Úvod do analýzy na varietách

Školní rok 2021/2022, Zimní semestr

Vladimír Souček

Obsah

Kapitola 1

Prolog

1.1 Úvod

Tento studijní text je doprovodný text k přednášce 'Úvod do analýzy na varietách' která je standardně určena studentům třetího ročníku bakalářského studia matematiky. Pro tuto přednášku je vhodné mít znalost látky prvních dvou ročníků matematické analýzy a lineární algebry. Zejména se používá teorie funkcí víc reálných proměnných (derivace složeného zobrazení, věta o substituci pro vícerozměrný integrál, věta o inverzním zobrazení). Text rozšiřuje a doplňuje skripta [KST] se stejným názvem 'Úvod do analýzy na varietách.' Zejména je přidána kapitola o teorii topologických prostorů, která se standardně v přednáškách z matematické analýzy nevyučuje a základní partie multilineární algebry (tensory), která ve standardním sylabu lineární algebry chybí. Základní dostupná literatura je citována na konci textu.

Český název 'varieta' se používá matematické objekty, které mají v angličtině název 'manifolds'. Jde o částečné zmatení jazyků, protože v angličtině se běžně používá termín '(algebraic) varieties', pro které máme v češtině název 'algebraické množiny'. Variety jsou vícedimenzionální zobecnění ploch v trojrozměrném prostoru, které se v současné době používá jako nejobvyklejší verze matematického konceptu 'prostoru'. Pojem 'varieta' je vytvořen tak, aby bylo možné zobecnit diferenciální a integrální počet víc (reálných či komplexních) proměnných na případ 'zakřivených prostorů'. Původní idee pro toto zobecnění jdou zpět k Bernhardu Riemannovi a na jejím dnešním tvaru má největší zásluhu švýcarský matematik Hermann Weyl. V současné době je teorie variet nezbytná pro většinu hlavních větví teoretické matematiky a používá se stále víc v moderních aplikacích (genetika, robotika, počítačová grafika, zobrazovací metody medicíny, teorie optimalní kontroly) a je klíčová pro symbiozu s hlavními aplikacemi geometrie v teoretické fyzice. Prakticky všechny části moderní teoretické fyziky jsou formulovány a jejich vlastnosti jsou popsány na základě vhodných matematických modelů.

(a) Einsteinova obecná teorie relativity je nejdůležitější fyzikální teorie popisující teorii gravitace a jevy ve vesmíru. Její formulace používá teorii (pseudo)-Riemmanových variet, kterou vyvinuli italští geometři (Levi-Civita) v 19. století.

(b) Jednotná teorie interakcí elementárních částic, kterou se podařilo formulovat v období po druhé světové válce používá teorii fíbrovaných prostorů a kovariantních derivací. Tuto větev analýzy na varietách vytvořili matematici nezávisle na zkoumání teoretických fyziků, kteří právě takovou teorii potřebovali a vytvořili si ji sami pod názvem teorie kalibračních (Yang-Millsových) polí. Později se zjistilo, že obě teorie jsou ekvivalentní, ale zmatení jazyků mezi matematiky a teoretickými fyziky v této oblasti trvá dodnes.

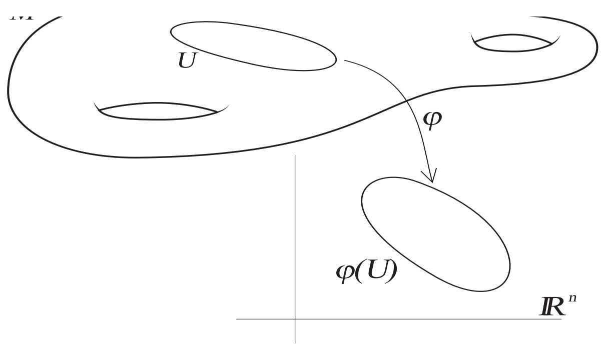
(c) Neobyčejný přínos posledních dekád do oblasti mezi teoretickou fyzikou a matematikou přinesla takzvaná 'teorie strun', zamýšlená původně jako šance vytvořit jednotnou teorii kvantových systémů a gravitace. Fyzikální význam této teorie se dodnes nepotvrdil, ale přínos jejích idejí pro současnou teoretickou matematiku lze jen těžko přecenit.

(d) Obrovskou roli v klasifikaci elementárních částic (a v teoretické fyzice obecně) hraje otázka symetrií. Standardní způsob jak modelovat symetrie je pomocí teorie grup, a zejména pomocí teorie Lieových grup. Lieovy grupy jsou grupy, které jsou současně varietami. Nejklasictějším příkladem je (Lieova) grupa rotací v Eukleidovském prostoru. Otázky symetrie hrají klíčovou roli v popisu a klasifikací geometrií (Kleinův Erlangenský program). Obecné variety mají zpravidla ještě zadanou další strukturu, zpravidla spojenou s volbou speciální symetrie (například Riemannova geometrie, konformní geometrie, symplektická geometrie, Cartanovy geometrie, kvaternionová geometrie, apod.).

Všechny výše zmíněné oblasti matematiky a jejích aplikací jsou nemyslitelné bez analýzy na varietách.

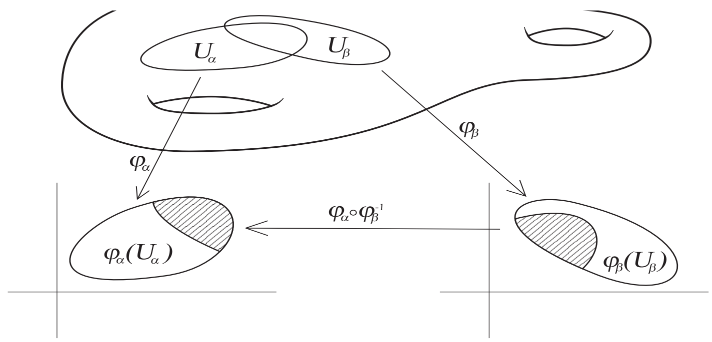
1. přednáška

Zkusme si ještě před detailním (a přesným) výkladem naznačit hlavní intuitivní myšlenky použité při definici variety. Varieta M je nejprve jen množina bez další struktury. Vzorová množina pro (reálnou) varietu dimenze n je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$. Budeme chtít, aby varieta lokálně vypadala jako tato vzorová množina. Nejdříve tedy zavedeme pojem **mapa na množině** M jako vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení φ podmnožiny $U \subset M$ na otevřenou podmnožinu $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ (viz obr.1).



Obr.1. Mapa na množině M.

Dále budeme požadovat, aby množina M byla celá pokryta systémem map (který nazveme **atlas**). Tak jak je vidět na obr.2., mapy se typicky budou překrývat a průnik $U_\alpha \cap U_\beta$ definičních oborů dvou map bude pokryt dvakrát. To zřejmě indukuje bijektivní **přechodové zobrazení** $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}$ z podmnožiny $\varphi_\alpha(U\alpha \cap U_\beta)$ v $\mathbb{R}^n$ na podmnožinu $\varphi_\beta(U\alpha \cap U_\beta)$ v $\mathbb{R}^n$.



Obr.2. Přechodové zobrazení.

Typ variety je tedy určen dvěma údaji.

(1) Vzorová množina.

(2) Požadavky na přechodové zobrazení.

Matematické objekty zkoumané na varietách:

Funkce, tečné vektory a vektorová pole, diferenciální operátory, tenzorová pole, diferenciální formy (speciální případ tensorových polí), zobrazení mezi varietami.

Základní objekt - diferencovatelná (hladká) funkce.

Různé typy funkcí je možné definovat v závislosti na vlastnotech přechodového zobrazení.

Možnosti:

spojité funkce $\mathcal{C}^0(U)$

k-krát spojitě diferencovatelné funkce $\mathcal{C}^k(U)$

hladké funkce $\mathcal{C}^\infty(U)$

reálně analytické funkce $\mathcal{C}^\omega(U)$- lokálně součty Taylorových řad

polynomy, racionální funkce

holomorfní funkce (model $U \subset \mathbb{C}$)

Je možné si také představit, že zadání dvou překrývajících se map nám dává návod na slepení dvou otevřených vzorových množin pomocí přechodového zobrazení do jedné větší 'plochy'. Proberme si teď (a na následujícím cvičení) 3 jednoduché případy množiny M, map, a atlasu.

1.2 Mapy, atlasy

Definice 1.1 *Nechť U a V jsou otevřené podnožiny v $\mathbb{R}^n$, resp. v $\mathbb{R}^m$.*

Řekneme, že funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je **hladká,** *pokud má spojité parciální derivace všech řádů. Prostor hladkých funkcí na množině U označíme symbolem $\mathcal{C}^\infty(U)$.*

Řekneme, že zobrazení $\psi : U \to V$ je **hladké,**, *pokud je každá složka tohoto zobrazení hladká funkce.*

Řekneme, že zobrazení $\psi : U \to V$, je **difeomorfismus,** *je-li to prosté zobrazení U na V a zobrazení ψ i ψ^{-1} jsou hladké.*

Definice 1.2 *Nechť M je (libovolná) množina, pak* **mapa na** *M* **dimenze** *n je dvojice (U, φ), kde $U \subset M$ a $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je prosté zobrazení na otevřenou podmnožinu $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ dvě mapy na M dimenze n, pak se zobrazení $\psi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ definované na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ nazývá **přechodové zobrazení** *mezi těmito mapami. V případě, kdy $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, budeme chápat přechodovou funkci jako prázdné zobrazení, které triviálně splňuje všechny podmínky na přechodové zobrazení kladené.*

Řekneme, že dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ jsou **kompatibilní**, *pokud $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou otevřené množiny a přechodové zobrazení je difeomorfismus mezi nimi.*

(Hladký) atlas *na M je systém map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ takových, že každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní a že $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.*

Příklad.

$M = S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

$U_0 = \{(x,y) \in M | (x,y) \neq (1,0)\};\ U_1 = \{(x,y) \in M | (x,y) \neq (-1,0)\};\ U_0 \cup U_1 = M.$

je-li $(x,y) \in U_0$ a $(x,y) = (\cos t, \sin t), t \in (0, 2\pi)$, pak $\varphi_0(x,y) = t$;

je-li $(x,y) \in U_1$ a $(x,y) = (\cos t, \sin t), t \in (-\pi, \pi)$, pak $\varphi_1(x,y) = t$.

Definiční obor přechodového zobrazení ψ_{01} je sjednocení intervalů $(0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ a

$\psi_{01}(t) = t$ na $(0,\pi)$;

$\psi_{01}(t) = t - 2\pi$ na $(\pi, 2\pi)$.

Pro definici pojmu 'varieta' nám ještě schází naučit se základní pojmy a vlastnosti týkající se topologických prostorů. Tomu bude věnována další přednáška.

Konec první přednášky.

Cvičení k první přednášce.

Příklad 1. Nechť $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{L \subset \mathbb{R}^2 | L$ je reálný vektorový podprostor dimenze 1$\}$.

Sestrojte atlas na množině M skládající se z map dimenze 1.

Řešení. Nechť $(x, y) \neq (0, 0)$ je baze prostoru L, tento fakt označíme rovností $L =< (x, y) >$. Dvojici (x, y) nazveme homogenní souřadnice prostoru L. Homogenní souřadnice nejsou určeny jednoznačně, mohou se lišit nenulovým násobkem. Všechny hodnoty homogenních souřadnic prostoru L patří tedy do stejné třídy ekvivalence definované následujícím způsobem:

$(x, y) \sim (x', y') \iff \exists \alpha \neq 0, (x', y') = (\alpha x, \alpha y)$

a M je množina příslušných tříd ekvivalence.

Označme $U_0 = \{< (x, y) >\in M | x \neq 0\}$; $U_1 = \{< (x, y) >\in M | y \neq 0\}$; $U_0 \cup U_1 = M$,

a definujme zobrazení

$\varphi_0 : (x, y) \sim (1, z = \frac{y}{x}) \in U_0 \mapsto z \in \mathbb{R}$; $\varphi_1 : (x, y) \sim (\zeta = \frac{x}{y}, 1) \in U_1 \mapsto \zeta \in \mathbb{R}$. Atlas na M má dvě mapy (U_0, φ_0) a (U_1, φ_1), přechodové zobrazení má tvar

$\varphi_{01} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\zeta = \varphi_{01}(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

Názorně je také možné si představit M jako jednotkovou kružnici se ztotožněnými protilehlými body:

$M \simeq S^1 / \{(x, y) \sim (-x, -y)\}$.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ není podmnožina Eukleidovského prostoru!

Příklad 2. $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := \{L \subset \mathbb{C}^2 | L$ je komplexní vektorový podprostor dimenze 1 v $\mathbb{C}^2\}$.

Sestrojte atlas na množině M skládající se z map, které mají jako obrazy otevřené podmnožiny v $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Řešení.

Označme $< (u, v) >= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \exists \alpha \in \mathbb{C}, (z_1, z_2) = (\alpha u, \alpha v)\}$. Tedy $< (u, v) >$ je komplexní vektorový podprostor komplexní dimenze 1 v $\mathbb{C}^2$, jehož baze je vektor (u, v).

(u, v) jsou homogenní souřadnice pro $L =< (u, v) >$, kde $(u, v) \neq (0, 0)$, $u, v \in \mathbb{C}$.

$(u, v) \sim (u', v') \iff \exists \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}, (u', v') = (\alpha u, \alpha v)$.

$U_0 = \{< (u, v) >\in M | u \neq 0\}$; $U_1 = \{< (u, v) >\in M | v \neq 0\}$; $U_0 \cup U_1 = M$.

$\varphi_0 : (u, v) \sim (1, z = \frac{v}{u}) \in U_0 \mapsto z \in \mathbb{C}$; $\varphi_1 : (u, v) \sim (\zeta = \frac{u}{v}, 1) \in U_1 \mapsto \zeta \in \mathbb{C}$.

přechodové zobrazení má tvar

$\varphi_{01} : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; $\zeta = \varphi_{01}(z) = \frac{1}{z}$.

Pokud označíme bod $(0, 1)$ symbolem ∞, pak zřejmě $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$. Komplexní projektivní prostor dimenze 1 je tedy komplexní rovina s jedním přidaným bodem v nekonečnu. Tato interpretace se bude systematicky používat v klasické 'teorii funkcí' komplexní proměnné s komplexními hodnotami a prostoru $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se bude říkat Riemannova sféra. Všimněte si, že v $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ není žádný bod výjimečný, a že při jiné volbě map v atlasu může roli bodu v nekonečnu hrát libovolný bod projektivního prostoru. Všimněte si, že slovo 'sféra' v názvu 'Riemannova sféra není náhodou, prostor $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$ se dá ztotožnit snadno s jednotkovou sférou v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3. Grassmanova varieta $Gr_{2,4}$.

Označme $M = Gr_{2,4} := \{L_2 \subset \mathbb{R}^4 | L_2$ je reálný vektorový podprostor dimenze 2$\}$.

Sestrojte atlas pomocí map vhodné dimenze na množině M.

Řešení.

Je-li L_2 vektorový podprostor dimenze 2, pak existuje baze $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ prostoru L_2. Tento fakt označíme rovností $L_2 =< v_1, v_2 >$. Složky těchto vektorů tvoří sloupce 4×2 matice $M = (v_1, v_2)$, která má hodnost 2. Jakákoliv jiná baze $v'_1, v'_2 \in \mathbb{R}^4$ téhož podprostoru se dá vyjádřit pomocí nečárkované baze a regulární 2×2 matice přechodu A. Pro odpovídající matici M' platí $M' = M \cdot A$. Množina M se tedy dá popsat také jako množina $St_{4,2}$ všech 4×2 matic M s hodností 2 modulo ekvivalence $\sim$, která je definovaná takto:

$$M' \sim M \iff \exists\, A \in GL(2, \mathbb{R}),\ M' = M \cdot A,$$

kde $GL(2, \mathbb{R})$ označuje (Lieovu) grupu všech 2×2 regulárních reálných matic.

Mapu na množině $M = Gr_{2,4}$ lze například zvolit takto. Nejprve zavedeme následující označení. Symbolem M_{ij}; $1 \leq i, j \leq 4; i \neq j$ označíme 2×2 podmatici (minor) matice M tvořenou i-tým a j-tým řádkem matice M a definujeme $\Delta_{ij}(M) = \det M_{ij}$.

Nyní definujme množinu $U_{ij} \subset M$ předpisem

$$U_{ij} := \{L_2 \in Gr_{2,4} | L_2 =< v_1, v_2 >, \Delta_{ij}(M) \neq 0, M = (v_1, v_2)\}$$

Pokud $M' = M \cdot A$, pak zřejmě $M'_{ij} = M_{ij}A$ a podmínka $\Delta_{ij}(M) \neq 0$ je nezávislá na výběru matice M reprezentující podprostor L_2.

Nyní definujeme první mapu (U_{12}, φ_{12}) na množině $Gr_{2,4}$ takto. Je-li $L_2 \in U_{12}$, pak existuje právě jedna baze v_1, v_2 prostoru L_2 s vlastností, že minor M_{12} matice $M =< v_1, v_2$ je jednotková matice, tedy že matice M má tvar

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \ a, b, c, d, \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

To je možné ukázat následující úvahou. Nejprve zvolíme libovolnou bazi v_1, v_2 podprostoru L_2. Pak tuto bazi změníme pomocí matice přechodu A rovnající se inverzní matici k matici M_{12}, kde $M = (v_1, v_2)$. Tím dokážeme existenci baze mající tvar (1.1). Jednoznačnost takovéto baze plyne z toho, že matice přechodu mezi dvěma maticemi, které mají tvar (1.1) musí být jednotková. Je tedy možné definovat zobrazení $\varphi_{12} : U_{12} \to \mathbb{R}^4$ předpisem

$$f_{12}(L_2) = (a, b, c, d).$$

které je prosté. Dvojice (U_{12}, φ_{12}) je tedy mapa na množině $Gr_{2,4}$ dimenze 4.

Snadno se ukáže, že naprosto analogickým způsobem je možné definovat dalších 5 map dimenze 4, definovaných na analogických podmnožinách $U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34}$.

Lineární algebra říká, že hodnost matice M je rovna 2 právě když aspoň jeden z determinantů $\Delta_{ij}(M)$ je nenulový. Platí tedy, že $\cup U_{ij} = Gr_{2,4}$ a soubor těchto 6 map tvoří atlas na $Gr_{2,4}$.

Pomocí determinantů $\Delta_{ij}(M)$ je možné definovat zobrazení

$$\Phi : St_{4,2} \to \mathbb{R}^6 \backslash \{(0,0,0,0,0,0)\}; \ \Phi(M) = (\Delta_{12}(M), \Delta_{13}(M), \Delta_{14}(M), \Delta_{23}(M), \Delta_{24}(M), \Delta_{34}(M)).$$

Pokud $M' = M \cdot A, A \in GL(2, \mathbb{R})$, pak

$$\Phi(M') = \Phi(M) \det A.$$

Tedy zobrazení Φ indukuje zobrazení $\tilde{\Phi}$ množiny $Gr_{2,4}$ do projektivního prostoru $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$. Složky vektoru $(\Delta_{ij}(M)) \in \mathbb{R}^6$ se nazývají **Plückerovy souřadnice prvku** $L_2 \in Gr_{2,4}$

Toto zobrazení je dobře definováno, ale těžko může být surjektivní, protože mapy na množině $Gr_{2,4}$ mají dimenzi 4, zatímco mapy na projektivním prostoru $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ mají dimenzi 5 (rozmyslete si!).

Příklad 4. Dokažte, že pro čísla $\Delta_{ij}(M) = \Delta_{ij}$ je splněna (kvadratická) rovnice

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0. \tag{1.2}$$

Řešení. Přímý výpočet.

Kapitola 2

Topologie

2.1 Definice, příklady

Analýza v prvních semestrech se soustředila na studium funkcí na metrickém prostoru. Klíčovou roli při popisu spojitých funcí při tom hrály otevřené množiny. Připomeňme si, že metrický prostor se v analýze definuje jako dvojice (M, d), kde M je množina a d je nezáporná funkce na $M \times M$, symetrická ve svých argumentech, pro kterou platí trojúhelníková nerovnost. Navíc $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$. Číslu $d(x, y)$ se říká vzdálenost bodů x a y. Množina $U \subset M$ je otevřená, pokud pro každý bod $x \in U$ existuje $\epsilon > 0$ s vlastností, že množina $\{y \in M | d(x, y) < \epsilon\}$ je podmnožina U. Otevřené množiny hrají klíčovou roli při popisu spojitých funkcí, či spojitých zobrazení.

Základní myšlenka, proč se zavádějí topologické prostory je opustit při studiu spojitosti koncept metrického prostoru úplně a od začátku definovat, které množiny jsou otevřené. Ukáže se, že je to nejen podstatně obecnější, ale že to je velmi, velmi užitečné.

Definice 2.1 *Je-li M libovolná množina, pak symbolem $\mathcal{P}(M)$ označíme množinu všech podmnožin množiny M.*

Topologický prostor X je množina X, pro kterou je navíc zadán systém podmnožin $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{P}(X)$, která splňuje následující axiómy:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$, tj. prázdná množina a celý prostor patří do $\mathcal{T}_X$;

(O2) $U, V \in \mathcal{T}_X \implies U \cap V \in \mathcal{T}_X$;

(O3) Je-li $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}(X)$, pak $\cup_{U \in \mathcal{A}} U \in \mathcal{T}_X$.

Topologický prostor je tedy dvojice $(X, \mathcal{T}_X)$! Pokud nebude potřeba specifikovat topologii $\mathcal{T}_X$, budeme používat jen zkrácené označení X pro daný topologický prostor.

Množiny $U \in \mathcal{T}_X$ se nazývají **otevřené množiny.**

Definice 2.2 *Nechť $\mathcal{T}_X$ a $\mathcal{T}'_X$ jsou dvě topologie na prostoru X. Řekneme, že topologie $\mathcal{T}'_X$ je* **silnější***, nebo* **jemnější***, než topologie $\mathcal{T}_X$, pokud $\mathcal{T}'_X \supset \mathcal{T}_X$. Pokud tato inkluze platí, říkáme zároveň, že že topologie $\mathcal{T}_X$ je* **slabší***, nebo* **hrubší***, než topologie $\mathcal{T}'_X$.*

Poznámka 2.3 *Axiomy pro topologii se dají přeformulovat (názorně) takto:*

(O1) Prázdná množina a celý prostor patří do $\mathcal{T}_X$;

(O2) Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

(O3) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

Na druhou stranu průnik libovolného systému otevřených podmnožin otevřená množina obecně být nemusí.

Definice 2.4 *Podmnožina U topologického prostoru $(X, \mathcal{T}_X)$ se nazývá* **uzavřená***, pokud její doplněk*

$$U^c := X \setminus U$$

je otevřená množina. Systém všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{T}_X)$ označíme $\mathcal{U}_X$.

Lemma 2.5 (Charakterizace uzavřených množin.) *Systém $\mathcal{U}_X$ uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{T}_X)$ splňuje tři vlastnosti:*

(U1) Prázdná množina a celý prostor jsou uzavřené množiny.

(U2) Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

(U3) Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Naopak, pokud nějaký soubor podmnožin $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ má vlastnosti $(U1), (U2), (U3)$, pak systém

$$\mathcal{T}_X = \{X \setminus U | U \in \mathcal{U}_X\}$$

definuje topologii na množině X a systém $\mathcal{U}_X$ je systém uzavřených podmnožin topologického prostoru $(X, \mathcal{T}_X)$.

Důkaz.

Podle definice $U \in \mathcal{U}_X$ právě když $U^c \in \mathcal{T}_X$. Takže potřebujeme dokázat, že systém $\mathcal{T}_X$ splňuje podmínky $(O1), (O2), (O3)$ právě když $\mathcal{U}_X$ splňuje podmínky $(U1), (U2), (U3)$.

Ekvivalence podmínek $(O1)$ a $(U1)$ je zřejmá.

Ekvivalence podmínek $(O2)$ a $(U2)$ plyne z De Morganových vzorců $(U \cup V)^c = U^c \cap V^c$.

Ekvivalence podmínek $(O3)$ a $(U3)$ plyne z De Morganových vzorců $(\cap_{U \in \mathcal{A}})^c = \cup_{U \in \mathcal{A}} U^c$, kde $\mathcal{A}$ je libovolný systém podmnožin v X. $\square$

Příklady.

(1) Předpokládejme, že (M, d) je metrický prostor, pak definujeme **metrickou topologii** $\mathcal{T}_X$, neboli **topologii indukovanou metrikou** d takto:

$$U \in \mathcal{T}_X \iff \forall x \in U \exists\, \delta > 0 \text{ takové, že } \{y \in X | d(x, y) < \delta\} \subset U.$$

Je snadné se přesvědčit, že systém $\mathcal{T}_X$ splňuje axiomy pro topologii.

(2) Nechť S je libovolná množina. Extrémní topologie na S jsou:

(i) **Triviální topologie**: $\mathcal{T}_S = \{\emptyset, S\}$. Triviální topologie je nejslabší (nejhrubší) topologie na množině S.

(ii **Diskrétní topologie:** $\mathcal{T}_S = \mathcal{P}(X)$, tedy všechny podmnožiny M jsou otevřené. Diskrétní topologie je nejsilnější (nejjemnější) topologie na množině S.

(5) **Zariského topologie.** Označme $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ prostor všech polynomů v n proměnných s komplexními koeficienty. Je-li $X = \mathbb{C}^n$, pak definujeme **Zariského topologii** tím, že podmnožina $U \subset \mathbb{C}^n$ je uzavřená, pokud existuje (libovolná) množina $S \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, pro kterou

$$U = V(S) := \{z \in \mathbb{C}^n | f(z) = 0 \,\forall f \in S.\}$$

Pro případ $n = 1$, je množina X množina komplexních čísel a otevřené množiny v Zariského topologii jsou 'veliké', je to celá komplexní rovina bez konečně mnoha bodů (nebo prázdná množina).

Rozmyslete si, že Zariského topologie splňuje všechny tři axiómy pro topologii.

2.2 Podprostor, uzávěr, vnitřek, a hranice.

Předpokládejme, že $(X, \mathcal{T}_X)$ je topologický prostor. Pak je možné definovat (indukovanou) topologii na každé podmnožině $Y \subset X$ následujícím způsobem.

Definice 2.6 *Je-li $(X, \mathcal{T}_X)$ topologický prostor a $Y \subset X$, pak definujeme* **indukovanou topologii** *$\mathcal{T}_Y$ na podprostoru Y předpisem*

$$\mathcal{T}_Y = \{V = U \cap Y | U \in \mathcal{T}_X\}. \tag{2.1}$$

Lemma 2.7 *Systém (2.1) splňuje axiómy pro topologii na množině Y.*

Důkaz.

Prázdná množina $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i množina $Y = X \cap Y$ patří do $\mathcal{T}_Y$. Jsou-li $V = U \cap Y$ a $V' = U' \cap Y$ dvě množiny z $\mathcal{T}_Y$, pak

$$V \cap V' = (U \cap U') \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

A konečně, pokud $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je systém otevřených podmnožin v X a $\{V = U \cap Y | U \in \mathcal{A}\}$ je odpovídající systém pomnožin v $\mathcal{P}(Y)$, pak i $\cup_{\mathcal{A}}(U \cap Y) = (\cup_{\mathcal{A}} U) \cap Y$ patří do $\mathcal{T}_Y$. $\square$

V dalším textu budeme vždy uvažovat podmnožiny Y topologického prostoru $(X, \mathcal{T}_X)$ s takto definovanou topologií podprostoru.

V topologickém prostoru je možné definovat pro každou podmnožinu pojem vnitřku a uzávěru. Definice je snadná a přirozená, užívá se jen pojmů otevřená a uzavřená množina.

Definice 2.8 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ je topologický prostor a $Y \subset X$.*

(i) **Vnitřek** $\operatorname{Int} Y$ **množiny** Y *definujeme předpisem*

$$\operatorname{Int} Y := \cup_{U \in \mathcal{T}_X, U \subset Y} U. \tag{2.2}$$

(ii) **Uzávěr** $\overline{Y}$ **množiny** Y *definujeme předpisem*

$$\overline{Y} := \cap_{V \in \mathcal{U}_X, Y \subset V} V. \tag{2.3}$$

(iii) **Hranice** ∂Y *množiny Y je definována předpisem*

$$\partial Y := \overline{Y} \setminus \operatorname{Int} Y. \tag{2.4}$$

(v) Řekneme, že množina A je **okolí bodu** x, pokud $x \in \operatorname{Int} A$.

Z vlastností systému otevřených, resp. uzavřených množin ihned plyne, že vnitřek $\operatorname{Int} Y$ je největší otevřená množina obsažená v Y a uzávěr $\overline{Y}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující Y, a hranice ∂Y se dá popsat jako průnik uzávěru Y a uzávěru $X \setminus Y$.

2.3 Baze a subbaze.

V metrických prostorech patří mezi základní otevřené množiny koule kolem daného bodu s daným poloměrem. Každá otevřená množina je pak sjednocení takovýchto koulí. Také v obecných topologických prostorech je výhodné definovat vhodný systém speciálních otevřených množin, který pak generuje celý systém všech otevřených množin.

Definice 2.9 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ je topologický prostor.*

(a) Systém $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_X$ nazveme **baze topologie** $\mathcal{T}_X$*, pokud je každá otevřená množina $U \in \mathcal{T}_X$ sjednocení množin ze systému $\mathcal{B}$. Množiny ze systému $\mathcal{B}$ pak budeme nazývat* **základní otevřené množiny** *topologie $\mathcal{T}_X$.*

(b) Systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_X$ nazveme **subbaze topologie** $\mathcal{T}_X$*, pokud je systém $\mathcal{B}$ všech konečných průniků prvků systému $\mathcal{S}$ baze topologie $\mathcal{T}_X$. Jinak řečeno požadujeme, aby se dala každá otevřená množina dané topologie $\mathcal{T}_S$ napsat jako sjednocení konečných průniků prvků ze systému $\mathcal{S}$.*

Je zřejmé, že každá baze topologie $\mathcal{T}_X$ je subbaze topologie $\mathcal{T}_X$. Následující tvrzení popisuje jednoduchý způsob, jak definovat topologii na dané množině X.

Lemma 2.10 *Nechť X je množina a nechť $\mathcal{S}$ je libovolný systém podmnožin množiny X, jejichž sjednocení je množina X.*

Nechť $\mathcal{T}_X$ je systém všech sjednocení konečných průniků množin ze systému $\mathcal{S}$. Pak

(a) Systém $\mathcal{T}_X$ je topologie na množině X, nazveme ji **topologií generovanou systémem** $\mathcal{S}$.

(b) Systém $\mathcal{S}$ je subbaze topologie $\mathcal{T}_X$.

(c) Topologie $\mathcal{T}_X$ je nejslabší topologie obsahující systém $\mathcal{S}$. Jinak řečeno, topologie $\mathcal{T}_X$ je průnik všech topologií obsahujících systém $\mathcal{S}$.

Důkaz.
Bod (a)

Označme symbolem $\mathcal{B}$ systém všech konečných průniků množin ze systému $\mathcal{S}$ a symbolem $\mathcal{T}_X$ systém všech (libovolných) sjednocení množin z $\mathcal{B}$. Chceme ukázat, že $\mathcal{T}_X$ je topologie na X.

Vlastnost (O1) je zřejmá (podle definice je sjednocení prázdného systému množin prázdná množina).
Vlastnost (O2): uvažujme dvě množiny $U^1, U^2 \in \mathcal{T}_X$. Tedy

$$U^1 = \cup_{i \in I} B_i^1, B_i^1 \in \mathcal{B};\ U^2 = \cup_{j \in J} B_j^2, B_j^2 \in \mathcal{B},$$

kde I, J jsou indexové množiny (možná i nekonečné). Pak

$$U^1 \cap U^2 = [\cup_{i \in I} B_i^1] \cap [\cup_{j \in J} B_j^2] = \cup_{i \in I, j \in J} B_i^1 \cap B_j^2 \in \mathcal{T}_X.$$

Vlastnost (O3): Nechť

$$U^\alpha = \cup_{i_\alpha \in I_\alpha} B_{i_\alpha}^\alpha, B_{i_\alpha}^\alpha \in \mathcal{B};\ \alpha \in A;\ U^\beta = \cup_{j_\beta \in J_\beta} B_{j_\beta}^\beta, B_{j_\beta}^\beta \in \mathcal{B};\ \beta \in B.$$

Pak zřejmě $U^\alpha \cup U^\beta$ patří do $\mathcal{T}_X$.

Bod (b).

Tvrzení plyne přímo z definice subbaze.

Bod (c).

Podle bodu (a) je $\mathcal{T}_X$ topologie na X a obsahuje systém $\mathcal{S}$.

Naopak, je-li $\mathcal{T}'_X$ libovolná jiná topologie na X, která obsahuje systém $\mathcal{S}$, pak se z vlastností topologie ihned odvodí, že $\mathcal{T}_X$ je podsystém v systému $\mathcal{T}'_X$.

□

2.4 Hausdorffův topologický prostor.

Schéma topologického prostoru je velmi obecné a zahrnuje mnoho příkladů s neobvyklými vlastnostmi odporujícími intuici, která je založena na přépadu topologického prostoru indukovaného metrikou. Některé neobvyklé a zvláštní vlastnosti mohou být důsledkem toho, že daná topologie obsahuje málo otevřených množin. V metrickém prostoru M je například jednobodová množina $\{x\}, x \in M$ vždy uzavřená. nebo obecněji, libovolné dva různé body maji disjunktní okolí. příklad takového chování je následující topologický prostor.

