Geometrie 2

LS, 2020/2021‘

Obsah

KAPITOLA 0

Úvod

Přednáška 'Geometrie 2 navazuje na přednášku 'Geometrie 1' ze zimního semestru a bude se věnovat dvěma hlavním tématům. První téma je to, čemu se obvykle říká křivkový a plošný integrál. Křivkový integrál byl již definován a používán v přednášce 'Geometrie 1'. Křivka byla popsána pomocí její parametrizace, která umožňovala převést definici křivkového integrálu na obyčejný jednorozměrný integrál. Důležitá vlastnost křivkového integrálu prvniho druhu je nezávislost na volbě parametrizace.
Plošný integrál si zavedeme a budeme používat v tomto semestru. Název napovídá, že integračním oborem budou plochy. Velmi prospěšná je geometrická intuice založená na dvourozměrných plochách v trojrozměrném prostoru, která je již přímo zabudovaná ve fungování lidského mozku. Je proto možné zobecnit tuto naši přímou zkušenost a pracovat s obecnějšími k-dimensionálními plochami v n rozměrném prostoru. Slovo 'plocha' bude znamenat plocha 'dimenze k' v $\mathbb{R}^n$ zadaná parametrizací a jeden ze základních problémů bude definovat plošný integrál tak, aby nezávisel na výběru parametrizace. nezávislost plošného integrálu na volbě parametrizce. Celá tato část přednášky bude směřovat k dalekosáhlému zobecnění Greenovy věty, formulované v zimním semestru, které se obvykle označuje jako (obecná) Stokesova věta. Ačkoliv název celé přednášky je 'Geometrie 2', bude tato první část patřit stylem i duchem do matematické analýzy, nebo ještě lépe, do mezioborové kombinace analýzy a geometrie.
Druhá polovina přenášky bude věnována geometrii (dvoudimenzionálních) ploch v Eukleidovském prostoru dimenze 3. Jde o klasickou teorii, kterou formuloval již v ? století Karl Friedrich Gauss a která byla inspirací pro moderní Riemannovu geometrii ve vyšších dimenzích. Pseudo-Riemannovská verze Riemannovy geometrie je pak základem a jazykem, který umožnil Einsteinovi formulovat jeho obecnou teorii relativity, která je nejelegantnější současnou teorií gravitace. To jsou ale témata pro zájemce o geometrii ve vyšších ročnících.

1. Prolog

Motto: I have no particular talent, I am only inquisitive. (A. Einstein)

Standardní způsob výkladu matematiky na přenáškách je postupovat systematicky od prvních definic a jednoduchých vlastností a zavedených pojmů ke složitějším konstrukcím a formulaci základních vět teorie, evtl. k jejich podrobným důkazům. Zpravidla se vše podává učesané, pečlivě rozmyšlené a s přesnou a úspornou formulací. A za předváděným exaktním formalismem už nejsou vidět intuitivní myšlenky ze kterých teorie vznikala. Je vůbec záhadné, jak vlastně matematické teorie vznikají a jestli a jak se dají nové teorie vytvářet i teď, v současné době. Pojďme si na začátku této přednášky zkusit popsat jako příklad z jakých myšlenek a nápadů je možné pochopit obecné schéma za křivkový a plošným integrálem a uvědomit si, že existuje zajímavý problém - jak formulovat "obecnou Stokesovu větu".

2. Geometrická idea

2.1. Newtonův vzorec, Greenova věta. Důležité matematické teorie mívají obvykle základ v několika jednoduchých, intuitivně pochopitelných a názorných myšlenkách. Často se stává, že takováto základní idea je vodítkem pro vytvoření nové teorie. Hledat nové ideje, nacházet nečekané

souvislosti a pracovat na intuitivní úrovni patří mezi zábavu a potěšení matematiků. Vypracovat z jádra matematické myšlenky nejúčelnější definice pojmů a dokázat tvrzení a věty o nich je spíš práce jako každá jiná. Kalkulus diferenciálních forem je příkladem, na kterém se výše uvedená tvrzení dají velmi dobře ilustrovat. Cílem tohoto úvodu je ukázat, že stačí znát základní informace o integraci funkcí a nechat si klidnou chvíli na přemýšlení o možných analogiích integrace funkcí ve vyšších dimenzích. Výsledek může při troše štěstí a matematické intuici být velmi zajímavý – několik obrázků, ze kterých vše ostatní (při vynaložení příslušné práce a úsilí) již více méně plyne.
Přepokládejme pro chvíli, že někdo z vás nemá zrovna co dělat a vzpomene si, co už o integrálu a křivkovém integrálu ví.
To úplně nejzákladnější už znal a formuloval jeden z největších velikánů (stále ještě ne úplně doceněný) Isaac Newton – jeho formule pro výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce je notoricky známá:
Newtonova formule:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

V minulém semestru jste si také formulovali Greenovu větu:

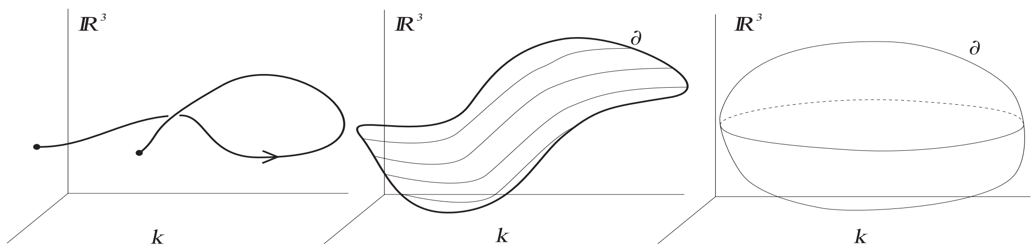
Greenova věta:
Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^2$ a nechť $\partial\Omega$ je její orientovaná hranice, pak pro hladké vektorové pole $\vec{F}$ v okolí $\overline{\Omega}$ platí

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} F_1 dx_1 + F_2 dx_2.$$

Na první pohled nemají tyto dvě formule nic moc společného. Ale zvídavý člověk, který má klidnou chvíli na přemýšlení si může všimnout jakéhosi společného geometrického rysu. Ten zajímavý a inspirativní nápad je jednoduchý:

Obě formule dávají do souvislosti integrál z derivace (derivací) funkce (funkcí) přes geometrický objekt s integrálem příslušné funkce (funkcí) přes jeho hranici.

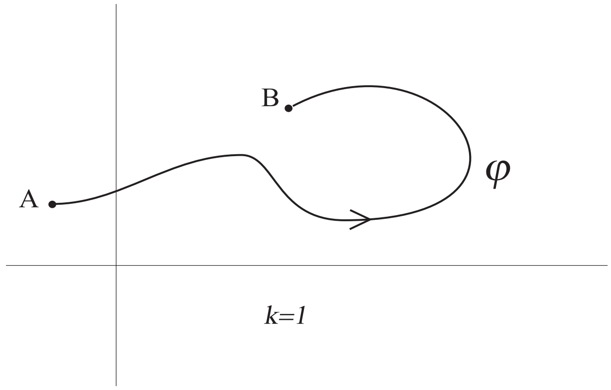
Je fakt, že vidět tuhle analogii mezi Newtonovou a Greenovou formulí vyžaduje jistou fantazii. Geometrická část souhlasí. V Newtonově formuli se jedná o úsečku $< a, b >$ a její hranici, která je tvořena dvěmi body $\langle a\}, \rangle b\}$. V Greenově větě je křivka na pravé straně hranicí oblasti Ω.
Ale pravá strana v Newtonově formuli je trochu záhadná. Hodnoty funkce f v bodech a, b se dají při troše fantazie pokládat za integrál v dimenzi nula, ale proč je tam rozdíl funkčních hodnot a ne součet je divné.
Ale možná by zvědavého matematika mohlo napadnout, že i pravé strana Greenovy formule má v sobě něco nesrozumitelného. Integrál druhého druhu přes křivku, který jste probírali v minulém semestru přece závisí na orientaci křivky $\partial\Omega$ (která se musí dobře vybrat v závislosti na volbě orientace oblasti, aby věta platila). V Newtonově formuli také pravá strana závisí na orientaci intervalu $< a, b >$ Při opačném probíhání se změní výraz napravo na opačný, což je vlastně výhoda, orotože pokud by napravo byl součet $f(a) + f(b)$, znaménko pravé strany by se nezměnilo.
A tak obě formule mají něco společného a otázka je jestli ně podobného platí i ve vyšších dimensích.



3. Analogie Newtonova vzorce v $\mathbb{R}^3$

To co bychom chtěli najít například v dimenzi 3 jsou analogie diskutovaných formulí pro tři následující geometrické situace, ilustrované na následujícím obrázku. Jsou to zřejmě 3 jediné možnosti v $\mathbb{R}^3$: křivka a φ a její dva koncové body, dvourozměrná plocha S a její okraj, a konečně oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice.
Není ale jasné jak pokračovat. V Newtonově formuli se vyskytuje jediná funkce f a v integrálu nalevo její derivace. V Greenově větě se ale vyskytují 2 funkce a nalevo se nevyskytují jejich všechny možné derivace podle obout proměnných, ale jen jakási lineární kombinace dvou z nich. Navíc, definici křivkového integrálu druhéhu druhu jste se naučili v minulém semestru, ale správnou definici plošného integrálu je ještě třeba uhodnout a rozmyslet si, kolik funkcí se v dimensi 3 má vyskytovat. Vypadá beznadějně všechny tyto věci zvolit správně, aby systém fungoval. Naštěstí, stává se často, že je-li hlavní nová idea správná, věci začnou fungovat samy od sebe. Zkusme to v našem případě.

3.1. Křivka a její hranice v $\mathbb{R}^3$. To nejjednodušší co lze zkusit je křivka φ a její dvoubodová hranice. Jako v minulém semestru budeme uvažovat regulární, parametricky zadanou křivku.



Na pravé straně analogie Newtonova vzorce bude opět nula-rozměrný integrál a za objekt, který budeme integrovat zvolíme zřejmě opět (jednu) funkci f. Pravá strana tedy bude nezbytně rovna výrazu $f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$. Funkce f by měla být definovaná (alespoň třídy $\mathcal{C}^1$) v okolí obrazu $\langle\varphi\rangle$ křivky φ. Funkce f na okolí $U; \langle a,b\rangle \subset U \subset \mathbb{R}$ lze zřejmě nahradit funkcí f na okolí $U; \langle <\varphi\rangle > \subset U \subset \mathbb{R}^2$. To co zbývá, je najít vhodnou kombinaci $'Df'$ derivací funkce f a rozhodnout se, jak je třeba definovat integrál $\int_\varphi Df$ tak, aby platilo

$$\int_\varphi Df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Tady by našeho zvědavého matematika asi po chvilce napadlo použít parametrizaci φ naší křivky a přenést problém do $\mathbb{R}^1$, kde ho už vyřešil Newton. Vskutku, pro zobrazení $f\circ\varphi$ na $\langle a,b\rangle$ platí

$$\int_{\langle a,b\rangle} (f\circ\varphi)'dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \tag{0.1}$$

a tak stačí vzít levou stranu jako definici $\int_\varphi Df$ (což zároveň naznačuje velmi dobře, co Df musí být) a hledané tvrzení platí.
V našem případě křivky v $\mathbb{R}^3$ stačí podívat se na závěr na levou stranu vztahu (0.1):

$$\int_{\langle a,b\rangle} (f\circ\varphi)'\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\frac{d\varphi_i}{dt}(t)\,dt.$$

Z ní je vidět, že správná analogie derivace f je gradient $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$, a je to tedy vektorové pole v $\mathbb{R}^3$ a ne funkce jako v dimenzi 1.
Dále je také ihned vidět, že správná definice „integrálu“ $\int_\varphi \vec{F}d\vec{s}$ vektorového pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ podél křivky $\langle\varphi\rangle$ je

$$\int_\varphi \vec{F}d\vec{s} \equiv \int_\varphi F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3 := \int_a^b [\sum_{i=1}^2 F_i(\varphi(t))\frac{d\varphi_i}{dt}(t)]dt.$$

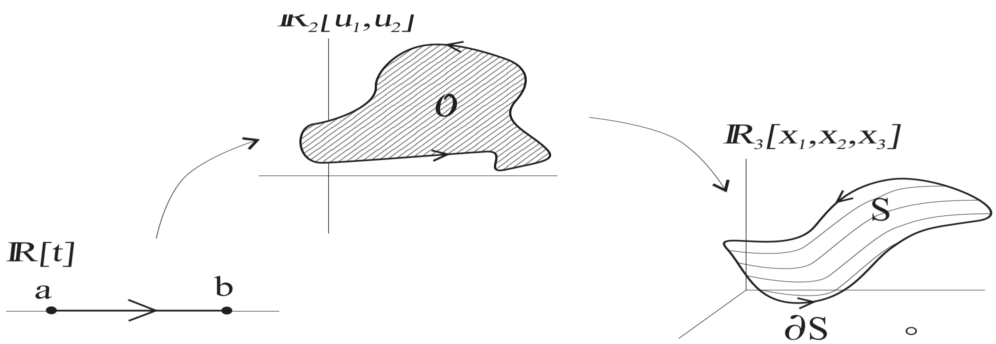
Výsledkem je tzv. věta o potenciálu vektorového pole.

Věta 0.1. *Věta o potenciálu Nechť $\varphi : \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je hladké zobrazení, nechť F je hladká funkce na okolí množiny $\varphi(\langle a,b\rangle)$. Pak*

$$\int_\varphi \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Ta (podobně jako Newtonova věta) říká, že integrál podél $\langle <\varphi\rangle >$ z vektorového pole $\vec{F}$, které je gradientem funkce f (f se obvykle nazývá potenciálem vektorového pole $\vec{F}$), se vypočte jako rozdíl hodnot potenciálu f v koncových bodech křivky
φ. Je zřemé, že analogické tvrzení platí v jakékoliv dimenzi.

3.2. Plocha a její hranice v $\mathbb{R}^3$.



Nejzajímavější je případ plochy v prostoru. Podobně jako tomu bylo pro křivky, také plocha pro nás bude nejen jakási podmnožina v prostoru mající „dimenzi 2“, ale množina i s její parametrizací. Přesněji, řekneme, že $S = \Phi(\mathcal{O})$ je dvoudimenzionální parametrická plocha, pokud $\mathcal{O}$ je otevřená podmnožina v rovině a $\Phi : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^3$ je hladké zobrazení, definované v nějakém okolí uzávěru $\mathcal{O}$. Předpokládejme dále, že hranice $\partial\mathcal{O}$ je popsána kladně orientovanou (proti směru hodinových ručiček) křivkou φ, tj. $\varphi(\langle a, b\rangle) = \partial\mathcal{O}$ Zkusme opět, jako v nahoře, přenést celý problém pomocí paramatrizace do roviny a použít Greenovu větu. Kupodivu, je to možné a řekne nám to vše potřebné. Jen už je k tomu potřeba trochu počítání. Pro zjednodušení zápisu budeme používat vektorové označení $\vec{F}, \vec{x}$ a $\langle \vec{F}, \vec{x}\rangle = \sum_1^3 F_i x_i$. Vyjdeme z toho, že vhodný objekt pro integraci přes „okraj“ $\partial S = \Phi \circ \varphi(\langle a, b\rangle)$ (pozor – není to topologická hranice!) plochy $S = \Phi(\mathcal{O})$. tj. přes křivku v $\mathbb{R}^3$, je vektorové pole $\vec{F}$.

$$\int_{\Phi\circ\varphi} [F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3] = \int_a^b \langle \vec{F}, \frac{d\vec{x}}{dt}\rangle dt =$$
$$= \int_a^b \left[\langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}\rangle \frac{du_1}{dt} + \langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}\rangle \frac{du_2}{dt} \right] dt = \int_\varphi f du_1 + g du_2,$$

kde

$$f = \langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}\rangle; \quad g = \langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}\rangle.$$

Podle Greenovy věty je tedy tento integrál roven

$$\int\int_{\mathcal{O}} \left[\langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}\rangle + \langle \vec{F}, \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_1 \partial u_2}\rangle - \langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}\rangle - \langle \vec{F}, \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_1 \partial u_2}\rangle \right] du_1\, du_2 =$$
$$= \int\int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \right) du_1 du_2 =$$
$$= \int\int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{i,j;i\neq j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \right) \right) du_1 du_2 =$$
$$= \int\int_{\mathcal{O}} \left[G_1 \det \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} + G_2 \det \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)} + G_3 \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right] du_1 du_2,$$

kde

$$G_1 := \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}; \quad G_2 := \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}; \quad G_3 := \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2};$$

$$\det \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} := \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_j}{\partial u_1}; \quad i \neq j.$$

To vede k následující definici:

Definice 0.2. *Je-li $\vec{F}$ vektorové pole, pak definujeme* **rotaci** $\operatorname{rot} \vec{F}$ *pole $\vec{F}$ jako vektorové pole*

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}; \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}; \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}; \right) = „\frac{\partial}{\partial \vec{x}}“ \times \vec{F}.$$

Je-li $S = \Phi(\mathcal{O})$ dvoudimenzionální parametrická plocha a $\vec{F}$ je hladké vektorové pole na okolí uzávěru S, pak definujme plošný integrál $\int_S \vec{F} d\vec{S}$ z $\vec{F}$ přes plochu S takto:

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} \equiv \int_S F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2 :=$$

$$:= \int_{\mathcal{O}} \left[(F_1 \circ \Phi) \det \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_2 \circ \Phi) \det \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_3 \circ \Phi) \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right] du_1 du_2$$

Později si ukážeme, že takto definovaný integrál nezávisí na volbě parametrizace, ale že jeho znaménko závisí na volbě orientace plochy, což je pojem, který je třeba v budoucnu přesněji definovat, stejně jako symbol $\wedge$, který je v definici plošného integrálu zatím bez významu.
Právě uvedený výpočet je tedy důkazem následující věty.

