$.

(b) Řekneme, že μ je diskrétní, pokud existuje spočetná množina $C \subset X$ splňující $|\mu|\,(X\backslash C) = 0$. Množinu všech diskrétních měr značíme $M_{\mathrm{d}}(X)$.

(c) Řekneme, že μ je Diracova míra v bodě $x \in X$, pokud $\int_X f\,d\mu = f(x)$ pro každou $f \in C_0(X)$. Míru μ pak značíme ε_x.

(d) Molekulární mírou myslíme prvek množiny

$$M_{\mathrm{mol}}(X) = \mathrm{co}\{\varepsilon_x \colon x \in X\}.$$

(e) Symbolem $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ rozumíme množinu

$$M_{\mathrm{ac},\mu} = \{\nu \in M(X) \colon \nu|_{\mathrm{Bs}(X)} \ll |\mu|\,|_{\mathrm{Bs}(X)}\}.$$

Tvrzení 9.2.21. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Množiny $M_{\mathrm{d}}(X)$ a $M_{\mathrm{c}}(X)$ jsou uzavřené podprostory $M(X)$.

(b) Míra μ je diskrétní právě tehdy, když existuje $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ spočetná a posloupnost $a \in \ell^1$ taková, že $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Je-li $\mu \in M(X)$, pak $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ je uzavřený podprostor $M(X)$, který je izometricky izomorfní s $L^1(|\mu|)$.

Důkaz. (a) Jsou-li μ, ν spojité míry na X, pak pro $x \in X$ platí

$$|\mu + \nu| (\{x\}) \leqslant |\mu| (\{x\}) + |\nu| (\{x\} = 0,$$

tj. $\mu + \nu \in M_{\mathrm{c}}(X)$.

Jsou-li $\mu, \nu \in M(X)$ diskrétní a $C_1, C_2 \subset X$ jsou příslušné spočetné množiny, pak $C = C_1 \cup C_2$ je spočetná a

$$|\mu + \nu| (X \backslash C) \leqslant |\mu| (X \backslash C_1) + |\nu| (X \backslash C_2) = 0$$

Tedy $\mu + \nu \in M_{\mathrm{d}}(X)$.

Podobně se ukážeme, že $M_{\mathrm{c}}(X)$ i $M_{\mathrm{d}}(X)$ jsou uzavřené na násobení skalárem.

Nechť $\{\mu_n\}$ je posloupnost v $M_{\mathrm{c}}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$. Uvažujme restrikce těchto měr na $\mathrm{Bs}(X)$. Pak

$$|\mu| (\{x\}) = |\mu - \mu_n + \mu_n| (\{x\}) \leqslant |\mu - \mu_n| (\{x\}) + |\mu_n| (\{x\}) \leqslant |\mu - \mu_n| (X) \to 0.$$

Tedy μ je spojitá.

Podobně pro posloupnost $\{\mu_n\}$ v $M_{\mathrm{d}}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$ vybereme příslušné spočetné množiny C_n, $n \in \mathbb{N}$. Pak $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ je spočetná a

$$|\mu| (X \backslash C) \leqslant |\mu - \mu_n| (X \backslash C) \leqslant |\mu - \mu_n| (X) + |\mu_n| (X \backslash C_n) = \|\mu - \mu_n\|.$$

Tedy $\mu \in M_{\mathrm{d}}(X)$.

(b) Nechť $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je množina příslušná μ. Položme $a_n = \mu(\{x_n\})$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(\{x_n\})| = |\mu| (C) = |\mu| (X) = \|\mu\| < \infty,$$

a zjevně $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Uvažujme restrikci míry μ na $\mathrm{Bs}(X)$. Přímo z definice se ověří, že množina $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ je podprostor $M(X)$. Pro každou $\nu \in M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ existuje jednoznačně určená borelovská $f_\nu \in l^1(\mu, \mathrm{Bs}(X))$ taková, že

$$\nu(A) = \int_A f_\nu \, d|\mu|, \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Pak zobrazení $I : \nu \mapsto f_\nu$ je hledaný izomorfizmus $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ na $L^1(|\mu|)$, který je izometrií díky rovnosti

$$\|\nu\| = \int_X |f_\nu| \, d|\mu| = \|f_\nu\|_{L^1(|\mu|)}.$$

Vzhledem k úplnosti $L^1(|\mu|)$ je $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ úplný prostor. □