Takovéto příklady jsou vyloučeny pomocí následující definice.

Definice 2.11 *Topologický prostor $(X, \mathcal{T}_X)$ se nazývá* **Hausdorffův***, pokud pro každou dvojici různých bodů $x, y \in X$ existují otevřené množiny U, V pro které*

$$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

2.5 Spojité zobrazení.

Podstatná třída zobrazení mezi topologickými prostory jsou spojitá zobrazení, které teď budeme definovat. Budeme při tom používat následující označení. Je-li $f : X \to Y$ zobrazení mezi množinami X a Y a $V \subset Y$. Pak definujeme

$$f^*(V) := \{x \in X | f(x) \in V)\}.$$

Definice 2.12 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou dva topologické prostory.*

Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je spojité, pokud $f^*(V) \in \mathcal{T}_X$ pro každou množinu $V \in \mathcal{T}_Y$.

Lemma 2.13 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou dva topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení mezi nimi. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) f je spojité zobrazení
(ii) $f^*(Z)$ je uzavřená množina pro každou uzavřenou množinu Z;
(iii) Nechť $\mathcal{S}$ je subbaze pro topologii $\mathcal{T}_Y$ na množině Y. Pak f je spojité na X, právě když $f^*(U)$ je otevřená množina pro každou množinu $U \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Pro důkaz tvrzení jsou podstatné následující vlastnosti vzorů, které si probereme podrobně na cvičení.

$$f^*(Y \setminus U) = X \setminus f^*(U)$$

$$f^*(\cap_{1 \leq i \leq n} U_i) = \cap_{1 \leq i \leq n} f^*(U_i),$$

$$f^*(\cup_{i \in I} U_i) = \cup_{i \in I} f^*(U_i).$$

□

Definice 2.14 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou dva topologické prostory.* **Homeomorfismus** *z X do Y je spojité a vzájemně jednoznačné zobrazení $f : X \to Y$, pro které je inverzní zobrazení $f^{-1} : X \to Y$ také spojité. topologické prostory $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou* **homeomorfní,** *pokud existuje homeomorfismus mezi nimi.*

Tedy: Nejen, že homeomorfismus $f : X \to Y$, resp. f^{-1}, ztotožňuje množiny X a Y, ale zároveň zobrazení f^* resp. $(f^{-1})^*$, ztotožňuje topologie $\mathcal{T}_X$ a $\mathcal{T}_Y$.

2.6 Kategorie topologických prostorů

Poznámka. Teorie kategorií vyrostla ze skromných začátků k důležité oblasti v základech matematiky a stává se víc a víc standardním jazykem používaným v mnoha oblastech matematiky.

Pojďme si nyní popsat (neformálně) co to kategorie jsou.

Kategorie se skládá z dvojice dat:
(A) **Objekty.** Je dán soubor $\mathbf{C}$ matematických objektů.
(B) **Morfismy.** Pro každou dvojici objektů $X, Y \in \mathbf{C}$ je dáne množina $\mathrm{Hom}(X, Y)$, jejíž prvky se nazývají morfismy z X do Y, pro kterou musí platit:
(i) pro každý objekt $X \in \mathbf{C}$ existuje morfismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$,
(ii) pro každou trojici objektů $X, Y, Z \in \mathbf{C}$ je dána operace skládání

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z);\ (f, g) \to g \circ f$$

Tyto data musí splňovat dva jednoduché axioómy (skládání je asociativní, identity id_X jsou identity při skládání).

Pro topologické prostory jsou z tohoto hlediska podstatné (a velmi snadno se ověří - udělejte to!) následující dvě tvrzení.

Lemma 2.15 *Nechť X, Y, Z jsou topologické prostory. Pka*
(1) Zobrazení identita $Id : X \to X$ je spojité zobrazení.
(2) Jsou-li $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ spojitá zobrazení, pak i zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je spojité.

Existuje tedy kategorie **Top**, jejíž objekty jsou topologické prostory a morfismy jsou spojitá zobrazení.

Z lineární algebry plyne, že dalším příkladem kategori je kategorie, jejíž objekty jsou vektorové prostory a morfismy jsou lineární zobrazení.

Třetím příkladem kategorie je kategorie, jejíž objekty jsou grupy a morfismy jsou homomorfismy.

Cvičení k druhé přednášce.

Příklad 1. Nechť $\mathbb{R}$ je metrický prostor, a tedy i topologický prostor s indukovanou topologií. Definujme otevřené množiny $U_i := K(0, \frac{1}{i})$. Ukažte, že průnik $\cap_i U_i$ není otevřená množina.

Opravdu, $\cap_i U_i = \{0\}$.

Příklad 2. Uvažujme kružnici S^1 s topologií indukovanou inklusí $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Ukažte, že otevřené množiny v této topologii jsou sjednocení množin

$$U_{a,b} = \{z = e^{i\varphi} | a < \varphi < b\}.$$

Vskutku,

$$U_{a,b} = S^1 \cap \{z = re^{i\varphi} | a < \varphi < b, \frac{1}{2} < r < 2\}.$$

Příklad 3. Nechť X a Y jsou metrické prostory, uvažujme tyto množiny s indukovanou (tj. metrickou) topologií.

Ukažte, že zobrazení $f : X \to Y$ je spojité jako zobrazení mezi metrickými prostory právě když f je spojité jako zobrazení mezi topologickými prostory.

Řešení.

Standardní definice spojitosti v metrických prostorech říká, že vzory otevřených koulí jsou otevřené množiny. Ale systém otevřených koulí je baze metrické topologie. Tedy stačí použít Lemma 2.13 (iii).

Příklad 4. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Dokažte relace

$$f^*(Y \setminus U) = X \setminus f^*(U)$$

$$f^*(\cap_{1 \le i \le n} U_i) = \cap_{1 \le i \le n} f^*(U_i),$$

$$f^*(\cup_{i \in I} U_i) = \cup_{i \in I} f^*(U_i).$$

Řešení.

Ve všech 3 případech stačí použít definici obou stran rovnosti.

Příklad 5.

Nechť $M =< 0, 2\pi)$ je topologický prostor s topologií indukovanou metrickou topologií na $\mathbb{R}$.

Zobrazení $f : M \to S^1$ definované předpisem $f(t) = e^{it}$ je prosté.

Ukažte, že inverzní zobrazení $f^{-1} : S^1 \to M$ není spojité.

Řešení.

Množina $< 0, \pi)$ je otevřená v intervalu $< 0, 2\pi)$ s indukovanou topologií, ale její vzor při zobrazení f^{-1} je množina $f(< 0, \pi))$, která otevřená v S^1 není.

Příklad 6.

Nechť $X = \{1, 2, 3\}$ a $\mathcal{T}_X = \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$. Ukažte, že topologický prostor $(X, \mathcal{T}_X)$ není Hausdorffův topologický prostor.

Příklad 7.

Nechť $X = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ se Zariského topologií $\mathcal{T}_X$. Ukažte, že topologický prostor $(X, \mathcal{T}_X)$ není Hausdorffův topologický prostor.

3. přednáška.

V kapitole o topologii si na začátku přednášky přidáme ještě několik doplňků.

2.7 Kompaktnost.

Definice 2.16 *NechŤ I je libovolná množina (konečná nebo nekonečná). Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ je topologický prostor a $Z \subset X$ je jeho podmnožina. Řekneme, že systém množin $\{U_i\}_{i\in I}$ je* **pokrytí** *Z, pokud $X \subset \cup_{i\in I} U_i$.*

Řekneme, že systém množin $\{U_i\}_{i\in I}$ je **otevřené pokrytí** *Z, pokud jsou navíc všechny množiny U_i otevřené podmnožiny Z.*

Řekneme, že Z je **kompaktní**, *pokud z libovolného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.*

Pokud $Z = X$ je kompaktní, řekneme, že X je **kompaktní topologický prostor.**

Uzavřené podmnožiny kompaktního prostoru jsou kompaktní.

Lemma 2.17 *Je-li $(X, \mathcal{T}_X)$ kompaktní topologický prostor a je-li $Z \subset X$ jeho uzavřená podmnožina, pak je Z kompaktní.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{U_i\}_{i\in I}$ je otevřené pokrytí množiny Z. Množina $U = X \setminus Z$ je otevřená, a tak $\{U_i\}_{i\in I}$ spolu s množinou U je zřejmě otevřené pokrytí X. Existuje tedy konečná množina $J \subset I$ s vlastností, že $\{U_i\}_{i\in J}$ spolu s U je (konečné) pokrytí X. A tedy $\{U_i\}_{i\in J}$ je konečné pokrytí Z. $\square$

Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní.

Lemma 2.18 *Je-li $(X, \mathcal{T}_X)$ kompaktní topologický prostor a je-li $f : X \to Y$ spojité zobrazení, pak je $f(X)$ kompaktní.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{U_i\}_{i\in I}$ je otevřené pokrytí množiny $f(X)$. Ze spojitosti f plyne, že $\{f^*(U_i)\}_{i\in I}$ je otevřené pokrytí množiny X. Existuje tedy konečné podpokrytí $\{f^*(U_i)\}_{i\in J}$ množiny X, protože X je kompaktní. Pro všechna $i \in I$ platí zřejmě $f(f^*(U_i) \subset U_i)$, tedy

$$f(X) \subset \cup_{i\in J} f(f^*(U_i)) \subset \cup_{i\in J} U_i.$$

$\square$

Lemma 2.19 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ je Hausdorffův topologický prostor. Pak je každá kompaktní podmnožina $Z \subset X$ uzavřená.*

Důkaz. Ukážeme, že je množina $X \setminus Z$ otevřená tak, že pro každý bod $x \in X \setminus Z$ sesetrojíme otevřenou množinu V, pro kterou je $x \in V \subset X \setminus Z$.

Zvolme pevně bod $x \in X \setminus Z$. Pro každý bod $z \in Z$ existují dvě disjunktní otevřené množiny V_z a U_z takové, že x patří do V_z a z patří do U_z. Systém $\{U_z\}_{z\in Z}$ je otevřené pokrytí množiny Z, tedy existuje konečné podpokrytí $\{U_{z_i}\}_{i=1}^k$. Množina

$$V = \cap_{i=1}^k V_{z_i}$$

je otevřená a podle definice obsahuje bod x, a přitom má prázdný průnik s množinou Z. Vskutku, pokud by množina $V \cap Z$ byla neprázdná a z_0 byl její bod, pak existuje index $i \in \{1, \ldots, n\}$ pro který $z_0 \in U_{z_i}$, tedy $z_0 \notin V_{z_i}$, a tedy $z_0 \notin V$, což je spor.

$\square$

2.8 Konvergence

Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ je topologický prostor. Konvergence posloupnosti bodů v X se definuje následujícím způsobem.

Definice 2.20 *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost bodů v X. Řekneme, že* **posloupnost a_n konverguje k bodu $x \in X$,** *pokud*

$$\forall U \in \mathcal{T}_X, x \in U\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N \; (a_n \in U).$$

Pokud toto platí, budeme psát, že $a_n \to x$.

Pokud je topologie $\mathcal{T}_X$ indukována metrikou d na X, pak $a_n \to x$ v topologickém prostoru $(X, \mathcal{T}_X)$ právě když $a_n \to x$ v metrickém prostoru (X, d).

Konvergence se nechová dobře v obecných topologických prostorech.

Příklady.

(1) Pokud má X triviální topologii, pak každá posloupnost konverguje ke každému bodu v X!

(2) Pokud má X diskrétní topologii, $\{a_n\}$ je posloupnost bodů v X a $x \in X$, pak $a_n \to x$ právě když existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > N$ platí $a_n = x$.

(3) Situace je mnohem lepší v Hausdorffových topologických prostorech, kde každá posloupnost bodů má nejvýše jednu limitu.

Lemma 2.21 *Nechť $(X, \mathcal{T}_X)$ je Hausdorffův topologický prostor. Pokud je $\{a_n\}$ posloupnost v X, $x, y \in X$, a platí současně $a_n \to x$, $a_n \to y$, pak $x = y$.*

Důkaz. Je stejný jako v metrických prostorech. Předpokládejme sporem, že $x \neq y$. Pak existují disjunktní otevřené množiny U, V takové, že $x \in U, y \in V$.

Protože $a_n \to x$, existuje $N_1 \in \mathbb{N}$ s vlastností $a_n \in U$ pro $n > N_1$.

Protože $a_n \to y$, existuje $N_2 \in \mathbb{N}$ s vlastností $a_n \in V$ pro $n > N_2$.

Tedy pro $n > N_1, n > N_2$ platí $a_n \in U \cap V$, což je spor. $\square$

Některé vlastnosti známé v případě metrických prostorů se zachovají i v obecných topologických prostorech.

Lemma 2.22
(i) Pokud je $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů a $a_n \to x$ v X, pak $f(a_n) \to f(x)$ v Y.
(ii) Nechť $Z \subset X$ je podmnožina topologického prsotru X s indukovanou topologií. Pokud je $\{a_n\}$ posloupnost v Z a $a_n \to x, x \in X$, pak $x \in \overline{Z}$.

Důkaz lemmatu je drobné cvičení.

Kapitola 3

Variety - definice, příklady

Již v první přednášce jsme si definovali (a ukázali příklady) základních pojmů potřebných pro definici (hladké) variety. Víme už, co je mapa dimenze n na množině M, kdy jsou dvě mapy kompatibilní a co je to atlas na množině M (Def.1.2).

Definice 3.1 *[**Topologie na množině s daným atlasem**.] Nechť $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ je atlas na množině M. Pak je topologie $\mathcal{T}_M$ definována takto:*

Množina $V \subset M$ je otevřená množina, pokud je pro každé $\alpha \in A$ množina $\varphi_\alpha(V \cap U_\alpha)$ otevřená podmnožina množiny $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. Tuto topologii $\mathcal{T}_M$ nazveme **topologie na** M **indukovaná atlasem**.

Tato definice zároveň obsahuje tvrzení (že takto definovaný systém množin splňuje axiómy pro topologii), jehož platnost je třeba ověřit.

Lemma 3.2 *Nechť M je množina s daným atlasem a $\mathcal{T}_M$ je systém množin definovaný v Lemmatu 3.1.*

Pak $\mathcal{T}_M$ je topologie na M.

Důkaz.

(O1) Tento požadavek je splněn triviálně.

(O2) Jsou-li $V_i, i = 1, \ldots, n$ množiny ze systému $\mathcal{T}_M$, pak pro každé $\alpha \in A$ je množina

$$\varphi_\alpha((\cap_1^n V_i) \cap U_\alpha) = \cap_1^n \varphi_\alpha(V_i \cap U_\alpha)$$

otevřená v množině $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

(O3) Podobně, jsou-li $V_\beta, \beta \in B$ množiny ze systému $\mathcal{T}_M$, pak pro každé $\alpha \in A$ je množina

$$\varphi_\alpha((\cup_\beta V_\beta) \cap U_\alpha) = \cup_{\beta \in B} \varphi_\alpha(V_\beta \cap U_\alpha)$$

otevřená v množině $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

□

Poznámka 3.3 *Přechodové zobrazení je definováno předpisem $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Je ihned vidět, že přechodová zobrazení splňují tzv. kocyklové pravidlo:*

Pro tři mapy s indexy α, β, γ platí na průniku $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$ (triviálně i na prázdném)

$$\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}. \tag{3.1}$$

Navíc zřejmě $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}$. Z těchto dvou podmínek pak plyne také, že $\psi_{\alpha\beta} = (\psi_{\beta\alpha})^{-1}$. Přechodové funkce splňující tyto podmínky mohou být použity pro rekonstrukci základní množiny a atlasu na ní pomocí 'lepení', tj. pomocí vhodné ekvivalence definované pomocí přechodových funkcí. Základní množina je pak množina tříd této ekvivalence.

Poznámka 3.4 *V dalším budeme pracovat jen s hladkými varietami (tj. s takovými, jejichž přechodové funkce jsou třídy $\mathcal{C}^\infty$) a budeme je stručně nazývat variety, stejně jako hladké atlasy budeme stručně nazývat jen atlasy. Po zavedení topologie na varietě pomocí atlasu si ukážeme později, že všechna zobrazení φ_α map daného atlasu jsou homeomorfismy $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Velmi často se však zadává diferencovatelná struktura na množině, která má již předem zadanou topologii. V tom případě se vyžaduje, aby topologie, definovaná pomocí daného atlasu, splývala s původní topologií. To je ekvivalentní s podmínkou, že všechna zobrazení φ_α map atlasu jsou nejen vzájemně jednoznačná, ale že to jsou homeomorfismy.*

Definice 3.5 *Řekneme, že mapa (U, φ) je* **kompatibilní s atlasem** $\mathcal{A}$ *na varietě M, pokud $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ je také atlas na M, tj. pokud (U, φ) je kompatibilní se všemi mapami atlasu $\mathcal{A}$.*

Řekneme, že atlas $\mathcal{A}$ je **úplný (maximální)**, *pokud je to atlas, který je* **maximální**, *tj. není obsažen v žádném striktně větším atlase. To tedy znamená, že každá mapa kompatibilní se všemi mapami atlasu $\mathcal{A}$ je už v něm obsažena.*

Tomuto maximálnímu atlasu se také říká **diferencovatelná struktura** *na množině M.*

Poznámka 3.6 *Buď M varieta s atlasem $\mathcal{A}$. Na první pohled není jasné, jestli každý atlas lze rozšířit na maximální atlas. Podstatní ale je si uvědomit, že platí*

Tvrzení. *Pokud jsou mapy $\{(U, \varphi)\}, \{(U', \varphi')\}$ kompatibilní s atlasem $\mathcal{A}$, pak je mapa $\{(U', \varphi')\}$ kompatibilní s mapou $(U, \varphi)\}$, a $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\} \cup \{(U', \varphi')\}$ je atlas.*

Z toho ihned plyne, že pak $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\} \cup \{(U', \varphi')\}$ je atlas; že můžeme tedy k atlasu $\mathcal{A}$ přidat všechny s ním kompatibilní mapy a dostaneme hledaný maximální atlas.

Návod k důkazu tvrzení. *Stačí ukázat, že $\{(U, \varphi)\}$ a $\{(U', \varphi')\}$ jsou kompatibilní. Množina $\varphi(U \cap U')$ je otevřená, neboť se s použitím předpokladů dá napsat jako sjednocení otevřených množin. Totéž platí pro $\varphi'(U \cap U')$. Odpovídající přechodové zobrazení je zřejmě prosté a na, jeho hladkost se opět v každém bodě dostane z hladkosti ostatních přechodových funkcí pomocí kocyklového pravidla (3.1). K podrobnostem se vrátíme na příští přednášce.* □

Hladkou varietou budeme definovat jako množinu s daným maximálním atlasem (s danou diferencovatelnou strukturou), ale ve všech konkrétních případech budeme tuto diferenciální strukturu zadávat volbou nějakého (ne nutně maximálního) atlasu, neboť si vždy můžeme daný atlas obohatit všemi kompatibilními mapami. Navíc budeme požadovat, aby topologie indukovaná zvoleným atlasem splňovala dvě dodatečné podmínky.

Definice 3.7 (Varieta.) *(Hladká) varieta dimenze n je množina M, na které je dán atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ n-dimenzionálních map takový, že:*

1) M je Hausdorffův topologický prostor,

2) M má spočetnou bázi otevřených množin.

Varietu danou množinou M s atlasem $\mathcal{A}$ budeme považovat za totožnou s varietou danou množinou M s atlasem $\mathcal{A}'$, pokud oba atlasy určují stejný maximální atlas. To nastane právě tehdy, když sjednocení $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ je atlas na M.

Cvičení ke 3. přednášce.

Příklad 1. Množina $M = \mathbb{R}^n$ a otevřená množina $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou nejjednodušší variety dimenze n, jejich standardní atlas se skládá z jediné mapy s definičním oborem M a identického zobrazení $\varphi = \mathrm{Id}_M$. K diskusi o požadovaných vlastnostech topologie se vrátíme v příštím cvičení.

Příklad 2. Je-li M varieta, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ atlas na M a M' otevřená podmnožina M, pak je zřejmě systém

$$\{(U'_\alpha = U_\alpha \cap M', \varphi_\alpha|_{U'_\alpha}); \alpha \in A\}$$

atlas na M' a tento atlas definuje na M' standardní diferencovatelnou strukturu indukovanou diferencovatelnou strukturou na M. Topologie na M' je indukovaná topologií na M, tedy topologické podmínky jsou splněny a M' je varieta.

Příklad 3.

Nechť M je varieta s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ a nechť $F : N \to M$ je vzájemně jednoznačné zobrazení.

Potom je možné přenést strukturu variety pomocí zobrazení F z množiny M na množinu N takto.

Pro každé $\alpha \in A$ definujeme mapu (V_α, ψ_α) na množině N předpisem

$$V_\alpha = F^{-1}(U_\alpha);\ \psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ F.$$

a tím definuji strukturu variety na množině N.

Intuitivně vzato, není to vlastně nový příklad variety, protože si mohu představit, že pomocí zobrazení F ztotožním množiny M a N a budu mít dvě totožné variety. Pomocí zobrazení F^* mohu pak ztotožnit také odpovídající topologie na M a M'.

Příklad 4. Nechť $k \leq n$. Nechť M je parametrická plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$, tj. předpokládáme, že existuje otevřená podmnožina $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\psi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n, \psi(\mathcal{O}) = M$. To znamená, že ψ je homeomorfismus množiny $\mathcal{O}$ na M a Jacobiho matice

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}, i = 1, \dots n; j = 1, \dots, k$$

všech parciálních derivací má hodnost k ve všech bodech $\mathcal{O}$.

Pak podle předchozího příkladu existuje na M struktura variety dimenze k zadaná jedinou mapou (U, φ), kde $U = \psi(\mathcal{O})$ a $\varphi = \psi^{-1}$.

Příklad 5. Nechť $k \leq n$. Nechť M je plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$. To znamená že pro každý bod $x \in M$ existuje otevřená množina $V_x \subset \mathbb{R}^n, x \in V_x$, otevřená množina $\mathcal{O}_x \subset \mathbb{R}^k$, a regulární homeomorfismus $\psi_x : \mathcal{O}_x \to V_x \cap M$.

Plocha M je podprostor metrického prostoru, tedy je sama metrický prostor a je na ní definovaná metrická topologie. Sestrojte atlas na ploše M tak, aby mapy byly tvořeny homeomorfismy.

Řešení.

Atlas $(U_x, \varphi_x), x \in M$ definujeme takto: $U_x = V_x \cap M, \varphi_x = (\psi_x)^{-1}$. Je potřeba ukázat, že mapy atlasu jsou po dvou kompatibilní. Nechť tedy $x, y \in M$ jsou dva různé body, pro které $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Restrikce ψ_x na $(\psi_x)^{-1}(U_x \cap U_y)$ a restrikce ψ_y na $(\psi_y)^{-1}(U_x \cap U_y)$ jsou dvě parametrizace množiny $U_x \cap U_y$. Pak je ale přechodové zobrazení $\psi_x \circ (\psi_y)^{-1}$ difeomorfismus. Důkaz tohoto tvrzení je možné najít v textu Geometrie 2, Lemma 3.7.

Příklad 6. Sestrojte atlas na jednotkové sféře $M = S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_i x_i^2 = 1\}$ pomocí věty o implicitním (resp. inverzním) zobrazení.

Řešení.

V přednášce Geometrie 2 byla dokázána následující věta (Věta 3.5, str. 25).

Věta 1. Nechť $: U \to \mathbb{R}^n$ je hladké zobrazení definované na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}^{k+n}$ a $c \in \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že pro každý bod $a, F(a) = c$ má Jacobiho matice $JF(a)$ hodnost n. Pak množina

$$M = \{x \in U | F(x = c)\}$$

je plocha dimenze k.

Pro jistotu si připomeneme i její důkaz.

Důkaz. Zvolme nějaký bod $a \in \mathbb{R}^{k+n}$ pro který $F(a) = c$. Podle předpokladů existuje $n \times n$ minor Jacobiho matice $\{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\}$ s nenulovým determinantem. Po vhodném přečíslování souřadnic $x_1, \ldots, x_{k+n}$ můžeme předpokládat, že je čtvercová matice

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \, 1 \leq i, j \leq n$$

invertibilní.

Nyní definujeme zobrazení $G : U \to \mathbb{R}^{k+n}$ předpisem

$$G(x_1, \ldots, x_{k+n}) := (F_1, \ldots, F_n, x_{n+1}, \ldots, x_{k+n}).$$

Jacobiho matice G v bodě a je invertibilní a tak podle věty o inverzním zobrazení existuje okolí $U' \subset U$ bodu a, na kterém je G difeomorfismus. Označme

$$\mathbb{R}^k := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} | x = (c_1, \ldots, c_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})\}$$

a definujme zobrazení φ předpisem $\varphi := G^{-1}|_{\mathbb{R}^k}$. Je zřejmé, že obraz $\varphi(\mathbb{R}^k \cap G(U'))$ je $M \cap U'$ a φ je regulární parametrizace plochy $U \cap M$ dimenze k, protože parciální derivace

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+i}} = \frac{\partial G^{-1}}{\partial x_{n+i}}, i = 1, \ldots, k$$

jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. $\square$

V případě sféry si stačí uvědomit, že funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ má gradient $\nabla f(x) = 2(x_1, \ldots, x_n)$ a že je tedy podle Věty 1 sféra plocha dimenze $n - 1$. Tedy jsme sestrojili podle Příkladu 5 standardní atlas na sféře.

Příklad 7.

Mezi velmi užitečné příklady variet patří Lieovy grupy. Podle definice jsou to grupy, které jsou zároveň variety (a pro které jsou grupové operace hladké zobrazení, k tomu se vrátíme později).

Ukažte, že mezi Lieovy grupy patří grupy $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$.

Řešení. V minulém semestru jsme dokázali, že tyto množiny jsou plochy odpovídající dimenze ve vhodném Eukleidovském prostoru, stačí tedy použít Větu 1 z předchozího příkladu a Příklad 5. Pro připomenutí si probereme také důvod, proč je v každém jednotlivém případě přílsušná Lieova grupa plocha odpovídající dimenze.

(a) $M = GL(n, \mathbb{R})$. Prvek $A \in GL(n, \mathbb{R})$ je $n \times n$ matice splňující nerovnost $\det A \neq 0$. Množina všech $n \times n$ matice je isomorfní s $\mathbb{R}^{n^2}$ a funkce $\det A$ spojitá na této množině spojitá, tedy množina $\{A | \det A = 0\}$ je uzavřená a její doplněk je množina otevřená. Na M tedy můžeme zvolit standardní atlas (M, Id_M).

Pro ostatní případy použijeme postupně Větu 1 z předchozího příkladu.

(b) $SL(n, \mathbb{R})$.

Funkce det je definována na prostoru $M_n(\mathbb{R})$ všech $n \times n$ reálných matic její Jakobi Stačí dokázat, že Jacobiho matice $J \det(A) \in \mathbb{R}^{n^2}$ je netriviální vektor pro všechny matice $A \in SL(n, \mathbb{R})$ a použít Větu 1.

Determinant je (nelineární) funkce n^2 proměnných a jeho Jacobiho matice je vektor v $M_n(\mathbb{R})$, jehož ij-tá složka má tvar

$$(J \det)_{ij}(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(A + tX_{ij}),$$

kde X_{ij} je matice s jedničkou na místě ij a s nulami jinde. Rozvineme-li determinant uvnitř tohoto výrazu podle j-tého sloupce, dostaneme

$$(J \det)_{ij}(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\det(A) + t \det \tilde{A}_{ij}) = \det \tilde{A}_{ij},$$

kde $\tilde{A}_{ij}$ je submatice vzniklá vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce z matice A. Jelikož však $\det A = 1$, existuje index ij takový, že submatice $\tilde{A}_{ij}$ má nenulový determinant, tedy alespoň jedna složka vektoru $J\det$ je nenulová, a tedy tento vektor je netriviální.

(c) $M = O(n, \mathbb{R})$, $SO(n\mathbb{R})$.

Řešení. Uvažujme nejdříve případ $M = O(n, \mathbb{R})$. Ztotožněme prostor všech symetrických matic $n \times n$

$$Sym_n\mathbb{R} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^t = A\}$$

s prostorem $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$. Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned} F : M_n\mathbb{R} &\longrightarrow Sym_n\mathbb{R} \\ A &\mapsto A^tA. \end{aligned}$$

Nejdříve ukážeme, že Jacobiho matice$JF(A)$ representuje surjektivní lineární zobrazení

$$\begin{aligned} JF : \mathbb{R}^{n^2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} \\ X &\mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(A + tX). \end{aligned}$$

pro všechny $A \in O_n\mathbb{R}$. potom podle Věty 1 je množina $M = F^{-1}(Id)$ plocha dimenze $n^2 - \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2}$.

Diferenciál zobrazení F je lineární zobrazení

$$\begin{aligned} JF : \mathbb{R}^{n^2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} \\ X &\mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(A + tX). \end{aligned}$$

Stačí a je třeba dokázat, že pro $A \in O_n\mathbb{R}$ je JF zobrazení na $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} \simeq Sym_n\mathbb{R}$. Vyjádřeme tedy

$$\begin{aligned} JF(X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(A + tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A + tX)^t(A + tX) = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A^tA \ + A^ttX + tX^tA \ + t^2X^tX) = A^tX + X^tA. \end{aligned}$$

Je tedy třeba dokázat, že pro každou matici $A \in O_n\mathbb{R}$ a každou matici $B \in Sym_n\mathbb{R}$ existuje matice X taková, že

$$B = A^tX + X^tA.$$

Jelikož je matice B symetrická, lze psát $B = C + C^t$, kde koeficienty matice C jsou dány pomocí koeficientů matice B takto:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= b_{ij}, \quad && i < j \\ c_{ij} &= \frac{1}{2}b_{ij}, && i = j \\ c_{ij} &= 0, && i > j. \end{aligned}$$

Potom $A^tX = C$ právě tehdy když $X^tA \ = C^t$, matice X je tedy dána rovnicí $A^tX = C$. Jelikož A je regulární matice, má tato soustava právě jedno řešení $X = (A^t)^{-1}C$. Zobrazení JF je tedy surjektivní, tzn. má maximální hodnost.

Množina $SO_n\mathbb{R}$ je podmnožina plochy $M = F^{-1}(Id)$. Pro každou matici $A \in O_n\mathbb{R}$ platí $\det A = \pm 1$. Ovšem determinant je spojitá funkce, Lieova grupa $O_n\mathbb{R}$ má tedy dvě komponenty dané hodnotami ± 1 tohoto determinantu. Každá z komponent souvislosti je však otevřená podmnožina plochy M, a tedy je to plocha stejné dimenze.

Příklad 8.

Nechť $M = \mathbb{R}$ a mapa dimenze 1 na M je definována předpisem $\varphi(x) = x^3$. Ukažte, že diferencovatelná struktura definovaná na M tímto atlasem je různá od standardní diferencovatelné struktury na $\mathbb{R}$.

Řešení. Standardní diferencovatelná struktura na $\mathbb{R}$ je definovaná atlasem $(M, \varphi' = \mathrm{Id}_M)$ a přechodová funkce mezi těmito dvěma atlasy není difeomorfismus, protože inversní funkce φ^{-1} není hladká.

Příklad 9.

Nechť M je množina s atlasem $\mathcal{A}$. Předpokládejme, že (U, φ) a (V, ψ) jsou další dvě mapy na M, pro které platí, že $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ i $\mathcal{A} \cup \{(V, \psi)\}$ je také atlas.

Pak jsou mapy $\{(U, \varphi)\}$ a $\{(V, \psi)\}$ kompatibilní.

Řešení. K řešení tohoto příkladu se vrátíme na příští přednášce.

Příklad 9. Rozmyslete si, že dva atlasy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$ na množině M určují stejný maximální atlas právě když jejich sjednocení $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ je atlas.

4. přednáška.

Ještě se na úvod vrátíme k definici variety a přidáme několik poznámek. Nejdřív přidáme komentář k definici topologie indukované zvoleným atlasem na množině M.

Připomňme si definici. Nechť $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ je atlas na množině M. Pak jsme definovali topologii $\mathcal{T}_M$ předpisem

$$\mathcal{T}_M := \{V \subset M | \forall\alpha \in A, \varphi_\alpha(V \cap U_\alpha) \,\text{je otevřená podmnožina v}\, \mathbb{R}^n\}.$$

Tutéž topologii je možné popsat také jiným způsobem. Idea vedoucí k této jiné, ekvivalentní definici je najít vhodnou bazi topologie $\mathcal{T}_M$.

Definujme systém podmnožin

$$\mathcal{S}_\alpha := \{V \subset U_\alpha |\, \varphi_\alpha(V) \,\text{je otevřená v}\, \mathbb{R}^n\};\ \mathcal{S} = \cup_{\alpha\in A}\mathcal{S}_\alpha. \tag{3.2}$$

Tento systém zřejmě pokrývá množinu M, a tedy (podle Lemmatu 2.10) generuje topologii $\mathcal{T}'_M$. Otevřené množiny této topologie jsou libovolná sjednocení konečných průniků množin ze systému $\mathcal{S}$.

Ukážeme si teď, že systém $\mathcal{S}$ je uzavřený na konečné průniky, a že tedy $\mathcal{S}$ je baze této nové topologie $\mathcal{T}'_M$. A potom si rozmyslíme, že $\mathcal{T}'_M = \mathcal{T}_M$, tedy $\mathcal{S}$ je také baze topologie $\mathcal{T}_M$. Nakonec tedy platí, že se otevřené množiny v topologii $\mathcal{T}_M$ dají charakterizovat jako libovolná sjednocení podmnožin tvaru $V \subset U_\alpha$, pro které je obraz $\varphi_\alpha(V)$ otevřený v $\mathbb{R}^n$.