Věta 0.3. *Stokes Je-li $\vec{F}$ hladké vektorové pole v okolí plochy S v $\mathbb{R}^3$, pak*

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \int_{\partial S} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

3.4. Oblast a její hranice v $\mathbb{R}^3$. Zkusme si nyní rozmyslet ještě poslední případ, který může nastat v trojrozměrném prostoru – oblast Ω v $\mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$.
Uvažujme jednoduchý případ, kdy je oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ohraničena zdola i shora grafem funkce, tj.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; f_1(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant f_2(x_1, x_2)\}.$$

Předpokládejme dále, že je v okolí uzávěru Ω dáno vektorové pole $\vec{F}$.
Pak (opět s použitím Newtonova vzorečku) vypočteme pomocí Fubiniho věty

$$\int\int\int_\Omega \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \int\int \left[\int_{f(x_1,x_2)}^{f(x_1,x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 \right] dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\int [F_3(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)) - F_3(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2))] \, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{S_2} F_3 dx_1 \wedge dx_2 - \int_{S_1} F_3 dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial\Omega} F_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

kde jsme použili výše definovaný plošný integrál z vektorového pole a vzali jsme v úvahu, že plocha S_2 je orientována pomocí vnější normály a plocha S_1 je orientována pomocí vnitřní normály. Plocha $\partial\Omega$ je tedy orientována pomocí vnější normály všude.
Přesně stejný výpočet lze provést pro derivace $\frac{\partial F_2}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$.
To vede k následující definici:

Definice 0.4. *Definice divergence Je-li $\vec{F}$ vektorové pole, pak definujeme* **divergenci** $\operatorname{div} \vec{F}$ *pole $\vec{F}$ jako funkci*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right).$$

Výše uvedený výpočet je pak důkazem následující věty.

Věta 0.5. *Gauss-Ostrogradski Je-li $\vec{F}$ hladké vektorové pole v okolí uzávěru $\overline{\Omega}$, pak*

$$\int_{\Omega}[\operatorname{div}\vec{F}]dx_1dx_2dx_3 = \int_{\partial\Omega}\vec{F}d\vec{S}.$$

4. Vyšší dimenze

Je vidět, že tento způsob odvozování skutečně funguje a je snadné si představit, jak postupovat dál, do dimenze 4 a vyšších. Na druhou stranu nelze takto probrat všechny případy jeden po druhém, neboť jich je nekonečně mnoho. To je další místo, kde má matematik příležitost projevit svoje matematické nadání a intuici. Je totiž teď třeba v dosud známých případech najít nějaký systém, který by umožnil popsat obecný případ konečné, leč libovolné dimenze. Hledání zákonitostí, struktury, vytváření abstraktních struktur ze známých speciálních případů – to je pravá práce (a potěšení) pro matematika.
Pokud by snad dosud známé případy (dimenze 1, 2 a 3) nestačily, je vždy možné se ještě podívat na dimenzi 4, která je další na řadě. Zkusme si ale zopakovat to, co dosud víme a přemýšlet o možném systému.
Nejdříve údaje o integrálech v jednotlivých dimenzích a objektech, stojících pod znamením integrálu.
V prostoru $\mathbb{R}^2$:

(i) dimenze 0 – funkce f;
(ii) dimenze 1 – „vektorové pole“ $F_1dx_1 + F_2dx_2$;
(iii) dimenze 2 – „funkce“ $fdx_1dx_2 = fdx_1 \wedge dx_2$

V prostoru $\mathbb{R}^3$:

(i) dimenze 0 – funkce f;
(ii) dimenze 1 – „vektorové pole“ $F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$;
(iii) dimenze 2 – „vektorové pole“ $F_1dx_2 \wedge dx_3 + F_2dx_3 \wedge dx_1 + F_3dx_1 \wedge dx_2$;
(iv) dimenze 3 – „funkce“ $fdx_1dx_2dx_3 = fdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Jistě by každý ze čtenářů už snadno odpověděl na otázku, kolik komponent mají integrované objekty v $\mathbb{R}^4$ pro jednotlivé případy (postupně $1, 4, 6, 4, 1$) nebo pro $\mathbb{R}^n$ a dimenzi k (kombinační číslo $\binom{n}{k}$). V tom je jasný systém.
Zajímavější a těžší je otázka, jaký je systém při definici „derivace“ objektu pod integrálem. Pro to je třeba si vyhradit ještě trochu času, zopakovat si základní informace získané nahoře, vzít si tužku a papír a spočítat si následujících několik jednoduchých příkladů.
Nejdříve opakování postatných bodů:

(i) Pro funkci $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ platí

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

To je „derivace“ funkce v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Symbol $\wedge$ pro násobení diferenciálu má následující fundamentální vlastnost:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$
$$dx_i \wedge dx_i = 0.$$

(iii) Platí $d(dx_i)) = 0$.
(iv) Vše je přirozeně lineární a distributivní.

Ukazuje se, že tyto vlastnosti už umožňují vypočítat „derivaci“ d objektů pod integračním znamením jednotným způsobem a tak, že souhlasí s výše uvedenými případy:
V $\mathbb{R}^2$ platí

$$d(F_1dx_1 + F_2d_2) = dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)dx_1 \wedge dx_2.$$

V $\mathbb{R}^3$ platí

$$d(F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3) = dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 + dF_3 \wedge dx_3 =$$
$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

V $\mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{aligned} d(F_1dx_2 \wedge dx_3 + F_2dx_3 \wedge dx_1 + F_3dx_1 \wedge dx_2) = \\ =& dF_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dF_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dF_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = \\ =& \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že i ve zdánlivě nahodilé a různorodé definici „derivace“ objektu pod integračním znamením existuje v probraných případech jasná zákonitost a systém. Je z nich již snadné vyvodit obecnou abstraktní definici, platnou v jakékoliv dimenzi. To dává návod k definici de Rhamova diferenciálu d v následující kapitole.

Výše uvedené výpočty také ukazují jednotný systém, jak definovat integrál z diferenciálních forem pomocí jejich přenesení do prostoru parametrů. Je vidět, že základem je opět definice diferenciálu funkce (přenesení formy $f dx_i$ pomocí zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je $(f \circ \varphi) d\varphi_i$) a vlastnosti vnějšího násobení: pokud $x_i = \varphi_i(u_1, u_2)$, pak např.

$$dx_i \wedge dx_j = \det \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}{\partial(u_1, u_2)} du_1 \wedge du_2 = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2} du_2\right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1\right)$$

To je zřejmá inspirace pro definici přenášení obecných diferenciálních forem pomocí hladkých zobrazení, zavedené v příští kapitole.

Tím již vlastně zábavná a potěšení přinášející část práce končí. Právě uvedená cvičení jasně ukazují, jak definovat nový druh násobení (vnější násobení), jak definovat objekty pod integrálem (budou se jmenovat diferenciální formy), jak definovat jejich „derivace“ (tzv. vnější diferenciál) a konečně jak definovat integrál z diferenciální formy (s užitím přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení). Pokud někdo odolal pokušení si text přečíst a podařilo se mu na uvedený systém přijít samostatně, jistě má za odměnu velmi příjemný pocit objevu něčeho nového a pěkného. Další část už je technika a práce – vytvořit ze všeho ucelený a přesný logický systém, napsat fungující definice pojmů, zvolit vhodné předpoklady a dokázat příslušné věty. Tuto část už (přinejmenším z časových důvodů) podrobně popisovat nebudeme, ale uvedeme již v příštích kapitolách rovnou hotový výsledek – teorii diferenciálních forem na $\mathbb{R}^n$, kterou pro nás připravili naši předchůdci. Po přečtení tohoto úvodu se snad budou zdát zaváděné pojmy srozumitelné a výstižné. Vrátíme-li se nazpět k začátku této kapitoly, je na čtenáři, aby posoudil, zda tvrzení tam uvedené (že nápad dívat se na Newtonovu formuli jako na integrál přes podmnožinu a její hranici a z toho vyplývající vícedimenzionální geometrické obrázky vedou v podstatě jednoznačně k teorii diferenciálních forem) je přehnané či nikoliv.

Pokud je toto ukázka, jak odvodí obecnou Stokesovu větu matematik, je třeba se zmínit, že také fyzikové odvodili svým způsobem tytéž pojmy a věty v trojdimenzionálním prostoru. Jejich motivace byla umět vypočítat práci vykonanou silou po zakřivené dráze či tok vektorového pole plochou. Podrobnosti je možné najít v následujích cvičeních.

Přirozených a struktuře odpovídajích pojmů a tvrzení není obvykle v dané struktuře příliš a tak není fakt, že odlišné způsoby odvozování přivedly i matematiky i fyziky k témuž, neobvyklý. Je to spíš věc, která se běžně stává.

KAPITOLA 1

Vnější algebra

Během první přednášky jsme zjistili v intuitivním úvodu jak vypadají objekty, které bychom chtěli integrovat přes dvoudimenzionální plochy a našli návod, jak by příslušný plošný integrál měl být definován. Objekty integrace měly tvar

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{3} f_{i,j} dx_i \wedge dx_j, \tag{1.1}$$

a dospěli jsme k názoru, že záhadné součiny $dx_i \wedge dx_j$ by měli mít neobvyklou vlastnost

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i. \tag{1.2}$$

Formule (1.1) má dvě části. Koeficienty $f_{i,j}(x)$ tvoří sadu funkcí. Formální symboly $dx_i \wedge dx_j$ jsou součiny symbolů $dx_1, \ldots, dx_n$ (jejich součin je označen pro odlišení symbolem $\wedge$). Nejprve zapomeneme na koeficienty dané funkcemi a soustředíme se na ryze algebraickou otázku symbolů dx_i a jejich násobení. Uvidíme, že vhodný matematický model pro tyto činitele ve formuli (1.1) se jmenuje unitální algebra, jejíž baze bude obsahovat symboly dx_i a jejich násobení bude mít požadované vlastnosti.
Nejdříve přidejme následující poznámku. V obecném vektorovém prostoru umíme násobit vektory čísly, ale neumíme násobit vektory mezi sebou. Vektorové prostory, ve kterých navíc je ještě navíc definován součin dvou vektorů (a výsledkem je zase vektor) se nazývají algebry. Formální definice vypadá takto.

Definice 1.1. **Algebra** *A nad tělesem realných čísel je (reálný) vektorový prostor na kterém je dáno bilineární zobrazení $\circ : V \times V \to V$. Algebra A se nazývá* **unitální**, *pokud v ní existuje jednotka 1 vůči danému násobení. Operace násobení v algebře A může (ale nemusí) být asociativní a může (ale nemusí) být komutativní. Operaci násobení stačí zadat pro dvojice prvků z baze a dál rozšířit na libovolnou dvojici prvků pomocí bilinearity.*

Abychom uměli symboly dx_i smysluplně násobit, měly by tedy být prvky nějaké algebry. Jak asi může vypadat?
Označme hledaný součin symbolem $\wedge$. Součiny $dx_i \wedge dx_j$ nepatří do vektorového prostoru V generovaného diferenciály dx_i, tak je zkusíme přidat, rozšířit o ně prostor V. Relace (1.2) říkají, že $dx_i \wedge dx_i = 0$ a že stačí přidat jen součiny $dx_i \wedge dx_j$ pro $i < j$. Ze stejného důvodu musíme přidat jako nové generátory rozšířeného vektorového prostoru také

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k; \quad i < j < k; \quad i, j, k = 1, \ldots, n$$
$$\text{atd.}$$

A poslední netriviální součin, který musíme přidat, je zřejmě $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$.
Užitečné označení může být $dx_I \equiv dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, kde $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$; $i_1 < \ldots < i_k$. Prvky rozšířené báze jsou tedy indexovány pomocí podmnožin $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Prvky $e_{\{i\}}$ se ztotožňují s původními vektory e_i a $e_\emptyset$ je třeba ztotožnit s jedničkou $1 \in \mathbb{R}$. Pro prvky takovéto rozšířené báze je třeba definovat násobení přirozeným způsobem a to pak lineárně rozšířit na odpovídající lineární obal. To vede k následující definici.

Označení: Podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$ budeme označovat písmeny $I, J, K, \ldots$ a prvky každé takové množiny budeme vždy brát uspořádané podle velikosti, například pro $I = \{i_1, \ldots, , i_k\}$

budeme vždy předpokládat, že $i_1 < \cdots < i_k$. Mezi podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$ počítáme také prázdnou množinu $\emptyset$.

Definice 1.2. *Nechť V je (reálný) vektorový prostor a nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je jeho baze.* **Vnější algebra** $\Lambda^*(V)$ *vektorového prostoru V je definována jako unitální algebra nad tělesem reálných čísel, jejíž báze (ve smyslu vektorového prostoru) je množina*

$$\{e_I | I \subset \{1, \ldots, n\}\}.$$

Tedy vnější algebra je množina všech lineárních kombinací prvků baze

$$\Lambda^*(V) = \{ \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I;\ \alpha_I \in \mathbb{R}\}.$$

Pro jistotu zopakujeme, že operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem definujeme takto:

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I + \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \beta_I e_I := \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (\alpha_I + \beta_I) e_I$$

$$c \left(\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I \right) := \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (c\alpha_I) e_I$$

kde $\alpha_I, \beta_I, c \in \mathbb{R}$.
Násobení vektorů definujeme pro prvky báze tímto předpisem:

$$e_I \wedge e_J := \begin{cases} 0 & \textit{pokud } I \cap J \neq \emptyset, \\ \operatorname{sgn} \binom{I,J}{I \cup J}\ e_{I \cup J} & \textit{pokud } I \cap J = \emptyset, \end{cases} \tag{1.3}$$

kde sgn *značí znaménko permutace. Symbol* $\operatorname{sgn} \binom{I,J}{I \cup J}$ *označuje znaménko permutace* $\binom{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_r}{k_1,\ldots,k_{p+r}}$*, kde $i_1 < \cdots < i_p$ jsou setříděné prvky množiny $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $j_1 < \cdots < j_r$ jsou setříděné prvky množiny $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ a $k_1 < \cdots < k_{p+r}$ jsou setříděné prvky množiny $I \cup J = \{k_1, \ldots, k_{p+r}\}$.*

Násobení obecných vektorů je díky bilinearitě operace vektorového násobení $\wedge$ jednoznačně určeno vztahy (1.3).
Index I někdy nazýváme též multiindex a v konkrétních případech vynecháváme složené závorky (tj. $e_{\{1,3,7\}}$ zkracujeme na $e_{1,3,7}$) nebo dokonce i čárky (tj. píšeme e_{137}). Zkracování použijeme výhradně tam, kde nemůže dojít k nedorozumění.