Lemma 9.2.22. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $M^1(X)$ značí množinu všech pravděpodobnostních měr v $M(X)$. Pak je množina $M_{\mathrm{mol}}(X)$ hustá v $(M^1(X), w^*)$.*

Důkaz. Nechť $\mu \in M^1(X)$ je dáno. Na základě Lemmatu 3.1.98 stačí ukázat, že pro každou $f \in C_c(X)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(X)$ splňující $|\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon$. Nechť tedy $f \in C_c(X)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Označme $M = \|f\|$. Pro každé $x \in \operatorname{spt} f$ existuje okolí U_x obsahující x takové, že $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$, $y \in U_x$. Pak $|f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{M}$ pro každé $y_1, y_2 \in U_x$. Vybereme konečně mnoho $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{spt} f$ splňující $\operatorname{spt} f \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Označíme $A_0 = \varnothing$ a definujeme

$$A_i = U_{x_i} \backslash \bigcup_{j=0}^{n} U_{x_j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nakonec označme $A_{n+1} = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pak A_i, $i = 1, \ldots, n+1$, jsou navzájem disjunktní borelovské množiny a $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$. Dále položíme

$$c_i = \mu(A_i), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

a pro každé $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ vybereme $x_i \in A_i$, pokud $c_i > 0$. Dále vybereme bod $u \in X$ a položíme $x_i = u$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ splňující $c_i = 0$. Pokud $A_{n+1} \neq \varnothing$ a $c_{n+1} = 0$, vybereme $v \in A_{n+1}$ a položíme $x_{n+1} = v$. Nakonec definujeme

$$\nu = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \varepsilon_{x_i}.$$

Protože $c_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n+1$, a

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu(X) = 1,$$

je míra ν molekulární.

Dále platí

$$|\mu(f) - \nu(f)| = \left|\int_X f(x)\,d\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} f(x)\,d\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)\right|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} f(x)\,d\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} f(x_i)\,d\mu(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\;d\mu(x)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\;d\mu(x) + \int_{A_{n+1}} |f(x) - f(x_i)|\;d\mu(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\;d\mu(x) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} c_i = \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Lemma 9.2.23. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $\mu \in M(X)$ splňuje $\mu(X) = \|\mu\|$. Pak μ je nezáporná.*

Důkaz. Stačí ověřit, že $\int_X f\,d\mu \geqslant 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ splňující $0 \leqslant f \leqslant 1$. Nechť tedy f je taková funkce a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezneme kompakt $L \subset X$ takový, že $\operatorname{spt} f \subset L$ a $|\mu|(X\backslash L) < \varepsilon$. Nalezneme funkci $g \in C_0(X)$ takovou, že $0 \leqslant g \leqslant 1$ a $g = 1$ na L. Pak platí $0 \leqslant f - g \leqslant 1$ na X, a dostáváme tak

$$\|\mu\| \geqslant \left|\int_X (g-f)\,d\mu\right| \geqslant \int_X (g-f)\,d\mu = \int_L g\,d\mu + \int_{X\backslash L} g\,d\mu - \int_X f\,d\mu$$

$$\geqslant \mu(L) - |\mu|(X\backslash L) - \int_X f\,d\mu = \mu(X) - \mu(X\backslash L) - |\mu|(X\backslash L) - \int_X f\,d\mu$$

$$\geqslant \|\mu\| - 2\varepsilon - \int_X f\,d\mu.$$

Tedy $\int_X f\,d\mu \geqslant -2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, a důkaz je tak dokončen.

$\square$

9.2.5 Operace s Radonovými mírami

Definice 9.2.24. Restrikce míry.

Definice 9.2.25. Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory. Nechť $\varphi\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Pro každou $\mu \in M(X)$ položme

$$T_\mu g = \int_X g \circ \varphi\,d\mu, \quad g \in C_0(Y).$$

Pak $T_\mu \in (C_0(Y))^*$, a tedy existuje právě jedna míra $\nu \in M(Y)$ splňující $T_\mu = \int_Y g\,d\nu$. Míru ν nazveme obrazem míry a označíme $\varphi(\mu)$.