Lemma 3.8 *(a) Průnik libovolných dvou množin z $\mathcal{S}$ patří do $\mathcal{S}$.*
(b) $\mathcal{T}'_M = \mathcal{T}_M$.
(c) Pro každé $\alpha \in A$ je $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ homeomorfismus.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že pro množiny $V \subset U_\alpha$ a $W \subset U_\beta$ platí, že $\varphi_\alpha(V)$ a $\varphi_\beta(W)$ jsou otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$.

Chceme ukázat, že průnik $V \cap W$ patří také do systému $\mathcal{S}$. Pro to například stačí ukázat, že množina

$$\varphi_\alpha(V \cap W) = \varphi_\alpha(V \cap [W \cap U_\alpha \cap U_\beta]) = \varphi_\alpha(V) \cap (\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1})(\varphi_\beta(W) \cap \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))$$

je otevřená podmnožina $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Ale to plyne z toho, že přechodové zobrazení je difeomorfismus a množina $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ je otevřená.

(b) Do systému $\mathcal{S}$ patří všechny množiny $U_\alpha, \alpha \in A$. Je-li $V \in \mathcal{S}$, pak z bodu a) plyne, že $V \cap U_\alpha \in \mathcal{S}$ pro všechna $\alpha \in A$, a tedy $V \in \mathcal{T}_M$. Z toho plyne, že $\mathcal{T}'_M \subset \mathcal{T}_M$.

Naopak, pokud $V \in \mathcal{T}_M$, pak $V \cap U_\alpha \in \mathcal{S}$ pro každé $\alpha \in A$, a tedy $V = \cup_\alpha(V \cap U_\alpha) \in \mathcal{T}'_M$.

□

Vrátíme se teď ještě nazpátek k Tvrzení za Def.3.5. a přidáme si podrobnosti k následující implikaci. Pokud jsou obě mapy (U, φ) a (V, ψ) kompatibilní s atlasem $\mathcal{A}$, pak jsou tyto mapy kompatibilní mezi sebou.

Musíme ověřit dvě tvrzení.

(a) $\varphi(U \cap V)$ a $\psi(U \cap V)$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$.

Stačí to ověřit pro $\varphi(U \cap V)$. Označme $\mathcal{S}_\varphi := \{W \subset U | \varphi(W) \,\text{je otevřená}\, v\ \mathbb{R}^n\}$. Ukážeme, že pro každé $x \in U \cap V$ existuje $W_x \in \mathcal{S}_\varphi, x \in W_x \subset U \cap V$. Z toho pak plyne, že

$$\varphi(U \cap V) = \varphi(\cup_{x\in U\cap V} W_x) = \cup_{x\in U\cap V}\varphi(W_x)$$

je také otevřená v $\mathbb{R}^n$.

Nechť $x \in U \cap V$. Pak existuje α takové, že $x \in U_\alpha$. Protože $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ je atlas, platí $U \cap U_\alpha \in \mathcal{S}_\varphi$. Protože $\mathcal{A} \cup \{(V, \psi)\}$ je atlas, je $\psi(V \cap U_\alpha)$ otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi(V \cap U_\alpha) = [\varphi \circ \psi^{-1}](\psi(U \cap U_\alpha))$ také.

Stačí tedy zvolit $W_x = U \cap V \cap U_\alpha$.

(b) Přechodové zobrazení $\psi \circ (\varphi)^{-1}$ je hladké. Nechť $x \in U \cap V, u = \varphi(x)$. Existuje $\alpha \in A, x \in U_\alpha$ a tedy $\psi \circ (\varphi)^{-1} = (\psi \circ (\varphi_\alpha)^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ (\varphi)^{-1})$ je hladká v bodě u.

3.1 Orientace na varietě.

Definice 3.9 *Řekneme, že dvě mapy* $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, *na* M *jsou* **souhlasně orientovány**, *pokud determinant Jacobiho matice jejich přechodového zobrazení je kladný na příslušném definičním oboru.*

Orientovaná varieta *je varieta, na níž je dán atlas, jehož každé dvě mapy jsou souhlasně orientovány. Tento atlas lze opět vždy rozšířit na maximální atlas s touto vlastností.*

Varieta M *se nazývá* **orientovatelná**, *pokud na ní existuje atlas, se kterým je varieta orientovaná. V opačném případě se* M *nazývá* **neorientovatelná varieta**.

Příkladem neorientovatelné variety je tzv. Möbiova páska. Jeho model si můžete vyrobit sami z proužku papíru, přetočíte-li konce proužku vzájemně o 180^o a slepíte je.

3.2 Variety s krajem

Pro účely Stokesovy věty rozšíříme uvedenou základní definici tak, aby variety mohly mít hranici, neboli kraj.

Definice 3.10 *Definujme* **poloprostor** H^n *takto:*

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}.$$

Hranice ∂H^n *je tvořena všemi body se souřadnicí* x_1 *rovnou nule.* **Topologie v** H^n *je dána jako restrikce topologie* $\mathbb{R}^n$, *tj. množina* $U \subset H^n$ *je otevřená, jestliže* $U = V \cap H^n$ *pro nějakou otevřenou množinu* V *v* $\mathbb{R}^n$. *Řekneme, že funkce* f *definovaná na libovolné množině* $A \subset H^n$ *je* **hladká**, *pokud existuje otevřená množina* $U \subset \mathbb{R}^n, A \subset U$ *a hladká funkce* $\overline{f}$ *na* U *taková, že* $\overline{f}|_A = f$. **Zobrazení** F *z* A *do* $\mathbb{R}^n$ *je* **hladké,** *pokud jsou všechny jeho složky hladké funkce na* A. **Derivace** f *v libovolném bodě* H^n *jsou definovány jako derivace příslušného rozšíření* $\overline{f}$. *Všimněte si, že tato derivace nezávisí na volbě rozšíření, neboť z existence derivace plyne, že je už jednoznačně určena pomocí hodnot funkce* f *na* H^n.

Jsou-li $U, U' \subset H^n$ *otevřené, pak* $f : U \to U'$ *je* **difeomorfismus** U *na* U', *pokud* f *je prosté zobrazení* U *na* U' *a zobrazení* f *i* f^{-1} *jsou hladké na svých definičních oborech.*

V následujících definicích zobecníme pojmy užívané v definici variety ale ponecháme jim jejich jména. Například 'n-dimenzionální mapa pro varietu s krajem' se bude jmenovat jen 'n-dimenzionální mapa', a podobně pro atlas, nebo diferencovatelnou strukturu.

Definice 3.11 *Nechť* M *je množina. Pak* n**-dimenzionální mapa** *na* M *je dvojice* (U, φ) *kde* $U \subset M$ *a* $\varphi : U \to H^n$ *je prosté zobrazení na otevřenou podmnožinu v* H^n.

Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ *dvě mapy, pak se zobrazení* $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *definované na* $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *nazývá* **přechodové zobrazení** *mezi těmito mapami.*

Řekneme, že dvě mapy jsou **kompatibilní**, *pokud* $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *a* $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *jsou otevřené v* H^n *a přechodová funkce je difeomeorfismus.*

(Hladký) atlas *na* M *je množina map* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *takových, že každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní a že* $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. *Je-li dán atlas na* M, *pak opět definujeme* **topologii na** M *takto: množina* $A \subset M$ *je otevřená, pokud pro každou mapu* (U, φ) *z daného atlasu platí, že* $\varphi(A \cap U)$ *je otevřená podmnožina* H^n. **Maximální atlas** *(ve smyslu inkluze) nazveme* **diferencovatelná struktura** *na* M.

(Hladká) varieta dimenze n **s krajem** *je množina* M, *na které je definován atlas* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ n*-dimenzionálních map (a tedy i diferencovatelná struktura) pro který:*

1) M *je Hausdorffův topologický prostor,*

2) M *má spočetnou bazi otevřených množin.*

Řekneme, že bod $m \in M$ *je* **bod kraje (hranice)** M, *pokud pro nějakou mapu* (U, φ) *platí, že* $\varphi(m) \in \partial H^n$. *Množinu všech bodů kraje (hranice)*M *označíme* ∂M *a nazveme* **krajem (hranicí)** M.

Všimněte si, že varieta bez kraje (tj. varieta s krajem, pro kterou $\partial M = \emptyset$) je totéž jako varieta definovaná v Def. 3.7.

Lemma 3.12 *Definice bodu kraje M nezávisí na volbě mapy.*

Důkaz. Podle předpokladu je přechodová funkce $\psi = \varphi \circ (\varphi')^{-1}$ mezi dvěmi mapami obsahujícími bod $x \in M$ difeomorfismus otevřených podmnožin $\varphi(U \cap U')$ a $\varphi'(U \cap U')$ v H^n. Nechť $x \in U \cap U'$ takový, že $\varphi(x) \in \partial H^n$. Pokud by bod $\varphi'(x)$ patřil do vnitřku H^n, existovalo by jeho okolí V v $\mathbb{R}^n$, které by bylo částí $\varphi'(U \cap U')$ a $\psi(\varphi'(x))$ patřilo do množiny $\psi(V)$, která by byla otevřená v $\mathbb{R}^n$ a byla podmnožinou $\varphi(U \cap U') \subset H^n$. To je ale spor s $\varphi(x) \in \partial H^n$. Tedy platí také, že $\varphi'(x) \in \partial H^n$. $\square$

Věta 3.13 *Nechť M je varieta dimenze n s krajem. Pak definujeme na hranici ∂M indukovanou strukturu variety dimenze $n-1$ pomocí následujícího atlasu:*

Nechť $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ je atlas pro varietu M, pak $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}_{\alpha \in A}$ je atlas na ∂M, který definuje zmíněnou kanonickou strukturu na ∂M.

Je-li navíc M orientovaná varieta a $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ její orientovaný atlas, pak restrikce tohoto atlasu na ∂M má vlastnost, že jeho každé dvě mapy jsou souhlasně orientované a tedy zadává (kanonickou) indukovanou orientaci na ∂M.

Důkaz: Nechť $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ je atlas na M. Hranici ∂H^n lze ztotožnit s $\mathbb{R}^{n-1}$. Pak

$$\{(U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M, \varphi' = \varphi_\alpha|_{U'_\alpha})|\alpha \in A\}$$

je zřejmě $(n-1)$-dimenzionální atlas na ∂M a definuje tedy na ∂M diferencovatelnou strukturu dimenze $n-1$. Pokud bychom uvažovali na M jiný kompatibilní atlas, pak je zřejmě jeho restrikce na ∂M kompatibilní s restrikcí předchozího atlasu a určují tedy oba tutéž diferencovatelnou strukturu na ∂M.

Předpokládejme dále, že zmíněný atlas je orientovaný. Potřebujeme dokázat, že kanonický atlas na ∂M je také orientovaný. Pro to stačí dokázat následující tvrzení.

Lemma 3.14 *Nechť $\psi : U \to U'$ je difeomorfismus otevřených množin v H^n takový, že ve všech bodech U je $\det(\mathrm{Jac}\,\psi)$ kladný. Nechť $\psi' := \psi|_{U \cap \partial H^n}$. Pak $\det(\mathrm{Jac}\,\psi')$ je kladný na $U \cap \partial H^n$.*

Důkaz. Nechť $a \in \partial H^n$, $\psi(a) \in \partial H^n$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ označíme $x = (x_1, x')$; $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Protože $\psi_1(0, x') = 0$ pro všechny x v okolí bodu $a = (0, a')$, dostaneme $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = 2, \dots, n$. Navíc $\psi_1(0, a') = 0$ a $\psi_1(t, a') < 0$ pro $t < 0$. Tedy $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(a) \geq 0$. Z toho ihned plyne (rozvojem podle prvního řádku Jacobiho matice), že

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(a) > 0; \quad \det(\mathrm{Jac}\,\psi')(a) > 0.$$

$\square$

V dalším textu budeme varietou myslet varietu s krajem, nebude-li řečeno jinak, a všechny definice budou míněny pro tento obecnější případ. Všechny pojmy, ač budou vykládány na intuitivní představě variet bez kraje, jsou nastaveny tak, aby měly smysl i pro variety s krajem.

Cvičení ke 4. přednášce.

Příklad 1. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina se standardním atlasem (U, Id_U). Pak U je Hausdorffův topologický prostor, který má spočetnou bazi otevřených množin.

Řešení. U je metrický, a tedy Hausdorffův topologický prostor. Spočetná baze je tvořena například systém otevřených koulí (nebo krychlí), pro které všechny komponenty středů i poloměr jsou racionální čísla a které jsou podmnožiny U.

Příklad 2. Nechť $(M, \mathcal{A}))$ je varieta se spočetným atlasem. Ukažte, že M má spočetnou bazi otevřených množin.

Řešení. Pro každé $\alpha \in A$ existuje spočetná baze otevřených množin v U_α. Je zřejmé, že pak sjednocení těchto bazí pro všechna $\alpha \in A$ je spočetná baze $\mathcal{T}_M$.

Příklad 3. Nechť Nechť $(M, \mathcal{A}))$ je varieta s atlasem $(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A$. Předpokládejme, že je splněna následující podmínka:
(*) Nechť x, y jsou dva různé body M. Pak buď existuje $\alpha \in A$ pro které platí $x, y \in U_\alpha$, nebo existují indexy $\alpha, \beta \in A$, pro které platí $x \in U_\alpha, y \in U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

Ukažte, že pak je M Hausdorffův topologický prostor.

Řešení. Musíme sestrojit dvě disjunktní okolí bodů x, y. Pokud x, y patří do téže mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ stačí si uvědomit, že U_α je homeomorfní s otevřenou podmnožinou $\mathbb{R}^n$. Pokud patří do dvou disjunktních map, je to zřejmé.

Příklad 4. Nechť $N = \{(x, \pm 1) | x \in \mathbb{R}\}$ je podmnožina v $\mathbb{R}^2$ s ekvivalencí danou předpisem

$$(x, 1) \sim (x, -1), x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Nechť $M = N/\sim$ je množina tříd ekvivalence (přímka se zdvojeným počátkem).

Označme $< (x, a) >$ třídu ekvivalence prvku $(x, a) \in N$ a π kanonickou projekci $\pi : M \to N$. Definujme atlas obsahující 2 mapy $(U_1, \varphi_1), (U_{-1}, \varphi_{-1})$ takto:

$U_1 = \pi(\{(x, 1) | x \in \mathbb{R}\}), \varphi_1(< (x, 1) >) = x$;

$U_{-1} = \pi(\{(x, -1) | x \in \mathbb{R}\}), \varphi_{-1}(< (x, -1) >) = x$.

Ukažte, že tyto dvě mapy na M jsou kompatibilní. Ukažte, že množina M s tímto atlasem není varieta, protože její topologie není Hausdorffova.

Řešení. Množina M je názorně reálná přímka, ve které je bod 0 nahrazen dvěma kopiemi, horní a dolní. Množina U_1 je kopie $\mathbb{R} - \{0\}$ s přidanou horní kopií počátku a množina U_{-1} je kopie $\mathbb{R} - \{0\}$ s přidanou dolní kopií počátku. Zobrazení $\varphi_\pm$ jsou identity na $\mathbb{R} - \{0\}$, a tedy také přechodové zobrazení $\varphi_{-1} \circ \varphi$ je identita na množině $\mathbb{R} - \{0\}$. Tím jsme na M definovali diferencovatelnou strukturu. Odpovídající topologie má spočetnou bazi otevřených množin (máme jen 2 mapy), ale není Hausdorffova, protože dvě kopie počátku jsou dva různé body, které nelze oddělit pomocí okolí. Je totiž zřejmé, že libovolné okolí horního počátku protíná netriviálně libovolné okolí spodního počátku.

Příklad 5. Nechť M je nespočetné množství kopií množiny reálných čísel, například

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2.$$

Atlas $\mathcal{B} = (U_y, \varphi_y)_{y \in \mathbb{R}}$ definujeme předpisem $U_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$ a zobrazení φ_y na U_y definujeme předpisem $\varphi_y((x, y)) = x$.

Ukažte, že topologie na M nemá spočetnou bazi otevřených množin.

Řešení. Předpokládejme, že $\{V_\alpha | \alpha \in A\}$ je baze otevřených množin v $\mathcal{T}_M$.

Pro každé $y \in \mathbb{R}$ je $U_y = \mathbb{R} \times \{y\}$ otevřená množina, tedy existuje index $\alpha(y)$ takový, že $V_\alpha(y) \subset \mathbb{R} \times \{y\}$. Množiny $U_y, y \in \mathbb{R}$ jsou po dvou disjunktní, tedy je zobrazení $y \in \mathbb{R} \to \alpha(y) \in \mathcal{A}$ prosté a A je tedy nespočetná množina.

Všimněte si, že atlas $\mathcal{B}$ zadává na $\mathbb{R}^2$ nestandardní diferencovatelnou strukturu, jejíž mapy mají dimenzi 1.

Příklad 6. Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, resp. $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$ atlasy na varietách M, resp. N, dimenze m, resp. n. Pak definujeme standardní diferencovatelnou strukturu na množině $M \times N$ pomocí atlasu $(W_{\alpha,\beta}, \theta_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$, kde $\theta_{\alpha,\beta}(m, n) = [\varphi_\alpha \times \psi_\beta](m, n) = (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(n)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Ověřte, že $M \times N$ s touto standardní diferencovatelnou strukturou je varieta dimenze $m + n$.

Řešení. Přechodové zobrazení mezi mapami na $M \times N$ mají tvar

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_{\alpha'} \times \psi_{\beta'})^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1}).$$

Jsou to kartézské součiny hladkých zobrazení, a jsou tedy hladké.

Pokud jsou $\{U_s\}_{s\in S}$, resp. $\{V_t\}_{t\in T}$ spočetné baze topologie $\mathcal{T}_M$, resp. $\mathcal{T}_N$, pak se snadno ukáže, že $\{U_t \times V_s\}_{(t,s)\in T\times S}$ je baze topologie $\mathcal{T}_{M\times N}$, která je zřejmě spočetná.

Jsou-li (m_1, n_1) a (m_2, n_2) dva různé body $M \times N$, pak se buď první, nebo druhé složky nerovnají. Předpokládejme například, že $m_1 \neq m_2$. Pak existují disjunktní otevřené množiny U_1 a U_2 v $\mathcal{T}_M$, pro které $m_1 \in U_1$ a $m_2 \in U_2$. Množiny $U_1 \times N$ a $U_2 \times N$ jsou otvřené a disjunktní v $M \times N$ a platí, že $(m_1, n_1) \in U_1 \times N$ a $(m_2, n_2) \in U_2 \times N$.

5. přednáška.

Kapitola 4

Hladká zobrazení.

4.1 Definice.

Definice 4.1 *Nechť M a N jsou dvě variety dimenze m, resp. n a nechť $f : M \to N$ je zobrazení. Řekneme, že f je* **hladké zobrazení,** *pokud je f spojité a pokud pro každé dvě mapy (U, φ) na M a (U', φ') na N je zobrazení $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ hladké.*

Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je **hladká***, pokud je to hladké zobrazení variety M do variety $\mathbb{R}$. Prostor všech hladkých funkcí na M označíme $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Řekneme, že zobrazení variet $f : M \to N$ je **difeomorfismus***, pokud f vzájemně jednoznačné a zobrazení f a f^{-1} jsou hladká.*

Řekneme, že variety jsou **difeomorfní***, pokud existuje difeomorfismus $f : M \to N$.*

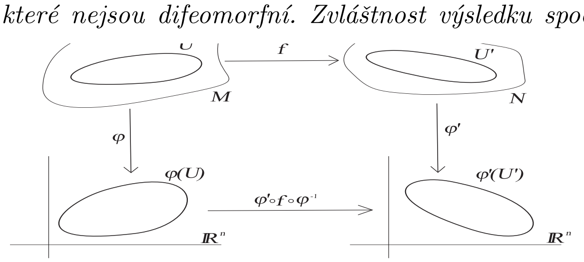
Poznámka 4.2 *(a) Pojem hladkosti je lokální pojem. To znamená toto. Nechť $f : M \to N$ je zobrazení mezi varietami. pak:*

- je-li f hladké zobrazení na M, je také restrikce $f|_U$ hladké zobrazení pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset M$;

- pokud má každý bod $p \in M$ okolí U, pro které je restrikce $f|_U$ hladké zobrazení, je zobrazení f hladké na M.

(b) Na každé množině M existuje zpravidla nekonečně mnoho různých diferencovatelných struktur. Uvažujme nejjednodušší případ, že M je otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ se standardní strukturou variety danou jedinou mapou (M, Id). Stačí uvažovat libovolné prosté zobrazení F množiny M na M, které není hladké a uvažovat na M atlas s jedinou mapou (M, F). Dvě diferencovatelné struktury odpovídající různým zobrazením F_1 a F_2 budou různé, pokud odpovídající přechodová funkce nebude hladká. Takových případů je zřejmě nekonečně mnoho. Na druhou stranu je ihned vidět, že je snadné s použitím funkce $F_2 \circ F_1^{-1}$ ukázat, že obě variety jsou difeomorfní.

(c) Podstatně zajímavější je otázka, jestli je možné na množině s danou topologií najít dvě diferencovatelné struktury (indukující danou topologii), které nejsou difeomorfní. Velkou pozornost vzbudil výsledek S. Donaldsona (oceněný Fieldsovou medailí), že na $\mathbb{R}^4$ existují aspoň dvě diferencovatelné struktury, které nejsou difeomorfní. Zvláštnost výsledku spočívá mimo jiné v tom,



Obrázek 4.1: Hladké zobrazení

že zatímco na $\mathbb{R}^n, n \neq 4$ jsou všechny diferencovatelné struktury difeomorfní, počet různých tříd diferencovatelných struktur na $\mathbb{R}^4$ je nekonečný.

Pro obecné kompaktní variety je situace ještě mnohem složitější. Na sféře S^n tvoří třídy ekvivalence (orientovaných) diferencovatelných struktur konečnou Abelovu grupu. Zatímco pro $n = 1, 2, 3, 5, 6$, je tato grupa triviální, na sféře S^7 existuje 28 různých po dvou neizomorfních diferencovatelných struktur. .

(d) Případ, kdy dimenze variety M je 0 není příliš zajímavý. Je ihned vidět z definice, že varieta M dimenze 0 je konečná nebo spočetná množina s diskrétní topologií a že na ní existuje jediná hladká diferencovatelná struktura. A každé zobrazení z M do N je automaticky hladké (rozmyslete si!).

Věta 4.3 *Složení libovolných hladkých zobrazení mezi varietami je hladké zobrazení.*

Důkaz. To je jednoduché cvičení pro každého.

$\square$

4.2 Lieovy grupy.

Definice 4.4 **Lieova grupa** *je varieta G, která je zároveň grupa, pro kterou jsou obě algebraické operace násobení $m : G \times G \to G$ a inverze $i : G \to G$ dané předpisem*

$$m(g, h) = gh;\ , g, h \in G \;\; i(g) = g{-}1, g \in G$$

hladká zobrazení.

Definice 4.5 *Nechť G a H jsou Lieovy grupy. Řekneme, že zobrazení $F : G \to H$ je homomorfismus Lieových grup, pokud je F hladké a je to zároveň homomorfismus grup.*

Kapitola 5

Tečný a kotečný prostor

Tady začíná část přednášky, která je dost obtížná. Pojem tečného vektoru a tečného prostoru v daném bodě variety se již těžko kreslí a vyžaduje další stupeň abstrakce. Pro dvojrozměrné plochy v $\mathbb{R}^3$ se dají kreslit názorné obrázky, které pomocí analogie umožňují intuitivní představu i pro plochy dimenze k v $\mathbb{R}^n$. Ale variety (např. jejich prototyp - projektivní prostor) v Eukleidovském prostoru vnořené nejsou a není vidět, jak standardní definici tečného vektoru pro plochy v $\mathbb{R}^3$ zobecnit pro variety. Idea, kterou použijeme, je najít v elementárním případě plochého prostoru $\mathbb{R}^n$ jinou, ekvivalentní definici tečného vektoru, která by šla snadno zobecnit pro případ variety.

Vraťme se tedy na začátek k pojmu vektor a tečný prostor v $\mathbb{R}^n$.

5.1 Tečné vektory v R^n.

Prvky v $\mathbb{R}^3$ (a tedy i v $\mathbb{R}^n$) mají různou geometrickou interpretaci. Základní geometrická představa vektoru v $\mathbb{R}^3$ je 'šipka', u které je podstatné jen to, jak je dlouhá a jaký má směr. Je jedno, kam je příslušná 'šipka' umístěná, kde má počátek. To souvisí s pojmem vázaného vektoru.

Vázaný vektor v $\mathbb{R}^n$ je uspořádaná dvojice bodů $[a,b]$; $a,b\in\mathbb{R}^n$. První bod se nazývá počáteční, druhý koncový.

Vektor v v $\mathbb{R}^n$ je pak třída ekvivalence vázaných vektorů, kde $[a,b]\sim[a',b'] \iff b-a=b'-a'$. Tuto třídu ekvivalence označíme $v=<[a,b]>$ a symbolicky píšeme $v:=b-a$, a $b=a+v$. Pro přesnost si zavedeme označení v_a pro vázaný vektor $[a,b]$.

Tečný prostor $T_a\mathbb{R}^n$ k $\mathbb{R}^n$ v bodě $a\in\mathbb{R}^n$ je pak množina všech vázaných vektorů, jejichž počáteční bod je a. Pokud zavedeme na tomto tečném prostoru sčítání a násobení reálným číslem obvyklými vztahy, je $T_a\mathbb{R}^n$ vektorový prostor.

Základní idea pro budoucí definici tečného prostoru k varietě je pak interpretace vektorů pomocí derivace v daném směru. To se udělá takto.

Definice 5.1 Derivace funkce v daném směru. *Nechť $v_a\in T_a\mathbb{R}^n$. Lineární obrazení $D_{v_a}:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ je definováno předpisem*

$$D_{v_a}f=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,f(a+t\,v).$$

Pokud označíme symbolem e_{i_a} kanonickou bazi vektorového prostoru $T_a\mathbb{R}^n$, pak

$$D_{e_{i_a}}f=\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i=1,\dots,n.$$

Z matematické analýzy víme, že pro derivaci (ve směru) platí Leibnizovo pravidlo

$$D_{v_a}(fg)=f(a)D_{v_a}g+D_{v_a}f\,g(a).$$

Definice 5.2 *Lineární zobrazení $X:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ nazveme* **derivace v bodě** *$a\in\mathbb{R}^n$***,** *pokud má následující vlastnost:*

$$X(fg)=f(a)X(g)+g(a)X(f);\ f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Množinu všech derivací v bodě a označíme $\mathcal{D}_a$.

Je zřejmé, že $\mathcal{D}_a$ je vektorový prostor, pokud definujeme příslušné operace předpisem

$$(X+Y)(f):=X(f)+Y(f),(cX)(f):=c\,X(f);\ X,Y\in\mathcal{D}_a,c\in\mathbb{R}^n.$$

Množina všech lineárních zobrazení $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ je vektorový prostor nekonečné dimenze (duální prostor). Požadavek, aby platila Leibnizova vlastnost jistě zmenší tento nekonečně dimenzionální prostor, ale chceme si ukázat, že výsledný prostor všech derivací je dramaticky menší, že má konečnou dimenzi, a že je izomorfní s tečným prostorem $T_a(\mathbb{R}^n)$. Pokud je to pravda, našli jsme ekvivalentní definici vektorů pro základní (plochý) prostor $\mathbb{R}^n$, kterou už snadno zobecníme pro případ variety.

Základní informace je tedy následující tvrzení.

Věta 5.3 *Nechť $a\in\mathbb{R}^n$. Zobrazení $F:T_a\mathbb{R}^n\to\mathcal{D}_a$; $F(v_a)=D_{v_a}$ je izomorfismus vektorových prostorů.*

Důkaz. Zobrazení F je zřejmě lineární zobrazení.

(a) Nejdříve si rozmyslíme, že zobrazení F je prosté.

Předpokládejme tedy, že pro $v_a\in T_a(\mathbb{R}^n)$ je $F(v_a)$ nulový vektor v $\mathcal{D}_a$. To znamená, že $D_{v_a}(f)=0$ pro všechny funkce $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Vektor v_a mohu rozložit do kanonické baze: $v_a=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,v_{e_i},\alpha_i\in\mathbb{R}$. Pak $v_a(f)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Pokud za funkci f zvolíme j-tou souřadnicovou funkci $\varphi_j(x)=x_j$, pak pro každé $j=1,\dots,n$ dostaneme

$$0=v_a(\varphi_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}=\alpha_j.$$

Tedy $v_a=0$.

(b) Dokázat, že zobrazení F je surjektivní je složitější. Důkaz dokončíme v příští přednášce.

Cvičení k 5. přednášce.

Příklad 1.

Nechť M je uzavřená koule

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| \leq 1\}$$

se standardní topologií podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ Ukažte, že na M nelze najít diferencovatelnou strukturu dimenze n, která by indukovala stejnou topologii na M.

Řešení.

Na uzavřené kouli $\{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| \leq 1\}$ s indukovanou topologií není možné najít diferencovatelnou strukturu danou atlasem s mapami dimenze n která by indukovala stejnou topologii na M, protože body na hranici nemají v topologii indukované na M žádné okolí homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbb{R}^n$.

Dá se ukázat, že nejde najít ani diferencovatelnou strukturu na M jiné dimenze. K tomu by ale bylo potřeba použít následující tvrzení:

Lemma [L.E.J.Browder,1912] Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ je prosté a spojité zobrazení. Potom $f(U)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a f je homeomorfismus U na $f(U)$.

Toto tvrzení je netriviální a pro jeho důkaz se obvykle používají metody algebraické topologie. Snadným důsledkem je tzv. věta o invarianci oblastí, která říká, že pokud jsou otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^n$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ homeomorfní, pak $n = m$.

Z věty o invarianci oblastí plyne, že pokud topologie indukovaná atlasem má být standardní topologie podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^n$ a pokud je bod $a \in M$ ve vnitřku M (tj. $||a|| < 1$), pak mapa obsahující bod a musí být mapa dimenze n.

Příklad 2.

Ukažte, že uzavřený kruh $M \subset \mathbb{R}^2$ z předchozího příkladu ($n = 2$) je varieta dimenze 2 s krajem.

Řešení.

Použijeme polární souřadnice $x = r\cos t, y = r\sin t;\ r \in (0, +\infty), t \in \mathbb{R}$.

Mapy můžeme definovat takto: $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}; \varphi_0(x, y) = (x, y)$;
$U_1 = M - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\}; \varphi_1(x, y) = (r - 1, t), t \in (0, 2\pi), \varphi_1(U_1) = (-1, 0 > \times (0, 2\pi)$;
$U_2 = M - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 0\}; \varphi_2(x, y) = (r - 1, t), t \in (-\pi, \pi), \varphi_2(U_1) = (-1, 0 > \times(-\pi, \pi)$. Přechodové zobrazení $\psi_{21} = \varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1}$ mezi mapami (U_1, φ_1) a (U_2, φ_2) je identita na intervalu $(-1, 0 > \times(0, \pi)$ a $\psi_{21}(r, t) = (r, t - 2\pi)$ na $(-1, 0 > \times(\pi, 2\pi)$, a je tedy hladké. Přechodové zobrazení mezi dvěma dalšími dvojicemi map se vyjádří pomocí funkcí v definici polárních souřadnic (zkontrolujte!) a jsou také hladké.

Příklad 3.

Ukažte, že kuželová plocha M v $\mathbb{R}^3$ (tj. povrchy dvou vrcholem spojených nekonečných rotačních kuželů) s obvyklou (indukovanou) topologií není varieta dimenze 2.

Řešení.

Společný vrchol kuželové plochy M nemá žádné okolí homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbb{R}^2$, protože průnik libovolného okolí počátku s kuželem je po vyjmutí počátku nesouvislý, zatímco otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ zůstává po vyjmutí bodu souvislá.

Podobně jako v Příkladu 1 je možné s použitím věty o invarianci oblastí ukázat, že každý atlas na M musí být atlas dimenze 2, protože každá mapa v okolí bodu mimo vrchol kuželu musí mít dimenzi 2.

Příklad 4.

Projektivní prostor $\mathbb{PR}^n$ se standardními mapami a standardní přechodovou funkcí je varieta dimenze n.

Řešení.

Prvky v $\mathbb{R}^{n+1}$ budeme označovat $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Symbol $[x], x \neq 0$ bude označovat prvek $\mathbb{RP}^n$ jakožto třídu ekvivalence $\sim$ příslušnou prvku x. Tedy $[x] = [y]$ právě tehdy když $\exists \lambda \neq 0; y = \lambda x$. Definujme mapy $(V_i, f_i); i = 1, \dots, n+1$, předpisem

$V_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}$,

$f_i : V_i \to \mathbb{R}^n,\ f_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$

Zřejmě je $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i$ a f_i je prosté zobrazení V_i na $\mathbb{R}^n$.

Předpokládejme, že $i < j$. Pro výpočet přechodového zobrazení označme

$$f_j(V_i \cap V_j) = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n;\ )|t_i \neq 0\};\ f_i(V_i \cap V_j) = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n;\ |u_j \neq 0\}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$f_j^{-1}(t_1, \dots, t_n) = [t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_j, \dots, t_n].$$

má přechodové zobrazení $g_{ij} = f_i \circ f_j^{-1}$ tvar

$$(u_1, \dots, u_n) = g_{ij}(t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{t_1}{t_i}, \dots, \frac{t_{i-1}}{t_i}, \frac{t_{i+1}}{t_i}, \dots, \frac{t_{j-1}}{t_i}, \frac{1}{t_i}, \frac{t_j}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}\right).$$

a je to tedy hladké zobrazení.