Příklady.
(i) Vnější algebra $\Lambda^*(\mathbb{R}^3)$ má dimenzi 8 a její obecný element má tvar

$$\omega = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_{12} e_{12} + a_{13} e_{13} + a_{23} e_{23} + a_{123} e_{123},$$

kde všech 8 koeficientů $a_{\ldots}$ jsou reálná čísla.

(ii) V $\Lambda^*(\mathbb{R}^6)$ platí $e_{35} \wedge e_{146} = -e_{13456}, \quad e_{146} \wedge e_{345} = 0.$
Poznámky.
(i) Vektor $e_\emptyset = 1 \in \Lambda^*(V)$ je podle definice jednotkou vzhledem k násobení, neboť pro libovolné $I \subset \{1, \ldots, n\}$ je

$$e_I \wedge e_\emptyset = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, \emptyset \\ I \cup \emptyset \end{pmatrix} e_{I \cup \emptyset} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} e_I = e_I.$$

Obdobně $e_\emptyset \wedge e_I = e_I$ a tedy pro všechny $\omega \in \Lambda^*(V)$ platí $\omega \wedge e_\emptyset = \omega = e_\emptyset \wedge \omega$. Těleso $\mathbb{R}$ je tedy přirozeně vnořeno do $\Lambda^*(V)$ jako $\mathbb{R} \simeq \Lambda^0(V) \subset \Lambda^*(V)$.
(ii) Pro $k \in 1, \ldots, n$ označme $\Lambda^k(V)$ = lineární obal symbolů e_I, kde I je přesně k-prvková. Prvkům $\Lambda^k(V)$ říkáme **k-vektory** a prostor $\Lambda^k(V)$ se nazývá **k-tá vnější mocnina** prostoru V. Zřejmě $\Lambda^*(V) = \oplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$. Je-li tedy například $V = \mathbb{R}^3$ a e_1, e_2, e_3 báze V, pak $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ má bázi $e_\emptyset = 1$ a je jednodimenzionální, $\Lambda^1(V) = V$ je vektorový prostor s bází e_1, e_2, e_3 a je tedy 3-dimenzionální, $\Lambda^2(V)$ má dimenzi 3 a bázi e_{12}, e_{13}, e_{23} a konečně $\Lambda^3(V)$ je jednodimenzionální s bází e_{123}.
Dokažme nyní několik základních vlastností vnějšího násobení $\wedge$.

Věta 1.3. *Pro vektorový prostor V s bází $e_1, \dots, e_n$ a pro libovolná $k, l \in \{1, \dots, n\}$:*
(i) $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}, \dim \Lambda^*(V) = 2^n$.
(ii) $\wedge$ je asociativní.
(iii) $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$
(iv) Je-li $\omega \in \Lambda^k(V), \tau \in \Lambda^l(V)$, pak $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$.
(v) Nechť $v_1, \dots, v_k \in V$ jsou vektory. Jejich rozklad do baze má tvar

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_i^j e_j; \quad v_i^j \in \mathbb{R}; \quad i \in \{1, \dots, k\}; \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Pro každou k-prvkovou podmnožinu $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ označme

$$V_I := (v_i^j)_{i \in \{1, \dots, k\}, j \in I}$$

matici $k \times k$, která vznikne z matice koeficientů

$$W := (v_i^j)_{i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}}$$

vynecháním sloupců jejichž index j není v množině I. Při tomto označení platí:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I| = k} \det V_I \cdot e_I$$

Čísla $\{\det V_I\}_{|I|=k}$ se nazývají **Plückerovy souřadnice** *k-vektoru $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.*
Důkaz.
(i) Prvky baze $\Lambda^k(V)$ jsou parametrizovány k-prvkovými podmnožinami množiny $\{1, \dots, n\}$, kterých je $\binom{n}{k}$.
(ii) Dokažme asociativitu nejprve pro prvky báze. Buďte $I, J, K \subset \{1, \dots, n\}$. V případě, že jsou I, J, K po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} e_I \wedge (e_J \wedge e_K) &= e_I \wedge (\operatorname{sgn} \binom{J, K}{J \cup K} e_{J \cup K}) = \operatorname{sgn} \binom{J, K}{J \cup K} e_I \wedge e_{J \cup K} = \\ &= \operatorname{sgn} \binom{J, K}{J \cup K} \operatorname{sgn} \binom{I, J \cup K}{I \cup J \cup K} e_{I \cup J \cup K} = \\ &= \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I, J \cup K} \operatorname{sgn} \binom{I, J \cup K}{I \cup J \cup K} e_{I \cup J \cup K} = \\ &= \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J \cup K} e_{I \cup J \cup K}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

V případě, že I, J, K nejsou po dvou disjunktní, pak buď $J \cap K \neq \emptyset$ nebo $I \cap (J \cup K) \neq \emptyset$, z čehož snadno zjistíme, že $e_I \wedge (e_J \wedge e_K) = 0$.
Analogicky se dokáže i

$$(e_I \wedge e_J) \wedge e_K = \operatorname{sgn} \binom{I, J, K}{I \cup J \cup K} e_{I \cup J \cup K} \tag{1.5}$$

pokud jsou I, J, K po dvou disjunktní a $(e_I \wedge e_J) \wedge e_K = 0$ jinak. Z toho již plyne platnost tvrzení pro prvky báze.

Pro obecné prvky dostaneme tvrzení díky linearitě operace $\wedge$, neboť

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I e_I \ \wedge \left(\Big(\sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} \beta_J e_J \Big) \ \wedge \Big(\sum_{K\subset\{1,\dots,n\}} \gamma_K e_K \Big) \right) =$$

$$= \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{K\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I \beta_J \gamma_K e_I \wedge (e_J \wedge e_k) =$$

$$= \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{K\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I \beta_J \gamma_K (e_I \wedge e_J) \wedge e_k =$$

$$= \left(\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I e_I \ \wedge \sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} \beta_J e_J \right) \ \wedge \sum_{K\subset\{1,\dots,n\}} \gamma_K e_K .$$

Díky tomu, že $\wedge$ je asociativní, můžeme na mnoha místech vynechávat závorky a psát například $e_I \wedge e_J \wedge e_K$.

(iii) Stačí použít definici vnějšího násobení a indukci. Pro $k = 2$ chceme ukázat, že pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$; $i < j$ platí $e_i \wedge e_j = e_{ij}$. Ale to plyne přímo z definice součinu.

Indukcí dostaneme $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = e_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}} \wedge e_k$ a to se rovná e_I podle definice.

(iv) Stejně jako v bodě (ii) dokážeme tvrzení nejdříve pro prvky báze. Je-li $I, J \subset \{1, \dots, n\}, I \cap J = \emptyset, |I| = k, |J| = l$, pak

$$e_I \wedge e_J = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} e_{I\cup J} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} J, I \\ I \cup J \end{pmatrix} e_{I\cup J} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix} e_J \wedge e_I$$

přitom permutace $\binom{I,J}{J,I}$ má znaménko $(-1)^{kl}$.

Pro obecná ω, τ již tvrzení plyne, obdobně jako v (ii), z linearity násobení $\wedge$.

(v) Platí

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} v_1^{i_1} e_{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_k=1}^{n} v_k^{i_k} e_{i_k} \right) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k},$$

přitom sčítanec na pravé straně je nula pokud $i_a = i_b$ pro nějaká $a, b \in \{1, \dots, k\}$, $a \neq b$. Zůstanou jen ty sčítance, kde $i_1, \dots, i_k$ jsou vzájemně různé a tedy $\{i_1, \dots, i_k\}$ je k-prvková podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$. Součet tedy běží přes všechny k-prvkové podmnožiny množiny $\{1, \dots, n\}$ a jejich všechny možné permutace. Počítaný výraz je tedy roven

$$\sum_{|I|=k} \sum_{\sigma\in S_k} v_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots v_k^{i_{\sigma(k)}} e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\sigma(k)}} =$$

$$= \sum_{|I|=k} \left(\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \ v_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots v_k^{i_{\sigma(k)}} \right) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \sum_{|I|=k} \det V_I \ e_I$$

kde S_k je množina všech permutací množiny $\{1, \dots, k\}$ a $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, kde $i_1, \dots, i_k$ jsou prvky I označené tak aby $i_1 < \dots < i_k$. Poslední rovnost plyne přímo z definice determinantu matice V_I.

$\square$

Poznámky.

(i) Pro vektorový prostor v dimenze n zřejmě platí $\dim \Lambda^k(V) = \dim \Lambda^{n-k}(V)$.

(ii) Z tvrzení (1.3) plyne (při označení z věty) pro $k = n$ vztah $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \det W e_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

KAPITOLA 2

Kalkulus diferenciálních forem

V předchozí kapitole jsme rozebrali algebraickou část formule (1.1) . Teď ji doplníme o koeficienty, kterými jsou funkce.

1. Definice

Označení:
(i) Označme $T^*(\mathbb{R}^n)$ (zkráceně T^*) vektorový prostor, jehož bázi tvoří symboly $dx_1, \ldots, dx_n$. Přesněji řečeno

$$T^*(\mathbb{R}^n) := \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i; \alpha_i \in \mathbb{R}\},$$

přičemž sčítání vektorů a násobení skalárem je definováno „po složkách“, tedy takto:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \, dx_i := \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \, dx_i, \qquad c \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i := \sum_{i=1}^n c\alpha_i \, dx_i.$$

(ii) Název **hladká funkce** budeme v celých skriptech používat pro $\mathcal{C}^\infty$ funkci, tedy funkci mající spojité parciální derivace všech řádů. Hladké zobrazení do vektorového prostoru je zobrazení, pro které všechny složky tohoto zobrazení vůči některé (a tedy vůči jakékoliv) bazi jsou hladké.

Definice 2.1. [Definice diferenciální formy] Diferenciální forma stupně k *(zkráceně k-forma) na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je hladké zobrazení Ω do $\Lambda^k(T^*)$. Každá diferenciální forma ω stupně k se tedy dá napsat v kanonickém tvaru*

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x_1, \ldots, x_n) \, dx_I,$$

kde $\omega_I(x_1, \ldots, x_n)$ jsou hladké funkce z Ω do $\mathbb{R}$.
Množinu všech diferenciálních forem stupně k na množině Ω budeme označovat $\mathcal{E}^k(\Omega)$. Dále označíme $\mathcal{E}^*(\Omega)$ množinu všech diferenciálních forem na Ω, tj. množinu všech hladkých zobrazení Ω do $\Lambda^*(T^*)$.
Diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ nemá tedy obecně definován stupeň – může být součtem diferenciálních forem různých stupňů. Platí však

$$\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(\Omega),$$

tedy rozklad obecné formy do homogenních sčítanců (prvků $\mathcal{E}^k(\Omega)$) je jednoznačně určen.
Připomeňme, že je $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, kde $i_1, \ldots, i_k$ jsou prvky I setříděné podle velikosti.

2. Vnější (de Rhamův) diferenciál

Definice 2.2. [Definice vnějšího diferenciálu] *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro všechna p, $0 \leqslant p \leqslant n$ definujeme zobrazení $d : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^{p+1}(\Omega)$ takto:*

(i) *Je-li $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je tedy funkce z Ω do $\mathbb{R}$), pak definujeme $df : \Omega \to \Lambda^1(T^*)$ předpisem*

$$df(a) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \, dx_i, \quad \forall a \in \Omega.$$

(ii) *Buď $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$ diferenciální forma stupně p. Forma ω je tedy tvaru $\omega(x) = \sum_{|I|=p} \omega_I(x)\, dx_I$, kde $x \in \Omega$ a ω_I jsou hladké funkce z $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Definujeme $d\omega : \Omega \to \Lambda^{p+1}(T^*)$ předpisem*

$$d\omega(x) := \sum_{|I|=p} d\omega_I(x) \wedge dx_I = \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x)\ dx_i \wedge dx_I, \quad \forall x \in \Omega.$$

Poznámka (o interpretaci symbolu dx_i) V definici diferenciálních forem se používají záhadné symboly dx_i, které tvoří bázi vektorového prostoru označeného $T^*(\mathbb{R}^n)$. Z definice vnějšího diferenciálu d vyplývá jednoduchá interpretace těchto symbolů – je-li $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ i-tá souřadnicová funkce na $\mathbb{R}^n$, pak $d\varphi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx_j = 1\, dx_i = dx_i$. Je možné tedy symbol dx_i interpretovat jako vnější diferenciál základní souřadnicové funkce φ_i a zvolené formální označení se pak ukáže jako vhodná mnemotechnická pomůcka pro zapamatování a jako příprava pro definici vnějšího diferenciálu d. Lze si také již teď dopředu uvědomit, jak dobře toto označení bude souhlasit s běžnými konvencemi při označení integrálu z funkce přes podmnožinu v $\mathbb{R}^n$.

Věta 2.3. *Vnější diferenciál má následující vlastnosti (pro $p, q \in \{0, \ldots, n\}$):*

(i) $\forall \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega) :\ d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau.$

(ii) $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega), \tau \in \mathcal{E}^q(\Omega) :\ d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau.$

(iii) $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega) :\ d(d\omega) = 0.$

Důkaz.
ad (i) Plyne přímo z definice.
ad (ii) Nejdříve dokažme tvrzení pro diferenciální formy tvaru $\omega = \omega_I\, dx_I, \tau = \tau_J\, dx_J$, kde I je p-prvková a J q-prvková podmnožina množiny $\{1, \ldots, n\}$ a I, J jsou disjunktní.

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d(\omega_I \tau_J \cdot dx_I \wedge dx_J) = \\ &= d(\omega_I \tau_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i}\, dx_i \right) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^n \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \right) \wedge (\tau_J\, dx_J) + (-1)^p \sum_{i=1}^n \omega_I\, dx_I \wedge \left(\frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J \right) = \\ &= d(\omega_I\, dx_I) \wedge \tau_J\, dx_J + (-1)^p \omega_I\, dx_I \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J \right) = \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau \end{aligned}$$

Z postupu je též vidět, že pro $I \cap J \neq \emptyset$ jsou obě strany 0 a rovnost je tedy splněna triviálně.
Pro obecné diferenciální formy ω, τ už tvrzení plyne z linearity operace $\wedge$, neboť

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d\Bigg(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \ \wedge \sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \Bigg) = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} d(\omega_I\, dx_I \wedge \tau_J\, dx_J) = \\ &= \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \big(d(\omega_I\, dx_I) \wedge \tau_J\, dx_J + (-1)^p \omega_I\, dx_I \wedge d(\tau_J\, dx_J) \big) = \\ &= d\Bigg(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \Bigg) \wedge \Bigg(\sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \Bigg) + (-1)^p \Bigg(\sum_{|I|=p} \omega_I\, dx_I \Bigg) \wedge d\Bigg(\sum_{|J|=q} \tau_J\, dx_J \Bigg) = \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau, \end{aligned}$$

což jsme chtěli.

ad (iii) I. Dokažme, že tvrzení platí pro prvky tvaru $\omega = \omega_I\, dx_I \in \mathcal{E}^p(\Omega)$. Postupujme indukcí.
1. indukční krok: Buď $\omega = f \cdot dx_\emptyset = f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ funkce, pak platí

$$
\begin{aligned}
d(\,df) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\wedge\,dx_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,dx_i \wedge\,dx_j = \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,dx_i\wedge\,dx_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(-1)\,dx_j\wedge\,dx_i = \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\,dx_i\wedge\,dx_j = 0
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

kde jsme použili vztahu $dx_j \wedge dx_i = -\,dx_i \wedge dx_j$ a rovnosti $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, která je splněna pro všechny $\mathcal{C}^2$ funkce a tím spíš pro $\mathcal{C}^\infty$ funkci f. Pro prvky $\mathcal{E}^0(\Omega)$ tedy tvrzení platí.
Speciálně tedy pro souřadnicovou funkci $\varphi_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$ máme $d(\,d\varphi_i)) = 0$. A protože $d\varphi_i = dx_i$,, platí i

$$
d(\,dx_i) = d(\,d\varphi_i) = 0 \tag{2.2}
$$

pro všechna $i \in \{1,\dots,n\}$.