Tvrzení 9.2.26. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory. Nechť $\varphi\colon X \to Y$ je spojité zobrazení a nechť $\varphi\colon M(X) \to M(Y)$ je zobrazení definované výše. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $A \in \mathrm{Bs}(Y)$ platí rovnost $\varphi(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$.

(b) Platí

$$\int_Y g\,d\varphi(\mu) = \int_X g \circ \varphi\,d\mu, \quad g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(Y).$$

(c) Zobrazení $T\colon \mu \mapsto \varphi(\mu)$ je prvek $L(M(X), M(Y))$ o normě 1.

Důkaz. (a) Položme

$$\lambda(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(Y).$$

Pak λ je (komplexní) míra na $\mathrm{Bs}(Y)$.

Zřejmě platí

$$|\lambda(A)| = \left|\mu(\varphi^{-1}(A)\right| \leqslant |\mu|(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(Y),$$

z čehož dostáváme

$$|\lambda|(A) \leqslant |\mu|(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(Y),$$

Dále ověříme ,že $|\lambda|$ splňuje (c) a (d) z Věty 9.2.14. Vskutku, uvažujme libovolnou $A \in \mathrm{Bs}(Y)$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $K \subset \varphi^{-1}(A)$ splňující $|\mu|(\varphi^{-1}(A) - K) < \varepsilon$. Množina $L = \varphi(K)$ je kompaktní a obsažená v A. Tedy

$$|\lambda|(A \backslash L) \leqslant |\mu|(\varphi^{-1}(A \backslash L) = |\mu|(\varphi^{-1}(A) \backslash \varphi^{-1}(L)) \leqslant |\mu|(\varphi^{-1}(A) \backslash K) < \varepsilon.$$

Abychom ukázali vnější aproximaci, pro $\varepsilon > 0$ dané použijeme již dokázanou vnitřní aproximaci pro množinu $Y \backslash A$, a dostaneme tak kompakt splňující $|\lambda|((Y \backslash A) \backslash K) < \varepsilon$. Pak $U = Y \backslash K$ je otevřená, obsahuje A a platí pro ni

$$|\mu|(U \backslash A) = |\lambda|((Y \backslash A) \backslash K) < \varepsilon.$$

Dalším krokem důkazu je odvození rovnosti

$$\int_Y g \, d\lambda = \int_X (g \circ \varphi) \, d\mu, \quad g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(Y). \tag{9.8}$$

Pro jednoduchou funkci $g = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$, kde $\{A_1, \ldots, A_n\}$ je borelovský rozklad Y však platí

$$\int_Y g \, d\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi^{-1}(A_k) = \int_X \sum_{k=1}^n c_k \chi_{\varphi^{-1}(A_k)} \, d\mu = \int_X (g \circ \varphi) \, d\mu. \tag{9.9}$$

Libovolný prvek $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(Y)$ je pak stejnoměrně aproximovatelný funkcemi tohoto typu, takže rovnost (9.8) je ověřena.

Přistupme konečně k důkazu rovnosti $\nu = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(Y)$. pro dané $A \in \mathrm{Bs}(Y)$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt $K \subset Y$ a otevřenou množinu $U \subset Y$ takové, že $K \subset A \subset U$ a

$$|\nu|(U \backslash K) + |\lambda|(U \backslash K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť $g \in C_c(Y)$ splňuje $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g = 0$ vně U a $g = 1$ na K. Pak

$$\begin{aligned}
|\lambda(A) - \nu(A)| &\leqslant \left|\lambda(U) - \int_Y g \, d\lambda\right| + \left|\int_Y g \, d\lambda - \int_Y g \, d\nu\right| + |\lambda(U \backslash A)| + \left|\nu(U) - \int_Y g \, d\nu\right| + |\nu(U \backslash A)| \\
&\leqslant |\lambda|(U \backslash A) + |\nu|(U \backslash A) + \int_U |1 - g| \, d|\lambda| + \int_U |1 - g| \, d|\nu| + \left|\int_X (g \circ \varphi) \, d\mu - \int_X (g \circ \varphi) \, d\mu\right| \\
&\leqslant 2(|\lambda|(U \backslash K) + |\nu|(U \backslash K)) \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\nu = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(Y)$ a (a) je tak dokázáno.