Ještě zbývá ověřit dvě podmínky na indukovanou topologii.

(a) Ukážeme, že indukovaná topologie je Hausdorffova. Indukovaná topologie má jako bazi systém všech podmnožin $U \subset V_i, i = 1, \dots, n$, pro které je $f_i(U)$ otevřená. Zvolme dva různé body $x, y \in \mathbb{RP}^n$. Pak existují indexy i, j takové, že $x \in V_i, y \in V_j$. Pokud $i = j$, pak oba body patří do stejné mapy a je zřejmé, že je mohu oddělit disjunktními okolími. Pokud $i \neq j$, pak stačí uvažovat jen body x, y, které neleží ve stejné mapě, tj. body pro které platí $x_i \neq 0, x_j = 0$ a $y_j \neq 0, y_i = 0$. Pak definuji otevřené podmnožiny

$$U_x \subset V_i, U_x = \{x_i \neq 0, x_j < x_i\};\ U_y \subset V_j, U_y = \{x_j \neq 0, x_i < x_j\}.$$

Tyto dvě množiny jsou disjunktní, otevřené a $x \in U_x, y \in U_y$.

Indukovaná topologie má spočetnou bazi otevřených množin, protože atlas obsahuje jen konečný počet map.

Příklad 5. Nechť M a N jsou variety. Ukažte, že zobrazení $f : M \to N$ je hladké právě když je splněna podmínka
(*) pro každý bod $a \in M$ existují mapy $(U, \varphi), a \in U$ a $(V, \psi), f(a) \in V$ takové, že $f(U) \subset V$ a že zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ je hladké.

Řešení.

(1) Předpokládejme nejdříve, že f je hladké zobrazení a $a \in M$. Zvolme mapy $(U', \varphi'), a \in U'$ na M a $(V, \psi), f(a) \in V$ na N. Zobrazení f je spojité, tedy je množina $U = f^{-1}(V \cap U'$ otevřená a $f(U) \subset V$. Mapy $(U, \varphi|_U)$ a (V, ψ) tedy splňují podmínku (*).

(2) Předpokládejme nyní, že platí podmínka (*). Stačí ukázat, že f je spojité zobrazení. Nechť $a \in M$ je libovolný bod. Nechť (U, φ) a (V, ψ) jsou mapy z podmínky (*). Zobrazení

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

je hladké (tedy spojité), proto i $f|_U = \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je spojité v bodě a, který byl libovolný.

6. přednáška

Připomeňme si, kde jsme posledně skončili. Vraťme se na začátek k pojmu vektor a tečný prostor v $\mathbb{R}^n$.

5.2 Tečné vektory v R^n.

Základní geometrická představa vektoru v $\mathbb{R}^n$ je 'šipka', u které je podstatné jen to, jak je dlouhá a jaký má směr. Je jedno, kam je příslušná 'šipka' umístěná, kde má počátek. To souvisí s pojmem vázaného vektoru.

Vázaný vektor v $\mathbb{R}^n$ je uspořádaná dvojice bodů $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}^n$. První bod se nazývá počáteční, druhý koncový.

Vektor v v $\mathbb{R}^n$ je pak třída ekvivalence vázaných vektorů, kde $[a, b] \sim [a', b'] \iff b-a = b'-a'$. Tuto třídu ekvivalence označíme $v =< [a, b] >$ a symbolicky píšeme $v := b - a$, a $b = a + v$. Pro přesnost si zavedeme označení v_a pro vázaný vektor $[a, b]$.

Tečný prostor $T_a\mathbb{R}^n$ k $\mathbb{R}^n$ v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ je pak množina všech vázaných vektorů, jejichž počáteční bod je a. Pokud zavedeme na tomto tečném prostoru sčítání a násobení reálným číslem obvyklými vztahy, je $T_a\mathbb{R}^n$ vektorový prostor.

Nechť $v_a \in T_a\mathbb{R}^n$. Pro každý vektor v_a definujeme derivaci D_{v_a} ve směru vektoru v_a následujícím způsobem.

Lineární obrazení $D_{v_a} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$D_{v_a} f = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, f(a + t\, v).$$

Pokud označíme symbolem e_{i_a} kanonickou bazi vektorového prostoru $T_a\mathbb{R}^n$, pak

$$D_{e_{i_a}} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ i = 1, \ldots, n.$$

Lineární zobrazení $X : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ nazveme **derivace v bodě** $a \in \mathbb{R}^n$**,** pokud má následující vlastnost:

$$X(fg) = f(a)X(g) + g(a)X(f);\ f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Množinu všech derivací v bodě a označíme $\mathcal{D}_a$.

Připomeňme si, že pro každou derivaci D platí dvě vlastnosti, které se velmi snadno odvodí z definice derivace.

(A) $D(f) = 0$ pro každou konstantní funkci f.

(B) Pokud $f(a) = g(a) = 0$, pak $D(fg) = 0$.

Věta 5.4 *Nechť $a \in \mathbb{R}^n$. Zobrazení $F : T_a\mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_a$; $F(v_a) = D_{v_a}$ je izomorfismus vektorových prostorů.*

Důkaz.

Pro důkaz věty budeme potřebovat pomocné lemma.

Lemma 5.5 *Nechť $r > 0$, nechť $U = K(a, r)$ je koule o poloměru r a středu $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť f je hladká funkce na U. Pak existují hladké funkce $g_i, i = 1, \ldots n$ na U, pro které platí*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i), x \in U$$

a $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a.)$

Důkaz.

Funkce g_i definované předpisem

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-a)+a)dt$$

jsou hladké podle věty o derivaci a spojitosti integrálu podle parametru. Pak

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(t(x-a)+a)]dt = \\ &= \int_0^1 \{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-a)+a)(x_i - a_i)\}dt = \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - a_i). \end{aligned}$$

Na víc zřejmě

$$g_i(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Důkaz Věty5.4
(a) Zobrazení F je prosté. To jsme dokázali na konci minulé přednášky.

(b) F je surjektivní.
Předpokládejme, že D je derivace v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Chceme ukázat, že existuje vektor v_a, pro který $D_{v_a} = D$.
Nechť $\varphi_i(x) = x_i$; $i = 1, \ldots, n$ označuje souřadnicovou funkci na $\mathbb{R}^n$. Pak

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0 \,\text{pro}\; i \neq j, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 1.$$

Označme $v_i = D(\varphi_i), i = 1, \ldots, n$ a $v_a = \sum_{i=1}^n v_i e_{ia}$.
Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ můžeme použít Lemma 5.5 a dostaneme

$$\begin{aligned} D(f) &= D[f(a) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - a_i)] = \\ &= D(f(a)) + \sum_{i=1}^n (g_i(a)D(x_i - a_i)) = 0 + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(D(\varphi_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{v_a}(f), \end{aligned}$$

tedy $D_{v_a} = D$. □

5.3 Tečný prostor a tečné zobrazení

Nyní již budeme definovat tečné vektory a tečný prostor v bodě $a \in M$ dané variety.

Definice 5.6 *Nechť M je varieta, $a \in M$. Řekneme, že lineární zobrazení $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se nazývá* **derivace v bodě** $a \in M$**,** *pokud*

$$X(fg) = f(a)X(g) + g(a)X(f) \; f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Množinu všech derivací v bodě a nazveme **tečný prostor k varietě** M **v bodě** *a a označíme ji T_aM, její prvky budeme nazývat* **tečné vektory v bodě** a**.**

Dvě jednoduché vlastnosti (stejné jako pro $M = \mathbb{R}^n$) platí i v případě obecné variety M. Odůvodnění je stejné.

Lemma 5.7 *Nechť M je varieta, $a \in M$, $X \in T_aM$. Pak*
(1) Je-li f konstatní funkce na M, pak $X(f) = 0$.
(2) Je-li $f(a) = g(a) = 0$, pak $X(fg) = 0$.

Důkaz. Druhá vlastnost ihned plyne z Leibnizova pravidla pro derivaci.

První vlastnost stačí ověřit (díky linearitě zobrazení) pro konstantní funkci $h(t) = 1, t \in M$. Ale

$$X(h) = X(h\,h) = h(a)X(h) + h(a)X(h) = 2X(h),$$

tedy $X(h) = 0$. □

Jeden z dalších klíčových pojmů, které si zavedeme, je tečné zobrazení k hladkému zobrazení mezi varietami. Pro případ hladkého zobrazení F mezi Eukleidovskými prostory to odpovídá nejlepší lineární aproximaxi F', reprezentovanou Jacobiho maticí všech parciálních derivací podle všech proměnných. Uvidíme, že podobná reprezentace platí pro popis tečného zobrazení k danému hladkému zobrazení pomocí map. Definice tečného zobrazení mezi odpovídajícími tečnými prostory dvou variet je pozoruhodně jednoduchá a prostá. Odpovídá totiž víceméně přesně pojmu duálního zobrazení k lineárnímu zobrazení mezi vektorovými prostory, které jste používali v prvním ročnku v lineární algebře.

Definice 5.8 (Tečné zobrazení) *Nechť $F : M \to N$ je hladké zobrazení mezi dvěma varietami, $a \in M$. Pak definujeme* **tečné zobrazení** $F_* : T_aM \to T_{F(a)}N$ *předpisem*

$$(F_*(X))(f) := X(f \circ F).$$

Všimněte si, že $f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ pro $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Zobrazení F_* je zřejmě lineární a je to opět derivace na $\mathcal{C}^\infty(N)$, protože pro $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ platí

$$\begin{aligned}
(F_*(X))(fg) &= X((fg) \circ F) = X((f \circ F)(g \circ F)) = \\
&= (f \circ F)(a)X(g \circ F) + (g \circ F)(a)X(f \circ F) = \\
&= f(F(a))F_*(X)(g) + g(F(a))(F_*(X))(f)).
\end{aligned}$$

Stručné označení F_* pro tečné zobrazení ke zobrazení F je pohodlné, ale někdy je potřeba zdůraznit, ve kterém bodě $a \in M$ ho uvažujeme. Často se tedy používá podrobnější označení $F_*(a) : T_aM \to T_{F(a)}N$. Tečné zobrazení k hladkému zobrazení má několik vlastností.

Věta 5.9 *Nechť $F : M \to N$ a $G : N \to P$ jsou hladké zobrazení variet a $a \in M$. Pak*
(1) $F_* : T_aM \to T_{F(a)}N$ je lineární zobrazení;
(2) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_aM \to T_{(G\circ F)(a)}P$
(3) $(Id_M)_* = Id_{T_aM} : T_aM \to T_aM$;
(4) Je-li F difeomorfismus M na N, pak $F_* : T_aM \to T_{F(a)}N$ je isomorfismuse vektorových prostorů.

Důkaz. (1) a (3) plyne ihned z definice.
(2) $(G \circ F)_*(X)(f) = X(f \circ G \circ F) = F_*(X)(f \circ G)) = G_*(F_*(X))(f);\ X \in T_aM;\ f \in \mathcal{C}^\infty(M)$
(4) Plyne z (2) a (3) použité na $F \circ F^{-1} = Id$. □

Dalším cílem nyní bude sestrojit (pomocí map na M) konkrétní příklady tečných vektorů a popsat bazi tečného prostoru indukovanou volbou mapy v okolí daného bodu. Než to budeme moci udělat, je třeba si uvědomit jeden zásadní a důležitý fakt.

5.4 Tečný vektor je lokální pojem.

Tečné vektory jsme si definovali jako specielní prvky v duálu k prostoru $\mathcal{C}^\infty(M)$ všech hladkých funkcí na M. Abychom mohli počítat v lokálních souřadnicích daných mapou, je ale třeba pracovat s prostory funkcí definovaných jenom na otevřených podmnožinách M. Je proto zásadní problém si uvědomit, že pojem tečného vektoru v bodě $a \in M$ je ryze lokální pojem, který závisí jen na chování funkcí v malém okolí daného bodu a. Jde o názorný fakt, protože derivace (ve směru) v bodě a je definována pomocí limity odpovídajícího podílu v bodě, který se blíží k bodu a, a tak tato limita závisí jen na hodnotách dané funkce v nějakém (jakkoliv malém) okolí bodu a. Tento fakt je zformulován v následujícím tvrzení.

Lemma 5.10 *Nechť M je varieta, $a \in M, X \in T_aM$.*
Jsou-li f, g hladké funkce na M, které se rovnají v nějakém okolí bodu a, pak $X(f) = X(g)$.

Důkaz.
Z linearity stačí dokázat, že pro $h = f - g$ platí $X(h) = 0$. Nechť (U, φ) je mapa, $a \in U$, nechť V je okolí bodu a, pro které $h|_V = 0$, a nechť $r > 0$ je dost malé, aby $K(\varphi(a), 2r) \subset \varphi(U \cap V)$. Pak existuje hladká funkce ν, která má nosič v $K(\varphi(a), 2r)$, hodnoty v intervalu $< 0, 1 >$, a je rovna jedné na $K(\varphi(a), r)$. Funkci $\nu \circ \varphi$ rozšíříme nulou na celé M, výsledkem je hladká funkce, a definujeme hladkou funkci $\psi = 1 - \nu \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Funkce ψ je podle definice rovna nule na $\varphi^{-1}(K(\varphi(a), r)) \subset U \cap V$ a rovna jedné vně množiny $\varphi^{-1}(K(\varphi(a), 2r)) \subset U \cap V$.
Platí tedy $h\psi = h$ na celém M, a protože $h(a) = \psi(a) = 0$, platí i $X(h) = X(\psi h) = 0$. □

Je-li dána funkce $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, definovaná jen na nějaké otevřené podmnožině $U \subset M$, nelze ji obecně rozšířit na hladkou funkci na celém M (f může například neomezeně růst v okolí hranice množiny U). Je-li ale dán bod $a \in U$, je možné vždy najít jinou hladkou funkci g tak, že $f = g$ na (malém) okolí bodu a.

Lemma 5.11 (Rozšiřovací lemma) *Nechť M je varieta a $U \subset M$ otevřená podmnožina, $a \in U$.*
Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ existuje $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ a otevřená množina $B, a \in B \subset U$ pro kterou $g = f$ na B.

Před důkazem tohoto tvrzení si odvodíme ještě pomocné lemma.

Lemma 5.12 (Seřezávací funkce) *Předpokládejme, že $0 < R_1 < R_2$. Pak existuje hladká funkce $H : \mathbb{R}^n \to < 0, 1 >$ taková, že $H(x) = 1$ na $\overline{K(0, R_1)}$ a pro nosič H platí* $\operatorname{supp} H \subset K(0, R_2)$.

Důkaz.
Funkce $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ pro $t > 0$ a $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$ je hladká funkce na $\mathbb{R}$. Pak definujeme hladkou funkci

$$h(t) = \frac{f(R_2 - t)}{f(R_2 - t) + f(t - R_1)}, t \in \mathbb{R}.$$

Její nosič je interval $< 0, R_2 >$ a $h(t) = 1$ na intervalu $< 0, R_1 >$. Této funkci se někdy říká seřezávací funkce ('cut-off function'). Pak funkce $H(x) = h(||x||)$ je zřejmě hladká na $\mathbb{R}^n - \{0\}$ jako složení dvou hladkých funkcí a $H(x) = 1$ na $K(0, 1)$, tedy H je hladká i v počátku. □

Teď už jsme připraveni dokázat hlavní tvrzení, které se bude stále používat.

Věta 5.13 (Tečný vektor je lokální pojem.) *Nechť M je varieta, $U \subset$ je otevřená podmnožina, a $\iota : U \to M$ je vnoření U do M.*
Pak je pro každý bod $a \in U$ zobrazení $\iota_* : T_aU \to T_aM$ izomorfismus.

Důkaz této věty provedeme v příští přednášce.

Cvičení k 6. přednášce.

Příklad 1. Definujte (standardní) diferencovatelnou strukturu na vektorovém prostoru V.

Řešení. Nechť $\mathcal{B}$ je nějaká baze V. Její volba definuje mapu $(V, \varphi_{\mathcal{B}})$, jejíž definiční obor je celé V a hodnota $\varphi_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{R}^n$ je definována jako koeficienty vektoru v vzhledem k bazi $\mathcal{B}$. Příslušné přechodové zobrazení $\varphi_{\mathcal{B}'} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ je lineární zobrazeni z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, určené maticí přechodu mezi těmito dvěma bazemi. Atlas se tedy skládá z nekonečně mnoha map.

Příklad 2. Nechť je zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definováno předpisem $F(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1$.

(1) Vypočítejte, jak vypadá zobrazení F_*.

(2) Ukažte, že zobrazení F_* není v žádném bodě prosté.

Řešení.

(1) Buď $a = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Baze prostoru $T_a\mathbb{R}^2$ je dána vektory $\{\frac{\partial}{\partial x}|_a, \frac{\partial}{\partial y}|_a\}$.

Pak

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x}|_a) = (3\bar{x}^2 + \bar{y})\frac{d}{dt}|_{F(a)};\ F_*(\frac{\partial}{\partial y}|_a) = (\bar{x} + 3\bar{y}^2)\frac{d}{dt}|_{F(a)}$$

Matice zobrazení F_* vůči kanonickým bazím v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}$ je

$$\begin{pmatrix} 3\bar{x}^2 + \bar{y} & \bar{x} + 3\bar{y}^2 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. Nechť $F : M \to N$ a $G : N \to P$ jsou hladká zobrazení. Pak $G \circ F : M \to P$ je hladké zobrazení.

Řešení.

Podle definice jsou zobrazení F a G spojité, tedy víme, že složení $G \circ F$ je také spojité. Nechť (U, φ) je mapa na M, (V, ψ) je mapa na N, a (W, ν) je mapa na P.

Pak podle předpokladu jsou $\psi \circ F \circ (\varphi)^{-1}$ a $\nu \circ G \circ (\psi)^{-1}$ hladké na svých definičních oborech. Tedy i $\nu \circ (G \circ F) \circ (\varphi)^{-1}$ je hladké na svém definičním oboru,.

Příklad 3. Rozmyslete si základní vlastnosti tečného zobrazení F_* k hladkému zobrazení $F : M \to N$.

Řešení.

Základní vlastnosti F_* k rozmyšlení jsou:

Nechť $a \in M$ je libovolný bod. Pak

(a) $F_* : T_aM \to T_{F(a)}N$ je lineární zobrazení. (Zřejmé podle definice.)

(b) Jsou-li $F : M \to N$, $G : N \to P$ hladká zobrazení, pak $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ jako zobrazení z T_aM do $T_{G(F(a))}P$.

Stačí si nakreslti odpovídající obrázek s mapami

(c) $Id_* : T_aM \to T_aM$ je identita.(Ihned z definice.)

(d) Je-li $F : M \to N$ difeomorfismus, pak pro každé $a \in M$ platí, že F_* je isomorfismus. (Plyne ihned z bodu c)).

Příklad 4. Nechť $0 < r < R$. Nechť T je torus, který vznikne rotací kružnice o poloměru r a o středu $(x, y) = (R, 0)$ v souřadnicové rovině xy kolem osy y.

Řešení.

Zvolme parametrizaci toru následujícím způsobem: buď

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos t)\cos s \\ y &= r \sin t \\ z &= (R + r\cos t)\sin s \end{aligned}$$

parametrické vyjádření funkce f na $\mathbb{R}^2$ a položme $f_1 :=$ restrikce f na množinu $Q_1 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Rozmyslete si, že zobrazení f_1 je na Q_1 prosté a že jeho obrazem je torus bez dvou kružnic, které se protínají v jednom bodě, $(f_1(Q_1), f_1^{-1})$ je tedy mapa. Obdobným způsobem definujeme

$Q_2 := (\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}) \times (\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3})$ $Q_3 := (\frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}) \times (\frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3})$ a $f_2 = f|_{Q_2}, f_3 = f|_{Q_3}$. Množiny $f_1(Q_1)$, $f_2(Q_2)$, $f_3(Q_3)$ pokrývají torus (méně map k jeho pokrytí nestačí!) a nyní již snadno nahlédneme, že mapy $(f_1(Q_1), f_1^{-1})$, $(f_2(Q_2), f_2^{-1})$, $(f_3(Q_3), f_3^{-1})$ tvoří atlas na T^2, neboť přechodové funkce jsou vyjádřeny takto: např.

$$\psi_{12} = f_2^{-1} \circ f_1 : Q_1 - ((0, 2\pi) \times \{\frac{2\pi}{3}\} \cup \{\frac{2\pi}{3}\} \times (0, 2\pi)) \to$$
$$\to Q_2 - ((\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}) \times \{2\pi\} \cup \{2\pi\} \times (\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}))$$

je definovaná na komponentách svého definičního oboru.

Na každé komponentě se jedná o prosté afinní zobrazení, které je vždy difeomorfismus, tedy přechodová funkce je rovněž difeomorfismus.

7. přednáška

Zbývá nám ještě dokázat následující větu.

Věta 5.14 (Tečný vektor je lokální pojem.) *Nechť M je varieta, $U \subset M$ je otevřená podmnožina, a $\iota : U \to M$ je vnoření U do M.*

Pak pro každý bod $a \in U$ je zobrazení $\iota_* : T_aU \to T_aM$ izomorfismus.

Důkaz.

Nechť $U \subset M$ je otevřená podmnožina a $a \in U$.

(a) Dokážeme, že $\iota_* : T_aU \to T_aM$ je prosté zobrazení. Nechť $X \in T_aU, \iota_*(X) = 0$. To znamená, že $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ i_*(X)(f) = X(f \circ \iota) = X(f|_U) = 0$.

Chceme ukázat, že pak $X = 0$, tj. že $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ platí $X(g) = 0$. Ale pro každou funkci $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ existuje $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ a okolí $B \subset U$ bodu a takové, že $f = g$ na B. Pak ale $X(g) = X(f|_U) = 0$.

(b) Dokážeme, že ι je surjektivní. Nechť $Y \in T_aM$. Vektor $X \in T_aU$ definujeme následujícím předpisem. Je-li $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, pak 'rozšíříme g na celé M,' tj. existuje $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ a okolí $B \subset U$ bodu a tak, že $f = g$ na B. Pak definujeme $X(g) := Y(f)$. Podle Lemmatu 5.10 tato hodnota nezávisí na volbě rozšířené funkce.

Nyní pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ platí

$$i_*X(f) = X(f|_U) = Y(f),$$

protože f je zřejmě 'rozšíření' funkce $f|_U$.

$\square$

Díky předchozí větě můžeme a budeme vždy ztotožňovat prostory T_aM a T_aU, je-li $U \subset M$ otevřená podmnožina a $a \in U$.

5.5 Výpočty v souřadnicích

Při popisu tečného prostoru k varietě v daném bodě je možné s výhodou používat souřadnice, zavedené volbou mapy v okolí daného bodu.

Definice 5.15 *Nechť M je varieta dimenze n, (U, φ) mapa na M, $a \in U$. Pak definujeme tečný vektor $\frac{\partial}{\partial x_i}|_a \in T_aU \simeq T_aM$ předpisem*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a\right](f) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(a)), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Každá mapa tedy definuje množinu tečných vektorů v daném bodě $a \in M$. Ukážeme teď, že tato množina je baze T_aM.

Věta 5.16 *Nechť M je varieta, $a \in M$. Pak T_aM je vektorový prostor dimenze n a vektory $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_a\}_{i=1}^n$ tvoří jeho bazi.*

Důkaz.

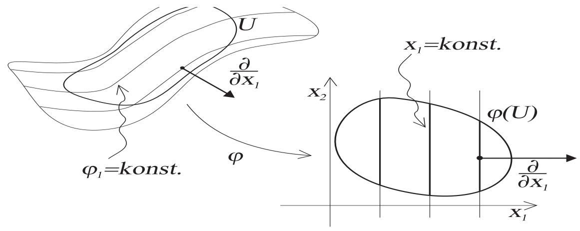
Zobrazení φ je difeomorfismus U na $\varphi(U)$, a tak podle Věty 5.9 je $\varphi_*(a) : T_aU \to T_{\varphi(a)}\mathbb{R}^n$ izomorfismus vektorových prostorů, které zobrazuje vektor $\frac{\partial}{\partial x_i}|_a \in T_aM$ na vektor $(D_{e_i})_{\varphi(a)} \in T_{\varphi(a)}\mathbb{R}^n$. $\square$

Poznámka.

(1) Křivka na varietě procházející bodem $a \in M$ se dá snadno definovat, je to hladké zobrazení $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = a$. Každá takováto křivka určuje vektor $v_\gamma \in T_aM$ pomocí předpisu

$$v_\gamma(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0),\ f \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

protože zobrazení v_γ je zřejmě derivace na prostoru $\mathcal{C}^\infty(M)$.



Obrázek 5.1: Tečné vektory

Zobrazení, které křivce v bodě $a \in M$ přiřadí tečný vektor není prosté, nekonečně mnoho křivek se zobrazí na tentýž tečný vektor. Bylo by možné zavést relaci ekvivalence mezi křivkami předpisem, že dvě křivky jsou ekvivalentní, pokud určují stejné zobrazení z $\mathcal{C}^\infty(M)$ do $\mathbb{R}$ a definovat vektor jako odpovídající třidu ekvivalence. Tato definice je další možná ekvivalentní definice tečných vektorů a tečného prostoru, která má velmi intutivní geometrický charakter.
(2) Předpokládejme nyní, že M je varieta s krajem a že $a \in \partial M$. Pak jsou dvě možnosti jak uvažovat tečný prostor v bodě a.
(A) Kraj ∂M je varieta dimenze $n-1$ (bez kraje), a tak existuje tečný prostor $T_a\partial M$ dimenze $n-1$.
(B) Uvažujme nyní druhou možnost, nejprve v situaci, kdy bod a patří do ∂H^n. Standardní možnost je definovat tečný vektor v bodě a stejně, tj. jako lineární zobrazení $\mathcal{C}^\infty(()U) \to \mathbb{R}$ splňující Leibnizovu vlastnost, kde U je otevřená podmnožina H^n obsahující bod a. Podle definice je $U \subset H^n$ otevřená, pokud existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, pro kterou $U = V \cap H^n$. Tečný vektor $\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_a : f \in \mathcal{C}^\infty(V) \mapsto \mathbb{R}$ má stejnou definici jako pro vnitřní bod M. Případ $j = 2, \dots, n$ je zřejmě dobře definován hodnotami f na H^n a pro $j = 1$ stačí použít předpoklad, že existuje příslušná parciální derivace k vysvětlení, že derivace zleva je také určena pouze hodnotami f na H^n. V tomto případě je T_aM tedy vektorový prostor dimenze n.

Stejná situace jako v tomto modelovém případě $a \in H^n$ nastane i v případě $a \in \partial M$, pokud použijeme souřadnice definované pomocí mapy v okolí bodu a. Je-li $a \in \partial M$ a $a \in U$, kde (U, φ) je mapa, pak vektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$ jsou definovány stejně, tj. pomocí vztahu

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,|_a(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(a)).$$

Funkce $f \circ \varphi^{-1}$ je hladká v okolí $\varphi(a) \in \partial(H^n)$ a její parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_1}|_a$ je dobře definovaná a nezávislá na jejím hladkém rozšíření, neboť je možné tuto derivaci spočítat z hodnot samotné funkce $f \circ \varphi^{-1}$ pomocí příslušné jednostranné derivace.

5.6 Indukované mapy na T_aM.

Nechť M je varieta s krajem a nechť v je pevný vektor v bodě $a \in M$. Pro každou mapu (U, φ) takovou, že $a \in U$, lze tedy napsat v jako lineární kombinaci vektorů $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_a\}$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}|_a.$$

Tedy výběr mapy (U, φ) indukuje mapu $(\mathcal{U} = T_aM, \Phi)$, $\Phi : T_aM \to \mathbb{R}^n$ danou předpisem

$$\Phi(v) = (\alpha_1(a), \dots, \alpha_n(a)) \in \mathbb{R}^n.$$

V jiné mapě (U', φ') témuž vektoru odpovídají jiné souřadnice $\alpha'_i(a)$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i(a) \frac{\partial}{\partial x'_i}|_a.$$

Chceme teď vypočítat, jak spolu souvisí souřadnice α_i a α'_j. Tedy budeme počítat přechodové zobrazení mezi dvěma indukovanými mapami $(\mathcal{U} = T_aM, \Phi)$, a $(\mathcal{U}' = T_aM, \Phi')$ na T_aM.

Pokud napíšeme přechodové zobrazení $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ na definičním oboru $\varphi(U \cap U')$ pro názornost ve tvaru $x'_i = x'_i(x_1, \ldots, x_n)$, pak pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial (f \circ (\varphi)^{-1})}{\partial x_i} = \frac{\partial [(f \circ (\varphi')^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})]}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'_k}(f) \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(\varphi(a)),$$

tj.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(\varphi(a)) \frac{\partial}{\partial x'_k}\Big|_a.$$

Pro souřadnice vektoru $v \in T_mM$ v různých mapách tedy dostaneme

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a) \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(\varphi(a)) \right) \frac{\partial}{\partial x'_k}\Big|_a,$$

tedy

$$\alpha'_k(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a) \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(\varphi(a)). \tag{5.1}$$

Matice přechodu mezi dvěma bazemi indukovanými na T_aM pomocí dvou map na M je tedy dána Jacobiho maticí všech parciálních derivací přechodového zobrazení mezi dvěma zvolenými mapami v daném bodě.

V začátcích diferenciální geometrie byla tato vlastnost vzata za základ definice tečného vektoru. Tenkrát se důsledně všechny pojmy vyjadřovaly vzhledem k mapám a tečný vektor se ztotožňoval s příslušnými souřadnicemi. Tečný vektor byl tedy systém vektorů v $\mathbb{R}^n$, pro každou mapu jeden, které byly spolu svázány příslušnými transformačními vztahy 5.1. Požadované operace s vektory se prováděly ve zvolené mapě a nakonec bylo třeba ověřit, že výsledek operace se správně transformuje při změně mapy. Tak například jen ověření jednoduchého faktu, že součet dvou vektorů nebo násobek vektoru číslem je opět vektor, vyžadovalo popsat mnoho papíru.

Zavedení bezsouřadnicových definic tedy bylo podstatným pokrokem ve vývoji diferenciální geometrie. Definice tečného vektoru pomocí vlastnosti derivace pro prvky duálu na prostoru funkcí je typickým příkladem bezsouřadnicové definice.

5.7 Tečný fíbrovaný prostor, vektorová pole.

Definice 5.17 *Nechť M je varieta s krajem. Pak disjunktní sjednocení $\cup_{a \in M} T_aM$ označíme TM a nazveme* **tečný fíbrovaný prostor.** *Projekce $\pi : TM \to M$ je definována předpisem $\pi(X) = a$, pokud $X \in T_aM$.*

Vektorové pole *X na M je zobrazení, které každému prvku $a \in M$ přiřadí vektor $X(a) \in T_aM$.*

Řekneme, že vektorové pole X je **hladké,** *pokud pro libovolnou mapu (U, φ) platí, že koeficienty $\alpha_i(a); i = 1, \ldots, n$ v rozkladu $X(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}|_a$ jsou hladké funkce na U. Protože hodnoty vektorových polí v každém bodě patří do vektorového prostoru, je prostor $\mathcal{X}(M)$ všech hladkých vektorových polí také vektorový prostor s operacemi definovanými takto:*

$$[X+Y](a) := X(a) + Y(a)$$
$$[\alpha X](a) := \alpha(X(a))$$

kde $X, Y \in \mathcal{X}(M), a \in M, \alpha \in \mathbb{R}$.

Definice 5.18 (Lieova algebra) *Nechť L je (reálný) vektorový prostor. Předpokládejme, že je dáno zobrazení (nazývané závorka)*

$$[\_,\_] : L \times L \to L;\ \ (X, Y) \in L \times L \mapsto [X, Y] \in L,$$

které splňuje následující axiómy:

1. *$[\_,\_]$ je bilineární zobrazení;*
2. *$[X, Y] = -[Y, X]$;*
3. *(Jacobiho identita) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.*

Pak dvojici $(L, [\_,\_])$ nazveme **Lieova algebra**.

Jsou-li $(L_1, [\_,\_]_1)$ a $(L_2, [\_,\_]_2)$ dvě Lieovy algebry a Φ je zobrazení L_1 do L_2, pak řekneme, že lineární zobrazení Φ je **homomorfismus Lieových algeber**, *pokud*

$$\forall X, Y \in L_1\ \ \Phi([X, Y]_1) = [\Phi(X), \Phi(Y)]_2.$$

Je-li navíc Φ izomorfismus vektorových prostorů L_1 a L_2, řekneme, že Φ je izomorfismus Lieových algeber L_1 a L_2.

Klíčovou roli hrají Lieovy algebry například v teorii Lieových grup a jejich reprezentací.

Ve cvičení si ukážeme, že zobrazení $X : a \in M \mapsto X(a) \in T_aM$ je hladké vektorové pole právě když $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ platí $X(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Také si dokážeme následující tvrzení.

Definice 5.19 *Nechť X, Y jsou dvě hladká vektorová pole na varietě M. Jejich komutátor $[X, Y]$ je definován jako zobrazení, které každé funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ přiřadí funkci*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Věta 5.20 *Pokud $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, pak $[X, Y]$ je také (hladké) vektorové pole. Prostor $\mathcal{X}(M)$ spolu se závorkou definovanou pomocí komutátoru je Lieova algebra.*

První tvrzení vyžaduje ověření přímým výpočtem, který provedeme na cvičení.