2. indukční krok: Nechť tvrzení platí pro všechny ω tvaru $\omega = \omega_I\,dx_I \in \mathcal{E}^{p-1}(\Omega)$. Nyní buď $\omega = \omega_I\,dx_I \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, kde $I = \{i_1,\dots,i_p\}$ a $1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n$. Z (2.2) a indukčního předpokladu plyne:

$$
\begin{aligned}
d(\,d\omega) &= d(\,d(\omega_I\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\,dx_{i_p})) = d(\,d\omega_I\wedge\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\,dx_{i_p}) = \\
&= d(\,d\omega_I\wedge\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\,dx_{i_{p-1}})\wedge\,dx_{i_p} + \\
&+ (-1)^p(\,d\omega_I\wedge\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\,dx_{i_{p-1}})\wedge\,d(\,dx_{i_p}) = \\
&= d(\,d(\omega_I\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\,dx_{i_{p-1}}))\wedge\,dx_{i_p} + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

II. Pro libovolné p a libovolné $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$ nyní dostáváme

$$
d(\,d\omega) = d\left(d\left(\sum_{|I|=p}\omega_I\,dx_I\right)\right) = \sum_{|I|=p} d\left(\,d(\omega_I\wedge\,dx_I)\right) = 0.
$$

□

3. De Rhamův komplex

Definice 2.4. *Definice de Rhamova komplexu Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá* **uzavřená**, *pokud $d\omega = 0$, a* **exaktní**, *pokud existuje forma $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $d\tau = \omega$.*

Definice 2.5. *Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^n$. Posloupnost*

$$
\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(\Omega)
$$

se nazývá **de Rhamův komplex.**

Poznámka. Věta 2.3(iii) říká, že každá exaktní forma je uzavřená. Posloupnost prostorů a zobrazení mezi nimi se nazývá komplex, pokud má tuto vlastnost, tj. pokud složení dvou po sobě následujících zobrazení je triviální.
Přirozená otázka je, jestli každá uzavřená forma je exaktní, nebo jestli existují formy, které jsou uzavřené, ale nejsou exaktní. Základní informace v tomto směru je následující Poincarého lemma.

Lemma 2.6 (Poincaré)**.** *Nechť Ω je koule v $\mathbb{R}^n$. Pak každá uzavřená forma stupně k, $k = 1,\dots,n$, je exaktní.*

Poznámka. Speciální případ tohoto lemmatu se obvykle probírá již v analýze – jde o tzv. větu o potenciálu. Ta říká, že vektorové pole $\vec{T}$ na jednoduše souvislé oblasti (např. na kouli) je gradientem funkce, pokud platí $\frac{\partial T_j}{\partial x_i} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}$. Tato věta je totožná s případem $k = 1$ Poincarého lemmatu. Důkaz Poincarého lemmatu není těžký. Je-li ω uzavřená forma, pak příslušnou exaktní formu τ lze definovat vhodným vzorečkem a ověřit přímým výpočtem, že $d\tau = \omega$. Důkaz ale v tut ochvíli nebudeme probírat.

Je zcela podstatné si uvědomit, že Poincarého lemma je formulováno pouze pro velmi speciální oblast – pro kouli. Pro to jsou velmi dobré důvody. Stačí vyjmout z koule jeden jediný bod (např. její střed) a tvrzení přestane platit. Intuitivně lze říci o hodně víc. Pokud vyjmeme jeden bod z koule $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, bude existovat (modulo exaktní formy) jediná (až na násobek) uzavřená forma stupně n, která není exaktní. Přesněji řečeno, prostor uzavřených forem stupně n modulo prostor exaktních forem je vektorový prostor dimenze 1. Pokud bychom vyjmuli z koule 5 různých bodů, bude mít příslušný faktorprostor dimenzi 5. Je tedy zřejmé, že je zde velmi zajímavá souvislost mezi faktorprostorem uzavřených forem modulo exaktní formy a topologií příslušné oblasti, na které jsou uvažované diferenciální formy definované.

4. Přenášení diferenciálních forem pomocí zobrazení

V tomto paragrafu ukážeme, jak lze diferenciální formy přenášet pomocí zobrazení z jedné otevřené množiny na druhou. Budeme uvažovat hladké zobrazení $\Phi : U \to \Omega$ z otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^k$ do otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. V této sekci jsou k, n libovolná přirozená čísla, nemusí platit $k \leqslant n$. Označme souřadnice v U písmeny $u_1, \ldots, u_k$ a souřadnice v Ω budeme označovat $x_1, \ldots, x_n$. Je-li tedy $x = \Phi(u)$ pro nějaká $u \in U \subset \mathbb{R}^k, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak $x_i = \Phi_i(u) = \Phi_i(u_1, \ldots, u_k)$, přičemž Φ_i je i-tá složka zobrazení Φ, $i = 1, \ldots, n$. Připomeňme si, že diferenciál df funkce f je definován vztahem

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Definice 2.7. *Nechť $\Phi : U \to \Omega$ je hladké zobrazení, kde buďte $U \subset \mathbb{R}^k, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Pro každé $p \in \{1, \ldots, n\}$ definujeme zobrazení $\Phi^* : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^p(U)$ předpisem*

$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \Phi) \; d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_p} \; \in \mathcal{E}^p(U),$$

kde $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I \, dx_I = \sum_{|I|=p} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ je libovolný prvek $\mathcal{E}^p(\Omega)$ a kde $i_1, \ldots, i_p$ jsou vzestupně setříděné prvky množiny I.

Připomeňme, že $d\Phi_j, j = 1, \ldots, n$ jsou diferenciály jednotlivých složek zobrazení Φ. Diferenciály těchto funkcí je třeba rozepsat podle definice a výsledný výraz

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \Phi) \left(\sum_{k_1=1}^{k} \frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{k_1}} \, du_{k_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{k_p=1}^{k} \frac{\partial \Phi_{i_p}}{\partial u_{k_p}} \, du_{k_p} \right)$$

upravit podle pravidel pro vnější násobení do základního tvaru $\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=p} \psi_I(u) \, du_I$, kde $\psi_I(u)$ jsou odpovídající koeficienty u symbolů du_I.

Věta 2.8. *Jsou-li ω, Φ, U, Ω jako v definici a $\tau \in \mathcal{E}^q(\Omega)$, pak*

(i) *$\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\tau)$, pokud $p = q$.*
(ii) *$\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau)$, p, q libovolná.*
(iii) *$\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$.*
(iv) *Je-li zobrazení $\Psi : V \to U$ z otevřené množiny $V \subset \mathbb{R}^s$ do U, pak $(\Phi \circ \Psi)^*(\omega) = (\Psi^* \circ \Phi^*)(\omega)$.*
(v) *Je-li $k = n$ a $\omega \in \mathcal{E}^n$, tedy $\omega = f \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, x = \Phi(u)$, pak*

$$\Phi^*(\omega) = \det(\operatorname{Jac} \Phi)(f \circ \Phi) \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n,$$

kde $\operatorname{Jac} \Phi$ je označení pro Jacobiho matici zobrazení Φ, tedy matici $\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{n}$.

Důkaz.

(i) Snadné, přímo z definice.

(ii) Nejdříve dokážeme tvrzení věty pro ω, τ speciálního tvaru $\omega = \omega_I \, dx_I, \tau = \tau_J \, dx_J$, kde ω_I, τ_J jsou funkce a I, J po řadě p-prvková a q-prvková množina indexů. Můžeme předpokládat, že $I \cap J = \emptyset$, jinak jsou totiž obě strany rovny 0. Platí [1]

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*(\omega_I \tau_J \, dx_I \wedge \, dx_J) = \\ &= (\omega_I \circ \Phi)(\tau_J \circ \Phi) \, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{i_p} \wedge \, d\Phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{j_q} = \\ &= (\omega_I \circ \Phi) \, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{i_p} \wedge (\tau_J \circ \Phi) \, d\Phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{j_q} = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau).\end{aligned}$$

Pro obecné ω, τ tvaru $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I \, dx_I$ a $\tau = \sum_{|J|=q} \tau_J \, dx_I$ stačí použít právě dokázané tvrzení spolu s bodem (i) a s tím, že vnější součin je bilineární zobrazení. Na ukázku vypíšeme podrobně, jak se tento důkaz provede. V dalších případech již takovéto přímočaré důkazy necháme čtenáři.

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^*\left(\left(\sum_{|I|=p} \omega_I \, dx_I \right) \wedge \left(\sum_{|J|=q} \tau_J \, dx_J \right) \right) = \\ &= \Phi^*\left(\sum_{|I|=p, |J|=q} (\omega_I \, dx_I) \wedge (\tau_J \, dx_J) \right) = \\ &= \sum_{|I|=p, |J|=q} \Phi^*((\omega_I \, dx_I) \wedge (\tau_J \, dx_J)) = \\ &= \sum_{|I|=p, |J|=q} \Phi^*(\omega_I \, dx_I) \wedge \Phi^*(\tau_J \, dx_J) = \\ &= \left(\sum_{|I|=p} \Phi^*(\omega_I \, dx_I) \right) \wedge \left(\sum_{|J|=q} \Phi^*(\tau_J \, dx_J) \right) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau),\end{aligned}$$

což jsme chtěli.

(iii) Stejně jako v předchozím budeme předpokládat, že $\omega = \omega_I \, dx_I$, pro obecné ω dostaneme vztah pomocí linearity Φ^* a vnějšího diferenciálu d (viz (i) a Věta 2.3(i)). Nechť je tedy $\omega = \omega_I \, dx_I$ a označme $i_1, \ldots, i_p$ prvky množiny I uspořádané vzestupně podle velikosti. Povšimněme si nejprve, že na levé i na pravé straně rovnosti jsou diferenciální formy na množině U. Upravujme nejdříve levou stranu rovnosti

$$\Phi^*(\, d\omega) = \Phi^* \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \, dx_i \wedge \, dx_I \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi \right) \, d\Phi_i \wedge \, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{i_p}$$

Nyní budeme upravovat pravou stranu rovnosti.

$$d(\Phi^*(\omega)) = \, d((\omega_I \circ \Phi) \, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{i_p}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} \, du_j \wedge \, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \, d\Phi_{i_p}$$

[1] Striktně vzato by bylo v následující úpravě třeba nejprve přepsat $dx_I \wedge dx_J$ do základního tvaru setříděného vzestupně, pak teprve použít definici Φ^* a poté přepermutovat členy zpět. Takto bychom podrobně zdůvodnili druhou rovnost (mezi prvým a druhým řádkem) v této úpravě.

Kdybychom věděli, že $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\right) d\Phi_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\omega_I\circ\Phi)}{\partial u_j}\, du_j$, byli bychom hotovi. Tato rovnost je však důsledkem pravidla pro derivování složené funkce, neboť platí

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial(\omega_I\circ\Phi)}{\partial u_j}\, du_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\cdot\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}\right) du_j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}\, du_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\circ\Phi\right) d\Phi_i.$$

(iv) Díky již dokázaným tvrzením (i) a (ii), stačí uvažovat pouze tyto dva případy[2]: $\omega = f \in \mathcal{E}^0(M)$ a případ $\omega = dx_i,\ i = 1,\dots,n$.
První případ plyne ihned z definice:

$$(\Phi\circ\Psi)^*(f) = f\circ(\Phi\circ\Psi) = (f\circ\Phi)\circ\Psi = \Psi^*(\Phi^*(f)).$$

Nechť tedy nyní $\omega = dx_i$. Pak

$$(\Phi\circ\Psi)^*(dx_i) = \sum_{l=1}^{s}\frac{\partial(\Phi\circ\Psi)_i}{\partial t_l}\, dt_l = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}\circ\Psi\right)\left(\sum_{l=1}^{s}\frac{\partial\Psi_j}{\partial t_l}\, dt_l\right) =$$

$$= \Psi^*\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}\, du_j\right) = \Psi^*(\Phi^*(dx_i)).$$

(v) Nechť je vše označeno jako ve formulaci věty. Tedy mimo jiné $\omega = f\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ a tedy podle definice Φ^* platí, $\Phi^*(\omega) = (f\circ\Phi)\, d\Phi_1\wedge\ldots\wedge d\Phi_n$. V každém bodě $u\in U$ můžeme $d\Phi_i$ vyjádřit jako:

$$d\Phi_i(u) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j} du_j.$$

Podle Věty 1.3 (v) je tedy

$$d\Phi_1\wedge\ldots\wedge d\Phi_n(u) = \det\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^{n} du_1\wedge\ldots\wedge du_n = \det(\mathrm{Jac}\,\Phi(u))\; du_1\wedge\ldots\wedge du_n$$

pro libovolné $u\in U$, což jsme chtěli dokázat.

□

Poznámka. Nejpozoruhodnější vlastnost z předchozí věty je bod třetí. De Rhamův diferenciál d je parciální diferenciální operátor prvního řádu. Obecně, parciální diferenciální operátor D je (v nejjedodušší verzi) lineární zobrazení prostoru V všech funkcí na dané množině do sebe, v jehož definici se používají parciální derivace (prvního, nebo i vyšších řádů).
Důležitou roli ve studiu takových operátorů hrají jejich symmetrie. Bývá zvykem popisovat symetrie daných matematických objektů pomocí grup symetrie. Kanonické příklady takových grup symetrií je buď grupa $GL(V)$ všech invertibilních lineárních zobrazení vektorového prostoru V do sebe (grupová operace je skládání zobrazení), nebo podgrupa rotací $SO(3)\subset GL(\mathbb{R}^3)$, jejíž prvky jsou ortogonální 3×3 matice. .

[2]Tvrzení lze též dokázat stejně přímočaře jako předchozí body. Stačí ho dokázat pro $\omega = \omega_I\, dx_I$. Tvrzení pak plyne jako v předešlých případech z linearity Φ^* a Ψ^*. Důkaz tvrzení je pak poměrně přímočarý a nepoužívá žádných triků, je však dosti technický. Pokud dosud nejste zběhlí v tomto typu důkazů, doporučujeme si provést tento důkaz vlastnoručně, naučíte se pracovat s používanou symbolikou a získáte tím přehled. Hlavní idea důkazu je toto: Povšimneme si, že si levá a pravá stranu dokazované rovnosti jsou diferenciální formy z $\mathcal{E}^p(V)$, obě strany můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci báze $\{\, dt_K\}_{|K|=p}$ prostoru $\mathcal{E}^p(V)$, nebo alespoň jako lineární kombinaci prvků tvaru $dt_{k_1}\wedge\ldots\wedge dt_{k_p}$, kde $k_1,\ldots,k_p$ nejsou nutně vzestupně uspořádaná či vzájemně různá. Pokud vyjdou stejné lineární kombinace, bude tvrzení dokázáno.