Tvrzení (b) snadno plyne z (a) pomocí aproximace jednoduchými funkcemi (viz (9.9)).

(c) Zobrazení T je zjevně lineární. Pro $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$ totiž nechť jsou T_μ, T_ν a $T_{\mu+\nu}$ funkcionály z Definice 9.2.25. Pak

$$\int_Y g \, d\varphi(\mu + \nu) = \int_X (g \circ \varphi) \, d(\mu + \nu) = \int_X (g \circ \varphi) \, d\mu + \int_X (g \circ \varphi) \, d\nu = \int_Y g \, d\varphi(\mu) + \int_Y g \, d\varphi(\nu), \quad g \in C_0(Y).$$

Vzhledem k Definici 9.2.18 tak dostáváme $\varphi(\mu + \nu) = \varphi(\mu) + \varphi(\nu)$. Podobně se ověří rovnost $\varphi(c\mu) = c\varphi(\mu)$ pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{F}$.

Nechť $\mu \in M(X)$ a $\nu = \varphi(\mu)$. Pro libovolnou $g \in C_0(Y)$ o normě 1 pak platí

$$\left|\int_Y g \, d\nu\right| = \left|\int_X (g \circ \varphi) \, d\mu\right| \leqslant \int_X |g \circ \varphi| \, d|\mu| \leqslant |\mu|(X) = \|\mu\|.$$

Tedy

$$\|\nu\| = \sup_{g \in B_{C_0(Y)}} \left|\int_Y g \, d\nu\right| \leqslant \|\mu\|,$$

takže $\|T\| \leqslant 1$. $\square$

Značení 9.2.27. Nechť $f_i \colon X_i \to \mathbb{F}$ je funkce na množině X_i, $i = 1, 2$. Pak funkce $f_1 \otimes f_2 \colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{F}$ je definovaná jako

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (x_{,1}, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Lemma 9.2.28. *Nechť X_i, $i = 1, 2$, jsou lokálně kompaktní prostory. Položme*

$$\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \colon f_1, \ldots, f_n \in C_c(X_1), g_1, \ldots, g_n \in C_c(X_2), n \in \mathbb{N}\}.$$

Pak $\overline{\mathcal{A}} = C_0(X_1, \times X_2)$.

Důkaz. Systém $\mathcal{A}$ zjevně splňuje předpoklady Věty 9.1.46, a tedy je hustý v $C_0(X_1 \times X_2)$. $\square$

Lemma 9.2.29. *Pro $i = 1, 2$ uvažujme lokálně kompaktní prostor X_i s nezápornou Radonovou mírou μ_i definované na σ-algebře Σ_i. Pro danou $f \in C_c(X_1 \times X_2)$ uvažujme funkce*

$$\varphi_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\varphi_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

Pak $\varphi_i \in C_c(X_i)$, $i = 1, 2$, a platí

$$\int_{X_1} \varphi_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \varphi_2(x_2)\, d\mu_2(x_2). \tag{9.10}$$

Důkaz. Krok 1. Ukážeme, že existují kompakty $K_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, takové, že $\operatorname{spt} f \subset K_1 \times K_2$. Vskutku, pro každé $x =\in \operatorname{spt} f$ nalezneme kompaktní množiny $U_x \subset X_1$ a $V_x \subset X_2$ takové, že $x \in \operatorname{Int}(U_x \times V_x)$. Vybereme konečnou množinu $F \subset \operatorname{spt} f$ takovou, že $\operatorname{spt} f \subset \bigcup_{x\in F}(U_x \times V_x)$. Pak $K_1 = \bigcup_{x\in F} U_x$ a $K_2 = \bigcup_{x\in F} V_x$ jsou požadované množiny.