Vlastnosti (1) a (2) z definice Lieovy jsou ihned vidět z definice komutátoru, vlastnost (3) (Jacobiho identita) se dokáže jednoduchým výpočtem.

Poznámka 5.21 *Prostor $\mathcal{X}(M)$ všech vektorových polí s Lieovou závorkou je jedním ze základních příkladů tzv. Lieových algeber. V tomto případě je $\mathcal{X}(M)$ vektorový prostor nekonečné dimenze. Většina konkrétních a užitečných Lieových algeber jsou vektorové prostory konečné dimenze.*

Cvičení k 7. přednášce.

Příklad 1. Ukažte, že vektorové pole $X : a \in M \mapsto X(a) \in T_aM$ je hladké vektorové pole právě když platí podmínka

$$(*)\ \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)\ \ X(f) \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Řešení.

(1) Nechť je X hladké vektorové pole, tj. nechť pro každou mapou platí, že koeficienty α_j v rozkladu

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j(a) \frac{\partial}{\partial x_j}|_a$$

jsou hladké funkce. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ a každou mapu (U, φ) platí

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{C}^\infty(U),$$

tedy $X(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
(2) Předpokládejme, že platí podmínka (*), nechť (U, φ) je mapa a $\varphi_j(x) = x_j$ je souřadnicová funkce na U definovaná pomocí této mapy. Pak $X(\varphi_j) = \alpha_j, j = 1, \ldots, n$ a tedy $\alpha_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Všimněte si, že jsme zde mlčky použili ztotožnění $\iota_* : T_aU \to T_aM$.

Příklad 2.

Nechť X, Y jsou 2 hladká vektorová pole na varietě M. Jejich komutátor $[X, Y]$ je definován jako zobrazení, které každé funkci $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ přiřadí funkci

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Pokud $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, pak je komutátor $[X, Y]$ také (hladké) vektorové pole. Prostor $\mathcal{X}(M)$ spolu se závorkou definovanou pomocí komutátoru je Lieova algebra.

Řešení.

Pro každá dvě vektorová pole X, Y a libovolné dvě funkce f, g platí:

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) = \\
&= X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - \\
&- Y(X(f))g - X(f)Y(g) - Y(f)X(g) - fY(X(g)) = \\
&= [X,Y](f)g + f[X,Y](g).
\end{aligned}$$

Lieova závorka je tedy také vektorové pole. (Z výpočtu je vidět, že pouhé složení dvou polí vektorovým polem není, neboť členy tvaru $X(f)Y(g)$ se neodečtou.)

Komutátor vektorových polí je bilineární zobrazení přímo podle definice komutátoru. Při záměně pořadí evidentně mění znaménko. Zajímavé je ověřit Jacobiho identitu.Ta platí kdykoliv je závorka definovaná jako komutátor:

$$\begin{aligned}
& [X[Y,Z]] + [Y[Z,X]] + [Z[X,Y]](f) = \\
= \ & X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y + \\
+ \ & Z(XY - YX) - (XY - YX)Z = \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Příklad 3.

Nechť X, Y, Z jsou 3 vektorová pole na $\mathbb{R}^3$ definována předpisem

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \ \ Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \ \ Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Vypočítejte $[X, Y]$, $[Y, Z]$, $[Z, X]$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= (y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}) - (z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}) = \\
&= yz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - yx\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + zx\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + y\frac{\partial f}{\partial x} - \\
& \quad -[zy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + zx\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}] - x\frac{\partial f}{\partial y} = -Z
\end{aligned}$$

Stejně se vypočítá $[Y,Z] = -X;\ [Z,X] = -Y$.

Příklad 4. Nechť $L \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ je 3-dimenzionální vektorový podprostor generovaný prvky $X,Y,Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$. Ukažte, že pokud pro L definujeme závorku pomocí komutátoru, je L Lieova algebra.

Řešení. Z výsledku předchozího příkladu a ze zřejmého faktu, že $[X,X] = [Y,Y] = [Z,Z] = 0$ plyne, že komutátor libovolných dvou prvků z L zase patří do L. Tedy L se závorkou definovanou jako komutátor vektorových polí je Lieova algebra.

Příklad 5. Uvažujme $L' = \mathbb{R}^3$ se závorkou definovanou pomocí vektorového součinu dvou vektorů. Ukažte, že L' je Lieova algebra.

Řešení. Víme, že zobrazení $\times : L' \times L' \to L'$ definované předpisem $u,v \in \mathbb{R}^3 \mapsto u \times v \in \mathbb{R}^3$ je bilineární zobrazení a že mění znaménko, pokud přehodíme pořadí činitelů. Zbývá tedy ukázat, že je splněna Jacobiho identita. Místo abychom to spočítali přímým výpočtem, můžeme použít výsledek Příkladu 3. takto:

Je-li e_1, e_2, e_3 kanonická baze $L' = \mathbb{R}^3$, pak víme, že

$$e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1, e_3 \times e_1 = e_2.$$

Nechť $L \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ je generováno bazí X,Y,Z z příkladu 3, pak zobrazení $\Phi : L \to L'$ definované zobrazením bazí $X \mapsto e_2, Y \mapsto e_1, Z \mapsto e_3$ převádí komutátor vektorových polí v L na vektorový součin v $L' = \mathbb{R}^3$. A protože Jacobiho identita platí v L, platí i v L'. Zobrazení Φ je izomorfismu vektorových prostorů a převádí závorku v L na závorku v L', tedy Lieovy algebry L a L' jsou izomorfní.

Příklad 6. Vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ jsou dána předpisem

$$X = xy\frac{\partial}{\partial x};\ Y = y\frac{\partial}{\partial y}$$

a zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je dáno vzorcem $F(x,y,z) = x^2y$.

(1) Vypočítejte $[X,Y]([1,1,0])$;

(2) Ukažte, že $F(X+Y) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ a vypočítejte $[F(X+Y)]([1,1,0])$;

(3) Vypočítejte $X(F)([1,1,0])$.

Řešení.

(1)

$$[X,Y](f) = xy\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial f}{\partial y}) - y\frac{\partial}{\partial y}(xy\frac{\partial f}{\partial x}) = -xy\frac{\partial f}{\partial x}$$

a tedy $[X,Y]([1,1,0]) = -\frac{\partial}{\partial x}|_{[1,1,0]}$.

(2) Zobrazení $X+Y : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ složíme se zobrazením

$$F : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3), F : g \to Fg,$$

výsledkem je zobrazení

$$F(X+Y) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3).$$

$$[F(X+Y)]([1,1,0]) = x^2y\left(xy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)|_{[1,1,0]} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)|_{[1,1,0]}.$$

(3) $X(F)([1,1,0]) = [xy\frac{\partial F}{\partial x}]([1,1,0]) = 2$.

8. přednáška

5.8 Kotečný prostor, kotečné zobrazení, diferenciál funkce

Definice 5.22 *Je-li $a \in M$, pak prostor $T_a^*M := (T_aM)^*$ nazveme* **kotečný prostor k M v bodě a.**

Kotečný fibrovaný prostor *je definován jako disjunktní sjednocení $T^*M := \cup_{a\in M} T_a^*M$ spolu s projekcí $\pi : T^*M \to M$, která zobrazí celý kotečný prostor T_a^*M do bodu a.*

Je-li $F : M \to N$ hladké zobrazení, $m \in M$ pak definujeme **kotečné zobrazení** *$F^*(m) : T^*_{F(m)}N \to T_m^*M$ jako duální zobrazení k $F_*(m)$, tj.*

$$[F^*(m)(\alpha)](v) = \alpha[F_*(m)(v)]$$

kde $\alpha \in T^*_{F(m)}N, v \in T_mM$.

Interpretace vektoru $v \in T_mM$ jako prvku duálu k prostoru funkcí je založena na zobrazení, které dvojici $(v, f) \in T_mM \times \mathcal{C}^\infty(M)$ přiřadí číslo $v(f) \in \mathbb{R}$. Toto zobrazení se však dá také interpretovat druhým způsobem – jako zobrazení, které každé funkci f přiřadí lineární zobrazení $v \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$, tj. prvek kotečného prostoru T_m^*M. To umožňuje dát korektní matematickou interpretaci toho, co pro nás byly zatím pouze symboly – interpretaci symbolu $df, f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, a symbolů dx_i v popisu diferenciálních forem.

Definice 5.23 *Nechť $f \in \mathcal{C}^\infty(M), m \in M$. Pak diferenciál $df(m)$ funkce f v bodě m je prvek T_m^*M definovaný rovností*

$$[df(m)](v) = v(f), \quad v \in T_mM.$$

Zobrazení

$$\begin{aligned} df : M &\to T^*M \\ m &\mapsto df(m) \end{aligned}$$

se nazývá **diferenciál funkce** *f.*

Poznámka 5.24 *Tedy df je „duální“ pojem k pojmu vektorového pole. Je to speciální případ zobrazení $\omega : M \to T^*M$ takového, že $\omega(m) \in T_m^*M$, tj. $\pi \circ \omega = \mathrm{Id}$. Zobrazení tohoto druhu budeme nazývat diferenciální formy stupně 1. Od případu forem v otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$ se to tedy liší tím, že pro variety jsou prostory T_m^*M v různých bodech různé (a také tím, že prostor T_m^*M není jen symbol, ale má jasný geometrický význam).*

Poznámka 5.25 *Nechť (U, φ) je mapa na M. Nechť $i = 1, \ldots, n$. Pak $\frac{\partial}{\partial x_i}$ je vektorové pole na U. Podobně, označíme-li komponentu φ_i zobrazení φ jednoduše x_i, pak dx_i je diferenciální forma stupně 1 na U. Všimněte si, že*

$$dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i) = \delta_{ij}.$$

Tedy v každém bodě $m \in M$ jsou $\{dx_i\}$ a $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ jsou duální báze v T_m^*M, resp. v T_mM.

Dále, je-li $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, pak lze v souřadnicích (U, φ) napsat dg v kanonické bázi

$$dg = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i, \quad \alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Pak ale

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = [\frac{\partial}{\partial x_j}](g) = [dg]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i\right]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \alpha_j.$$

Tedy jsme dostali starou známou formuli, která byla jedním ze základů definice de Rhamova vnějšího diferenciálu:

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i.$$

Kapitola 6

Přehled multilineární algebry

V algebře se většinou pracuje s definicí tensorového součinu modulů nad daným okruhem, ale tato definice je velmi abstraktní a těžká na pochopení a porozumění. Mnohem jednodušší je situace pro tensorový součin vektorových prostorů, kde je možné popsat výsledný součin explicitně pomocí vhodných bazí.

V této kapitole budeme definovat tenzorový součin vektorových prostorů, tensorovou algebru a vnější algebru daného vektorového prostoru. Všechny vektorové prostory v této kapitole budou reálné vektorové prostory a pokud nebude řečenou výslovně jinak, budou mít konečnou dimenzi. Celá tato kapitola je součást multilineární algebry, se kterou jste s již ve speciálním případě setkali v lineární algebře v části věnované bilineárním formám a skalárnímu součinu.

6.1 Tenzorový součin dvou vektorových prostorů

Připomeňme si rychle nejzákladnější fakta z lineární algebry. Z definice lineárního zobrazení ihned plyne, že každé lineární zobrazení je určeno jednoznačně svými hodnotami na zvolené bazi, které mohou být zvoleny libovolně. Tedy dimenze prostoru všech lineárních zobrazení z V do W je součin $\dim V \dim W$. Duální prostor V^* je speciální případ všech lineárních funkcí na V. Specielně $\dim V^* = \dim V$.

Je-li $e_i, i = 1, \ldots, n$ baze V, pak existuje k ní duální baze ε^j prostoru V^* daná podmínkou

$$\varepsilon^j(e_k) = \delta^j_k,$$

kde δ^j_k je Kroneckerovo delta. Prvky duální baze jsou určeny svými hodnotami na zvolené bazi obzvlášť jednoduchým předpisem.

Existuje kanonický isomorfismus $(V^*)^* \simeq V$ daný zobrazením

$$\iota : V \to (V^*)^*, \iota(v)(\alpha) = \alpha(v),\ \alpha \in V^*, v \in V.$$

Základní verze tenzorového součinu dvou vektorových prostorů není nic jiného než jiný název pro prostor bilineárních forem. Nejjednodušší a nejnázornější verze je tato.

Nechť V a W jsou dva vektorové prostory a V^* a W^* jsou jejich duály. Prostor V^* je tedy prostor všech lineárních forem na V, tj. prostor všech lineárních funkcí z V do $\mathbb{R}$, stejně pro W.

Připomeňme si nyní definici bilineárního zobrazení.

Definice 6.1 *Nechť V, W a Z jsou vektorové prostory. Řekneme, že zobrazení $\varphi : V \times W \to Z$ je* **bilineární zobrazení,** *pokud platí, že při zafixování hodnoty kterékoliv ze dvou proměnných, je výsledné zobrazení lineární zobrazení ve zbývající proměnné. Explicitní tvar definice je:*

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \varphi(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha\varphi(v, w_1) + \beta\varphi(v, w_2);\ v \in V, w_1, w_2 \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \\ &(2) \qquad \varphi(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha\varphi(v_1, w) + \beta\varphi(v_2, w);\ v_1, v_2 \in V, w \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pokud $Z = \mathbb{R}$, pak se zobrazení φ nazývá **bilineární forma.**
Množinu všech bilineárních forem na $V \times W$ označíme $B(V, W)$.

Prostor $B(V, W)$ je vektorový prostor, pokud definujeme součet bilineárních forem a jejich násobek reálným číslem stejně jako pro prostor všech reálných funkcí na daném definičním oboru. Explicitně:

$$\begin{aligned} [\varphi_1 + \varphi_2](v, w) &= \varphi_1(v, w) + \varphi_2(v, w);\ \varphi_1, \varphi_2 \in B(V, W); v \in V, w \in W, \\ [\alpha\varphi](v, w) &= \alpha\varphi(v, w);\ \varphi \in B(V, W), v \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Je snadné sestrojit bazi prostoru $B(V, W)$ pomocí bazí prostorů V^* a W^*.

Lemma 6.2 *Pro $\alpha \in V^*$ a $\beta \in W^*$ definujeme bilineární formu $\alpha \otimes \beta \in B(V, W)$ předpisem*

$$[\alpha \otimes \beta](v, w) = \alpha(v)\beta(w). \tag{6.1}$$

Je-li $\alpha^i, i = 1, \ldots, n$ baze V^* a $\beta^j, j = 1, \ldots, m$ baze W^*, pak $\varphi^{ij} := \alpha^i \otimes \beta^j; i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$ je baze $B(V, W)$. Tedy $\dim B(V, W) = \dim V \dim W$.

Důkaz.
Zvolme baze $\{v_i\}$ prostoru V a $\{w_j\}$ prostoru W, duální ke zvoleným bazím V^*, resp. W^*. To znamená, že

$$\alpha^i(v_k) = \delta^i_k;\ \beta^j(w_\ell) = \delta^j_\ell,$$

kde δ je Kroneckerův symbol ($\delta^i_j = 0$ pro $i \neq j, \delta^i_i = 1$.)

Základní vlastností prvků φ^{ij} je, že $\varphi^{ij}(v_k, w_\ell) = \delta^i_k \delta^j_\ell =: \delta^{ij}_{k\ell}$.
(1) Ukážeme, že φ^{ij} jsou lineárně nezávislé. Nechť $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi^{ij} = 0$, kde 0 je nulový vektor v $B(V, W)$. Pak $0 = \varphi(v_k, w_\ell) = a_{k\ell}$ pro všechny k, ℓ.
(2) Nyní ukážeme, že φ^{ij} generují celé $B(V, W.)$ Stejně jako tomu je u lineárních zobrazení, bilineární zobrazení je určeno jednoznačně svými hodnotami na dvojicích prvků (v_i, w_j), kde $\{v_i\}$, resp. $\{w_j\}$ jsou baze V, resp. W. Tyto hodnoty mohou být libovolné, takže dimenze prostoru všech bilineárních form $B(V, W)$ je rovna součinu $\dim V \dim W$. Tedy systém φ^{ij} je lineárně nezávislý a počet prvků systému je roven dimenzi, je to tedy baze. □

Definice 6.3 *Tenzorový součin $V^* \otimes W^*$ definujeme jako prostor $B(V, W)$ všech bilineárních forem na $V \times W$.*

Vektorový prostor je kanonicky izomorfní se svým biduálem. Tedy tenzorový součin $V \otimes W$ definujeme jako prostor $B(V^*, W^*)$.

6.2 Kovariantní tenzory

Speciální případ tenzorového součinu je případ $V^* \otimes V^* \simeq B(V, V)$. Tento případ se snadno rozšíří na tenzorový součin k kopií prostoru V^* následujícím způsobem.

Definice 6.4 *Nechť k je přirozené číslo.* **Kovariantní tenzor řádu** *k na vektorovém prostoru V je reálné k-lineární zobrazení*

$$T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

Zobrazení T je k-lineární, pokud po zafixování libovolných $k-1$ argumentů je zobrazení lineární ve zbylém argumentu. Množinu všech kovariantních tenzorů řádu k budeme označovat

$$T^k(V) \simeq \otimes^k(V^*) \simeq \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k}.$$

Tenzor řádu 0 *definujeme jako reálné číslo, tj.* $T^0(V) := \mathbb{R}$. *(Je to funkce závisící na 0 vektorech.)*

Prostory $T^k(V), k \geq 0$ jsou reálné vektorové prostory s obvyklou definicí sčítání a násobení reálným číslem (jsou to speciální případy reálných funkcí):

$$(aT)(X_1 \ldots, X_k) = a(T(X_1, \ldots, X_k)), a \in \mathbb{R}, X_i \in V \tag{6.2}$$

$$(T + T')(X_1, \ldots, X_k) = T(X_1, \ldots, X_k) + T'(X_1, \ldots, X_k), X_i \in V. \tag{6.3}$$

Definice 6.5 *Nechť $R \in T^k(V)$ a $S \in T^\ell(V)$, pak definujeme kovariantní tenzor $R \otimes S \in T^{k+\ell}(V)$ předpisem*

$$[R \otimes S](X_1, \ldots, X_{k+\ell}) = R(X_1, \ldots, X_k)S(X_{k+1}, \ldots, X_{k+\ell}).$$

Tenzorový součin je asociativní, můžeme tedy psát tenzorový součin tří a více kovariantních tenzorů bez závorek, bez určení pořadí násobení.

Je snadné si rozmyslet, jak najít vhodnou bazi prostoru $T^k(V)$ a jaká je jeho dimenze.

Lemma 6.6 *Nechť V je vektorový prostor dimenze n a nechť $\{e_i\}_{i=1}^n$ a $\{\varepsilon^j\}_{j=1}^n$ jsou duální baze prostorů V a V^*.*

Pak množina všech k-tenzorů tvaru

$$\varepsilon^A = \varepsilon^{a_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{a_k}; A = (a_1, \ldots, a_k);\ 1 \leq a_1, \ldots, a_k \leq n$$

je baze prostoru $T^k(V)$. Jeho dimenze je tedy rovna n^k.

Důkaz.

Ukážeme, že množina

$$\mathcal{B} = \{\varepsilon^A := \varepsilon^{a_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{a_k};\ 1 \leq a_1, \ldots, a_k \leq n\}$$

(jejíž prvky jsou parametrizované multiindexem $A = (a_1, \ldots, a_k)$) je baze prostoru $T^k(V) = \otimes^k(V^*)$. Je-li $B = (b_1, \ldots, b_k); 1 \leq b_1, \ldots, b_k \leq n$ multiindex, pak budeme definovat k-tici vektorů

$$e(B) = (e_{b_1}, \ldots, e_{b_k}) \in \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k}.$$

Důležitá vlastnost tenzorů $T \in T^k(V)$ řádu k je že jsou jednoznačně určeny svými hodnotami na k-ticích vektorů $e(B)$ a že tyto hodnoty je možné zvolit libovolně. Z toho ihned plyne, že dimenze prostoru $T^k(V)$ je rovna n^k.

Víme, že platí

$$\varepsilon^A(e(B)) = \delta^A_B.$$

Pro důkaz lemmatu stačí ukázat, že prvky $\varepsilon^A, |A| = k$ (jejichž počet je roven n^k) generují celý prostor $T^k(V)$.

Předpokládejme tedy, že $T \in T^k(V)$ a definujme čísla $T_A = T_{a_1 \ldots a_k} = T(e(A))$. Potom pro prvek $T' = \sum_A T_A \varepsilon^A$ platí

$$T'(e(B)) = \sum_A T_A \varepsilon^A(e(B)) = \sum_A T_A \delta^A_B = T_B.$$

Z toho plyne, že $T' = T$, protože tyto dva tenzory mají stejné hodnoty na prvcích $e(B)$.

Je užitečné si zapamatovat, že souřadnice tenzoru $T \in T^k(V)$ vzhledem k bazi $\mathcal{B}$ jsou dány vztahem

$$T_{a_1 \ldots a_k} = T(e_{a_1}, \ldots, e_{a_k}) = T(e(A)). \tag{6.4}$$

$\square$

Definice 6.7 *Nechť $V_j, j = 0, \ldots, \infty$, je posloupnost vektorových prostorů. Jejich direktní součet $\oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ je vektorový prostor všech posloupností*

$$(v_0, v_1, \ldots, v_j, \ldots); v_j \in V_j,$$

které mají jen konečně mnoho nenulových prvků. Sčítání a násobení reálným číslem je definováno po komponentách. Jednotlivé prostory V_j jsou standardně ztotožňovány s odpovídajícími podprostory

$$\{v = \{v_i\} \in \oplus_{i=0}^{\infty} V_i; v_i = 0, i \neq j\}$$

a $\oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ je pak opravdu direktní součet V_j, tj. každý prvek $v \in \oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j; \quad v_j \in V_j.$$

Definice 6.8 (Algebra kovariantních tenzorů.) *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze.* **Tenzorová algebra** *kovariantních tenzorů $T^{kov}(V)$ je direktní součet*

$$T(V^*) = \oplus_{k=0}^{\infty} T^k(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k (V^*)$$

a její prvky se nazývají **kovariantní tenzory**.

Připomeňme, že násobení v tenzorové algebře $T(V^*)$ je definováno předpisem

$$S \in T^k(V), T \in T^\ell(V) \to S \otimes T \in T^{k+\ell}(V);\ [S \otimes T](v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = S(v_1, \ldots, v_k)\tau(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell}),$$

kde $v_1, \ldots, v_{k+\ell} \in V$. Pro prvek z $T^0(V)$ jde o násobení příslušnou konstantou. Tenzorový součin dvou prvků z $T(V^*)$ se definuje pomocí distributivního zákona.

Tenzorová algebra $T(V^*)$ je (nekonečně dimenzionální) asociativní algebra s jednotkou (její jednotka je prvek $1 \in T^0(V)$). Prostor V^* budeme ztotožňovat s prostorem $T^1(V)$ a brát jej jako podprostor algebry $T(V^*)$. Tenzorové násobení je asociativní, ale není komutativní.

6.3 Kontravariantní a smíšené tensory.

Algebra kovariantních tenzorů je založena na prvcích duálu $\omega \in V^*$ uvažovaných jako lineární funkce na V a na jejich tenzorových součinech, definovaných jako součiny lineárních funkcí, které jsou multilineární.

Je jen věcí konvence, jestli vezmeme jako základní vektorový prostor vektorový prostor V nebo jeho duál V^*. Pokud začneme s prostorem V^*, dostaneme stejným postupem algebru kontravariantních tenzorů, jejichž základním příkladem je prostor vektorů $T^1(V^*) \simeq (V^*)^* \simeq V$. Kontravariantní tenzory jsou tedy vektory (interpretované jako prvky biduálu) a jejich tenzorové součiny.

Definice 6.9 (Algebra kontravariantních tenzorů.) *Nechť k je přirozené číslo.* **Kontravariantní tensor řádu** *k na vektorovém prostoru V je reálné k-lineární zobrazení*

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{k} \to \mathbb{R}$$

Množinu všech kontravariantních tensorů řádu k budeme označovat

$$T_k(V) \simeq T^k(V^*) \simeq \otimes^k(V) \simeq \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k}.$$

Tensor řádu 0 *definujeme jako reálné číslo, tj. $T_0(V) := \mathbb{R}$. Prostory $T_k(V), k \geq 0$ jsou reálné vektorové prostory.* **Tenzorová algebra** *kontravariantních tenzorů $T(V)$ je direktní součet*

$$T(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} T_k(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k (V)$$

a její prvky se nazývají **kontravariantní tenzory**. *Násobení v $T(V)$ je definováno stejně jako pro kovariantní tenzory. Stačí jen prostor V nahradit prostorem V^*.*

Je možné prostory kovariantních a kontravariantních tenzorů mezi sebou tenzorově vynásobit a definovat prostory smíšených tenzorů.

Definice 6.10 (Algebra smíšených tenzorů.) *Nechť V je vektorový prostor a V^* je jeho duál.* **Prostor k-krát kovariantních a ℓ-krát kontravariantních tenzorů** $T^k_\ell(V)$ *je definován jako tensorový součin*

$$T^k_\ell(V) = T^k(V) \otimes T_\ell(V) = [\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k}] \otimes [\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{\ell}]$$

a její prvky se nazývají **smíšené tenzory typu** (k, ℓ).

Označení. Nechť V má bázi $e_1, \ldots, e_n$. Označme $\varepsilon^1, \ldots \varepsilon^n$ bázi V^* duální k bázi $e_1, \ldots, e_n$. V dalším budeme používat jako indexy k-tice tvaru $A = (a_1, \ldots, a_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$, označme symbolem $|A|$ počet jejích členů, tj. $|A| = k$. Pro indexovou k-tici A zavedeme označení

$$e_A := e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_k};\ \varepsilon^A := \varepsilon^{a_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{a_k}$$

$$\varepsilon(B) = (\varepsilon^{b_1}, \ldots, \varepsilon^{b_k});\ e(B) = (e_{b_1}, \ldots, e_{b_k}).$$

Pak

$$e_A(\varepsilon(B)) = \delta^B_A = \delta^{b_1}_{a_1} \ldots \delta^{b_k}_{a_k}; \varepsilon^A(e(B)) = \delta^A_B.$$

Nejdříve si rozmyslíme, jak jsou právě zavedené vektorové prostory veliké, najdeme jejich vhodné baze. Z multilinearity prvků v tenzorové mocnině plyne ihned, že každý prvek $\omega \in T_\ell(V)$ je jednoznačně určen svými hodnotami $\omega(\varepsilon(B)), |B| = k$, které mohou být libovolné. Z toho ihned plyne, že dimenze prostoru $T^k(V)$ je rovna n^ℓ. To je podstata důkazu následující věty.

Věta 6.11 *Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$, resp. $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ jsou duální baze V, resp. V^*.*
(i) Množina $\{e_A; |A| = \ell\}$ tvoří bázi $T_\ell(V)$. Dimenze $T_\ell(V)$ je rovna n^ℓ. Obecný prvek $\alpha \in T_\ell(V)$ se dá napsat ve tvaru

$$\alpha = \sum_{a_1, \ldots, a_k = 1}^{n} \alpha^{a_1 \ldots a_k} e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_k} = \sum_{A, |A| = \ell} \alpha^A e_A.$$

(ii) Množina $\{e_A \otimes \varepsilon^B; |A| = k, |B| = \ell\}$ tvoří bázi $T^k_\ell(V)$. Dimenze $T^k_\ell(V)$ je rovna $n^{k+\ell}$. Obecný prvek $T \in T^k_\ell(V)$ se dá napsat ve tvaru

$$T = \sum_{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell = 1}^{n} T^{b_1, \ldots, b_\ell}_{a_1 \ldots a_k} \varepsilon^{a_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{a_k} \otimes e_{b_1} \otimes \ldots \otimes e_{b_\ell} = \sum_{A,B} T^B_A \varepsilon^A \otimes e_B.$$

Důkaz.

Nechť $\varepsilon^1, \ldots \varepsilon^n$ je báze V^*, duální k bázi $e_1, \ldots, e_n$ prostoru V.
(i) Nejprve ukážeme, že zmíněný systém prvků generuje $T_\ell(V)$. Je-li $\alpha \in T_\ell(V)$ libovolný prvek, pak pro libovolnou ℓ-tici $A = (a_1, \ldots, a_\ell)$ čísel mezi 1 a n definujeme čísla $\alpha^A := \alpha(\varepsilon(A))$. Pak $\alpha = \sum_{A, |A| = \ell} \alpha^A e_A$, neboť levá i pravá strana mají zřejmě tytéž hodnoty na prvcích $\varepsilon(B), |B| = \ell$, totiž α^B.

Počet prvků v systému $e_A, |A| = \ell$ je n^ℓ, což je dimenze prostoru $T_\ell(V)$. Je to tedy baze.
(ii) Druhá část tvrzení plyne z první části a z Lemmatu 6.6 . □

Poznámka.
(1) Zobrazení

$$\varphi : (v_1, \ldots, v_m) \in V \times \ldots \times V \ \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \in \otimes^m(V)$$

je multilineární zobrazení, které má následující vlastnost:

Je-li W libovolný vektorový prostor a je-li $\psi : V \times \ldots \times V \to W$ libovolné m-multilineární zobrazení, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\Psi : V^m \to W$ takové, že $\Psi \circ \varphi = \psi$.

Dokonce víc, dá se ukázat, že tato vlastnost charakterizuje tenzorovou mocninu (až na izomorfismus) jednoznačně. Prostor $\otimes^m(V)$ je tedy univerzální objekt mající tuto vlastnost a to bývá standardní algebraická definice tenzorové mocniny.

Podobně je možné charakterizovat (tj. definovat) celou tenzorovou algebru $T(V)$ spolu s vnořením $\iota : V \mapsto T(V)$ jako univerzální objekt s vlastností:

Pro každou asociativní algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou a pro každé lineární zobrazení $j : V \to \mathcal{A}$ existuje právě jeden homomorfismus algeber $\Phi : T(V) \to \mathcal{A}$ takový, že $j = \Phi \circ \iota$.

(2) Tradičně se tenzory popisovaly pomocí souřadnic. To jest, pokud $e_1, \ldots, e_n$ je báze V a $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, pak lze obecný tenzor α typu $\binom{k}{\ell}$ zapsat jednoznačně ve tvaru

$$\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_\ell} \alpha^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\ell} \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_\ell} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}.$$

Pokud $e'_1, \ldots, e'_n$ je jiná báze V, $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n$ je duální báze V^* a pokud matice přechodu mezi těmito bázemi jsou dány pomocí $e'_i = \sum_k a^k_i e_k$, $\varepsilon'^j = \sum_l b^j_l \varepsilon^l$ (tedy matice (b^j_i) je inverzní k matici (a^j_i); dolní index je řádkový, horní sloupcový), pak

$$\alpha^{k_1\ldots k_s}_{l_1\ldots l_r} = \sum \alpha'^{i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_r} a^{k_1}_{i_1} \ldots a^{k_s}_{i_s} b^{j_1}_{l_1} \ldots b^{j_r}_{l_r}. \tag{6.5}$$

Pod pojmem tenzor se původně rozuměl systém všech souřadnicových vyjádření $\alpha^{i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_r}$ pro všechny báze prostoru V, které se mezi sebou transformují podle pravidla (6.5). Zpravidla se počítalo v jedné dané bázi a pak bylo třeba ověřovat nezávislost výsledku na volbě báze.

Cvičení k 8. přednášce.

Příklad 1. Jak vypadají prvky v $T^1(V)$?

Řešení. Kovariantní 1-tenzor je lineární zobrazení z V do $\mathbb{R}$, tedy je to kovektor, prvek duálu V^*.

Příklad 2. Jak vypadají prvky v $T^2(V)$?

Řešení. Kovariantní 2-tenzor je bilineární zobrazení z $V \times V$ do $\mathbb{R}$. Tedy podle naší předchozí definice je to prvek tenzorového součinu $V^* \otimes V^*$. Standardním příkladem je skalární součin na daném vektorovém prostoru.

Příklad 3. Nechť V má dimenzi n. Najděte příklad prvku v $T^n(V)$.

Řešení. Hledáme tedy příklad multilineárního zobrazení $V \times \ldots \times V$ (n kopií) do $\mathbb{R}$. Takovým příkladem je determinant. V tomto případě je $V = \mathbb{R}^n$ a determinant je kovariantní tenzor řádu n, daný předpisem

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \det A,$$

kde A je $n \times n$ matice, jejíž řádky jsou vektory $v_1, \ldots, v_n$. Tento tenzor je antisymetrický, což znamená, že změní znaménko pokud přehodíme dva argumenty.

Příklad 4. Definujte kovariantní 2-tenzor pomocí dvou kovariantních 1-tenzorů.

Řešení.

Předpokládejme, že $\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ jsou kovariantní 1-tenzory. Pak definujeme kovariantní 2-tenzor $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ předpisem

$$[\alpha_1 \otimes \alpha_2](X_1, X_2) = \alpha_1(X_1)\alpha_2(X_2).$$

Příklad 5. Definujte kovariantní $k + \ell$-tenzor pomocí kovariantního k-tenzoru S a kovariantního ℓ-tenzoru S..

Řešení.

Nechť $R \in T^k(V)$ a $S \in T^\ell(V)$, pak definujeme kovariantní tenzor $R \otimes S \in T^{k+\ell}(V)$ předpisem

$$[R \otimes S](X_1, \ldots, X_{k+\ell}) = R(X_1, \ldots, X_k) S(X_{k+1}, \ldots, X_{k+\ell}).$$

Příklad 6. Ukažte, že je tenzorový součin asociativní, tj. že platí pro $R \in T^j(V), S \in T^k(V), R \in T^\ell(V)$

$$(R \otimes S) \otimes T = R \otimes (S \otimes T).$$

Řešení. Je to důsledek toho, že násobení reálných čísel je asociativní.