Symetrie nějakého objektu (v našem případě vektorového prostoru V) se typicky realizuje pomocí akce dané grupy symetrie G na V pomocí **representace ρ grupy G na V**, což je homomorfismus $\rho : G \to GL(V)$, tj. zobrazení, které respektuje grupové operace ve vzorech a obrazech: $\rho(gh) = \rho(g \circ \rho(h)\ g, h \in G$. Symetrie diferenciálních operátorů se obvykle vyjadřuje jako požadavek, aby akce dané grupy symetrie na prostoru V, na kterém je definován difereniální operátor D komutovala s akcí operátoru D. Tedy aby platilo

$$D(\rho(g)(v)) = \rho(g)(D(v)), g \in G, v \in V.$$

Zpravidla bývají diferenciální operátory tím zajímavější a důležitější, čím větší grupu symetrií mají.
Jedna z pozoruhodných a hodně velkých grup transformací je grupa $\mathrm{Diff}(\Omega)$ všech difeomorfismů otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kde grupová operace je skládání difeomorfismů. Tato obrovská ('nekonečně dimensionální') grupa působí pomocí přenášení diferenciálních forem na (nekonečně dimenzionálním) vektorovém prostoru $V = \mathcal{E}^p(\Omega)$. Označme i v tomto nekonečně dimensionálním případě symbolem $GL(V)$ grupu všech invertibilních lineárních zobrazení z V do V. Přenášení diferenciálních forem definuje zobrazení

$$\rho : G \to GL(V), \rho(\Phi)(\omega) = \Phi^*(\omega); \Phi \in G = \mathrm{Diff}(\Omega), \omega \in V = \mathcal{E}^p(\Omega)).$$

Z tohoto hlediska je možné interpretovat různé vlastnosti zobrazení Φ^* shrnuté v předchozí větě takto. Z první a druhé vlastnosti plyne, že Φ^* je lineární zobrazení, patří do $End(V)$. Čtvrtá vlastnost říká, že výše definované zobrazení ρ je (v podstatě) reprezentace. Platí totiž, že $\rho(\Phi \circ \Psi) = \rho(\Psi)\circ)\rho(\Psi)$. Pokud bych chtěl dostat opravdovou representaci, stačí definovat $\tau(\Phi) = \rho(\varphi^{-1})$ a dostaneme vztah $\tau(\Psi \circ \Phi) = \tau(\Psi)\circ)\rho(\Phi)$.
Třetí vlastnost z předchozí věty je naprosto klíčová. Říká totiž, že G je grupa symetrie de Rhamova operátoru d, tj. že je splněna podmínka

$$d(\rho(g)(\omega)) = \rho(g)(d\omega), g \in \mathrm{Diff}(\Omega), \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega).$$

V jakémsi intituitivním smyslu (který je ale možné vyjádřit v přesných termínech matematických vět a definic) je dokonce možné říct, že je de Rhamův diferenciál d charakterizován tím, že má takto obrovskou grupu symetrie.
I poslední vlastnost (v) ve Větě je velmi podstatná, uvidíme brzy, že z ní bude plynout nezávislost integrálu z diferenciální formy přes lokální k-plochu na volbě parametrizace.

KAPITOLA 3

Integrace diferenciálních forem

V celé této kapitole jsou k, n dvě přirozená čísla, pro které platí $k \leqslant n$, pokud není řečeno jinak. Zobrazení Φ otevřené množiny $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ na otevřenou množinu $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **difeomorfismus,** pokud je Φ prosté a Φ i Φ^{-1} jsou spojitě diferencovatelné. Připomeňme si větu o lokálním difeomorfismu, kterou budeme často používat.

Věta 3.1. *Nechť Φ je spojitě diferencovatelné zobrazení otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, pro které je Jacobiho matice*

$$J\Phi = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

regulární v bodě $a \in \Omega$.
Pak existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu a takové, že Φ je difeomorfismus $\mathcal{U}$ na $\Phi(\mathcal{U})$.

1. Plochy dimenze k.

V této části budeme definovat obory integrace pro křivkové a plošné integrály 1. a 2. druhu.

Definice 3.2. *Nechť $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, a φ je zobrazení $\mathcal{O}$ do $\mathbb{R}^n$.*
Řekneme, že zobrazení φ je **regulární**, *pokud φ je spojitě diferencovatelné, Jacobiho matice $J\varphi$ má hodnost rovnou k ve všech bodech $u \in \mathcal{O}$, a zobrazení φ je homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $\varphi(\mathcal{O})$.*

Definice 3.3. *Dvojici (M, φ), kde φ je regulární zobrazení otevřené množiny $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$ a $M = \varphi(\mathcal{O})$ budeme nazývat* **parametrizovaná plocha dimenze** k**,** *zobrazení φ nazveme* **parametrizací** *množiny M.*
Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ a je-li $x \in M$, pak řekneme, že x je **regulární bod množiny** M **dimenze** k, *pokud existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu a takové, že $\mathcal{U} \cap M$ je parametrizovaná plocha dimenze k.*

Definice 3.4. *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je* **plocha dimenze** k, *pokud každý její bod je regulární bod M dimenze k.*
Dohodneme se také, že každou diskrétní podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **plochou dimenze** 0.

2. Implicitní popis ploch

Kanonický příklad dvourozměrné plochy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru je sféra, která se nejčastěji popisuje jednou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Je to efektivnější popis, než pokrýt sféru několika parametrickými dvourozměrnými plochami. Tento systém funguje obecně.

Věta 3.5. *Nechť $F : U \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}^{k+n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, a množina M je definována předpisem*

$$M = \{x \in U | F(x = c)\}.$$

Pokud má pro každý bod $a \in M$ Jacobiho matice $JF(a)$ hodnost n, pak je M plocha dimenze k.
Důkaz. Zvolme nějaký bod $a \in \mathbb{R}^{k+n}$ pro který $F(a) = c$. Podle předpokladů existuje $n \times n$ minor Jacobiho matice $\{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\}$ s nenulovým determinantem. Po vhodném přečíslování souřadnic $x_1, \dots, x_{k+n}$ můžeme předpokládat, že je čtvercová matice

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

invertibilní.

Nyní definujeme zobrazení $G : U \to \mathbb{R}^{k+n}$ předpisem

$$G(x_1, \dots, x_{k+n}) := (F_1, \dots, F_n, x_{n+1}, \dots, x_{k+n}).$$

Jacobiho matice G v bodě a je invertibilní a tak podle věty o inverzním zobrazení existuje okolí $U' \subset U$ bodu a, na kterém je G difeomorfismus. Označme

$$\mathbb{R}^k := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} | x = (c_1, \dots, c_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})\}$$

a definujme zobrazení φ předpisem $\varphi := G^{-1}|_{\mathbb{R}^k}$. Je zřejmé, že obraz $\varphi(\mathbb{R}^k \cap G(U'))$ je $M \cap U'$ a φ je regulární parametrizace plochy $U \cap M$ dimenze k, protože parciální derivace

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+i}} = \frac{\partial G^{-1}}{\partial x_{n+i}}, i = 1, \dots, k$$

jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. $\square$

3. Ekvivalentní definice regulárního bodu plochy.

Před dalším popisem ploch bude užitečné formulovat a odůvodnit ekvivalentní definici regulárního bodu plochy M. Nejjednodušší příklad plochy dimenze k je podprostor

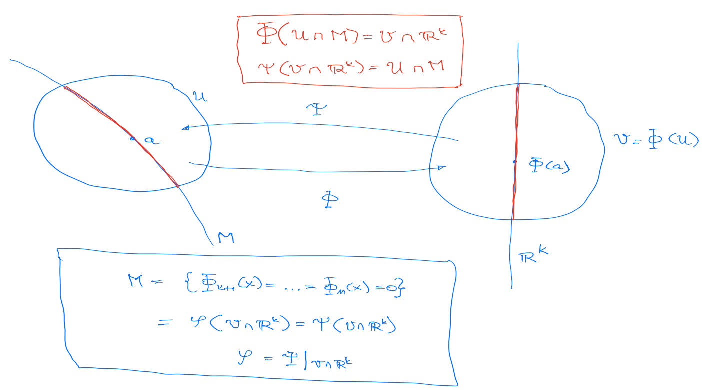
$$\mathbb{R}^k := \{x \in \mathbb{R}^n | x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\}.$$

Ukážeme si, že libovolnou plochu M dimenze k mohu v okolí regulárního bodu 'narovnat' pomocí difeomorfismu tak, aby to byla otevřená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^k$.

Věta 3.6. *Bod x je regulární bod plochy M dimenze k právě když existuje okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu x a difeomorfismus $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takový, že*

$$\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \Phi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^k, \tag{3.1}$$

kde $\mathbb{R}^k = \{x \in \mathbb{R}^n | x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\}$.



Důkaz.

(A) Předpokládejme, že existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x a regulární parametrizace $x = \varphi(u)$ množiny $\mathcal{U} \cap M$ definovaná na množině $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$. Existuje tedy $\bar{u} \in \mathcal{O}, \varphi(\bar{u}) = x$. Parciální derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ v bodě $\bar{u}$ jsou lineárně nezávislé a je možné ji doplnit pomocí vektorů $v_{k+1}, \ldots, v_n$ do baze prostoru $\mathbb{R}^n$. Definujme zobrazení

$$\Psi(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) = \varphi(u) + \sum_{j=k+1}^{n} u_j v_j.$$

Jacobiho matice $J\Psi(\bar{u}, 0, \ldots, 0)$ je podle konstrukce regulární, a tak podle věty o inverzním zobrazení existuje okolí $\mathcal{V}' \subset \mathbb{R}^n$ bodu $(\bar{u}, 0, \ldots, 0)$ na kterém je Ψ difeomorfismus na $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Je snadné se přesvědčit, že

$$\Psi(\mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k) = \mathcal{U}' \cap M;\ \Psi|_{\mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k} = \varphi.$$

Opravdu, je-li $(u, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$, pak $\Psi(u, 0, \ldots, 0) = \varphi(u)$ patří do M. Naopak, pro bod $y \in \mathcal{U}' \cap M$ existuje bod $u \in \mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$ takový, že $\varphi(u) = \Psi(u, 0, \ldots, 0) = y$. Inverzní zobrazení $\Phi = \Psi^{-1}$ tedy zobrazuje prostě $\mathcal{U}'$ na $\mathcal{V}'$ a platí $\Phi(\mathcal{U}' \cap M) = \mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$. Zobrazení $\Phi = (\Psi)^{-1}$ je tedy je hledaný izomorfizmus, splňující podmínku (3.1).

(B) Naopak, předpokládejme, že existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x a difeomorfismus Ψ na $\mathcal{U}$, který splňuje podmínku (3.1). Inverze $\Psi = \Phi^{-1}$ zobrazuje $\mathcal{O} := \Psi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k$ na $\mathcal{U} \cap M$, restrikce $\varphi = \Psi|_{\mathcal{O}}$ je parametrizace množiny $\mathcal{U} \cap M$ a je zřejmé, že je to regulární parametrizace, protože Ψ je difeomorfismus.

□

Právě dokázaná věta má užitečné důsledky. Jeden z nich se týká charakterizace různých parametrizací dané plochy M.

Lemma 3.7. *Nechť M je plocha dimenze k a $\varphi : \mathcal{O} \to M$ a $\varphi' : \mathcal{O}' \to M$ jsou dvě její parametrizace.*
Pak existuje difeomorfismus $\alpha : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$, pro který $\varphi' = \varphi \circ \alpha$.

Důkaz. Je zřejmé, že $\alpha = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ je určeno jednoznačně, ale je třeba ukázat, že je α spojitě diferencovatelné. Zvolme bod $x' \in \mathcal{O}'$ pevně. Podle Věty 3.6 existují okolí $\mathcal{V}' \subset \mathbb{R}^n$ bodu x', okolí $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ bodu $x = \alpha(x')$, okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\varphi(x) = \varphi'(x')$, a difeomorfismy $\Psi' : \mathcal{V}' \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ a $\Psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tak, že $\varphi = \Psi$ na $\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^k$ a $\varphi' = \Psi'$ na $\mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$. Pak ale $\alpha = \Psi^{-1} \circ \Psi'$ je spojitě diferencovatelné na $\mathcal{V}' \cap \mathbb{R}^k$.

□

4. Tečný prostor k ploše v daném bodě.

Je-li a regulární bod plochy M dimenze k, pak je možné uvažovat v tomto bodě tečné vektory a tečný prostor. V tomto paragrafu bude slovo 'křivka' znamenat spojitě diferencovatelné zobrazení otevřeného intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^p, p \geqslant 2$.

Definice 3.8. *Nechť x je regulární bod lokální plochy M dimenze k. Řekneme, že vektor $\vec{v}$ je* **tečný vektor** *k M v bodě x, pokud existuje křivka $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí $c'(0) = \vec{v}, c(0) = x$.*
Množinu všech tečných vektorů v bodě x označíme symbolem $T_x M$ a nazveme **tečný prostor** *k M v bodě x.*

Poznámka. Je-li $\varphi : \mathcal{O} \to M$ daná parametrizace lokální k-plochy M a $\varphi(\bar{u}) = x$, pak zřejmě každá křivka $d : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{O}, d(0) = \bar{u}$ indukuje křivku $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, c(0) = x$ danou předpisem $c = \varphi \circ d$.
Lokálně platí také opačná implikace. Pokud je $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, c(0) = x$ křivka v M, pak existuje $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ a křivka $d : (-\varepsilon', \varepsilon') \to \mathcal{O}, d(0) = \bar{u}$, pro kterou $c = \varphi \circ d$. To je možné odůvodnit následujícím způsobem. Z tvrzení Věty 3.6 a z jejího důkazu plyne, že místo parametrického popisu lokálního kousku $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{U} \cap M$ plochy M mohu použít implicitní popis pomocí difeomorfismu $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ s vlastností $\Phi(U \cap M) = \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^k$ a že souvislost mezi těmito dvěma popisy je dána vztahem $\varphi^{-1} = \Phi$ na $\mathcal{U} \cap M$. Pak $d = \Phi \circ c$ je křivka na intervalu, kde složení má smysl.

Z toho plyne, že je možné vyslovit ekvivalentní definici tečného vektoru tímto způsobem: Vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je tečný vektor v bodě x k M právě když existuje hladká křivka $d : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{O}, d(0) = \bar{u}$ taková, že pro křivku $c = \varphi \circ d$ platí $\varphi'(0) = \vec{v}$.

Věta 3.9. *Nechť (M, φ) je parametrická plocha dimenze k, kde $\varphi(\mathcal{O}) = M$ a $\varphi(\bar{u}) = x, \bar{u} \in \mathcal{O}$. Pak je T_xM roven lineárnímu obalu vektorů $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u_0)$ a nezávisí na volbě parametrizace.*

Důkaz. Vektory $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u_0)$ odpovídají křivkám $d_i(t) = \bar{u} + tu_i$, patří tedy do prostoru T_xM a jsou lineárně nezávislé. Pro libovolný vektor $\vec{v}$ existuje podle definice křivka $d : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{O}$ taková, že $d(0) = \bar{u}, (\varphi \circ d)'(0) = \vec{v}$. Ale podle derivace složené funkce je $\vec{v}$ lineární kombinace vektorů $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u_0)$. Nezávislost na volbě parametrizace plyne z toho, že základní definice tečného prostoru je nezávislá na parametrizaci. $\square$

5. Orientace plochy

Definice 3.10. *Skalární součin na $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ definujeme požadavkem, že baze $\{e_I, |I| = k\}$ je ortonormální. Tedy pro $\alpha = \sum_{I,|I|=k} a_I e_I \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ je $||\alpha||^2 = \sum_{I,|I|=k} a_I^2$.*

Definice 3.11 (Orientace plochy.)**.** *Nechť M je plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$. Pak* **orientací** *plochy M rozumíme* spojité *zobrazení ν plochy M do $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ takové, že pro všechny $x \in M$ platí*

$$\nu(x) \in \Lambda^k(T_xM);\ ||\nu(x)|| = 1.$$

Pokud pro M existuje orientace, řekneme, že M je **orientovatelná plocha***. Dvojice (M, ν) se pak nazývá* **orientovaná plocha.**
Nechť M je orientovaná plocha dimenze k. Řekneme, že parametrizace $\varphi : \mathcal{O} \to M' \subset M$ je **kladně (nebo souhlasně) orientovaná,** *pokud je baze $\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\}$ kladně orientovaná baze T_xM pro každý bod $x \in M$.*

Je podstatné si uvědomit, že ve většině obvyklých případů je orientace plochy určena volbou elementu $\nu(x)$ v jediném bodě, a že existují plochy, které nejsou orientovatelné (klasický případ Möbiova listu si spočítáte na cvičení).

Lemma 3.12. *Je-li M souvislá množina, pak buď neexistuje žádná orientace, nebo existují právě dvě (navzájem opačné) orientace plochy M. Pokud orientace M existuje, je určena orientací tečného prostoru T_xM v jediném (libovolně zvoleném) bodě $x \in M$.*

Důkaz. Případ $k = 0$ je triviální, předpokládejme, že $k \geqslant 1$.
Řekneme, že zobrazení $\nu : M \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ splňuje podmínku (*), pokud $\nu(x) \in \Lambda^k(T_xM)$ a $||\nu(x)|| = 1$. Hlavní část důkazu spočívá v odůvodnění následujícího tvrzení.