Krok 2. Ukážeme, že funkce φ_1 je spojitá. Nechť $x_1 \in X_1$ je dáno a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pro každé $y \in K_2$ nalezneme otevřené množiny $U_u \subset X_1$ a $V_y \subset X_2$ takové, že $(x_1, y) \in U_y \times V_y$ a

$$\left|f(x', y') - f(x'', y'')\right| < \varepsilon, \quad x', x'' \in U_y, y', y'' \in V_y.$$

Jelikož je množina $\{x_1\} \times K_2$ kompaktní, existuje $F \subset K_2$ konečná taková, že

$$\{x_1\} \times K_2 \subset \bigcup_{y\in F}(U_y \times V_y).$$

Pak je $U = \bigcap_{y\in F} U_y$ okolí x_1.

Pro libovolné $x \in U$ a $z \in K_2$ pak máme $|f(x, z) - f(x_1, z)| < \varepsilon$. Vskutku, je-li totiž $y \in F$ zvoleno tak, že $(x_1, z) \in U_y \times V_y$, platí $x_1, x \in U_y$ a $z \in V_y$, a tedy

$$|f(x, z) - f(x_1, z)| < \varepsilon.$$

Z tohoto odhadu plyne nerovnost

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(x_1)| \leqslant \int_{X_2} |f(x, z) - f(x_1, z)|\, d\mu_2(z) \leqslant \varepsilon\mu_2(K_2).$$

Krok 3. Uvažujme míry $\nu_i = \mu_i|_{K_i}$, $i = 1, 2$, a nechť $\nu = \nu_1 \times \nu_2$. Jsou-li $f_i \in C_c(X_i)$, $i = 1, 2$, dané funkce, je zjevně funkce $f_1 \otimes f_2$ ν-měřitelná. Díky Lemmatu 9.2.28 je i funkce f ν-měřitelná. Dle Fubiniovy věty jsou funkce

$$\psi_1(x_1) = \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\, d\nu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\psi_2(x_2) = \int_{X_1} |f(x_1, x_2)|\, d\nu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

ν_1, respektive ν_2-měřitelné, a platí

$$\int_{X_1} \psi_1(x_1)\, d\nu(x_1) = \int_{X_1\times X_2} |f(x_1, x_2)|\, d\nu(x_1, x_2) = \int_{X_2} \psi_2(x_2)\, d\nu(x_2).$$

Jelikož je f spojitá funkce s kompaktním nosičem, tyto integrály jsou konečné. Opětovným užitím Fubinovy věty, tentokrát pro funkci f, dostáváme ν_i-měřitelnost funkcí

$$\tau_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\nu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\tau_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\nu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2$$

a platnost rovnosti

$$\int_{X_1} \tau_1(x_1)\, d\nu_1(x_1) = \int_{X_2} \tau_2(x_2)\, d\nu_2(x_2).$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi_i = \tau_i$ a

$$\int_{X_i} \varphi_i\, d\mu_i = \int_{X_i} \varphi_i\, d\nu_i,$$

dostáváme rovnost (9.11). $\square$

Věta 9.2.30. *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním toplogickém prostoru X_i, $i = 1, 2$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení

$$Tf = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1), \quad f \in C_c(X_1 \times X_2),$$

je dobře definovaný nezáporný funkcionál na $C_c(X_1 \times X_2)$.

(b) Nechť μ je Radonova míra odpovídající funckionálu T. Pak pro každou baireovskou μ-integrovatelnou funkci $f\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{F}$ jsou funkce

$$\varphi_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\varphi_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

μ_1, respektive μ_2-integrovatelné a platí

$$\int_{X_1} \varphi_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu(x_1, x_2) = \int_{X_2} \varphi_2(x_2)\, d\mu_1(x_2). \tag{9.11}$$

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z Lemmatu 9.2.29.

(b) Pro funkci $f\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{F}$ řekneme, že pro ni platí Fubinova věta, pokud

- $f \in L^1(\mu)$,
- funkce

$$\varphi_f(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\psi_f(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

  jsou $L^1(\mu_1)$, respektive v $L^1(\mu_2)$ a
- platí

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d\mu = \int_{X_1} \varphi_f\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_f\, d\mu_2. \tag{9.12}$$

(Tento fakt budeme zapisovat $f \in \mathrm{FV}$.)