Jako důsledek tohoto tvrzení vidíme, že můžeme psát tenzorový součin tří a více kovariantních tensorů bez závorek, bez určení pořadí násobení.

Příklad 6.

Nechť M je varieta a (U, φ) je mapa jejího atlasu, $a \in U$. Definujte indukovanou mapu $\Phi : T_aM \to \mathbb{R}^n$ na tečném prostoru T_aM.

Řešení. Množina tečných vektorů $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_a\}_{i=1}^n$ je baze T_aM, a tedy každý tečný vektor $v \in T_aM$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}|_a$. Zobrazení $\Phi(a) : T_aM \to \mathbb{R}^n$ definované vztahem $\Phi(a)(v) = \alpha(a) = (\alpha_1(a), \ldots, \alpha_n(a)) \in \mathbb{R}^n$ je indukovaná mapa na vektorovém prostoru T_aM.

Příklad 7.

Nechť M je varieta. Definujme množinu TM jako disjunktní sjednocení $TM = \cup_{a \in\ M} T_aM$ tečných prostorů v jednotlivých bodech variety M.

Definujte pomocí atlasu na M (standardní) atlas na TM a ukažte, že tento atlas definuje strukturu variety na TM. Tato varieta se nazývá tečný fíbrovaný prostor k varietě M.

Řešení.

Je-li (U, φ) je mapa na varietě M, definujeme množinu $U' := \cup_{a \in U} T_aM \subset TM$ a zobrazení $\varphi' : U' \to U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ předpisem

$$\varphi'(v) = (\varphi(a), \alpha(v)),$$

kde $\alpha(v) \in \mathbb{R}^n$ je definováno pomocí vztahu $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(v) \frac{\partial}{\partial x_i}|_a$.

Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ pro varietu M tedy indukuje atlas $(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)_{\alpha \in A}$. Přechodové zobrazení $\psi'_{\beta\alpha} = \varphi'_\beta \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}$ má tvar

$$\psi'_{\beta\alpha}(\varphi(a), \alpha) = (\varphi'(a), \alpha')$$

kde

$$\varphi'(a) = \psi_{\beta\alpha}(\varphi(a));\ \alpha'_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(\varphi(a)),$$

a je to tedy hladké zobrazení.

Připomeňme, že topologie pro součin dvou variet má bazi tvořenou součiny otevřených podmnožin v obou faktorech. Spočetnou bazi otevřených množin pro topologii na M vynásobíme v druhém faktoru spočetnou basí otevřených množin pro $\mathbb{R}^n$ a dostaneme spočetnou bazi otevřených množin pro topologii na TM.

Jsou-li (a, v) a (b, w) dva různé body v TM, pak buď $a = b$ a $v \neq w$ (v tom případě oddělíme v a w disjunktními okolími v $\mathbb{R}^n$), nebo $a \neq b$ (a pak oddělíme body a a b okolími v M).

9. přednáška.

6.4 Antisymetrické tenzory, vnější algebra

Tenzory jsou multilineární formy, tj. multilineární zobrazení s hodnotami v tělese reálných čísel. Velmi často se používají speciální podprostory tenzorové algebry těch multilineárních zobrazení, které se chovají předepsaným způsobem při záměně pořadí komponent prvků ve $V^* \times \ldots \times V^*$. Pro nás budou nejdůležitější tzv. antisymetrická multilineární zobrazení, o symetrických multilineárních zobrazeních si řekneme později jen základní informace.

Antisymetrické tenzory jsou multilineární formy T, jejichž hodnota změní znaménko, pokud zaměníme libovolnou dvojici jejich argumentů:

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

kde i, j jsou libovolné. Vzhledem k tomu, že grupa všech permutací je generovaná transpozicemi, je tato podmínka ekvivalentní s podmínkou formulovanou v následující definici.

Definice 6.12 *Označme symbolem S_k grupu všech permutací množiny $\{1, \ldots, k\}$. Nechť V je vektorový prostor a V^* jeho duál. Je-li $\omega \in T^k(V) = \otimes^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k}$ a $\pi \in S_k$, pak definujeme nový tenzor $\omega^\pi \in T^k(V)$ předpisem*

$$\omega^\pi(v_1, \ldots, v_k) = \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}).$$

Řekneme, že $\omega \in T^k(V)$ je **antisymetrické multilineární zobrazení**, *pokud $\omega^\pi = \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega$ pro všechny permutace $\pi \in S_k$.*

Je-li $k \geq 1$, pak vektorový prostor všech antisymetrických multilineárních zobrazení stupně k označíme $\Lambda^k(V^*)$ a nazveme k-tá **vnější mocnina** *vektorového prostoru V^*.*

Definujeme také $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$.

Poznámka. Jako pro každé multilineární zobrazení, i pro prvek $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ platí, že je jednoznačně určen svými hodnotami na k-ticích

$$e(B) = (e_{b_1}, \ldots, e_{b_k}); 1 \leq b_i \leq n.$$

Z antisymetrie prvků $\omega \in \Lambda^k(V)$ plyne, že pokud se v množině B některý index opakuje, je $\omega(e(B)) = 0$ a přehodíme-li pořadí prvků v k-tici, vynásobí se hodnota číslem ± 1 podle znaménka příslušné permutace. Zobrazení ω je tedy jednoznačně určeno svými hodnotami na k-ticích tvaru

$$e_J = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}), J = (j_1, \ldots, j_k) \subset \{1, \ldots, n\}; j_1 < \ldots < j_k.$$

které mohou být zvoleny libovolně.

V sekci o antisymetrických tenzorech budeme každou podmnožinu $I \subset \{1, \ldots, n\}$ uvažovat uspořádanou podle velikosti, tj. pokud $I = (i_1, \ldots, i_k)$, pak $i_1 < \ldots < i_k$. Symbolem $|I|$ budeme označovat počet prvků množiny I.

Výše uvedená poznámka se dá formálně shrnout do následujícího tvrzení.

Lemma 6.13 *Nechť $1 \leq k \leq n$, nechť $\{e_i\}_{i=1}^n$ je baze V a $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$ duální baze V^*.*
(1) Jsou-li $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V^*)$ a

$$\alpha(e_J) = \beta(e_J), J \subset \{1, \ldots, n\}, |J| = k;$$

pak $\alpha = \beta$.
(2) Nechť $I \subset \{1, \ldots, k\}; ||I| = k$. Pak existuje jediný tenzor $\varepsilon^I \in \Lambda^k(V^*)$ pro který

$$\varepsilon^I(e_J) = 0, \text{ pokud } I \neq J;\ \varepsilon^I(e_J) = 1, \text{ pokud } I = J.$$

Navíc systém $\{\varepsilon^I\}_{I \subset \{1,\ldots,n\}; |I|=k}$ je baze $\Lambda^k(V^*)$, tedy

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}.$$

Důkaz tohoto jednoduchého tvrzení přenecháme čtenáři.

Definice 6.14 *Přímý součet*

$$\Lambda^*(V^*) = \oplus_{k=0}^{n}\Lambda^k(V^*) \subset T(V^*)$$

nazveme **vnější algebrou** *vektorového prostoru V. Násobení ve vnější algebře je definováno takto: je-li* $\alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*)$*, pak* $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$ *je definováno předpisem*

$$[\alpha \wedge \beta](v_1, \ldots, v_{k+\ell}) := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})\beta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+l)}).$$

6.5 Symetrická algebra

Definice 6.15 *Řekneme, že* $T \in T^k(V^*)$ *je* **symetrické multilineární zobrazení***, pokud platí*

$$T(e(\pi(B))) = T(e(B))$$

pro všechna $e(B) = (e_{b_1}, \ldots, e_{b_k}) \in V \times \ldots \times V$ *a všechny permutace* $\pi \in S_k$*. Vektorový prostor všech symetrických k-multilineárních zobrazení označíme* $\mathrm{Sym}^k(V^*)$ *(někdy se značí* $\odot^k(V^*)$*) a nazveme k-tá* **symetrická mocnina** *vektorového prostoru* V^**. Direktní součet* $\mathrm{Sym}^*(V) = \oplus_{k=0}^{\infty}\mathrm{Sym}^k(V) \subset T(V)$ *nazveme* **symetrickou algebrou** *vektorového prostoru V. Násobení v symetrické algebře je definováno takto: je-li* $\alpha \in \mathrm{Sym}^k(V), \beta \in \mathrm{Sym}^\ell(V)$*, pak*

$$[\alpha \odot \beta](v_1, \ldots, v_{k+\ell}) := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})\beta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+\ell)}).$$

Násobení nehomogenních elementů je definováno pomocí distributivního zákona.

Symetrický tenzor $T \in \mathrm{Sym}^k V$ je jednoznačně určen svými hodnotami na k-ticích tvaru

$$e(B); B = (b_1, \ldots, b_k); 1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_k \leq n,$$

a tyto hodnoty mohou být libovolné. Odtud podobně jako pro vnější algebru plyne, že bází $\mathrm{Sym}^k V$ jsou prvky tvaru

$$\varepsilon^A; A = (a_1, \ldots, a_k); 1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq n,$$

které jsou definované vztahem

$$\varepsilon^A(e(B)) = \delta^A_B, B = (b_1, \ldots, b_k); 1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_k \leq n. \tag{6.6}$$

Je-li tedy V n-dimenzionální prostor, má $\mathrm{Sym}^k V$ dimenzi $\binom{n+k-1}{k}$ (spočítejte sami!).

Kapitola 7

Tenzorová pole.

Tenzorová algebra vektorového prostoru je jeden ze základních pojmů v multilineární algebře. Připomeňme si, že je-li V vektorový prostor a V^* jeho duál, pak prvky prostoru

$$T^k_\ell(V) = T^k(V) \otimes T_\ell(V) = [\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k}] \otimes [\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{\ell}]$$

(celkem k činitelů typu V^* a ℓ činitelů typu V) se nazývají **tenzory typu** $\binom{k}{\ell}$ nebo **k-krát kovariantní a ℓ-krát kontravariantní tenzory**.

Podobně jako vektorové pole X na varietě M bylo definováno jako zobrazení, které každému bodu $a \in M$ přiřadí prvek $X(a) \in T_aM$, je zřejmě možné definovat tenzorové pole na varietě takto:

Definice 7.1 *Nechť M je varieta s krajem, pak tenzorové pole T* **typu** $\binom{k}{\ell}$, *neboli tenzorové pole* **k-krát kovariantní a ℓ-krát kontravariantní**, *je zobrazení, které každému $a \in M$ přiřadí tenzor*

$$T(a) \in [\underbrace{T^*_aM \otimes \ldots \otimes T^*_aM}_{k}] \otimes [\underbrace{T_aM \otimes \ldots \otimes T_aM}_{\ell}.$$

Řekneme, že tenzorové pole T typu $\binom{k}{\ell}$ je **hladké**, *pokud pro každou mapu (U, φ) jsou koeficienty $T^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}$ v rozkladu*

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_\ell} T^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \otimes \ldots \otimes dx_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_\ell}}$$

hladké funkce na U. Prostor všech (hladkých) tenzorových polí typu $\binom{k}{\ell}$ na M označíme symbolem $\mathcal{T}^k_\ell(M)$.

Je-li T tenzorové pole, pak uzávěr množiny $\{m \in M; T(m) \neq 0\}$ označíme $\operatorname{supp} T$ *a nazveme* **nosič tenzorového pole T.**

Řekneme, že hladké tenzorové pole T typu $\binom{k}{0}$ je **(hladká) diferenciální forma stupně** *k, pokud pro všechny $a \in M$ je $T(a) \in \Lambda^k(T^*_aM)$. Jinak řečeno, tenzorové pole T typu $\binom{k}{0}$ je diferenciální forma stupně k, pokud pro každou permutaci $\pi \in S_k$ platí*

$$T(a)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot T(a)(v_1, \ldots, v_k);\ v_1, \ldots, v_k \in T_aM.$$

Prostor všech (hladkých) diferenciálních forem stupně k na M označíme symbolem $\mathcal{E}^k(M)$ a prostor všech diferenciálních forem označíme symbolem $\mathcal{E}^*(M)$, tj.

$$\mathcal{E}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^k(M).$$

Nechť T je hladké tenzorové pole typu $\binom{2}{0}$ na M. Předpokládejme dále, že pro každé $a \in M$ je bilineární forma $T(a)$ na T_aM symetrická a nedegenerovaná. Pak se T nazývá **pseudo-Riemannova metrika na** *M. Je-li $T(a)$ navíc pozitivně definitní pro každé $a \in M$, pak se nazývá* **Riemannova metrika na** *M. V tomto případě je tedy $T(a)$ skalární součin na T_aM.*

Poznámka 7.2 *(i) V dalším budeme uvažovat jen hladká tenzorová pole a budeme je nazývat tenzorová pole. Totéž platí pro diferenciální formy.*

(ii) Vektorové pole na M je speciální případ tenzorového pole typu $\binom{0}{1}$. Podobně, diferenciální forma stupně 1 je tenzorové pole typu $\binom{1}{0}$. Ačkoliv jsou tenzorová pole obecného typu běžně používaná v matematice a zejména v matematické fyzice, budeme se v této přednášce zajímat jen o tenzorová pole typu $\binom{k}{0}$, tj. jen o kovariantní tenzorová pole.

Další základní příklad tenzorového pole typu $\binom{2}{0}$ je (pseudo-)Riemannova metrika, definovaná nahoře. Poznamenejme ještě, že standardní klasifikace nedegenerovaných bilineárních kvadratických forem říká, že každá taková bilineární forma je dána ve vhodné bázi diagonální maticí, která má na diagonále p-krát $+1$ a q-krát -1; $p+q=n$. Dvojici čísel (p,q) se říká signatura formy a pokud má pseudo-Riemannova metrika T stejnou signaturu (p,q) ve všech bodech M, pak tuto dvojici nazýváme **signatura příslušné metriky.**

Nejdůležitějším příkladem (z hlediska fyziky) je pseudo-Riemannova metrika signatury $(1,3)$, resp. $(3,1)$ na čtyřdimenzionální varietě M, které se pak říká **prostoročas***; od dob Einsteina tento pojem hraje ústřední roli při modelování gravitace ve fyzice.*

(iii) Díky tomu, co již víme o vnější algebře vektorového prostoru je zřejmé že $\mathcal{E}^k(M) = \{0\}$ pro $k > n$ a $\mathcal{E}^*(M) = \oplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(M)$ je algebra nad tělesem reálných čísel. Vlastnosti násobení jsou identické s vlastnostmi násobení ve vnější algebře, tj. násobení je asociativní, není komutativní obecně, ale je pro homogenní formy (tj. formy daných stupňů) buď komutativní nebo antikomutativní.

Prostor $\mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{E}^0(M)$ (hladkých) funkcí na M je pak komutativní podalgebra $\mathcal{E}^*(M)$. Navíc, celá algebra $\mathcal{E}^*(M)$ může být chápána jako modul nad algebrou $\mathcal{E}^0(M)$. Tento způsob popisu má velké výhody. Připomeňme si, že vektorová pole na M lze charakterizovat jako lineární zobrazení z $\mathcal{E}^0(M)$ do $\mathcal{E}^0(M)$, která mají Leibnizovu vlastnost. Podobně, diferenciální formy stupně k na M je možné definovat jako multilineární zobrazení ω z kartézského součinu $\mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M)$ (k činitelů) do $\mathcal{E}^0(M)$, které mají vlastnost

$$\omega(X_{\pi(1)}, , \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(X_1, \ldots, X_k); \quad X_1 \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M).$$

Tento způsob charakterizace forem se v diferenciální geometrii často používá.

(iv) Jako vždy při počítání s vnější algebrou budeme symbolem $I \subset \{1, \ldots, n\}$ označovat množinu čísel $\{i_1, \ldots, i_k\}$ uspořádanou podle velikosti. Symbol dx_I bude pak značit součin $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

Je-li (U, φ) mapa na M a $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, pak lze rozložit formu ω na U do báze $dx_I, |I| = k$, kde $dx_I \in \mathcal{E}^k(U)$. Tyto formy tvoří bázi prostoru $\mathcal{E}^k(U)$, chápaného jako modul nad $\mathcal{E}^0(U)$; tj. existují jednoznačně určené funkce $\omega_I \in \mathcal{E}^0(U)$ takové, že

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I.$$

Cvičení k 9. přednášce.

Příklad 1.

Rozmyslete si, že vnější součin je asociativní.

Řešení. Podstatným krokem k důkazu asociativity vnějšího násobení je upravit a zjednodušit definici vnějšího násobení. To je popsáno v následujícím tvrzení.

Tvrzení. Je-li $\alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*)$, pak

$$[\alpha \wedge \beta](v_1, \ldots, v_{k+l}) := \sum_{|I|=k, |J|=\ell, I \cup J = \{1,\ldots,k+\ell\}} \operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J} \alpha(v_I)\beta(v_J),$$

kde množiny I, J jsou rostoucí množiny indexů, sgn $\binom{I,J}{I \cup J}$ je znaménko permutace, která převádí množinu $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_\ell\}$ na množinu $I \cup J$ uspořádanou podle velikosti, a $\alpha(v_I) = \alpha(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ a stejně pro $\beta(v_J)$.

Důkaz.

Zobrazení α, β jsou antisymetrická, takže můžeme v součtu, který definuje vnější násobení sloučit sčítance, které se liší jen permutací prvků uvnitř α či β. Po použití takovéto permutace sice změní příslušná hodnota znaménko, ale to se kompnzuje po násobení znaménkem odpovídající permutace. Takže $k!$, resp. $\ell!$ sčítanců má stejnou hodnotu a je možné zkrátit faktoriály ve jmenovateli. Označíme-li $\tilde{S}_{k+l}$ množinu permutací π, pro které platí

$$\pi(1) < \ldots < \pi(k); \pi(k+1) < \ldots < \pi(k+l),$$

pak

$$[\alpha \wedge \beta](v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\pi \in \tilde{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})\beta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+l)}).$$

Pokud označíme $I = \{\pi(1), \ldots, \pi(k)\}$, resp. $J = \{\pi(k+1), \ldots, \pi(k+l)\}$, platí $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \binom{I,J}{I \cup J}$ a dostaneme

$$[\alpha \wedge \beta](v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{I,J} \operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J} \alpha(v_I)\beta(v_J),$$

kde $v_I = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ a kde se sčítá přes všechny rozklady $I \cup J = \{1, \ldots, k + l\}, |I| = k, |J| = l$ a I, J jsou uspořádané podle velikosti.

□

Jako důsledek tvrzení, které jsme právě dokázali dostaneme následující rovnost. Předpokládejme, že $\alpha \in \Lambda^i(V^*), \beta \in \Lambda^j(V^*), \gamma \in \Lambda^k(V^*)$. Pak

$$[(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma](v_1, \ldots, v_{k+l+m}) = \sum_{I,J,K} \operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J, K} \operatorname{sgn} \binom{I \cup J, K}{I \cup J \cup K} \alpha(v_I)\beta(v_J)\gamma(v_K)$$

a pomocí vztahů

$$\operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J} = \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J, K}; \ \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J, K} \operatorname{sgn} \binom{I \cup J, K}{I \cup J \cup K} = \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J \cup K},$$

dostaneme

$$[(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma](v_1, \ldots, v_{i+j+k}) = \sum_{I,J,K} \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J \cup K} \alpha(v_I)\beta(v_J)\gamma(v_K) \tag{7.1}$$

kde se sčítá přes všechny rostoucí posloupnosti I, J, K indexů, pro které platí

$$|I| = i, |J| = j, |K| = k, I \cup J \cup K = \{1, \ldots, i + j + k\},$$

Stejný výraz dostaneme analogickým postupem i pro $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$, z čehož plyne asociativita násobení.

Příklad 2.

Nechť M je varieta a $a \in M$. Ukažte, že pro každý vektor $v \in T_aM$ existuje hladké vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$, pro které platí $X(a) = v$.

Řešení. Nechť (U, φ) je mapa na M a $a \in U$. Pak existují čísla $v^1, \ldots, v^n$ taková, že $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$. Pro každé $i = 1, \ldots, n$ existuje funkce $f^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ s nosičem v U, pro kterou $f^i(a) = v^i$. Vektorové pole $X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$ má nosič v U a po rozšíření nulou na celé M je hladké na M a $X(a) = v$.

Příklad 3.

Ukažte, že k-krát kovariantní tenzorové pole T je hladké právě když pro každou k-tici hladkých vektorových polí $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ je funkce $T(X_1, \dots, X_k)$ hladká na M.

Řešení.

(i) Předpokládejme nejprve, že T je hladké a $X_i \in \mathcal{X}(M), i = 1, \dots, k$. Zvolme bod $a \in M$ a mapu $(U, \varphi), a \in U$. Podle předpokladu existují hladké funkce $T_{i_1 \dots i_k}$ na U, pro která

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

na množině U. Vektorová pole X_i jsou hladká, tedy

$$X_\ell = \sum_{i_\ell = 1}^{n} X_\ell^{i_\ell} \frac{\partial}{\partial x^{i_\ell}}, X_\ell^{i_\ell} \in \mathcal{C}^\infty(U);\ \ell = 1, \dots, k.$$

Pak $T(X_1, \dots, X_k)|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} T_{i_1 \dots i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}$ je hladká funkce na U.

(ii) Naopak, předpokládejme, že je funkce $T(X_1, \dots, X_k)$ hladká pro libovolná hladká vektorová pole $X_i, i = 1, \dots, k$, Zvolme mapu (U, φ) na M. Pak víme, že je možné na množině U vyjádřit tenzorové pole $T|_U$ ve tvaru

$$T|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

na množině U. Chceme ukázat, že koeficienty $T_{i_1 \dots i_k}$ jsou hladké funkce na množině U. Ale $T_{i_1 \dots i_k}(a) = T(a)(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}|_a)$. Existují vektorová pole $X_i, i = 1, \dots, k$ pro která $X_i(a) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$, tedy

$$T_{i_1 \dots i_k}(a) = T(X_1, \dots, X_k)(a)$$

je hladká funkce na U.

Příklad 4.

Vypočítejte, jak vypadá Eukleidovská metrika v polárních souřadnicích.

Řešení. Budeme používat zkrácené označení $dx \odot dx = dx^2$ a stejně pro ostatní souřadnice.

Pokud dosadíme vztah $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ pro polární souřadnice do definice Eukleidovské metriky dostaneme

$$dx^2 + dy^2 = (\cos\theta dr - r \sin\theta d\theta))^2 + (\sin\theta dr + r \cos\theta d\theta))^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

10. přednáška.

7.1 Vlastnosti vnějšího součinu.

Pro pochopení vlastností vnějšího součinu je podstatné následující lemma, které představuje ekvivalentní formulaci vnějšího součinu. Tuto ekvivalentní definici jsme rozebrali podrobně ve cvičení k 9. přednášce.

Lemma 7.3 *Je-li $\alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*)$, pak*

$$[\alpha \wedge \beta](v_1, \dots, v_{k+l}) := \sum_{|I|=k, |J|=\ell, I \cup J = \{1, \dots, k+\ell\}} \operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J} \alpha(v_I) \beta(v_J),$$

kde množiny I, J jsou rostoucí množiny indexů a $\operatorname{sgn} \binom{I, J}{I \cup J}$ je znaménko permutace, která převádí množinu $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell\}$ na množinu $I \cup J$ uspořádanou podle velikosti.

Důkaz tohoto lemmatu byl diskutován na 9. cvičení, Příklad 1.

Jako důsledky tohoto lemmatu dostaneme následující základní vlastnosti vnějšího násobení. Předpokládejme, že

$$\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda^*(V^*), a, b \in \Lambda^0(V^*) \simeq \mathbb{R}.$$

Věta 7.4 *(i) Asociativita:*

$$\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda^*(V^*) \implies \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma; a, b \in \Lambda^0(V^*) \simeq \mathbb{R}$$

(ii) Bilinearita:

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a\alpha \wedge \gamma + b\beta \wedge \gamma;$$
$$\gamma \wedge (a\alpha + b\beta) = a\gamma \wedge \alpha + b\gamma \wedge \beta;$$

(iii) Antikomutativita:

$$\alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*) \implies \alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha;$$

(iv) Pro $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*, v_1, \dots, v_k \in V$ platí

$$[\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k](v_1, \dots, v_k) = \det(\alpha^i(v_j))_{i,j=1}^k.$$

(v) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je libovolná báze V a $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ je duální baze V^*. Pro libovolnou množinu

$$I = (i_1, \dots, i_k); 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$$

platí

$$\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}. \tag{7.2}$$

Navíc

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J := \begin{cases} 0, & \textit{pokud } I \cap J \neq \emptyset, \\ \operatorname{sgn} \binom{I,J}{I \cup J} \varepsilon^{I \cup J} & \textit{pokud } I \cap J = \emptyset. \end{cases} \tag{7.3}$$

Důkaz.

(i) Nechť $\alpha \in \Lambda^i(V^*), \beta \in \Lambda^j(V^*), \gamma \in \Lambda^k(V^*)$. Zřejmě platí

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I, J, K \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I, J, K \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}.$$

Z Lemmatu 7.3 pak plyne, že

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{i+j+k}) = \sum_{|I|=i, |J|=j, |K|=k, I \cup J \cup K = \{1, \dots, i+j+k\}} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} \alpha(v_I) \beta(v_J) \gamma(v_K). \tag{7.4}$$

a tedy že je vnější násobení asociativní.
(ii) Bilinearita plyne ihned z definice vnějšího násobení.
(iii) Plyne ze vztahů

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix} = (-1)^{k\ell}; \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} = (-1)^{k\ell} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} J, I \\ I \cup J \end{pmatrix}$$

a Lemmatu 7.3.
(iv) Tvrzení Lemmatu 7.3 pro $k = 2$ a relace 7.4 pro $k = 3$ se snadno indukcí rozšíří na obdobnou relaci pro součin k prvků z $\Lambda^*(V^*)$ (formulujte si příslušné tvrzení explicitně!) Tvrzení (iv) je pak speciální případ, kde všechny činitelé jsou kovektory, tj. prvky z V^*.
(v) Je-li $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ duální báze V^*, pak použitím bodu (iv) se pro množiny $I, J; |I| = |J| = k$ uspořádané podle velikosti snadno zjistí, že

$$[\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}](e_J) = \delta^I_J,$$

z čehož ihned plyne požadované tvrzení.

Vztah 7.3 plyne z definice prvků ε^I a ε^J a Lemmatu 7.3.

$\square$

7.2 Vnější diferenciál

Víme již, jak je definován diferenciál funkce. Chtěli bychom teď rozšířit definici vnějšího diferenciálu na případ forem libovolného stupně.

Věta 7.5 *Nechť M je varieta s krajem. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení*

$$d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M), k = 0, \dots, n-1$$

s vlastnostmi:

(i) Pro $f \in \mathcal{E}^0(M)$ je df diferenciál funkce f;

(ii) $d \circ d = 0$;

(iii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^l(M)$, pak

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge (d\tau).$$

Pro libovolnou (nehomogenní) formu $\omega \in \mathcal{E}^*(M); \omega = \sum_{k=0}^n \omega_k; \omega_k \in \mathcal{E}^k(M)$, je pak **vnější diferenciál** *$d\omega$ definován předpisem*

$$d\omega = \sum_{k=0}^{n} d\omega_k.$$

Důkaz.

1. Nejdříve ukážeme, že pokud takovéto zobrazení d existuje, je určeno jednoznačně. Je-li totiž (U, φ) libovolná mapa na M a je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, pak na U lze formu ω (jednoznačně) napsat ve tvaru

$$\omega = \sum_{|A|=k} \omega_A dx_A.$$

Předpokládejme, že d je lineární zobrazení, které má požadované tři vlastnosti. Pak se indukcí podle $|A|$ z vlastnosti (iii) ihned ukáže, že $d(dx_A) = 0$. Z toho plyne, že

$$d\omega = \sum_{|A|=k} d\omega_A \wedge dx_A. \tag{7.5}$$

Pravá strana obsahuje jen diferenciály funkcí, které byly (jednoznačně) definovány v předchozím paragrafu. Tedy i hodnota formy $d\omega$ na levé straně je tímto vztahem jednoznačně určena na U. Totéž je možné udělat pro libovolnou mapu daného atlasu.

2. Pro vybranou mapu (U, φ) můžeme vztah (7.5) použít k lokální definici hledaného zobrazení d. Takto definované zobrazení má požadované tři vlastnosti, to jsme dokázali v přednášce Geometrie 2 v loňském roce. Dokázanou jednoznačnost lze pak použít k ověření toho, že definice zobrazení d nezávisí na výběru mapy. Globální zobrazení d je pak definováno v každém bodě $m \in M$ pomocí libovolné mapy (U, φ) takové, že $m \in U$. $\square$

Poznámka 7.6 *Alternativní formulace předchozí věty by bylo konstatování, že existuje právě jedno lineární zobrazení*

$$d : \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$$

takové, že platí vlastnosti (i) – (iii) spolu s vlastností

(iv) $d(\mathcal{E}^k(M)) \subset \mathcal{E}^{k+1}(M); k = 0, \dots, n.$

7.3 Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

Je-li $F : M \to N$ hladké zobrazení, pak pro každý bod $m \in M$ je $F_*(m)$ tečné zobrazení T_mM do $T_{F(m)}N$. Je-li navíc T tenzorové pole typu $\binom{s}{0}$, $s > 0$, na varietě N, pak definujeme tenzorové pole $F^*(T)$ typu $\binom{s}{0}$ na M předpisem

$$[F^*(T)(m)](v_1, \ldots, v_s) = [T(F(m))](F_*(m)(v_1), \ldots, F_*(m)(v_s)); \quad v_1, \ldots, v_s \in T_mM.$$

Je-li f funkce na N, tj. tenzorové pole typu $\binom{0}{0}$, pak definujeme

$$F^*(f) = f \circ F.$$

Z definic je zřejmé, že pokud je pole T diferenciální forma stupně k na N, pak $F^*(T)$ je diferenciální forma stupně k na M. Je tedy dobře definováno zobrazení $F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ nazývané obvykle **přenášení diferenciálních forem.**

Věta 7.7 *Jsou-li $F : M \to N; G : N \to P$ hladká zobrazení a jsou-li ω, τ diferenciální formy na P, pak:*

(i) $G^*(\omega + \tau) = G^*(\omega) + G^*(\tau)$;

(ii) $G^*(\omega \wedge \tau) = G^*(\omega) \wedge G^*(\tau)$;

(iii) $(G \circ F)^*(\omega) = F^*(G^*(\omega))$;

(iv) $d(G^*(\omega)) = G^*(d\omega)$;

(v) Nechť (U', φ') je mapa na N a nechť $U \subset M$ taková, že $F(U) \subset U'$. Nechť $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ jsou souřadnice na $\varphi'(U')$ a nechť $\varphi' = (\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m)$. Je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ taková, že $\omega = \sum_{|A|=k} \omega_A dx'_A \in \mathcal{E}^k(U')$ na U', pak

$$F^*(\omega) = \sum_{|A|=k} (\omega_A \circ F) d(\varphi' \circ F)_A$$

na U, kde

$$A = \{i_1, \ldots, i_k\}; d(\varphi' \circ F)_A = d(\varphi'_{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(\varphi'_{i_k} \circ F).$$

Důkaz.

(i) Je ihned zřejmé z definice přenesení formy.

(ii) Díky bodu (i) stačí toto tvrzení dokázat pro $\omega \in \mathcal{E}^k(N), \tau \in \mathcal{E}^l(N)$. Ale pro $X_i \in \mathcal{X}(M); i = 1, \ldots, l + k$ platí

$$\begin{aligned}
&[F^*(\omega \wedge \tau)](X_1, \ldots, X_{k+l}) = [\omega \wedge \tau](F_*(X_1), \ldots, F_*(X_{k+l})) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(F_*(X_{\pi(1)}), \ldots, F_*(X_{\pi(k)})) \cdot \tau(F_*(X_{\pi(k+1)}), \ldots, F_*(X_{\pi(k+l)})) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \cdot F^*(\omega)(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) \cdot F^*(\tau)(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(k+l)}) = \\
&= [F^*(\omega) \wedge F^*(\tau)](X_1, \ldots, X_{k+l}).
\end{aligned}$$

(iii) Plyne ihned z definice a z toho, že pro tečná zobrazení platí $(G \circ F)_* = F_* \circ G_*$.

(iv) Nejprve si rozmyslíme, že dokazované tvrzení platí pro diferenciální formy stupně 0, tj. pro $\omega = f \in \mathcal{E}^0(N)$. Pro $v \in T_mM$ dostaneme (z definice d, F_* a F^*)

$$\begin{aligned}
F^*(df)(v) &= df(F_*(v)) = [F_*(v)](f) = v(f \circ F) = [d(f \circ F)](v) = \\
&= [d(F^*(f))](v).
\end{aligned}$$

Jako speciální případ dostaneme

$$F^*(dx'_i) \equiv F^*(d\varphi'_i) = d(\varphi'_i \circ F).$$

Z toho je zřejmé, že tvrzení (iv) platí pro $\omega = dx'_i$ (obě strany jsou rovny 0).