Tvrzení. Pro každé $x \in M$ existuje okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu x takové, že pokud se dvě spojité zobrazení $\nu, \nu' : \mathcal{U} \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ splňující podmínku (*) rovnají v bodě x, rovnají se na celém okolí $\mathcal{U}$.
Toto tvrzení se dá odůvodnit takto:
Zvolme bod $x \in M$ pevně. Pak existují vektory $v_{k+1}, \dots, v_n$ a souvislé okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu x takové, že zobrazení $A : \Lambda^k(T_yM) \to \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ definované předpisem

$$A(\alpha) = \alpha \wedge v_{k+1} \wedge \ldots \wedge v_n, \alpha \in \Lambda^k(T_yM)$$

je isomorfismus pro každý bod $y \in \mathcal{U}$.
Prostor $\Lambda^k(T_yM)$ je jednodimenzionální pro libovolný bod $y \in M$, tedy existují právě dva elementy $\pm\alpha \in \Lambda^k(T_yM)$ splňující podmínku $||\alpha|| = 1$. Pro výběr hodnoty $\nu(x)$ splňující podmínku (*) máme tedy v každém bodě $x \in M$ právě dvě (navzájem opačné) možnosti. Z toho plyne, že i spojité zobrazení $y \in \mathcal{U} \mapsto A(\nu(y))$ má pro každé $y \in \mathcal{U}$ právě dvě možné (navzájem opačné) hodnoty. Protože je $\mathcal{U}$ souvislá, musí být toto zobrazení konstantní a je jednoznačně určeno hodnotou v bodě x. Tím je tvrzení dokázáno.
Zbytek důkazu lemmatu je již přímočarý. Buď žádná orientace M neexistuje, nebo existuje alespoň jedno zobrazení ν $M \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ splňující podmínku (*).

Je-li $\nu' : M \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ nějaké jiné zobrazení splňující podmínku (*), pro které $\nu'(x) = \nu(x)$, definujme množinu A předpisem

$$A = \{y \in M | \nu'(y) = \nu(y)\}.$$

Podle dokázaného tvrzení je A otevřená množina, ze spojitosti je také uzavřená a je neprázdná. A protože M je souvislá, platí $A = M$.
V bodě $x \in M$ máme jen dvě možnosti pro $\omega(x)$, které se liší znaménkem, tedy pro spojité ω na M splňující podmínku (*) máme jen dvě možnosti, které se liší znaménkem.

□

6. Rozklad jednotky

Potíž při definici integrálu z diferenciální formy stupně k přes plochu dimenze k je v tom, že diferenciální formu je třeba přenést pomocí parametrizace do lokálních souřadnic, které jsou však definované jen v okolí daném lokální parametrizací. Tento problém se obchází pomocí tzv. rozkladu jednotky – forma se vynásobí konstantní funkcí rovnou jedné, která je vyjádřená ve formě součtu hladkých funkcí, z nichž každá má nosič v některém z příslušných okolí. V tomto paragrafu budeme používat hladké funkce, tj. funkce, které mají spojité derivace všech řádů.

Definice 3.13. *Nechť k je nezáporné celé číslo. Pro diferenciální formu $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ budeme definovat její* **nosič** supp ω *předpisem*

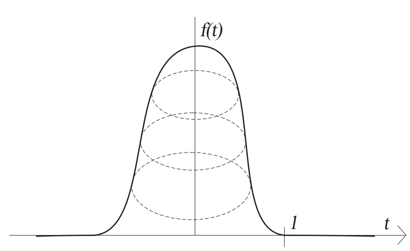
$$\operatorname{supp} \omega := \overline{\{x \in \Omega \,|\, \omega(x) \neq 0\}}.$$

Definice 3.14 (Rozklad jednotky)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že soubor $\mathcal{U}$ otevřených množin je* **otevřené pokrytí** *M, pokud $M \subset \cup_{U \in \mathcal{U}} U$.*
Řekneme, že systém množin $\{P_\alpha\}$ v $\mathbb{R}^n$ je **lokálně konečný,** *pokud pro každý bod $m \in M$ existuje okolí U_m takové, že $U_m \cap P_\alpha \neq \emptyset$ jen pro konečně mnoho α.*

Definice 3.15. *Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že soubor hladkých nezáporných funkcí $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ na M je* **rozklad jednotky***, pokud systém $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je lokálně konečný a pro každý bod $m \in M$ platí*

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(m) = 1.$$

Řekneme, že rozklad jednotky $\{\varphi_\alpha\}_{\beta \in A}$ **respektuje** *pokrytí $\{U\}_{U \in \mathcal{U}}$, pokud pro každé $\alpha \in A$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U$.*



Obrázek 1. Funkce f v rozkladu jednotky

Věta 3.16. *Pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ existuje rozklad jednotky, který ho respektuje.*
Důkaz. Větu dokážeme jen pro $M \subset \mathbb{R}^n$ omezenou, kde je vidět hlavní myšlenka důkazu bez dodatečných technických komplikací.
Nechť $K(a,r), r > 0$ označuje otevřenou kouli o středu v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru r. Existuje funkce $f_{a,r}$ nezáporná, hladká na $\mathbb{R}^n$ s vlastností, že $f_{a,r}$ je kladná všude na $K(a,r)$ a rovná nule na doplňku $K(a,r)$. Lze ji sestrojit například pomocí funkce $f_r(t) := \exp(\frac{t^2}{t^2-r^2}), t \in (-r,r)$ a položit $f_{a,r}(x_1,\ldots,x_n) := f_r(\|x-a\|)$ pro $x \in K(a,r) \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$.
Nechť $m \in M$ je zvolen pevně. Pak existuje prvek U daného pokrytí $\mathcal{U}$ a číslo $r_m > 0$ takové, že $K(m,r_m) \subset U$. Systém $\{K(m,r_m)\}_{m\in\overline{M}}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny $\overline{M}$, tedy existuje konečné podpokrytí $\{K(m_j,r_j)\}_{j=1}^N$. Pomocí funkcí $f_j(x) = f_{m_j,r_j}$ definujeme

$$\varphi_j := \frac{f_j}{(\sum_{j=1}^N f_j)}$$

a soubor $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ je požadovaný rozklad jednotky, protože $\sum_{j=1}^N f_j$ je na M kladná. □

7. Definice integrace diferenciálních forem

Definice 3.17. *(i) Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť je Ω otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n(x_1,\ldots,x_n)$ s kanonickou orientací a $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$. Pak existuje jednoznačně určená hladká funkce f na Ω taková, že $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ a integrál $\int_\Omega \omega$ definujeme předpisem*

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

(ii) Nechť $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a M je orientovaná plocha dimenze k v Ω. Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je diferenciální forma, pro kterou existuje otevřená množina $U \subset \Omega$ taková, že platí:
(a) $\operatorname{supp}\omega \subset U$
(b) existuje kladně orientovaná parametrizace φ plochy $U \cap M$ na $\mathcal{O}$.
Pak definujeme

$$\int_M \omega = \int_{\mathcal{O}} \varphi^*(\omega).$$

(iii) Nechť M je orientovaná plocha dimenze k v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zvolme libovolné otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ množiny Ω s vlastností, že pro všechny množiny $M \cap U_\alpha, \alpha \in A$ existuje parametrizace φ_α na oblasti $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathbb{R}^k$. Orientaci $\mathcal{O}_\alpha$ zvolíme tak, aby φ_α byla souhlasně orientovaná s danou orientací M.

Nechť pro $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ platí, že $M \cap \operatorname{supp}\omega$ je kompaktní. Pak zvolíme rozklad jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ na množině $M \cap \operatorname{supp}\omega$ respektující pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ a definujeme

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^N \int_M f_j \omega.$$

(iv) Orientovaná plocha dimenze 0 je konečná množina bodů $M = \{m_i\}_{i=1}^N$ spolu s volbou orientace $a_i \in \{\pm 1\}$ pro každý bod M. Je-li diferenciální forma stupně nula daná funkcí f definovanou na M, pak

$$\int_M f = \sum_{i=1}^N a_i f(m_i).$$

Poznámka. Podmínka, že $M \cap \operatorname{supp}\omega$ je kompaktní je typicky splněna, pokud buď M je kompaktní, nebo pokud M je neomezená, uzavřená a ω má kompaktní nosič.
Definice integrálu vyžaduje nutně diskusi, jestli hodnota integrálu zavisí na různých volbách, které bylo třeba udělat v průběhu definice. Postupně si odvodíme několik tvrzení, které pak povedou k důkazu nezávislosti integrálu na těchto volbách.

Lemma 3.18. *Nechť $k \geqslant 1$. Nechť Ω a Ω' jsou dvě otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a nechť $\alpha : \Omega \to \Omega', x' = \alpha(x)$ je difeomorfismus, pro který $\det J\alpha > 0$, kde $J\alpha$ je Jacobiho matice $\{\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\}, i, j = 1, \ldots, n$.*
Pak pro každou diferenciální formu $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega')$ platí

$$\int_{\Omega'} \omega = \int_{\Omega} \alpha^*(\omega).$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že existuje funkce $f'(x')$ taková, že $\omega = f'(x')dx_1' \wedge \ldots \wedge dx_n'$ na Ω', že z Věty 2.8 (v) plyne, že

$$\alpha^*(\omega) = \det J\alpha(x)[f' \circ \alpha](x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

a použít větu o substituci pro Lebesgueův integrál. $\square$

Lemma 3.19. *Nechť $k \geqslant 1$. Nechť $M \subset \Omega$ je orientovaná plocha dimenze k, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť $\varphi : \mathcal{O} \to M$ a $\varphi' : \mathcal{O}' \to M$ jsou dvě kladně orientované parametrizace M.*
Pak

$$\int_{\mathcal{O}} \varphi^*(\omega) = \int_{\mathcal{O}'} (\varphi')^*(\omega).$$

Důkaz. Z Lemmatu 3.7 plyne, že existuje difeomorfismus $\alpha : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$, pro který platí $\varphi' = \varphi \circ \alpha$, $\det J\alpha > 0$ na $\mathcal{O}'$, a

$$(\varphi')^*(\omega) = \alpha^*(\varphi^*(\omega)).$$

Tvrzení tedy plyne z Lemmatu 3.18. $\square$

Lemma 3.20. *Nechť $k \geqslant 1$. Je-li M orientovaná plocha dimenze k v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a je-li $M \cap \operatorname{supp} \omega$ kompaktní, pak $\int_M \omega$ nezávisí ani na volbě otevřeného pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ množiny Ω, ani na volbě rozkladu jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ na množině $M \cap \operatorname{supp} \omega$ respektující pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

Důkaz.
Předpokládejme, že $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a $\{U'_\beta\}_{\beta \in B}$ jsou dvě otevřená pokrytí množiny Ω s vlastností, že pro všechny množiny $M \cap U_\alpha, \alpha \in A$ existuje parametrizace φ_α na oblasti $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathbb{R}^k$, a obdobná vlastnost platí i pro druhé pokrytí. Předpokládejme také, že $\{f_j\}_{j=1}^N$, resp. $\{g_\ell\}_{\ell=1}^{N'}$ jsou rozklady jednotky na $M \cap \operatorname{supp} \omega$ respektující pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, resp. $\{U'_\beta\}_{\beta \in B}$. Potřebujeme ukázat, že

$$L = \sum_{j=1}^N \int_M f_j \omega = \sum_{\ell=1}^{N'} \int_M g_\ell \omega = P.$$

Můžeme předpokládat, že $\forall j, \operatorname{supp} f_j \subset U_{\alpha_j}$ a pro výpočet L zvolíme pro každé $j = 1, \ldots, N$ nějakou kladně orientovanou parametrizaci φ_j množiny $M \cap U_{\alpha_j}$. Dostaneme

$$L = \sum_{j=1}^N \int_{U_{\alpha_j} \cap M} f_j [\sum_{\ell=1}^{N'} g_\ell] \omega = \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^{N'} \int_{U_{\alpha_j} \cap U'_{\beta_\ell} \cap M} f_j g_\ell \omega,$$

kde jsme pro parametrizaci množiny $U_{\alpha_j} \cap U'_{\beta_\ell} \cap M$ použili restrikci nějaké kladně orientované parametrizace φ_j množiny $U_{\alpha_j} \cap M$.
Stejným postupem dostaneme

$$P = \sum_{\ell=1}^{N'} \int_{U_{\beta_\ell} \cap M} = \sum_{\ell=1}^{N'} \sum_{j=1}^{N} \int_{U_{\alpha_j} \cap U'_{\beta_\ell} \cap M} f_j g_\ell \omega,$$

kde jsme pro integrály v posledních sumách použili restrikci nějaké kladně orientované parametrizace množiny $U'_{\beta_\ell} \cap M$. Dokazované tvrzení pak plyne z Lemmatu 3.19.

$\square$

KAPITOLA 4

Stokesova věta

1. Plochy dimenze k s krajem.

Na druhém cvičení jsme zavedli definici otevřené množiny Ω v $\mathbb{R}^n$ s hladkou hranicí $\partial\Omega$. Teď si tuto definici zobecníme pro plochy dimenze k s krajem.
Pro tuto kapitolu si zavedeme speciální označení následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^k &= \{u \in \mathbb{R}^n | u = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)\}, \\
\mathbb{R}^k_\leqslant &= \{u \in \mathbb{R}^k | u_k \leqslant 0\}, \ \text{poloprostor} \\
\operatorname{Int} \mathbb{R}^k_\leqslant &= \{u \in \mathbb{R}^k | u_k < 0\}; \ \text{vnitřek poloprostoru} \\
\partial \mathbb{R}^k_\leqslant &= \{u \in \mathbb{R}^k | u_k = 0\} \ \text{kraj poloprostoru} \\
\mathbb{R}^k_\leqslant &= \operatorname{Int} \mathbb{R}^k_\leqslant \cup \partial \mathbb{R}^k_\leqslant \quad \text{disjunktní sjednocení}
\end{aligned}$$

Připomeňme si, že plochy dimenze k byly definovány jako obrazy otevřených podmnožin v $\mathbb{R}^k$ pomocí regulárního zobrazení φ. Otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^k$ je zde elementární příklad a vzor plochy dimenze k. Podobně budeme definovat plochy dimenze k s krajem, jen elementární příklad a vzor bude otevřená podmnožina poloprostoru $\mathbb{R}^k_\leqslant$, což je podle definice průnik otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^k$ s poloprostorem $\mathbb{R}^k_\leqslant$.

Definice 4.1. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je* **plocha dimenze k s krajem,** *pokud pro každý bod $x \in M$ existuje otevřené okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu x a parametrická plocha $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ taková, že*

$$\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^k_\leqslant) = \mathcal{U} \cap M. \tag{4.1}$$

Mohou tedy nastat dva případy:
(1) Body množiny $\varphi(\mathcal{O} \cap \operatorname{Int} \mathbb{R}^k_\leqslant)$ jsou regulární body plochy dimenze k, tyto body budeme nazývat **vnitřní body** *plochy M. Množinu všech vnitřních bodů plochy M nazveme* **vnitřek plochy** *M a označíme ji symbolem* $\operatorname{Int} M$.
(2) Body množiny $\varphi(\mathcal{O} \cap \partial \mathbb{R}^k_\leqslant)$ budeme nazvat **body kraje plochy** *M. Množinu všech bodů kraje plochy M nazveme* **kraj plochy** *M a označíme ji symbolem ∂M.*

Definice 4.2. Orientace plochy M dimenze k s krajem *je definována jako orientace jejího vnitřku* $\operatorname{Int} M$. *Je-li M orientovaná a $x \in \partial M$, existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x a parametrizace φ s vlastností (4.1), která je souhlasně orientovaná v bodech plochy* $\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}$ *s danou orientací* $\operatorname{Int} M$ *a definuje orientaci na ploše $M' = \varphi(\mathcal{O})$.*
Pro orientovanou plochu s krajem M definujeme indukovanou orientaci plochy ∂M následujícím způsobem.
Řekneme, že ortonormální baze $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ prostoru $T_x(\partial M)$ je kladně (resp. záporně) orientovaná vůči indukované orientaci, pokud je baze $\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ kladně (resp. záporně) orientovaná baze prostoru $T_x M'$.