Označme dále

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Baire}(X_1 \times X_2)\colon f \in \mathrm{FV}\}.$$

Dle Lemmatu 9.2.29 platí $C_c(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{F}$.

Krok 1. V prvním kroce ukážeme, že $C(X_1 \times X_2) \cap L^1(\mu) \subset \mathcal{F}$. Nechť tedy $f \in C(X_1 \times X_2)$ je μ-integrovatelná funkce na $X_1 \times X_2$.

□

Značení 9.2.31. Nechť X_1, X_2 jsou lokálně kompaktní topologické prostory.

Nechť $\mu_i \in M(X_i)$ jsou nezáporné míry na σ-algebře Σ_i, $i = 1, 2$, Nechť ω je součin měr μ_1 a μ_2 na součinové σ-algebře generované Σ_1 a Σ_2 a nechť $\mu_1 \times \mu_2$ značí míru vzniklou zúplněním míry ω. Nechť Υ značí systém všech $\mu_1 \times \mu_2$ měřitelných množin.

Lemma 9.2.32. *Mějme objekty jako ve Značení 9.2.31. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Jsou-li f_i μ_i-měřitelné funkce na X_i, $i = 1, 2$, je $f_1 \otimes f_2$ $\mu_1 \times \mu_2$ měřitelná funkce.

(b) Každá $f \in C_0(X_1 \times X_2)$ je $\mu_1 \times \mu_2$-měřitelná.

(c) Zobrazení

$$\Lambda f = \int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2), \quad f \in C_0(X),$$

je nezáporný funkcionál na $C_0(X)$ splňující $\|\Lambda\| \leqslant \|\mu_1\|\, \|\mu_2\|$.

Důkaz. (a) Je-li f_i tvaru χ_{A_i}, kde $A_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2,$, pak $f_1 \otimes f_2 = \chi_{A_1 \times A_2}$, a tedy se jedná o $\mu_1 \times \mu_2$-měřitelnou funkci. Tvrzení tak platí i pro jednoduché funkce. Pokud $f_{\geqslant} 0$, $i = 1, 2$, aproximujeme je neklesající posloupností jednoduchách funkcí. Pro f_i reálné provedeme rozklad na kladnou a zápornou část a konečně pro komplexní funkce použijeme rozklad na reálnou a imaginární část.

(b)

(c) Tvrzení plyne z (b), neboť měřitelnost se zachovává na (stejnoměrné) limity.

(d) Každá funkce z $C_0(X_1 \times X_2)$ je $\mu_1 \times \mu_2$-integrovatelná, a tedy je Λ dobře definované lineární zobrazení na $C_0(X_1 \times X_2)$. Jelikož máme

$$|\Lambda f| \leqslant \int_{X_1 \times X_2} |f| \, d(\mu_1 \times \mu_2) \leqslant \|f\| \, \mu_1(X_1)\mu_2(X_2), \quad f \in C_0(X_1 \times X_2),$$

je jeho norma odhadnuta součinem $\|\mu_1\| \, \|\mu_2\|$. □

Věta 9.2.33. *Mějme objekty jako ve Značení 9.2.31. Nechť Λ je definován jako v Lemmatu 9.2.32. Jednoznačně určenou nezápornou míru v $M(X_1 \times X_2)$ danou Větou 9.2.17 označme symbolem λ. Nechť Σ je systm všech λ-měřitelných množin.*

Pak $\Sigma = \Upsilon$ a $\lambda = \mu_1 \times \mu_2$.

Důkaz. Chceme dokázat $\Sigma = \Upsilon$ a rovnost

$$\lambda(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A), \quad A \in \Sigma. \tag{9.13}$$

Krok 1. Dokažme nejprve, že pro všechny množiny tvaru $A = A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$, $i = 1, 2$, platí rovnost (9.13).