Předpokládejme dále, že $\omega = \omega_A dx'_A \in \mathcal{E}^k(U')$. Pak z vlastností zobrazení d plyne, že

$$d(F^*(\omega)) = d[(\omega_A \circ F)d(\varphi' \circ F)_A] = d(\omega_A \circ F) \wedge d(\varphi' \circ F)_A = \\ = F^*(d\omega_A) \wedge F^*(dx'_A) = F^*(d\omega_A \wedge dx'_A) = F^*(d\omega).$$

Z bodu (i) pak snadno plyne dokazované tvrzení pro obecnou formu stupně k.

(v) Plyne ihned z již dokázaného tvrzení $F^*(dx'_i) = d(\varphi'_i \circ F)$.

□

Cvičení k 10. přednášce.

Příklad 1. Nechť $T \in T^2(V)$ je kovariantní tenzor řádu 2. Ukažte, napište T jako součet symetrického a aantisymetrického tenzoru řádu 2.

Řešení.

$T = S + A$, kde

$S(X,Y] = \frac{1}{2}[T(X,Y) + T(Y,X)]$; $A(X,Y) = \frac{1}{2}[T(X,Y) - T(Y,X)]$.

Příklad 2. Nechť $T \in T^k(V)$ je kovariantní tenzor řádu k a $\pi \in S_k$ je permutace množiny $\{1, \dots, k\}$. Tenzor T^π je definován předpisem

$$T^\pi(X_1, \dots, X_k) = T(X_{\pi(1)}, \dots X_{\pi(k)}).$$

Ukažte, že pro operátor $\mathrm{Alt} : T^k(V) \to T^k(V)$ definovaný předpisem

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi T^\pi$$

platí:

(a) $\mathrm{Alt}\, T \in \Lambda^k(V^*)$ pro všechny $T \in T^k(V)$.

(b) $T \in T^k(V)$ je antisymetrický právě když $\mathrm{Alt}\, T = T$.

Řešení.

(a)

$$(\mathrm{Alt}\, T)^\sigma = (\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi T^\pi)^\sigma = \operatorname{sgn} \sigma (\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) T^{\sigma \circ \pi} = \operatorname{sgn} \sigma \,\mathrm{Alt}\, T$$

protože pro σ pevné je součet přes $\pi \in S_k$ stejný jako součet přes $\sigma \circ \pi, \pi \in S_k$.

(b) Je-li T antisymmetrický, pak pro každé $\pi \in S_k$ platí $\operatorname{sgn} \pi T^\pi = T$, a tedy $\mathrm{Alt}\, T = T$. Naopak, pokud $\mathrm{Alt}\, T = T$, pak je T antisymmetrický podle bodu (a).

Příklad 3. Definujme nový součin $\bar\wedge$ na prostoru $\Lambda^k(V^*)$ (jednoduchým a přirozeným) předpisem

$$\alpha \bar\wedge \beta = \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Ukažte, jaké má tento součin vlastnosti a porovnejte ho se součinem $\wedge$.

Řešení.

(1) Je-li $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ a $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$, pak podle definice platí

$$[\alpha \bar\wedge \beta](v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \beta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}),$$

tedy $\alpha \bar\wedge \beta = \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!} \alpha \wedge \beta$.

(2) Pro součin $(\alpha \bar\wedge \beta) \bar\wedge \gamma$; $\alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*), \gamma \in \Lambda^m(V^*)$ dostaneme stejně jako pro součin $\wedge$ vztah

$$(\alpha \bar\wedge \beta) \bar\wedge \gamma(v_1, \dots, v_{k+\ell+m}) = \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!} \frac{(k+\ell)!m!}{(k+\ell+m)!} \sum_{I,J,K} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix} \alpha(v_I) \beta(v_J) \gamma(v_K),$$

a protože $\frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}\frac{(k+\ell)!m!}{(k+\ell+m)!} = \frac{k!\ell!m!}{(k+\ell+m)!}$, je součin $\bar\wedge$ asociativní.
(3) Součin $\bar\wedge$ je distributivní a antikomutativní ze stejných důvodů jako součin $\wedge$.
(4) Pokud $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in \Lambda^1(V^*)$, pak

$$[\alpha^1\bar\wedge\dots\bar\wedge\alpha^k](v_1,\dots,v_k) = \frac{1!1!}{2!}\frac{2!1!}{3!}\frac{3!1!}{4!}\dots\frac{(k-1)!1!}{k!}[\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^k](v_1,\dots,v_k),$$

tedy

$$\alpha^1\bar\wedge\dots\bar\wedge\alpha^k = \frac{1}{k!}\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^k.$$

(5) Je-li $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^k$ baze V^*, pak podle bodu (1) platí pro disjunktní podmnožiny $I, J \subset \{1,\dots,k\}, |I| = k, |J| = \ell$

$$\varepsilon^I\bar\wedge\varepsilon^J = \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}\varepsilon^{I\cup J}. \tag{7.6}$$

Příklad 4.
(a) Ukažte, že součin $\wedge$ je jednoznačně určen tím, že je asociativní, bilineární, antikomutativní a platí podmínka

$$[\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^k](v_1,\dots,v_k) = \det(\alpha^i(v_j));\ \alpha_i \in \Lambda^1(V^*). \tag{7.7}$$

(b) Charakterizujte podobně součin $\bar\wedge$.

Řešení. (a) Asociativita vnějšího součinu umožňuje definovat prvky $\varepsilon^{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon^{i_k} \in \Lambda^k(V^*)$ a počítat s nimi pomocí vlastnosti (7.7). Z této vlastnosti pak plyne (rozmyslete si!), že

$$\varepsilon^{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I, I = \{i_1,\dots,i_k\}, \tag{7.8}$$

kde ε^I bylo definováno vztahem $\varepsilon^I(e(J)) = \delta^I_J$. Antikomutativita vnějšího násobení umožňuje vypočítat, že pro $I\cap J = \emptyset, I, J \subset \{1,\dots,n\}$ platí

$$\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J\\ I\cup J\end{pmatrix}\varepsilon^{I\cup J}; \tag{7.9}$$

a pro $I\cap J \neq \emptyset$, dostaneme $\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J = 0$. Protože prvky tvaru $\varepsilon^I, |I| = k$ tvoří bazi $\Lambda^k(V^*)$, je vnější součin jednoznačně definován pro každý prvek $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ pomocí bilinearity.

(b) Součin $\bar\wedge$ je také charakterizován vlastností asociativity, bilinearity a antikomutativity, ale vlastnost (7.7) je nahrazena vlastností

$$[\alpha^1\bar\wedge\dots\bar\wedge\alpha^k](v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\det(\alpha^i(v_j));\ \alpha_i \in \Lambda^1(V^*). \tag{7.10}$$

Při odůvodnění této charakterizace se změní vztah (7.9) pro I a J disjunktní na vztah

$$\varepsilon^I\bar\wedge\varepsilon^J = \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}\varepsilon I\cup J, |I| = k, |J| = \ell,$$

Příklad 5. Na varietě $M = \mathbb{R}^2$ definujeme vektorová pole $X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y},\ Y = y\frac{\partial}{\partial y}$ a diferenciální formu $\omega = (x^2+2y)dx + (x+y^2)dy$. Ukažte, že platí relace

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

Řešení. Postupně platí

$$\begin{aligned} d\omega = (2x\,dx + 2dy)\wedge dx + (dx + 2y\,dy)\wedge dy = -dx\wedge dy;\\ X(\omega(Y)) = xy + 2x^2y + 6xy^3,\\ Y(\omega(X)) = 2xy + 2x^2y + 6xy^3,\\ d\omega(X,Y) = -(dx\wedge dy)(x\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}) = -xy + 0. \end{aligned}$$

Příklad 6. Nechť M je varieta. Ukažte, že pro libovolnou formu $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ a vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ platí
$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

Řešení. Zvolme mapu (U, φ). Každou 1-formu je možné na Uvyjádřit jako součet 1-forem tvaru $\omega = f\,dg$, kde f, g jsou funkce z $\mathcal{E}^1(M)$. Stačí tedy tvrzení dokázat pro jednu takovou formu $\omega = f\,dg$.

Pak má levá strana dokazované relace tvar
$$[d(f\,dg)](X,Y) = [df \wedge dg](X,Y) = df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) = X(f)Y(g) - Y(f)X(g)$$
a pravá strana je
$$\begin{aligned} & X(f\,dg(Y)) - Y(f\,dg(X)) - [f\,dg]([X,Y]) = \\ = \quad & X(fY(g)) - Y(fX(g)) - f[X,Y](g) = \\ = \quad & X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - f[X(Y(g)) - Y(X(g))], \end{aligned}$$
a po zkrácení odpovídajících členů dostaneme dokazovanou rovnost.

11. přednáška

7.4 de Rhamova kohomologie

Definice 7.8 *Nechť M je varieta dimenze n a $0 \le k \le n$. Řekneme, že diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ je* **uzavřená,** *pokud platí, že $d\omega = 0$. Množinu všech uzavřených diferenciálních forem stupně k na M označíme $\mathcal{Z}^k(M)$.*

Nechť $1 \le k \le n$. Řekneme, že diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ je **exaktní,** *pokud existuje $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$ taková, že $\omega = d\tau$. Množinu všech exaktních diferenciálních forem stupně k na M označíme $\mathcal{B}^k(M)$.*

Z vlastností de Rhamova diferenciálu d plyne, že $\mathcal{B}^k(M) \subset \mathcal{Z}^k(M)$. Definujeme tedy k-tou **de Rhamovu kohomologickou grupu** *$H^k_{dR}(M)$ jako faktorprostor*
$$H^k_{dR}(M) := \mathcal{Z}^k(M)/\mathcal{B}^k(M).$$

Tradičně se tento faktorprostor nazývá kohomologická grupa, i když je $H^k_{dR}(M)$ ve skutečnosti (reálný) vektorový prostor.

Příklad. Nechť je $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2)$ definovaná předpisem
$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že je ω uzavřená forma. Dá se ukázat, že není exaktní, a tak její třída kohomologie $[\omega] \in K^1(M), M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ je netriviální. Pokud se ale omezíme na otevřenou podmnožinu $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) | r > 0, \theta \in (\alpha, \beta), 0 \le \alpha < \beta \le 2\pi\} \subset M$, pak platí $\omega = d\theta$ (v polárních souřadnicích (r, θ)).

Předpokládejme nyní, že $F : M \to N$ je hladké zobrazení mezi dvěma varietami M, N. Pak umíme přenášet diferenciální formy z N na M pomocí zobrazení F^* a toto zobrazení indukuje zobrazení mezi odpovídajícími de Rhamovými kohomologickými grupami.

Definice 7.9 *Nechť $F : M \to N$ je hladké zobrazení mezi dvěma varietami. Pak zobrazení $F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ zobrazuje uzavřené formy na N na uzavřené formy na M a indukuje lineární zobrazení $F^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$.*

Věta 7.10 *Zobrazení $F^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ má následující vlastnosti:*

(1) Je-li $G : N \to P$ hladké zobrazení, pak $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^k_{dR}(P) \to H^k_{dR}(M)$.

(2) Je-li $Id : M \to M$ identita, pak také Id^* je identita.

(3) Difeomorfní variety mají izomorfní de Rhamovy kohomologické grupy.

Tyto tvrzení jsou snadnými důsledky definic, podrobnosti probereme na cvičení.

Kapitola 8

Integrace diferenciálních forem.

V této části budeme definovat integrál z diferenciální formy a oborem integrace bude orientovaná varieta s krajem (který může být prázdný). Podmínkou bude, aby stupeň diferenciální formy byl stejný jako dimenze variety. V tomto úvodním kurzu budeme integrál definvat pro případ, že příslušná diferenciální forma bude mít kompaktní nosič. Věštšina monografií a učebnic o analýze na varietách se omezuje na tento případ. Definice je snadná pro případ, že nosič integrované diferenciální formy je částí definičního oboru nějaké mapy. V obecnějším případě je pro definici integrálu klíčové použít tak zvaný rozklad jednotky na varietě, který umožňuje převést definici integrálu na předchozí jednoduchý případ. Pro důkaz existence rozkladu jednotky na varietě bude podstatné, aby varieta měla spočetnou bazi otevřených množin. To je důvod, proč se v definici variety existence spočetné baze otevřených podmnožin předpokládá.

8.1 Parakompaktnost.

Definice 8.1 *Systém pomnožin $\{Y_\alpha | \alpha \in A\}$ topologického prostoru X nazveme* **lokálně konečný,** *pokud pro každý bod $x \in X$ existuje otevřená množina $U, x \in U$, která má neprázdný průnik s nejvýše konečně mnoha množinami daného systému.*

Otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ topologického prostoru X nazveme **zjemnění** *otevřeného pokrytí $\mathcal{V}$ prostoru X, pokud každá množina $V \in \mathcal{V}$ leží v nějaké množině $U \in \mathcal{U}$.*

Topologický prostor X se nazývá **parakompaktní,** *pokud každé otevřené pokrytí X má lokálně konečné zjemnění.*

Lemma 8.2 *Předpokládejme, že má topologický prostor X spočetnou bazi otevřených množin.*

Potom má každé otevřené pokrytí X spočetné podpokrytí.

Důkaz.

Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná baze otevřených množin v X a $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X. Označme

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} | \exists U \in \mathcal{U}, B \subset U\}.$$

Pro každou množinu $B \in \mathcal{B}'$ zvolme množinu $U_B \in \mathcal{U}$ obsahující B. Systém $\{U_B | B \in \mathcal{B}'\}$ je spočetný, stačí tedy ukázat, že je to pokrytí X.

Pro každý bod $x \in X$ existuje množina $V \in \mathcal{U}$, která obsahuje bod x. Protože je $\mathcal{B}$ baze topologie X, existuje $B_0 \in \mathcal{B}$, pro kterou platí $x \in \mathcal{B}_0 \in V$. Pak ale $B_0 \in \mathcal{B}', x \in B_0 \subset U_{B_0}$.

□

Lemma 8.3 *Nechť M je varieta s krajem, pak pro každý bod $a \in M$ existuje otevřená množina U s kompaktním uzávěrem $\overline{U}$, která obsahuje bod a.*

Důkaz.

Pro každý bod a variety M existuje mapa (U, φ) a otevřená množina $U_a \subset U$, pro kterou je uzávěr $\overline{U_a}$ kompaktní. Stačí vzít $U_a = \varphi^{-1}(K(\varphi(a), r))$ pro r dost malé.

□

Lemma 8.4 *Nechť M je varieta s krajem. pak existuje posloupnost kompaktních podmnožin*

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots; \ \cup_{i=1}^{\infty} K_i = M, \tag{8.1}$$

Důkaz.

Podle Lemmatu 8.2 a Lemmatu 8.3 existuje spočetná baze $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ prostoru X, pro kterou jsou všechny uzávěry $\overline{U_i}$ kompaktní.

Nyní definujeme rostoucí posloupnost $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ kompaktních množin předpisem

$$K_i = \cup_{j=1}^{i} \overline{U_j}.$$

□

Lemma 8.5 *Nechť M je varieta s krajem. pak existuje posloupnost kompaktních podmnožin*

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots; \ \cup_{i=1}^{\infty} K_i = M, \tag{8.2}$$

pro které navíc platí $K_i \subset \operatorname{Int} K_{i+1}, i = 1, 2, \ldots$.

Důkaz.

Označme $\{K'_i\}_{i=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost kompaktních množin, která pokrývá celou varietu M. Množina K'_1 je kompaktní a lze ji tedy pokrýt konečným počtem otevřených množin, z nichž každá má kompaktní uzávěr. Množinu K_1 pak definujeme jako sjednocení uzávěrů těchto množin. Množina K_1 je kompaktní a $K_1 \subset \operatorname{Int} K'_1$.

Dál postupujeme indukcí. Předpokládejme, že jsme již definovali kompaktní množiny $K_1, \ldots K_j$ s vlastností, že pro všechny $i = 1, \ldots, j-1$ platí $(K'_{i+1} \cup K_i) \subset \operatorname{Int}(K_{i+1})$. Množina $K_j \cup K'_{j+1}$ je kompaktní, lze ji tedy pokrýt konečným počtem otevřených množin s kompaktními uzávěry. Pak definujeme K_{j+1} jako sjednocení uzávěrů těchto množin. Množina K_{j+1} je kompaktní a platí $K_j \cup K'_{j+1} \subset \operatorname{Int} K_{j+1}$.

□

Věta 8.6 *Nechť M je varieta s krajem. Pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ existuje zjemnění $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$, které je*

(i) nejvýše spočetné

(ii) lokálně konečné

(iii) množiny v pokrytí $\mathcal{V}$ mají kompaktní uzávěry.

Specielně, M je parakompaktní.

Důkaz.

Nechť $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ je pokrytí M sestrojené v Lemmatu 8.5. Položme navíc $K_0 = K_{-1} = \emptyset$.

Pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots$ je systém $[\operatorname{Int} K_{i+2} - K_{i-1}] \cap U_\alpha$ otevřené pokrytí kompaktní množiny $\operatorname{Int} K_{i+1} - K_i$, ze kterého můžeme vybrat konečné podpokrytí $\{V_{i,1}, \ldots, V_{i,p_i}\}$ Systém $\mathcal{V} = \{V_{i,j}\}$ všech takto sestrojených množin tvoří otevřené pokrytí prostoru M, které je spočetné a je to zjemnění pokrytí $\mathcal{U}$. Ukážeme nakonec, že je to lokálně konečné pokrytí M. Nechť $a \in M$, pak existuje j, pro které $x \in K_j$. Množina $\operatorname{Int} K_{j+1}$ je otevřené okolí bodu x a protíná jen konečný počet množin z pokrytí $\mathcal{V}$. A protože každé $V_{i,j} \in \mathcal{V}$ leží v některé kompaktní množině K_ℓ, je uzávěr $\overline{V_{i,j}}$ kompaktní.

□

8.2 Rozklad jednotky na varietě.

Definice 8.7 *Nechť* $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ *je otevřené pokrytí variety* M. *Řekneme, že soubor funkcí*

$$\{f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M) | \alpha \in A\}$$

je **rozklad jednotky podřízený pokrytí** $\mathcal{U}$, *pokud platí:*
(i) $0 \leq f_\alpha(a) \leq 1,\ a \in M,\ \alpha \in A$;
(ii) $\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha, \alpha \in A$;
(iii) Systém množin $\{\operatorname{supp} f_\alpha | \alpha \in A\}$ *je lokálně konečný;*
(iv) $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(a) = 1, a \in M$.

Věta 8.8 *Pokud je* $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ *otevřené pokrytí variety* M, *pak existuje na* M *rozklad jednotky podřízený pokrytí* $\mathcal{U}$.

Důkaz.
Větu dokážeme jen pro M kompaktní. Důkaz pro obecný případ je technicky náročný a nepřináší nové myšlenky, je možné ho najít v Appendixu.

Nechť $(V_\beta, \varphi_\beta)_{\beta\in B}$ je atlas na M. Pro každý bod $a \in M$ zvolíme otevřenou množinu V_a, pro kterou platí:
(i) $a \in V_a$,
(ii) existuje $\alpha \in A, V_a \subset U_\alpha$,
(iii) existuje $\beta \in B, V_a \subset V_\beta$.

Pro každý bod $a \in M$ zvolíme hladkou funkcí f, pro kterou $f(a) > 0, 0 \leq f(b) \leq 1, b \in M$, a $\operatorname{supp} f$ je kompaktní podmnožina V_a a definujeme otevřené množiny $W_a = \{m \in M | f(m) > 0\}$.

Systém $\{W_a | a \in M\}$ je otevřené pokrytí M, takže existuje konečné podpokrytí, které označíme $W_1, \ldots, W_k$.

Pokud označíme odpovídající funkce $g_1, \ldots, g_k$, pak definujeme soubor hladkých funkcí

$$h_i = \frac{g_i}{\sum_{j=1}^k g_j}; i = 1, \ldots, k,$$

na M, pro které platí $h_1 + \ldots + h_k = 1$. Podle konstrukce množin W_i víme, že pro každé $i = 1, \ldots, k$ existuje $\alpha_i \in\ A$, pro které $W_i \subset U_{\alpha_i}$.

Nyní definujeme funkce $f_\alpha = \sum_{i;\alpha_i=\alpha} h_i$. Pokud neexistuje index i, pro který $\alpha_i = \alpha$, chápeme odpovídající funkci jako funkci identicky rovnou nule. Tedy v systému funkcí $\{f_\alpha, \alpha \in A\}$ je jen konečně mnoho netriviálních funkcí. Tento systém splňuje požadavky věty. □

Kapitola 9

Integrace forem

Potíž při definici integrálu z diferenciální formy přes varietu tkví v tom, že do formy je potřeba dosadit jako proměnné souřadnice, ty jsou však pouze lokální – definované vždy jen v určité mapě. Tento problém se obchází pomocí tzv. rozkladu jednotky – forma se vynásobí konstantní funkcí rovnou jedné, která je však napsána ve formě součtu hladkých funkcí, z nichž každá má nosič v některé mapě.

9.1 Integrace diferenciálních forem na varietě.

Definice 9.1 *Nechť M je orientovaná varieta dimenze n s krajem. Nechť $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ má kompaktní nosič.*
(i) Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina s kanonickou orientací a $\omega \in \mathcal{E}^n(U)$ je diferenciální forma s kompaktním nosičem. Pak existuje hladká funkce f (s kompaktním nosičem) pro kterou $\omega = f\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ a

$$\int_U \omega := \int_U f dx_1 \ldots dx_n.$$

(ii) Existuje-li kladně orientovaná mapa (U, φ) na M taková, že $\operatorname{supp} \omega \subset U$, pak definujeme integrál z ω přes varietu M takto:

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} [\varphi^{-1}]^*(\omega).$$

(iii) Je-li $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ kladně orientovaný atlas na M a $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ rozklad jednotky podřízený tomuto atlasu, pak definujeme

$$\int_M \omega = \sum_{\beta\in B} \int_M f_\beta \omega.$$

Poznámka 9.2 *Je-li nosič ω uvnitř jedné mapy, pak není pochyb o existenci integrálu (který se převede na integrál přes $\mathbb{R}^n$ z hladké funkce s kompaktním nosičem). Díky předpokladu o kompaktním nosiči formy ω je součet v obecné definici integrálu ω přes M vždy jen konečný, všechny integrály v tomto součtu existují a jsou konečné.*

Uvedená definice není nejobecnější možná; například standardní příklad formy $\omega = f dx_1 \ldots \wedge dx_n$, kde f je Lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^n$, není v této definici zahrnut, neboť nosič f nemusí být kompaktní. Je možné definovat integrál z diferenciální formy v podstatně obecnějším případě, ale pak např. důkaz nezávislosti integrálu na výběru rozkladu jednotky je podstatně náročnější a techničtější. To není účelné v tomto úvodním kursu.

Věta 9.3 *Definice integrálu diferenciální formy přes varietu nezávisí ani na výběru atlasu, ani na výběru příslušného rozkladu jednotky.*

Důkaz této věty je jednoduchý, podrobnosti probereme na cvičení.

Poznámka 9.4 *Definice integrálu pomocí rozkladu jednotky je velmi elegantní a velmi vhodná pro teorii a dokazování. Na druhou stranu, s její pomocí se nedá žádný (aspoň trochu netriviální) integrál spočítat. Tvar funkcí v rozkladu jednotky je příliš komplikovaný, než aby se příslušné integrály daly prakticky vyjádřit. Proto je potřeba mít k dispozici nějaký způsob, jak vlastně integrály z diferenciálních forem počítat. Před formulací tohoto výsledku si zavedeme užitečné označení.*

Při integraci je vždy možno vynechat množinu míry nula z integračního oboru, aniž by se hodnota integrálu změnila. Tuto vlastnost integrálu budeme při výpočtech systematicky používat. Pro podmnožiny variet není třeba budovat znovu teorii Lebesgueovsky integrovatelných množin. Použijeme prostě faktu, že hladké obrazy méně-dimenzionálních množin mají v libovolné mapě míru nula. Je to prostý důsledek jedné důležité a známé věty z analýzy, tzv. Sardovy věty. Ta říká, že pro libovolné spojitě diferencovatelné zobrazení F otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ má obraz množiny kritických bodů F míru nula. (Její důkaz je možno nalézt ve skriptech [2], V.15.12.15.)

Připomeňme, že bod x je kritický bod F, pokud hodnost Jacobiho matice F v bodě x je menší než maximální možná. Speciálně, je-li F definováno na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a hodnoty F leží v $\mathbb{R}^n$, pak míra množiny $F(\Omega)$ je nula, neboť je možné F považovat za zobrazení definované na $\Omega \times \mathbb{R}$, které je konstantní v poslední proměnné.

Označení.

Řekneme, že podmnožina A variety s krajem M dimenze n je **zanedbatelná podmnožina,** *pokud existuje hladké zobrazení F otevřené podmnožiny $\Omega \subset \mathbb{R}^m, m < n$, pro které $A \subset F(I)$. Podstatnou vlastností zanedbatelných množin je, že každá zanedbatelná množina v $M = \mathbb{R}^n$ má*

Lebesguevou míru nula. A při integraci je vždy možno vynechat množinu míry nula z integračního oboru, aniž by se hodnota integrálu změnila.

Věta 9.5 *Nechť M je varieta dimenze n s krajem, kterou lze napsat jako disjunktní sjednocení*

$$M = \cup_{i=1}^{k} M_i \cup N$$

kde $M_1, \ldots, M_k$ jsou otevřené podmnožiny variety M a N je konečné sjednocení zanedbatelných množin.

Pak pro libovolnou formu $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ s kompaktním nosičem platí

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} \omega.$$

Tvrzení této věty je snadným důsledkem toho, že zanedbatelné množiny mají Lebesguevu míru rovnou nule, a tedy že integrál jakékoliv integrovatelné funkce přes takovéto množiny se rovnají nule. Zbytek tvrzení je důsledkem aditivity integrálu z funkce (integrál přes disjunktní sjednocení je součet integrálů přes jednotlivé množiny). Detaily výpočtu budou probrány na cvičení.

Poznámka 9.6 *V praxi se otevřené podmnožiny M_i volí tak, aby se každá z nich vešla do množiny U pro vhodnou mapu (U, φ). Pro nejběžnější případy variet M, které jsou vnořeny do euklidovského prostoru $\mathbb{R}^k$, lze většinou najít mapu (U, φ) takovou, že $M = U \cup N$.*

9.2 Integrace funkcí na Riemannových varietách

Poznámka 9.7 *Riemannovy variety patří mezi nejdůležitější speciální typy variet. Jejich význam plyne z toho, že jsou základním modelem prostorů, ve kterých je možné měřit vzdálenosti a úhly. Přesněji řečeno, je velmi dobře známo z elementární geometrie, že měřit velikosti vektorů a jejich úhly v lineárním vektorovém prostoru V je možné, pokud je na V dán skalární součin. Riemannovy variety jsou variety s dodatečnou strukturou, kterou je výběr (pozitivně definitního) skalárního součinu na $T_m M$ pro každé $m \in M$. To pak umožňuje měřit délky vektorů a úhly křivek na takovéto varietě. Jako další důsledek této struktury je možné také měřit velikosti objemů a definovat integrál z funkcí přes Riemannovy variety. Vzhledem k tomu, co už v tuto chvíli známe, je možné definovat integrály z funkcí pomocí integrálů z diferenciálních forem. K tomu stačí definovat tzv. formu objemu.*

Definice 9.8 *Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n. Nechť je na V dán pozitivně definitní skalární součin a orientace. Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze V a $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ duální báze V^*. Pak prvek*

$$\omega := \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n \in \Lambda^n(V^*)$$

nezávisí na výběru báze a nazývá se **element objemu na** V.

Lemma 9.9 *Element objemu nezávisí na výběru kladně orientované ortonomální báze. Jsou-li navíc $v_1, \ldots, v_n$ libovolné lineárně nezávislé vektory, pak číslo $|\omega(v_1, \ldots, v_n)|$ je rovno objemu rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory.*

Důkaz.

Matice přechodu mezi dvěma kladně orientovanými ortonormálními bazemi je ortogonální matice s kladným determinantem, který je tudíž rovný jedné. To dokazuje první část tvrzení.

Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory $v_i = \sum_j v_i^j e_j, i = 1, \ldots, n$, platí

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_i^j)\omega(e_1, \ldots, e_n) = \det(v_i^j).$$

Je dobře známo, že číslo $|\det(v_i^j)|$ je pak rovno objemu příslušného rovnoběžnostěnu. Je také známo, že tento objem lze vypočítat také jako $\sqrt{g}$, kde $g = \det(g_{ij}), g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ (Grammova matice, Grammův determinant).

$\square$

Definice 9.10 *Nechť M je orientovatelná Riemannova varieta dimenze n. Pro danou orientaci o variety M definujeme formu objemu $\omega_o \in \mathcal{E}^n(M)$ požadavkem, že pro každé $m \in M$ je $\omega_o(m)$ element objemu na T_mM vzhledem k uvažované orientaci o. Označme pro tuto chvíli symbolem $\int_{M,o} \omega$ integrál z formy ω přes varietu M se zvolenou orientací o. Je-li f libovolná hladká funkce s kompaktním nosičem na M, pak definujeme*

$$\int_M f dS := \int_{M,o} f\omega_o.$$

Tento integrál se nazývá **integrál 1. druhu z funkce f přes Riemannovu varietu** M.

Věta 9.11 *(i) Integrál $\int_M f dS$ nezávisí na výběru orientace na varietě M a je tedy jednoznačně určen strukturou Riemannovy variety.*

(ii) Je-li (U, φ) mapa na M a $\operatorname{supp} f \subset U$, pak pro funkce

$$\tilde{g}_{ij}(x) := g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \circ \varphi^{-1}(x);\ \tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij})$$

platí

$$\int_M f dS = \int_{\varphi(U)} (f \circ (\varphi)^{-1}) \cdot \sqrt{\tilde{g}} dx_1 \dots dx_n.$$

Důkaz.

(i) Z definice formy objemu ω_o plyne, že $\omega_{-o} = -\omega_o$. Tedy

$$\int_{M,-o} f\omega_{-o} = -\int_{M,o} f\omega_{-o} = \int_{M,o} f\omega_o.$$

(ii) Podle definice je

$$\int_M f dS = \int_{\varphi(U)} [\varphi^{-1}]^*(f\omega_o).$$

Je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ kanonická báze $\mathbb{R}^n$, pak

$$[\varphi^{-1}]^*(\omega_o)(e_1, \dots, e_n) = \omega_o([\varphi^{-1}]_*(e_1), \dots, [\varphi^{-1}]_*(e_n)) = \omega_o(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

Ale číslo $\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je rovno velikosti rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ v T_mM. Totéž číslo je ale dáno výrazem $\sqrt{g}$, kde g je determinant Grammovy matice skalárních součinů $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. Ale $\tilde{g} = g \circ \varphi^{-1}$, tedy je toto číslo zároveň rovno $\sqrt{\tilde{g}}$. $\square$

Cvičení k 11. přednášce.

Příklad 1. Ukažte, že definice integrálu diferenciální formy přes varietu nezávisí ani na výběru atlasu, ani na výběru příslušného rozkladu jednotky.

Řešení.

(i) Nejdříve si připomeneme následující tvrzení. Jsou-li U, V otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$ je difeomorfismus a $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, pak:

$\varphi^*(f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = (f \circ \varphi)[\det Jac\, \varphi] dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

(ii) Použitím standardní věty o substituci pro Lebesgueův integrál dostaname ihned následující tvrzení:

Je-li $\det Jac\,\varphi > 0$ na U, pak $\int_V \omega = \int_U \varphi^*(\omega)$.
(iii) Další krok je rozmyslet si, že pokud je nosič formy ω v nějaké mapě, pak integrál $\int_M \omega$ nezávisí na výběru této mapy. Jsou-li totiž (U,φ), resp. (U',φ') dvě souhlasně orientované mapy obsahující nosič dané formy ω, pak platí

$$[\varphi^{-1}]^*(\omega) = [\varphi' \circ \varphi^{-1}]^* \circ [(\varphi')^{-1}]^*(\omega)$$

a rovnost příslušných integrálů pak plyne z předcházejícího bodu.
(iv) Poslední krok je přesvědčit se, že definice integrálu z diferenciální formy nezávisí na volbě atlasu na varietě M a na volbě pdřízeného rokladu jednotky.

Předpokládejme tedy, že $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, resp. $\{(U'_{\alpha'},\varphi'_{\alpha'})\}_{\alpha'\in A'}$ jsou dva atlasy na M, nechť $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$, resp. $\{f'_{\beta'}\}_{\beta'\in B'}$ jsou podřízené rozklady jednotky. Pak sjednocení těchto dvou atlasů je opět atlas a systém $\{f_\beta f_{\beta'}\}_{(\beta,\beta')\in B\times B'}$ je podřízený rozklad jednotky. Pak

$$\sum_{\beta\in B}\int_M f_\beta\omega = \sum_{\beta\in B}\int_M f_\beta[\sum_{\beta'\in B'} f_{\beta'}]\omega = \sum_{\beta'\in B'}\int_M f_{\beta'}[\sum_{\beta\in B} f_\beta]\omega = \sum_{\beta'\in B'}\int_M f_{\beta'}\omega.$$

□

Příklad 2. Nechť M je varieta dimenze n a $M = M_1\cup\ldots\cup M_k\cup N$ je disjunktní rozklad, kde $M_1,\ldots,M_k$ jsou otevřené podmnožiny M a N je konečné sjednocení zanedbatelných množin.

Rozmyslete si, že pro každou formu $\omega\in\mathcal{E}^n(M)$ s kompaktním nosičem platí

$$\int_M \omega = \int_{M_1}\omega + \ldots + \int_{M_k}\omega.$$

Řešení.