Lemma 4.3. *Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ plocha dimenze k s krajem, pak platí:*
(1) Definice vnitřních bodů a bodů kraje plochy M nezávisí na volbě okolí $\mathcal{U}$ a parametrizace φ a platí

$$M = \operatorname{Int} M \cup \partial M; \ \operatorname{Int} M \cap \partial M = \emptyset.$$

(2) Množina $\operatorname{Int} M$ *je plocha dimenze* k.
(3) Množina ∂M *je plocha dimenze* $k-1$.
(4) Bod $x \in M$ *je bod vnitřku* $\operatorname{Int} M$ *právě když existuje jeho okolí* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *a difeomorfismus* $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *takové, že*

$$\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^k.$$

(5) Bod $x \in M$ *je bod kraje* ∂M *právě když existuje jeho okolí* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *a difeomorfismus* $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *takové, že*

$$\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{V} \cap \partial\mathbb{R}^k_{\leqslant},$$

kde $\partial\mathbb{R}^k_{\leqslant} = \{x \in \mathbb{R}^k | x_k = 0\}$.

Důkaz. (1) Nechť pro bod $x \in M$ existují otevřené množiny $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ a dvě parametrizace $\varphi_1 : \mathcal{O}_1 \to \mathbb{R}^n, \varphi_2 : \mathcal{O}_2 \to \mathbb{R}^n$ pro které platí relace (4.1). Zmenšením množin $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ a přechodem k $U = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ můžeme předpokládat, že $\varphi_1(\mathcal{O}_1) = \varphi_2(\mathcal{O}_2) = \mathcal{U}$. Podle Lemmatu 3.7 je $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ spojitě diferencovatelné zobrazení otevřené množiny $\mathcal{O}_1 \cap \mathbb{R}^k_< \subset \mathbb{R}^k$ do množiny $\mathcal{O}_2 \cap \mathbb{R}^k_{\leqslant}$, tedy obraz musí být podmnožinou $\mathcal{O}_2 \cap \mathbb{R}^k_<$. Bod x je tedy vnitřní bod M podle obou parametrizací. Pomocí disjunktního rozkladu $\mathbb{R}^k_{\leqslant} = \operatorname{Int} \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cup \partial\mathbb{R}^k_{\leqslant}$ a přechodem k doplňku dostaneme že je-li x bod kraje vzhledem k φ_1, platí totéž i vzhledem k φ_2. Zbytek tvrzení plyne z definice.
(2) Všechny body množiny $\operatorname{Int} M$ jsou regulární body plochy dimenze k.
(3) Všechny body množiny ∂M jsou regulární body plochy dimenze $k-1$.
(4), (5) To je tvrzení Věty 3.6.

□

Chceme se ještě přesvědčit, že indukovaná orientace na kraji plochy nezávisí na volbě parametrizace. Nejdříve si dokážeme přípravné tvrzení o orientacích na vektorových prostorech.

Lemma 4.4. *Nechť* W *je vektorový prostor se skalárním součinem a ortonormální bazí*

$$A = \{w, v_1, \dots, v_{k-1}\}.$$

Baze $B = \{u, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ *prostoru* W *je souhlasně orientovaná jako baze* A *právě když* $\langle u, w\rangle > 0$.

Důkaz.
Baze A je ortonormální, tedy pro libovolný vektor $u \in W$ platí

$$u = \langle u, w\rangle w + \sum_{i=1}^{k-1} \langle u, v_i\rangle v_i.$$

Matice přechodu M od A k B má tedy blokový tvar

$$M = \begin{pmatrix} \langle u, w\rangle & * \\ 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

kde $*$ je vektor v $\mathbb{R}^{k-1}$ a $\mathbb{I}_{n-1}$ je jednotková $(n-1) \times (n-1)$ matice. Zřejmě je $\det M > 0$ právě když $\langle u, w\rangle > 0$.

Lemma 4.5. *Indukovaná orientace* $T_x\partial M$ *nezávisí na volbě okolí* $\mathcal{U}$ *a parametrizace* φ *s vlastností*

$$\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^k_{\leqslant}) = \mathcal{U} \cap M.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ je ortonormální baze $T_x\partial M$. *Vnější normála* k M v bodě x je definována jako vektor $w \in T_xM$ kolmý k $T_x\partial M$, pro který existuje křivka $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $c(0) = x, c'(0) = w$ pro kterou $c(t) \notin M$ pro malá kladná t. Pro důkaz tvrzení lemmatu stačí dokázat, že pro libovolnou parametrizaci φ a okolí $\mathcal{U}$ s vlastností

$$\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^k_{\leqslant}) = \mathcal{U} \cap M \tag{4.2}$$

jsou baze $\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ a $\{w, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ souhlasně orientované.
Vektor $\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}$ je tečný ke křivce $d(t) = \varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + t)$ Z vlastností (4.2) parametrizace φ plyne, že také pro křivku d platí, že $d(0) = x$ a $d(t) \notin M$ pro malé kladné t. Z toho pak plyne, že $\langle d(t) - d(0), w\rangle \geqslant 0$ a $\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, w\rangle \geqslant 0$. Protože φ je regulární, jsou parciální derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}, j = 1, \dots k$ lineárně nezávislé, a tedy $\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, w\rangle \neq 0$. Tedy $\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, w\rangle > 0$ a je možné použít Lemma 4.4 □

Poznámka. To co jsme ukázali v předchozích lemmatech je ve skutečnosti ekvivalentní definice indukované orientace pomocí vnější normály. Je možné ji formulovat takto.
Nechť M je orientovaná plocha s krajem ∂M. Řekneme, že vektor $w \in T_x M, x \in M$ je **vektor vnější normály v bodě** x, pokud je vektor w kolmý na $T_x \partial M$ a pokud existuje křivka $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $c(0) = x, c'(0) = w$ pro kterou $c(t) \notin M$ pro malá kladná t.
Ortonormální baze $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ prostoru $T_x \partial M$ je kladně oritentovaná vzhledem k indukované orientaci, právě když baze $\{w, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ je kladně orientovaná baze $T_x M$.

2. Gaussova věta pro poloprostor

Lemma 4.6 (Gaussova věta pro poloprostor)**.** *Nechť* $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\leqslant} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n < 0\}$ *je otevřený poloprostor s kanonickou orientací a* $\partial \mathbb{R}^n_{\leqslant} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ *jeho hranice s indukovanou orientací. Pak pro každou diferenciální formu* $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *s kompaktním nosičem platí*

$$\int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\leqslant}} d\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^n_{\leqslant}} \omega.$$

Důkaz. Každá diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ s kompaktním nosičem má tvar

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \omega_j(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots dx_n$$

kde stříška znamená, že příslušný činitel je v součinu vynechaný. Funkce ω_j jsou spojitě diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem.
Pak $d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ a levá strana tvrzení věty je podle definice rovna

$$\int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\leqslant}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Funkce $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}$ mají kompaktní nosič v $Int\, \mathbb{R}^n_{\leqslant}$, proto jsou podle Fubiniho věty a věty o primitivní funkci $\int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\leqslant}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}$ rovny nule pro všechny $j \neq n$.
Orientace poloprostoru $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ je zúžení kanonické orientace $\mathbb{R}^n$ dané kanonickou volbou souřadnic $x_1, \dots, x_n$ a za kladně orientovanou parametrizaci můžeme vzít identitu $\varphi = Id$.
Pro poslední sčítanec dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Kraj $\partial\, \mathbb{R}^n$ poloprostoru má v každém bodě jako bazi tečného prostoru kanonické vektory

$$\{e_1, \dots, e_{n-1}\}.$$

Parciální derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ je rovna vektoru e_n. Podle definice je baze $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ positivně (resp.) negativně orientovaná vzhledem k indukované orientaci právě když $\{e_n, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ je positivně (resp.) negativně orientovaná vzhledem k dané orientaci na $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_{\leqslant}$. Ale ta poslední baze je positivně, resp. negativně orientovaná podle znaménka $(-1)^{n-1}$. V integrálu $\int_{\partial \mathbb{R}^n_{\leqslant}} \omega$ dá nenulový příspěvek jen člen s $j = n$, a pro něj vzhledem k indukované orientaci vyjde také

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

□

3. Stokesova věta

Lemma 4.7 (Stokesova věta.)**.** *Předpokládejme, že* M *je orientovaná plocha dimenze* k *s krajem,* $M = \operatorname{Int} M \cup \partial M$*, a* ∂M *má indukovanou orientaci. Nechť* $M \subset \Omega$*, kde* Ω *je otevřená podmnožina* $\mathbb{R}^n$ *a* $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ *taková, že* $M \cap \operatorname{supp} \omega$ *je kompaktní množina.*

Pak

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\operatorname{Int} M} d\omega.$$

Důkaz. Podle definice plochy s krajem existuje pro každý bod $M \cap \operatorname{supp} \omega$ okolí $\mathcal{U}$ a difeomorfismus Φ na $\mathcal{U}$ takový, že $\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \Phi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^k_{\leqslant}$. Pro inverzi $\Psi = (\Phi)^{-1}$ tedy platí $\Psi(\mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}) = M \cap \mathcal{U}$, kde $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{U})$. Z tohoto pokrytí kompaktní množiny $M \cap \operatorname{supp} \omega$ lze vybrat konečné, a pro něj existuje konečný rozklad jednotky $\{f_j\}_1^N$, který respektuje toto pokrytí. Můžeme zvolit označení tak, že $\operatorname{supp} f_j \subset \mathcal{U}_i$. Postupně budeme upravovat výraz $\int_{\operatorname{Int} M} d\omega$.
Nejdříve použijeme to, že $\sum_j f_j = 1$ na $M \cap \operatorname{supp} \omega$, a to, že $\operatorname{supp} f_j \subset \mathcal{U}_j$. Tedy

$$\int_{\operatorname{Int} M} d\omega = \int_{\operatorname{Int} M} d\left(\sum_j f_j \omega\right) = \sum_j \int_{\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_j} d(f_j \omega).$$

Difeomorfismus Ψ_j indukuje parametrizaci $\varphi_j = \Psi_j \circ \iota$ plochy $\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_j$, kde $\iota : \operatorname{Int} \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_j \to \mathbb{R}^n$ je standardní vnoření. Pak tedy podle definice integrálu z diferenciální formy dostaneme tedy

$$\sum_j \int_{\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_j} d(f_j \omega) = \sum_j \int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_j} (\iota^* \circ \Psi_j^*(d(f_j \omega)) = \sum_j \int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_j} d(\iota^* \circ \Psi_j^*(f_j \omega)).$$

Na každý sčítanec můžeme nyní použít Gaussovu větu pro podprostor a dostaneme

$$\sum_j \int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_j} d(\iota^* \circ \Psi^*(f_j \omega)) = \sum_j \int_{\partial \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_j} \kappa^* \circ \iota^* \circ \Psi^*((f_j \omega) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_j} \kappa^* \circ \iota^* \circ \Psi^*((f_j \omega).$$

kde κ je vnoření $\partial \mathbb{R}^k_{\leqslant}$ do $\mathbb{R}^k$. Nakonec použijeme fakt, že zobrazení $\Psi \circ \iota \circ \kappa$ je parametrizace kousku kraje $\partial M \cap \mathcal{U}_j$ a použitím definice integrálu z diferenciální formy dostaneme konečně

$$\sum_j \int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^k_{\leqslant} \cap V_j} \kappa^* \circ \iota^* \circ \Psi^*(f_j \omega). = \sum_j \int_{\partial M \cap \mathcal{U}_j} f_j \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

$\square$

4. Stokesova věta pro plochy se skoro hladkou hranici.

Stokesova věta pro plochy s (hladkým) krajem nestačí, je mnoho standardních příkladů, kdy je Gaussova věta o divergenci potřeba pro oblasti, její hranice není hladká, jako jsou například krychle, kužely, válce, a podobně. Proto si teď rozšíříme třídu ploch o plochy, které budeme nazývat plochy se skoro hladkou hranicí. Tyto plochy mají také svůj model, kterým je kvadrant a jeho hranice. Zavedeme si nyní příslušné označení.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & = & \{u \in \mathbb{R}^k | u_j \leqslant 0, \ldots, u_k \leqslant 0\}, & \text{kvadrant} \\
\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & = & \{u \in \mathbb{R}^k | u_j < 0, \ldots, u_k < 0\}; & \text{vnitřek kvadrantu} \\
\partial^\ell \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & = & \{u \in \mathbb{R}^k | u_\ell = 0, u_i < 0, i = j, \ldots, k,\ i \neq \ell\} & \ell\text{-tá stěna} \\
\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & = & \cup_{\ell=j}^k \partial^\ell \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & \text{sjednocení všech stěn} \\
\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & \supset & \operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cup \partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} & \text{ve sjednocení nejsou singulární části kraje}
\end{array}$$

Připomeňme si, že plochy dimenze k byly definovány jako obrazy otevřených podmnožin v $\mathbb{R}^k$ pomocí regulárního zobrazení φ. Otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^k$ je zde elementární příklad a vzor plochy dimenze k. Podobně jsme definovali plochy s krajem, pro ně byl elementární příklad a vzor otevřená podmnožina poloprostoru $\mathbb{R}^k_{\leqslant}$, což je podle definice průnik otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^k$ s poloprostorem $\mathbb{R}^k_{\leqslant}$. Stejně budeme definovat plochu se skoro hladkou hranicí, tady bude elementárním příkladem a vzorem kvadrant nějakého typu a hladká část kraje bude sjednocení stěn nejvyšší dimenze tohoto kvadrantu.

Definice 4.8. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je* **plocha dimenze** k **se skoro hladkým krajem,** *pokud pro každý bod $x \in M$ existuje otevřené okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ bodu x, přirozené číslo $j < k$, a parametrická plocha $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ taková, že*

$$\varphi(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}) = \mathcal{U} \cap M. \tag{4.3}$$

Mohou teď nastat tyto případy:
(1) Body množiny $\varphi(\mathcal{O} \cap \operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant})$ jsou regulární body plochy dimenze k, tyto body budeme nazývat **vnitřní body** *plochy M. Množinu všech vnitřních bodů plochy M nazveme* **vnitřek plochy** *M a označíme ji symbolem* $\operatorname{Int} M$.
(2) Body množiny $\varphi(\mathcal{O} \cap \partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant})$ budeme nazvat **hladké body kraje plochy** *M. Množinu všech hladkých bodů kraje plochy M nazveme* **hladký kraj plochy** *M a označíme ji symbolem $\partial^* M$.*
Orientace plochy M **dimenze** k **se skoro hladkým krajem** *je definována jako orientace jejího vnitřku* $\operatorname{Int} M$. *Je-li M orientovaná a $x \in \partial M$, existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x a parametrizace φ s vlastností (4.1), která je souhlasně orientovaná v bodech plochy* $\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}$ *s danou orientací* $\operatorname{Int} M$ *a definuje orientaci na ploše $M' = \varphi(\mathcal{O})$.*
Pro orientovanou plochu M se skoro hladkým krajem definujeme indukovanou orientaci plochy $\partial^* M$ následujícím způsobem. Nechť $x \in \partial^* M$, pak podle definice existují okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, přirozená čísla $j, \ell; j \leqslant \ell \leqslant k$ a parametrizace φ na $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ takové, že

$$\varphi(\mathcal{O} \cap \partial^{\ell} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}) = \mathcal{U} \cap M.$$

Je-li M orientovaná, pak můžeme zvolit parametrizaci φ souhlasně orientovanou s orientací $\operatorname{Int} M$. *Řekneme, že baze $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ prostoru $T_x(\partial^* M)$ je kladně (resp. záporně) orientovaná vůči indukované orientaci, pokud je baze $\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_\ell}, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ kladně (resp. záporně) orientovaná baze prostoru $T_x M'$.*

5. Gaussova věta pro kvadrant

Lemma 4.9 (Gaussova věta pro kvadrant)**.** *Nechť* $\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$ *je vnitřek kvadrantu*

$$\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} = \{x \in \mathbb{R}^k | x_j \leqslant 0, \dots, x_k \leqslant 0\}$$

s kanonickou orientací a $\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$ je jeho hladká část kraje s indukovanou orientací. Pak pro každou diferenciální formu $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ s kompaktním nosičem platí

$$\int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}} d\omega = \int_{\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}} \omega = \sum_{\ell=j}^{k} \int_{\partial^{\ell} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}} \omega.$$

Důkaz. Každá diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ s kompaktním nosičem má tvar

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j; \; \alpha_j = (-1)^{j-1} \omega_j(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots dx_k$$

kde stříška znamená, že příslušný činitel je v součinu vynechaný. Funkce ω_j jsou spojitě diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem.
Pak $d\omega = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ a levá strana tvrzení věty je podle definice rovna

$$L = \int_{\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \ldots dx_k.$$

Funkce $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}$ mají kompaktní nosič v $\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$, proto jsou podle Fubiniho věty a věty o primitivní funkci integrály $\int_{\operatorname{Int}_{\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}$ rovny nule pro všechny ℓ, které nepatří do množiny $\ell = j, \dots, k$.