Nechť tedy $A_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$, $i = 1, 2$, jsou dány. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U takové, že $K \subset A_1 \times A_2 \subset U$ $\lambda(U \backslash K) < \varepsilon$. Pro $i = 1, 2$ nalezneme kompakty L_i a otevřené množiny U_i takové, že $K_i \subset A_i \subset U_i$ a $\mu_i(U_i \backslash L_i) < \varepsilon$. Položme $K_i = L_1 \cup p_i(K)$. Pak těž $K_i \subset A_i$ a $K_1 \times K_2 \supset K$. Nechť $f_i \in C_c(X_i)$ jsou funkce splňující $\chi_{K_i} \leqslant \chi_{U_i}$ a nechť $f \in C_c(X_1 \times X_2)$ splňuje $\chi_{K_1 \times K_2} \leqslant f \leqslant \chi_U$. položme $h = f(f_1 \otimes f_2)$. Pak $\chi_{K_1 \times K_2} \leqslant h \leqslant \chi_{U \cap (U_1 \times U_2)}$. Kombinací těchto faktů dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}
|(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) - \lambda(A_1 \times A_2)| &\leqslant \left| \int_{X_1 \times X_2} (\chi_{A_1 \times A_2} - h) \, d(\mu_1 \times \mu_2) \right| \\
&+ \left| \int_{X_1 \times X_2} h \, d(\mu_1 \times \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} h \, d\lambda \right| + \left| \int_{X_1 \times X_2} (h - \chi_{A_1 \times A_2}) \, d\lambda \right| \\
&\leqslant \int_{(U_1 \times U_2) \backslash (K_1 \times K_2)} 1 \, d(\mu_1 \times \mu_2) + \int_{U \backslash K} 1 \, d\lambda \leqslant \mu_1(U_1 \backslash K_1)\mu_2(U_2) + \mu_1(U_1)\mu_2(U_2 \backslash K_2) + \lambda(U \backslash K) \\
&< 3\varepsilon \, \|\mu_1\| \, \|\mu_2\| \, .
\end{aligned}$$

Tedy (9.13) pro $A_1 \times A_2$ platí.

Krok 2. Označme

$$\mathcal{A} = \{A \in \Sigma \cap \Upsilon \colon \text{(9.13) platí pro } A\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra.

Již víme, že $\varnothing$ i $X_1 \times X_2$ náleží do $\mathcal{A}$. Pokud $A \in \mathcal{A}$, pak

$$\lambda((X_1 \times X_2) \backslash A) = \lambda(X_1 \times X_2) - \lambda(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(X_1 \times X_2) - (\mu_1 \times \mu_2)(A) = (\mu_1 \times \mu_2)((X_1 \times X_2) \backslash A),$$

a tedy $\mathcal{A}$ je uzavřená na doplňky. Zjevně je uzavřená na disjunktní sjednocení, a tedy i na konečná sjednocení. Ze σ-aditivity uvažovaných měr je $\mathcal{A}$ uzavřená i na spočetná sjednocení.

Krok 3. Nyní ukážeme, že každá otevřená množina v $X_1 \times X_2$ je obsažena v $\mathcal{A}$. Nechť tedy $U \subset X_1 \times X_2$ je daná otevřená množina. Nalezneme rostoucí posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ v $X_1 \times X_2$ takovou, že $K_n \subset U$ a $\lambda(K_n) \nearrow \lambda(U)$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro každé $x \in K_n$ nalezneme otevřené okolí tvaru $U_{1^x} \times U_2^x$, kde $U_i^x \subset X_i$, takové, že $x \in U_1^x \times U_2^x \subset U$. Z kompaktnosti vybereme konečně mnoho takovýchto bázových množin, které pokrývají K_n. Jelikož jsou bázové otevřené množiny obsaženy v $\mathcal{A}$ (viz první krok) a $\mathcal{A}$ je σ-algebra, sjednocením těchto okolí dostaneme borelovskou množinu $A_n \in \mathcal{A}$ splňující $K_n \subset A_n \subset U$. Položme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak $\lambda(U \backslash A) = 0$.