Nechť $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je rozklad jednotky podřízený atlasu $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ na M. Nechť ω je diferenciální forma stupně n s kompaktním nosičem. Z definice zanedbatelné množiny plyne, že pro každé α je míra množiny $\varphi_\alpha(N)$ rovna nule. Pak ale

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha\in A}\int_M f_\alpha\omega = \sum_{\alpha\in A}\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}[\varphi_\alpha^{-1}]^*(f_\alpha\omega) =$$
$$= \sum_{\alpha\in A}\sum_{i=1}^{k}\int_{\varphi_\alpha(M_i\cap U_\alpha)}[\varphi_\alpha^{-1}]^*(f_\alpha\omega) = \sum_{i=1}^{k}[\int_{M_i}(\sum_{\alpha\in A} f_\alpha\omega)] = \sum_{i=1}^{k}\int_{M_i}\omega.$$

Příklad 3. Nechť $F: M\to N$ je hladké zobrazení mezi varietami. Rozmyslete si, že:
(1) Pro každou uzavřenou formu $\omega\in\mathcal{Z}^k(N)\subset\mathcal{E}^k(N)$ je $F^*(\omega)$ uzavřená.
(2) Pro každou exaktní formu $\omega\in\mathcal{E}^k(N)$ je $F^*(\omega)$ exaktní.
(3) Zobrazení $F^*:\mathcal{Z}^k(N)\to\mathcal{Z}^k(M)$ indukuje dobře definované zobrazení

$$F^*: H^k_{dR}(N)\to H^k_{dR}(M).$$

(4) Je-li $F = Id$, pak $F^*: H^k_{dR}(N)\to H^k_{dR}(M)$ je také identita.
(5) Je-li F difeomorfismus, pak je F^* isomorfismus.

Rozmyslete si, že de Rhamovy kohomologické grupy jsou invarianty pro difeomorfismy variet. Pokud jsou tedy tyto kohomologické grupy pro dvě variety různé, nejsou tyto variety difeomorfní.

Řešení.
(1) Plyne ihned z relace $F^*(d\omega) = d(F^*(\omega))$.
(2) Plyne ihned z relace $F^*(d\omega) = d(F^*(\omega))$.
(3) Je to snadný důsledek předchozích dvou bodů.
(4) Plyne z definice.
(5) Plyne ze vztahu $(F\circ G)^* = G^*\circ F^*$.

Příklad 4. Tak zvaná 'kulatá metrika' g na sféře je definována pomocí vnoření $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ předpisem $g = \iota^*(h)$., kde h je metrický tenzor odpovídající Eukleidovské metrice na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Zobrazení $X : K(0,1) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$X(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}).$$

Vypočítejte tvar tenzoru $X^*(g)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} X^*(g) = (\iota \circ X)^*(h) &= du^2 + dv^2 + \left(\frac{u\,du + v\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) = \\ &= \frac{(1-v^2)du^2 + (1-u^2)dv^2 + 2uvdudv}{1-u^2-v^2} \end{aligned}$$

12. přednáška.

Kapitola 10

Stokesova věta

10.1 Variety s hranami

V mnoha aplikacích Stokesovy věty se tato věta používá na oblasti, jejichž hranice není hladká. Typicky se jedná o kvádry, kužely, trojúhelníky. Proto si rozšíříme definici variety na širší třídu objektů, které budeme nazývat variety s hranami.

Jako u mnoha variací na pojem variety, je třeba si rozmyslet jak vybereme modelové množiny a jak budeme definovat typ zobrazení mezi nimi, které budeme používat v definici kompatibilních map.

(1) Modelové množiny budou otevřené množiny v uzavřeném kvadrantu

$$\mathbb{R}^n_{\leq} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, x_i \leq 0, i = 1, \ldots, n\}.$$

Topologii na kvadrantu definujeme jako standardní indukovanou topologii na podmnožině $\mathbb{R}^n$. Tedy $A \subset \mathbb{R}^n_{\leq}$ je otevřená, pokud existuje otevřená podmnožina $U \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí $A = U \cap \mathbb{R}^n_{\leq}$.

(2) Jako přechodové funkce mezi dvěma modelovými množinami budeme brát difeomorfismy. Jsou-li A, B dvě otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n_{\leq}$, pak zobrazení $f : A \to B$ nazveme difeomorfismus, pokud existuje otevřená podmnožina $U \subset \mathbb{R}^n$ a hladké zobrazení $F : U \to \mathbb{R}^n$, pro které platí

$$A \subset U, F|_A = f.$$

Tento výběr vede k následující definici.

Definice 10.1 (Definice variety s hranami.) *Nechť M je množina.* **Mapa** (U, φ) **dimenze** n **na** M *je vzájemně jednoznačné zobrazení φ podmnožiny $U \subset M$ na otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^n_{\leq}$.*

Dvě mapy $(U, \varphi), (V, \psi)$ dimenze n jsou **kompatibilní,** *pokud jsou množiny $\varphi(U \cap V)$ a $\psi(U \cap V)$ otevřené a přechodové zobrazení mezi nimi je difeomorfismus. Atlas na M dimenze n je systém kompatibilních map dimenze n, které pokrývají M. Diferencovatelná struktura je maximální atlas na M.*

Řekneme, že M je **varieta s hranami dimenze** *n, pokud je na M zadán atlas dimenze n a odpovídající topologie na M je Hausdorffova a má spočetnou bazi otevřených množin.*

Topologická hranice $\partial\mathbb{R}^n_{\le}$ kvadrantu $\mathbb{R}^n_{\le}$ je množina bodů, kde je alepoň jedna souřadnice nulová. Body stěn, kde je právě jedna souřadnice nulová mají stejný typ jako mají body hranice variety s hranicí, zatímco body, kde víc než jedna souřadnice je triviální mají zřejmě odlišný charakter. To vede k následující definici.

Definice 10.2 *Nechť M je varieta s hranami dimenze n. Řekneme, že bod $a \in M$ je* **bod hranice** *M, pokud existuje mapa (U, φ) na M, pro kterou má $\varphi(a)$ alespoň jednu souřadnici nulovou.*

Řekneme, že bod $a \in M$ je **bod hrany** *M***,** *pokud existuje mapa (U, φ), pro kterou má bod $\varphi(a)$ víc než jednu souřadnici nulovou.*

Řekneme, že bod $a \in M$ je **hladký bod kraje** *M, pokud existuje mapa (U, φ) na M, pro kterou má $\varphi(a)$ právě jednu souřadnici nulovou.*

Množinu všech bodů hranice variety M označíme ∂M.

Množinu všech hladkých bodů hranice označíme $\partial^* M$.

Příklady 10.3 *(1) Pro kvadrant $M = \mathbb{R}^n_{\le}$ platí, že jeho hranice ∂M je hranice M jako topologického prostoru. Množina $\partial^* M$ hladkých bodů M má tvar*

$$\partial^* M = H_1 \cup \ldots \cup H_n,$$

kde $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0, x_j < 0, j \neq i\}$. Každá množina H_i má zřejmě kanonickou strukturu variety dimenze je $n - 1$.

Totéž platí pro každou modelovou množinu, tj. pro otevřenou podmnožinu kvadrantu $\mathbb{R}^n_{\le}$.

(2) Zvolme pevně index $i \in \{1, \ldots, n\}$ a uvažujme množinu

$$M_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \le 0;\ x_j < 0, j \neq i\},$$

která je otevřenou podmnožinou poloprostoru

$$\mathbb{R}^i_{\le} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \le 0\}.$$

Tento poloprostor je standardním příkladem variety s krajem a jeho kraj je množina

$$\partial\mathbb{R}^i_{\le} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0\}.$$

Z toho plyne, že i M_i je varieta s krajem a jejím krajem je

$$\partial M_i = H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0;\ x_j < 0, j \neq i\},$$

Kanonická orientace prostoru $\mathbb{R}^n$ je dána formou $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Tato orientace definuje orientaci poloprostoru $\mathbb{R}^i_{\le}$, a tedy i indukovanou orientaci kraje $\partial\mathbb{R}^i_{\le}$.

Abychom tuto indukovanou orientaci popsali, přečíslujeme nejprve souřadnice tak, aby byla i-tá souřadnice na prvním místě. Tedy určíme orientaci poloprostoru $\mathbb{R}^i_{\le}$ pomocí formy

$$(-1)^{i-1} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

a indukovaná orientace na $\partial\mathbb{R}^i_{\le}$ je pak určena formou

$$(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Stejná forma určuje také indukovanou orientaci kraje ∂M_i variety s krajem M_i.

(3) Typický příklad variety s hranami dimenze n je uzavřený interval

$$I = \prod_{i=1}^{n} < a_i, b_i > \subset \mathbb{R}^n$$

(rozmyslete si, jak vypadá atlas na I).

Lemma 10.4 *Nechť M je varieta s hranami dimenze n a $a \in M$.*
(a) Je-li a bod hrany pro nějakou mapu $(U\varphi)$ daného atlasu na M, pak totéž platí pro každou jinou mapu atlasu.
(b) Je-li bod a hladkým bodem kraje M pro nějakou mapu (U, φ) daného atlasu na M, pak totéž platí pro každou jinou mapu atlasu.
(c) Množina $\partial^* M$ všech hladkých bodů kraje M je varieta (bez kraje) dimenze $n-1$.

Důkaz.
(a) Předpokládejme, že M je varieta s hranami a že bod $a \in M$ je bod hrany M pro mapu (U, φ) a není bod hrany pro mapu (V, ψ). Při vhodné volbě souřadnic tedy můžeme předpokládat, že bod $\varphi(a)$ má souřadnice $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ pro vhodné $k < n-1$. Dále můžeme předpokládat, že existuje lineární podprostor $A \subset \mathbb{R}^n$ dimenze $n-1$, pro který je $\psi(a)$ vnitřní bod množiny $\psi(V) \cap A$. Podle předpokladu je přechodové zobrazení $\alpha = \varphi \circ \psi^{-1}$ difeomorfismus $\psi(U \cap V)$ onto $\varphi(U \cap V)$. Tedy α_* je isomorfismus $T_{\psi(a)}A$ na $T_{\varphi(a)}(\varphi(U))$. Vektorový prostor $\alpha_*(T_{\psi(a)}A)$ má dimenzi $n-1$, tedy v něm existuje vektor X, který má jednu z posledních dvou souřadnic nenulovou. Můžeme zvolit označení souřadnic, eventuelně zaměnit vektor X za $-X$, tak, aby $X_n > 0$.

Existuje tedy hladká křivka $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$, pro kterou $\gamma(0) = \psi(a)$ a $\alpha_*(\gamma'(0)) = X$. Z toho plyne, že pro malé $t > 0$ je poslední souřadnice bodu $\alpha \circ \gamma(t)$ kladná, což je ve sporu s tím, že α zobrazuje body $\psi(V)$ na body $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n_{\leq}$.

(b) V předchozím bodě jsme ukázali, že bod $a \in M$ nemůže být v jedné mapě hladkým bodem M a v jiné mapě bodem hrany M. V kapitole o varietách s krajem jsme ukázali, že pro varietu s krajem M bod nemůže být $a \in M$ v jedné mapě bodem kraje M a v jiné mapě bodem vnitřku M. Pro varietu M s hranami se toto poslední tvrzení dokáže stejně. To dokazuje tvrzení (b) Lemmatu.

(c) Důkaz je stejný jako důkaz tvrzení, že pro varietu M s krajem je její kraj varieta dimenze $n-1$ bez kraje.

Poznámka 10.5 *Pro variety s hranami definujeme stejně jako pro variety (s krajem nebo bez kraje) tečné vektory v daném bodě, kovektory, tensory, diferenciální formy, rozklad jednotky, orientaci, a integrály z diferenciální formy přes orientovanou varietu s hranami pomocí odpovídajících map.*

Věta 10.6 (Stokesova věta.) *Nechť M je varieta s hranami a nechť ω je diferenciální forma stupně $n-1$ na M s kompaktním nosičem.*

Pak

$$\int_M d\omega = \int_{\partial^* M} \omega.$$

Důkaz.
(1) Nejdříve budeme uvažovat případ, kdy je nosič $\operatorname{supp} \omega$ podmnožinou nějaké mapy (U, φ) na M. Je tedy možné se odvolat na Gaussovu větu pro kvadrant, která byla dokázána v přednášce Geometrie 2 v minulém semestru. Pro úplnost ale tuto větu dokážeme znovu.

Předpokládejme, že ω je diferenciální forma stupně $n-1$ s kompaktním nosičem v kvadrantu

$$\mathbb{R}^n_{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\} = (-\infty, 0 >^n .$$

Formu ω můžeme napsat ve tvaru

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

kde stříška označuje vynechání příslušného činitele. Pak

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} d\omega_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}\right] dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

V příkladech 10.3 jsme si rozmysleli, že množina $\partial^*\mathbb{R}^n_\leq$ hladkých bodů kraje kvadrantu $\mathbb{R}^n_\leq$ je varieta dimenze $n-1$ (bez kraje), která je sjednocením

$$\partial^*\mathbb{R}^n_\leq = \cup_{i=1}^n H_i,\ H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0,\, x_j < 0, j \neq i\}.$$

a že indukovaná orientace na varietě H_i je určena formou $(-1)^{i-1}dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_\leq} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-R}^{0} \ldots \int_{-R}^{0} \frac{\partial\omega_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-R}^{0} \ldots \int_{-R}^{0} \left[\int_{-R}^{0} \frac{\partial\omega_i}{\partial x_i} dx_i\right] dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-R}^{0} \ldots \int_{-R}^{0} \omega_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{H_i} \omega_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \int_{\partial^*\mathbb{R}^n_\leq} \omega, \end{aligned}$$

(2) V obecném případě zvolíme atlas na varietě s hranami M. Nosič $\operatorname{supp}\omega$ je kompaktní, tedy existuje konečný soubor map $(U_i, \varphi_i), i = 1, \ldots, k$ a rozklad jednotky $\{f_i\}_1^k$ podřízený pokrytí $\{U_i\}_1^k$ variety $\cup_1^k U_i$ a dostaneme

$$\int_M d\omega = \int_M d(\sum_1^k f_i\omega) = \sum_1^k \int_M d(f_i\omega) = \int_{\partial^* M}\left[\sum_1^k f_i\right]\omega = \int_{\partial^* M}\omega.$$

□

Ze znění Stokesovy věty plyne ihned následující důsledek.

Důsledek 10.7 *Předpokládejme, že M je varieta dimenze n a ω je diferenciální forma stupně $n-1$ s kompaktním nosičem. Pak*

(1) $\partial M = \emptyset \implies \int_M d\omega = 0.$

(2) $d\omega = 0 \implies \int_{\partial M} \omega = 0.$

Cvičení ke 12. přednášce.

Příklad 1. Nechť M a N jsou dvě variety. Definujte 'kanonickou' strukturu variety na množině $M \times N$.

Řešení. Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ a $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta\in B}$ atlasy na varietě M, resp. N, pak definujeme atlas na $M \times N$ předpisem

$$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B}.$$

Snadno se ověří, že přechodové funkce pro součin se vyjádří pomocí přechodových funkcí pro M, resp. N, a jsou tedy hladké.

Spočetná baze otevřených množin se napíše jako všechny možné součiny prvků spočetné baze otevřených množin na M a na N. Snadno se také ověří, že topologie na $M \times N$ je Hausdorffova (rozmyslete si!).

Příklad 2. Nechť torus T je varieta dimenze 2, kterou dostaneme rotací kružnice $K = \{(x-4)^2 + z^2 = 1\}$ kolem osy z. Ukažte, že torus T je difeomorfní s varietou $S^1 \times S^1$.

Řešení. Parametrický popis $[(4+\cos\alpha, 0, \sin\alpha)], \alpha \in \mathbb{R}$ kružnice K rozšíříme na parametrizaci

$$X(\alpha,\beta) = [(4+\cos\alpha)\cos\beta, (4+\cos\alpha)\cos\beta, \sin\alpha)], (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

toru T. Hledaný difeomorfismus je popsaný zobrazením

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \times (\cos\beta, \sin\beta) \in S^1 \times S^1 \mapsto X(\alpha,\beta) \in T.$$

Příklad 3. Popište různé způsoby zadání orientace vektorového prostoru V, resp. variety M.

Řešení. (1) Nechť má vektorový prostor V dimenzi n. Podle definice je orientace vektorového prostoru výběr jedné ze dvou tříd ekvivalence, která je definovaná na množině všech bazí prostoru V. Orientace je tedy zadaná:

- (a) buď volbou jedné z bazí V, kterou prohlásíme za kladně orientovanou,

- (b) nebo výběrem netriviálního elementu v jednodimenzionálním prostoru $\Lambda^n(V)$; volba baze $\{v_1, \ldots, v_n\}$ odpovídá volbě $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda^n(V)$;

(c) výběrem souřadnic na prostoru V.

(2) Nechť M je varieta a (U, φ) mapa na M. (Lokální) orientace na $U \subset M$ je dána

(a) volbou baze $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_a\}_{i=1}^n$ tečného prostoru $T_aM, a \in M$.

(b) výběrem formy $\omega \in \mathcal{E}^n(U)$;

(c) výběrem mapy.

Rozmyslete si, jak tyto volby mezi sebou souvisí.

Příklad 4. Forma $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ je dána na $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(1) Ukažte, že forma je uzavřená na M;

(2) Ukažte, že forma ω není exaktní, tedy že $H^1(M)$ je netriviální.

Řešení. (1) To je otázka přímého výpočtu.

(2) Přímým výpočtem zjistíme, že $\int_{S^1} \omega \neq 0$. Z Důsl. 10.7 (1) pak plyne, že ω není exaktní.

Příklad 5.

Forma $\omega = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n}{|x|^n}$ stupně $n-1$ je definována na $M = \mathbb{R}^n - \{(0)\}$.

(1) Ukažte, že forma je uzavřená na M;

(2) Ukažte, že forma ω není exaktní, tedy že $H^{n-1}(M)$ je netriviální.

Řešení. Postup je stejný jako v příkladu 4, jen výpočty jsou podstatně složitější.

Příklad 6. Nechť $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^2$a nechť $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Ukažte, že dimenze vektorového prostoru $H^1_{dR}(\Omega)$ je větší nebo rovna k.

Řešení. Použitím výsledků Příkladu 4 najděte formy $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, které jsou uzavřené, ale nejsou exaktní tak, aby tyto formy byly lineárně nezávislé v prostoru $\mathcal{E}^1(\Omega)$.

13. přednáška

Kapitola 11

Algebra forem

Poznámka V moderní diferenciální geometrii hraje důležitou roli algebraická formulace mnoha základních vlastností variety M. Na prvním místě jsou to vlastnosti algebry funkcí $\mathcal{E}^0(M)$ (požadavky na regularitu či hladkost mohou být různé, např. spojitost či hladkost). Samotná varieta M může být za určitých okolností zrekonstruována ze znalosti této algebry, což je slavný výsledek Gelfandův. V této závěrečné kapitole skript probereme některé základní informace o vlastnostech (gradované) algebry diferenciálních forem.

11.1 Algebra $\mathcal{E}^*(M)$

Algebra $\mathcal{E}^*(M) = \oplus_k \mathcal{E}^k(M)$ má, jako reálný vektorový prostor, nekonečnou dimenzi. Zajímavější je uvažovat ji jako modul nad algebrou $\mathcal{A} = \mathcal{E}^0(M)$. V jednoduchém případě, např. pro $M = \mathbb{R}^n$, je algebra $\mathcal{E}^*(M)$ volný modul dimenze 2^n nad $\mathcal{A}$ s bází $\{dx_J\}$.

Základní algebraickou vlastností $\mathcal{E}^*(M)$ je její gradace $\mathcal{E}^*(M) = \oplus_k \mathcal{E}^k(M)$ a to, že je tzv. gradovaně komutativní, t.j. že platí

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$$

pro všechny $\omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^l(M)$. Tuto vlastnost je možné také formulovat pomocí $\mathbb{Z}_2$-gradace. Označme $\mathcal{E}^+(M)$, resp. $\mathcal{E}^-(M)$ podprostor všech forem sudého, resp. lichého stupně, pak $\mathcal{E}^*(M) = \mathcal{E}^+(M) \oplus \mathcal{E}^-(M)$ a je-li $\omega \in \mathcal{E}^a(M), \tau \in \mathcal{E}^b(M);\ a, b \in \{\pm 1\}$, pak

$$\omega \wedge \tau = ab\tau \wedge \omega.$$

Tato vlastnost algebry $\mathcal{E}^*(M)$ je zřejmě důsledkem téže vlastnosti vnější algebry $\Lambda^*(V)$ libovolného vektorového prostoru V. To vše přirozeně patří do teorie superprostorů a superalgeber, která se pod vlivem teoretické fyziky rychle rozvíjí v posledních desetiletích.

Připomeňme si, že množina $\mathcal{X}(M)$ vektorových polí se dá charakterizovat jako množina všech derivací (t.j. lineárních zobrazení s Leibnizovou vlastností) algebry $\mathcal{A}$. Každá diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ je k-lineární antisymetrické zobrazení vektorových polí do prostoru funkcí. V řeči multilineárních zobrazení modulů nad algebrou $\mathcal{A}$ je vnější součin definován vztahem

$$\omega \wedge \tau(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \tau(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}).$$

Je užitečné si přípomenout následující popis rozložitelných forem v řeči multilineárních zobrazení.

Lemma 11.1 *Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{E}^1(M)$, pak pro libovolná pole $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ platí*

$$[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k](X_1, \ldots, X_k) = \det(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^k.$$

11.2 Gradované derivace na algebře forem

Poznámka De Rhamův diferenciál d má dvě vlastnosti, které jsou charakteristické a které se vyskytují i u dalších lineárních operátorů z prostoru diferenciálních forem $\mathcal{E}^*(M)$ do sebe. První z nich je vzorec pro derivaci součinu dvou forem, který (až na ev. změnu znaménka) je Leibnizova vlastnost derivace součinu. Druhý je fakt, že zvyšuje stupeň formy o jedničku. To je inspirací pro následující definici.

Definice 11.2 *Nechť j je celé číslo a nechť $D : \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ je lineární zobrazení. Označme $\mathcal{E}^l(M) = \{0\}$ pro $l \in Z$, $l \notin \{0, \dots, n\}$. Řekneme, že D je* **gradovaná derivace stupně** *j pokud platí:*

1. *$D\left(\mathcal{E}^k(M)\right) \subset \mathcal{E}^{k+j}(M)$, $k = 0, \dots, n$.*
2. *Pro všechny $\omega \in \mathcal{E}^k(M), \tau \in \mathcal{E}^*(M)$ platí*

$$D(\omega \wedge \tau) = D(\omega) \wedge \tau + (-1)^{jk} \omega \wedge D(\tau).$$

Poznámka

De Rhamův diferenciál d je tedy gradovaná derivace stupně 1. Všimněte si, že gradované derivace stupně j menší než -1 jsou nutně triviální. Takovéto zobrazení by nutně každé funkci a 1-formě přiřadilo formu záporného stupně, to jest nulu, a z vlastnosti 2) by ihned plynulo, že obraz libovolné formy je nula. Za chvíli si ukážeme další příklady gradovaných derivací.

Definice 11.3 *Nechť X je hladké vektorové pole na M. Pak definujeme lineární zobrazení $\iota_X : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k-1}(M)$ předpisem*

$$[\iota_X(\omega)](X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1});$$

kde $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathcal{X}(M); \omega \in \mathcal{E}^k(M)$. Zobrazení ι_X se nazývá **kontrakce** *vzhledem k vektorovému poli X.*

Příklad

Pro rozložitelnou formu $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \in \mathcal{E}^k(M)$ a pro každé $X_1 \in \mathcal{X}(M)$ platí

$$\iota_{X_1} \omega = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \alpha_l(X_1) \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha_l} \wedge \ldots \wedge \alpha_k,$$

kde stříška nad α_l znamená, že tento faktor v součinu chybí. Toto tvrzení ihned plyne z definice kontrakce a z rozvoje determinantu matice $(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^k$ podle prvního sloupce.

Věta 11.4 *Nechť X je libovolné vektorové pole na M. Pak kontrakce ι_X je gradovaná derivace stupně -1 na $\mathcal{E}^*(M)$.*

Důkaz. Stačí zřejmě ověřit jenom druhou vlastnost z definice. Zobrazení ι_X je lineární, stačí tedy ověřit vlastnost

$$\iota_X(\omega \wedge \tau) = \iota_X(\omega) \wedge \tau + (-1)^{-k} \omega \wedge \iota_X(\tau)$$

pro rozložitelné formy. Předpokládejme tedy, že $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \in \mathcal{E}^k(M)$, $\tau = \alpha_{k+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+l} \in \mathcal{E}^l(M)$. Pak

$$[\iota_{X_1}(\omega \wedge \tau)](X_2, \dots, X_{k+l}) = \det(\alpha_i(X_j))_{i,j=1}^{k+l}.$$

Nyní stačí rozvinout determinant podle prvního sloupce a použít popis kontrakce rozložitelné formy v předchozím příkladu.

Poznámka

Jak je obvyklé pro derivace, složení dvou derivací (prvního řádu) již není derivace (prvního řádu). U vektorových polí jsme viděli, že ale komutátor dvou vektorových polí je opět vektorové pole (viz 5.20). Podobně je tomu s gradovanými derivacemi. Jejich složení není gradovaná derivace; ukážeme si však nyní, že vhodný gradovaný komutátor dvou gradovaných derivací je opět gradovaná derivace. To je také systematický způsob, jak konstruovat nové gradované derivace pomocí již známých gradovaných derivací.

Věta 11.5 *Nechť D_1 je gradovaná derivace stupně j_1 a D_2 je gradovaná derivace stupně j_2. Pak jejich gradovaný komutátor $[D_2, D_1]$ definovaný pomocí vzorce*

$$[D_2, D_1] := D_2\, D_1 - (-1)^{j_1 j_2} D_1\, D_2$$

je gradovaná derivace stupně $j_1 + j_2$.

Důkaz.
Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $\tau \in \mathcal{E}^l(M)$. Pak

$$\begin{aligned}
&[D_2, D_1](\omega \wedge \tau) = \\
=&D_2[D_1(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_1 k}\omega \wedge D_1(\tau)] - (-1)^{j_1 j_2} D_1[D_2(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_2 k}\omega \wedge D_2(\tau)] = \\
=&D_2\, D_1(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_2(k+j_1)} D_1(\omega) \wedge D_2(\tau) + \\
&+ (-1)^{j_1 k} D_2(\omega) \wedge D_1 \tau + (-1)^{(j_1+j_2)k}\omega \wedge D_2\, D_1(\tau) + \\
&+ (-1)^{j_1 j_2 + 1}[D_1\, D_2(\omega) \wedge \tau + (-1)^{j_1(k+j_2)} D_2(\omega) \wedge D_1(\tau) + \\
&+ (-1)^{j_2 k} D_1(\omega) \wedge D_2 \tau + (-1)^{(j_1+j_2)k}\omega \wedge D_1\, D_2(\tau)] = \\
=&[D_2, D_1](\omega) \wedge \tau + (-1)^{(j_1+j_2)k}\omega \wedge [D_2, D_1](\tau).
\end{aligned}$$

Definice 11.6 *Nechť X je vektorové pole na M. Pak* **Lieova derivace** *L_X na prostoru diferenciálních forem $\mathcal{E}^*(M)$ je definována jako gradovaný komutátor de Rhamova diferenciálu a kontrakce vzhledem k vektorovému poli X :*

$$L_X := [d, \iota_X] = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d. \tag{11.1}$$

Lieova derivace je tedy gradovaná derivace na $\mathcal{E}^*(M)$ stupně 0.

Příklad
Ihned z definice je možné spočítat, jak vypadá Lieova derivace funkce či 1-formy.
Je-li X vektorové pole a f funkce na M, pak

$$L_X(f) = \iota_X(df) = df(X) = Xf.$$

Je-li $\omega = df$ exaktní 1-forma, pak

$$L_X(df) = d(\iota_X(df)) = d(Xf).$$

Leibnizovo pravidlo umožňuje redukovat výpočet Lieovy derivace forem vyšších stupňů postupně až na výše uvedené dva případy.

Poznámka
Tradiční geometrická definice Lieovy derivace je jiná, je založená na pojmu jednoparamterické grupy transformací, generované příslušným vektorovým polem. Pokud je použita tato geometrická definice, pak je výše uvedený vztah pro Lieovu derivaci ekvivalentní definicí (příslušný vztah se obvykle nazývá Cartanův vzorec).

□

Cvičení ke 13. přednášce.

Příklad 1. Předpokládejme, že je varieta $M \subset \mathbb{R}^n$ zadaná rovnicí $M = \{x \in \mathbb{R}^n | f(X = 0)\}$, kde f je hladká funkce a $\operatorname{grad} f(a) \neq 0, a \in M$.

Ukažte, že pro vektor $X \in \mathbb{R}^n$ platí $X \in T_a M$ právě když $X(f)(a) = 0$.

Řešení. Vektor X patří do $T_a M$ právě když existuje křivka

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = a, \gamma'(0) = X,$$

což je ekvivalentní s podmínkou, že $f(\gamma(t))$ je identicky nulová funkce. a platí $\gamma(0) \in M, \gamma'(0) = X$. Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkami $f(\gamma(a)) = 0, \gamma'(0) = X$ a

$$\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\gamma_i}{dt}(0) = 0. \tag{11.2}$$

Tedy vektor $X = \sum_1^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ patří do $T_a M$ právě když je kolmý na vektor $\operatorname{grad} f(a)$, což je ekvivalentní s podmínkou $X(f)(a) = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\gamma_i}{dt}(0) = 0$.

Příklad 2. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je funkce zadaná vztahem

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1,$$

a definujme varietu M předpisem $M = f^{-1}(0)$.

Ukažte, že je vektorové pole

$$X = (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}$$

tečné k varietě M.

Řešení. Platí

$$X(f) = 2x(x^2 + y^2 - 1),$$

tedy pro body variety M platí $X(f)(a) = 0, a \in M$ a stačí použít předchozí příklad.

Příklad 3. Nechť $M = S^3$ je trojrozměrná sféra definovaná rovnicí

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.\}$$

Nechť jsou dána tři vektorová pole na M předpisem

$$(1)\, X = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$(2)\, Y = \left(-z\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$(3)\, Z = \left(-t\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Ukažte, že v každém bodě $a \in M$ tvoří vektory $X(a), Y(a), Z(a)$ bazi tečného prostoru $T_a M$.

Řešení.

Normálový vektor $N_a, a \in M$ má tvar $N_a = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)$ a vektory $X(a), Y(a), Z(a)$ jsou kolmé na N_a, tedy patří do $T_a M$. Jsou lineárně závislé, právě když hodnost matice koeficientů je menší než tři, což je pravda, pokud jsou determinanty všech čtyř 3×3 minorů rovny nule. Ale to nastane jen v bodě $a = (0, 0, 0, 0)$, který nepatří do M.

Příklad 4. Vyjádřete vektorové pole $X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$ v cylindrických souřadnicích.

Řešení. Zvolme cylindrické souřadnice pomocí vztahů $x = r\cos t, y = r\sin t, z = z$. pak

$$X = (2\cos t - \sin t)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\sin t + \cos t}{r}\frac{\partial}{\partial t} + 3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Příklad 5. Na $\mathbb{R}^2$ jsou dány dvě kovektorová pole

$$\alpha = x\,dx + y\,dy; \beta = y\,dx + x\,dy.$$

(a) Najděte množinu M, na které jsou α, β lineárně nezávislá.
(b) Na této množině najděte vektorové pole X, Y, které v každém bodě M tvoří bazi duální k bazi α, β.

Řešení.
(a) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)|x = \pm y\}$.
(b)

$$X = \frac{x}{x^2 - y^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 - y^2}\frac{\partial}{\partial y},\ \ Y = -\frac{y}{x^2 - y^2}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{x}{x^2 - y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

Příklad 6. Ukažte, že
jsou-li X, Y dvě vektorová pole na M, pak

$$[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}.$$

Řešení. Levá i pravá strany příslušné rovnosti je gradovaná derivace, stačí tedy (díky Leibnizově vlastnosti) ověřit tyto rovnosti pro funkce a exaktní 1-formy.

Navíc jsou obě strany derivace stupně -1. Pro funkce jsou tedy obě strany rovné nule a je-li $\omega = df$, pak

$$\begin{aligned}[L_X, \iota_Y](df) &= L_X(df(Y)) - \iota_Y(L_X(df)) = X(Yf) - [d(Xf)](Y) = \\ &= [X,Y](f) = \iota_{[X,Y]}(df).\end{aligned}$$

Literatura

[1] L. Boček: Tenzorový počet, Matematický seminář SNTL, Praha 1976

[2] R. Černý: Matematická analýza pro fyziky, III. skripta

[3] O. Kowalski: Úvod do Riemannovy geometrie, skripta MFF UK, Karolinum 1995.

[4] O. Kowalski: Základy matematické analýzy na varietách, skripta MFF UK, 1973, 1975.

[5] O. Kowalski: Elemente der Analysis auf Manningfaltigkeiten, Teubner Texte zur Mathematik, Band 39, Leipzig, 1981.

[6] J. M. Lee: Introduction to topological manifolds, GTM 202, Springer, 2002.

[7] J. M. Lee: Introduction to smooth manifolds, GTM 218, Springer, 2002.

[8] P. Gadea, J. Munoz Masqué, I Mykytyuk: Analysis and algebra on differentiable manifolds, Springer,

[9] L. Krump, V. Souček, J. Těšínský: Matematická analýza na varietách, skripta MFF UK, Karolinum 1999.