Pro $i = 1, 2$ položme $U_i = p_i(U)$, kde $p_i \colon X_1 \times X_2 \to X_i$ je kanonická projekce. Pak U_i jsou otevřené množiny, a tedy existují kompaktní množiny F_n^i v X_i takové, že tvoří neklesající posloupnosti, platí $F_n^i \subset U_i$ a pro $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a $F_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ platí

$$\mu_1(U_1 \backslash F_1) + \mu_2(U_2 \backslash F_2) = 0.$$

Dostali jsme tak objekty splňující

$$U \backslash A \subset ((F_1 \times F_2) \backslash A) \cup ((U_1 \backslash F_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (U_2 \backslash F_2)) \, ,$$

přičemž množiny na pravé straně mají $\mu_1 \times \mu_2$ míru 0. Z úplnosti $\mu_1 \times \mu_2$ plyne, že $U \backslash A \in \Upsilon$. Tedy $U = A \cup (U \backslash A) \in \Upsilon$ a platí

$$\lambda(U) = \lambda(A) + \lambda(U \backslash A) = \lambda(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A) + (\mu_1 \times \mu_2)(U \backslash A) = (\mu_1 \times \mu_2)(U).$$

Tedy $\mathcal{A}$ obsahuje všechny otevřené, a proto i borelovské množiny $X_1 \times X_2$. Tedy (9.13) platí na $\mathrm{Bs}(X_1 \times X_2)$.

Krok 4. Ukažme nyní, že $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$ pro každou dvojici $A_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$. Mějme tedy takovéto množiny. Nalezneme množiny $K_i, U_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$ takové, že $K_i \subset A_i \subset U_i$ a $\mu_i(U_i \backslash K_i) = 0$. Pak $K_1 \times K_2 \subset A_1 \times A_2 \subset U_1 \times U_2$ a

$$(U_1 \times U_2) \backslash (K_1 \times K_2) \subset ((U_1 \backslash K_1) \times U_2) \cup (U_1 \times (U_2 \backslash K_2)) .$$

Množina na pravé straně je obsažena v $\mathcal{A}$ a má $\mu_1 \times \mu_2$ míru 0. Tedy je i λ-nulová, což vhledem k úplnosti λ implikuje, že $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$.

Nechť Ω je součinová σ-algebra generovaná Σ_1 a Σ_2. Jelikož je $\mathcal{A}$ σ-algebra, platí $\Omega \subset \mathcal{A}$.

Je-li nyní $A \in \Upsilon$ dána, existuje $B, C \in \Omega$ takové, že $B \subset A \subset C$ a $(\mu_1 \times \mu_2)(B \backslash C) = 0$. Pak $B \backslash C \in \Sigma$ a $\lambda(B \backslash C) = 0$. Proto $A \in \Sigma$ a platí pro ni (9.13). Tím máme ověřeno, že $\Upsilon \subset \Sigma$ a (9.13) platí na Υ.

Je-li nyní $A \in \Sigma$, existují $B, C \in \mathrm{Bs}(X_1 \times X_2)$ splňující $B \subset A \subset C$ a $\lambda(B \backslash C) = 0$. Jako výše tak z úplnosti $\mu_1 \times \mu_2$ máme $A \in \Upsilon$ a $\lambda(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A)$. Tím je důkaz dokončen. □

Definice 9.2.34 (Součin Radonových měr)**.** Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$ a $\nu = \sum_{k=0}^{3} i^k \nu_k$, kde $\mu_k \in M(X)$ a $\nu_k \in M(Y)$, $k = 0, 1, 2, 3$, jsou nezáporné elementy.

Definujme

$$(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} (\mu_k \times \nu_l).$$

Věta 9.2.35. *Mějme objekty jako v Definici 9.2.34. Pak $\mu \times \nu \in M(X \times Y)$ a platí $\|\mu \times \nu\| \leqslant \|\mu\| \|\nu\|$.*

Důkaz. Díky Větě 9.2.33 jsou míry $\mu_k \times \nu_l \in M(X \times Y)$. Navíc platí díky Fubiniově větě

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad f \in C_0(X \times Y).$$

Tedy pro každý prvek $f \in C_0(X \times Y)$ máme

$$\begin{aligned} \left| \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) \right| &\leqslant \int_X \left| \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right| d|\mu|(x) \leqslant \int_X \int_Y |f(x, y)| \, d|\nu|(y) \, d|\mu|(x) \\ &\leqslant \|f\| \, |\nu|(Y) \, |\mu|(X) = \|f\| \, \|\mu\| \, \|\nu\| . \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

□