Orientace poloprostoru $\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$ je zúžení kanonické orientace $\mathbb{R}^k$ dané kanonickou volbou souřadnic $x_1, \dots, x_k$ a za kladně orientovanou parametrizaci můžeme vzít identitu $\varphi = Id$.

Pro sčítance odpovídající indexům $\ell = j, \dots, k$ dostaneme

$$\sum_{\ell=j}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_\ell}{\partial x_\ell} dx_\ell \right) dx_1 \dots \widehat{dx_\ell} \dots dx_k =$$

$$= \sum_{\ell=j}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_\ell(x_1, \dots, x_{\ell-1}, 0, x_{\ell+1}, \dots, x_k, 0, \dots, 0) dx_1 \dots \widehat{dx_\ell} \dots dx_k$$

ℓ-tá stěna kvadrantu $\partial^\ell \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$ má v každém bodě jako bazi tečného prostoru kanonické vektory $\{e_1, \dots, e_{\ell-1}, e_{\ell+1}, \dots, e_k\}$. Parciální derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}$ je rovna vektoru e_ℓ. Podle definice je baze $\{e_1, \dots, e_{\ell-1}, e_{\ell+1}, \dots, e_k\}$ positivně (resp.) negativně orientovaná vzhledem k indukované orientaci právě když $\{e_\ell, e_1, \dots, e_{\ell-1}, e_{\ell+1}, \dots, e_k\}$. je positivně (resp.) negativně orientovaná vzhledem k dané orientaci na $\operatorname{Int} \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$. Ale ta poslední baze je positivně, resp. negativně orientovaná podle znaménka $(-1)^{\ell-1}$. V integrálu $\int_{\partial^\ell \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}} \sum_{i=j}^{k} \alpha_i$ dá nenulový příspěvek jen člen s $i = \ell$, a pro něj vzhledem k indukované orientaci vyjde pravá stran dokazovaného vztahu také rovna

$$\int_{\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}} \omega = \sum_{\ell=j}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_\ell(x_1, \dots, x_{\ell-1}, 0, x_{\ell+1}, \dots, x_k, 0, \dots, 0) dx_1 \dots \widehat{dx_\ell} \dots dx_k$$

□

Lemma 4.10 (Stokesova věta.). *Předpokládejme, že M je orientovaná plocha dimenze k se skoro hladkým krajem, $M \supset \operatorname{Int} M \cup \partial^* M$, a že $\partial^* M$ má indukovanou orientaci. Nechť $M \subset \Omega$, kde Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $M \cap \operatorname{supp} \omega$ je kompaktní množina. Pak*

$$\int_{\partial^* M} \omega = \int_{\operatorname{Int} M} d\omega.$$

Důkaz. Důkaz je zcela obdobný důkazu Stokesovy věty pro plochy dimenze k s hladkým krajem. Podle definice plochy se skoro hladkým krajem existuje pro každý bod $M \cap \operatorname{supp} \omega$ okolí $\mathcal{U}$ a difeomorfismus Φ na $\mathcal{U}$ takový, že $\Phi(\mathcal{U} \cap M) = \Phi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$. Pro inverzi $\Psi = (\Phi)^{-1}$ tedy platí $\Psi(\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap \mathcal{V}) = M \cap \mathcal{U}$, kde $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{U})$. Z tohoto pokrytí kompaktní množiny $M \cap \operatorname{supp} \omega$ lze vybrat konečné, a pro něj existuje konečný rozklad jednotky $\{f_\ell\}_{\ell=1}^{N}$, který respektuje toto pokrytí. Můžeme zvolit označení tak, že $\operatorname{supp} f_\ell \subset \mathcal{U}_\ell$. Postupně budeme upravovat výraz $\int_{\operatorname{Int} M} d\omega$. Nejdříve použijeme to, že $\sum_\ell f_\ell = 1$ na $M \cap \operatorname{supp} \omega$, a to, že $\operatorname{supp} f_\ell \subset \mathcal{U}_\ell$. Tedy

$$\int_{\operatorname{Int} M} d\omega = \int_{\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_\ell} d\left(\sum_\ell f_\ell \omega \right) = \sum_\ell \int_{\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_\ell} d(f_\ell \omega).$$

Difeomorfismus $\Psi_\ell = (\Phi_\ell)^{-1}$ indukuje parametrizaci $\varphi_\ell = \Psi_\ell \circ \iota$ plochy $\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_\ell$, kde

$$\iota : \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_\ell \to \mathbb{R}^k$$

je standardní vnoření. Pak tedy podle definice integrálu z diferenciální formy dostaneme

$$\sum_\ell \int_{\operatorname{Int} M \cap \mathcal{U}_\ell} d(f_\ell \omega) = \sum_\ell \int_{\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_\ell} (\iota^* \circ \Psi_\ell^*(d(f_\ell \omega)) = \sum_\ell \int_{\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_\ell} d(\iota^* \circ \Psi_\ell^*((f_\ell \omega)).$$

Na každý sčítanec můžeme nyní použít Gaussovu větu pro kvadrant a dostaneme

$$\sum_\ell \int_{\mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_\ell} d(\iota^* \circ \Psi_\ell^*((f_\ell \omega)) = \sum_\ell \int_{\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap \mathcal{V}_\ell} \kappa^* \circ \iota^* \circ \Psi_\ell^*((f_\ell \omega)$$

kde κ je vnoření $\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant}$ do $\mathbb{R}^k$. Nakonec použijeme fakt, že zobrazení $\Psi_\ell \circ \iota \circ \kappa$ je parametrizace kousku kraje $\partial M \cap \mathcal{U}_\ell$ a použitím definice integrálu z diferenciální formy dostaneme konečně

$$\sum_\ell \int_{\partial^* \mathbb{R}^{j,k}_{\leqslant} \cap V_\ell} \kappa^* \circ \iota^* \circ \Psi^*(f_\ell \omega). = \sum_\ell \int_{\partial M \cap \mathcal{U}_\ell} f_\ell \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

□

KAPITOLA 5

Integrál prvního druhu přes plochy dimenze k

Nechť $k \leqslant n$ jsou přirozená čísla.
V tomto oddíle budeme předpokládat, že $k \geqslant 1$. Mimo integrály z diferenciálních forem (v některých případech nazývané integrály druhého druhu) existuje také možnost definovat integrál přes plochy dimenze k z funkcí. Klíčový pojem je tak zvaná Grammova matice, kterou si nyní zavedeme.

Definice 5.1. *Nechť $k \geqslant 1$. Nechť M je plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$ s parametrizací $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a $\varphi(\mathcal{O}) = M$.*
Grammova matice $G = (G_{ij})_{i,j=1}^k$ *je definována vztahem*

$$G_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \rangle,$$

dále definujeme **Grammův determinant** $g = \det G$.
Grammova matice G je positivně definitní, tedy její determinant g je nezáporný. Číslo $\sqrt{g}$ je tedy reálné a nezáporné.

Geometrický význam Grammova determinantu je velmi dobře známý. Pokud V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle .,. \rangle$ a $v_1, \dots v_n \in V$, Pak objem rovnoběžnostěnu generovaného těmito vektory je roven odmocnině z determinantu Grammovy matice $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Definice 5.2. *Nechť $k \geqslant 1$.*
(1) Nechť $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ je parametrizace plochy $M = \varphi(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená podmnožina. Je-li $f$funkce spojitá na ploše M, pak definujeme **integrál prvního druhu** $\int f\, dS$ *předpisem*

$$\int_M f\, dS = \int_{\mathcal{O}} f(\varphi(u)) \sqrt{g}(u) du,$$

pokud integrál existuje jako Lebesgueův integrál.
V případě, že plocha M má dimenzi 1, tj. pokud je to křivka, pak se integrál tradičně značí $\int_M f\, ds$.
(2) Je-li M plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$, f spojitá funkce na M, a je-li $M \cap \operatorname{supp} f$ kompaktní množina, pak nejprve zvolíme otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ množiny $M \cap \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n$ s vlastností, že pro každé $\alpha \in A$ existuje parametrizace φ_α množiny $M \cap U_\alpha$ na množině $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathbb{R}^k$. Pak zvolíme rozklad jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ pro množinu $M \cap \operatorname{supp} f$, který respektuje zvolené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a definujeme

$$\int_M f dS = \sum_{j=1}^N \int_M f_j f\, dS.$$

Budeme se chtít přesvědčit, že integrál 1. druhu je nezávislý na volbách použitých při jeho definici. První informace se týká toho, jak se integrand v integrálu 1. druhu transformuje při změně parametrizace.

Lemma 5.3. *Nechť $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ a $\varphi' : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(\mathcal{O}) = \varphi'(\mathcal{O}')$ jsou dvě parametrizace plochy dimenze k, pak existuje difeomorfismus $\alpha : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ takový, že $\varphi = \varphi' \circ \alpha$. Navíc platí*

$$\sqrt{g} = (\sqrt{g'} \circ \alpha) |\det J\alpha|.$$

Důkaz. Označme $u = (u_1, \dots . u_k)$ souřadnice na $\mathcal{O}$ a $u' = (u'_1, \dots . u'_k)$ souřadnice na $\mathcal{O}'$. Funkce $u'_j = \alpha_j(u)$ poskytují souřadnicový popis difeomorfismu α a $J\alpha = (\frac{\partial \alpha_j}{\partial u_k}) = A$ je jeho Jakobián.

Z relace

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial u'_\ell} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial u_i}$$

plyne, že $G = A^t G' A$, a tedy $g = g'(\det A)^2$. Platí tedy tvrzení lemmatu. $\square$

Lemma 5.4. *Nechť $k \geqslant 1$. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je plocha dimenze k, a nechť f je spojitá funkce na M. Předpokládejme, že $\varphi : \mathcal{O} \to M$ a $\varphi' : \mathcal{O}' \to M$ jsou dvě kladně orientované parametrizace M. Pak*

$$\int_{\mathcal{O}} (f \circ \varphi)\sqrt{g} = \int_{\mathcal{O}'} (f \circ \varphi')\sqrt{g'}$$

Důkaz.
Tvrzení je snadným důsledkem Lemmatu 5.3 a věty o substituci pro Lebesgueův integrál. $\square$

Lemma 5.5. *Nechť $k \geqslant 2$. Je-li M plocha dimenze k v otevřené množině $\mathbb{R}^n$, f spojitá funkce na M, a je-li $M \cap \operatorname{supp} f$ kompaktní, pak $\int_M f dS$ nezávisí ani na volbě otevřeného pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ množiny M, ani na volbě rozkladu jednotky $\{f_j\}_{j=1}^N$ na množině $M \cap (\operatorname{supp} \omega)$ respektující pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

Důkaz. Při odůvodnění tohoto tvrzení se postupu zcela analogicky jako při důkazu Lemmatu 3.20.

$\square$

KAPITOLA 6

II. část Plochy v $\mathbb{R}^3$.

KAPITOLA 7

Plochy v $\mathbb{R}^3$.

1. Úvod

Hlavním tématem druhé části této přednášky je klasická geometrie křivek a ploch v $\mathbb{R}^3$. Hlavní zdroje, ze kterých vyrůstala diferenciální geometrie, jsou klasická mechanika (pohyb hmotného bodu, jeho rychlost a zrychlení) a geodézie (zeměměřictví, mapy). Počátky sahají zpět do 17. a 18. století (Huyghens, Leibniz, Newton, Euler, Monge). Klíčové postavy té části diferenciální geometrie, o které budeme mluvit, byli v 19. století Gauss, Riemann, Bolyai, Lobačevskij. Nejde tedy o moderní, současnou matematiku, ale o klasické základy, na kterých moderní matematika staví. Moderní zobecnění této části klasické matematiky se týká analogií a zobecnění do vyšších dimenzí. Nejvýznamnější čeští geometři 20. století byli Eduard čech (geometr a topolog) a Václav Hlavatý (jeho jméno nese knihovna v Karlíně).
Jednou z hlavních větví moderní diferenciální geometrie je tzv. Riemannova geometrie, která Einsteinovy poskytla model a matematický nástroj pro jeho obecnou teorii relativity.
Tato část přednášky je velmi blízká k duchu knihy

H. Wilson: Curved spaces. From classical geometry to elementary differential geometry, Cambridge University Press, 2008.
Klasická teorie křivek a ploch v trojrozměrném prostoru je popsána ve studijním textu
J. Rataj: Studijní text k přednášce Geometrie

Tento text obsahuje také teorii křivek (kterou jste měli v minulém semestru). Část týkající se ploch začíná 4. kapitolou.
Základem dobrého pochopení teorie je pro každého propočet mnoha konkrétních příkladů, kterým budou věnována cvičení k přednášce. Nejvíc ovšem pomůže, pokud si je čtenář dokáže spočítat sám. řadu řešených příkladů je možné najít ve skriptech

J. Bureš, K. Hrubčík: Diferenciální geometrie křivek a ploch, Karolinum,

Další příklady jsou obsaženy ve skriptech

L. Boček: Příklady z diferenciální geometrie.
Hodně zajímavostí z historie vývoje geometrie za poslední století a o nedávném vyřešení jednoho z nejznámìjších matematických problémů je možné najít v populární knížce D. O'Shea: Poincarého domìnka, Academia, 2009, která určitì stojí za přečtení.
Cílem druhé části přednášky je seznámit se s klasickou teorií ploch v trojdimenzionálním Eukleidovském prostoru. Je to část matematiky, která je velmi intuitivní, protože lidské vědomí si velmi dobře dokáže představit trojrozměrný prostor a plochy v něm. Neškodí proto si připomenout řadu konkrétních příkladů ploch.Pro pohodlí budeme místo termínu 'plocha dimenze 2' budeme říkat jenom plocha'.

2. Příklady ploch

Klasická teorie ploch v trojdimenzionálním Eukleidovském prostoru je část matematiky, která je velmi intuitivní, protože lidské vědomí si velmi dobře dokáže představit trojrozměrný prostor a plochy v něm. Neškodí proto si připomenout řadu konkrétních příkladů ploch.Pro pohodlí budeme místo termínu 'plocha dimenze 2' budeme říkat jenom plocha'.

Příklady.

(1) Sféra: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(2) Elipsoid: $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + = 1\}$

(3) Torus: $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2;\ a > b > 0,$

(4) Jednodílný hyperboloid: $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + = 1\}$

(5) Graf funkce:
(a) eliptický paraboloid $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
(b) hyperbolický paraboloid $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
(c) parabolický válec $z = \frac{x^2}{a^2}$
(6) Rotační plochy (https://slideplayer.cz/slide/2791478/)
(a) Rotační hyperboloid - Ještěd, Temelín (chladicí věže)
(b) Rotační paraboloid - satelitní antény

(7) Obrazy pomocí rotací a posunutí.

3. Mapy, atlasy

V této druhé části přednášky se budeme zabývat výhradně plochami dimenze 2 v Eukleidovském prostouru $\mathbb{R}^3$. Pro stručnost tedy budeme tedy pro tyto plochy používat název plocha.

Definice 7.1. *Nechť $S \subset \mathbb{R}^3$ je plocha, pak se každá regulární parametrizace $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ nazývá* **mapa** *na ploše S. Obor hodnot mapy $\mathbf{p}(\mathcal{O})$ označíme symbolem $\langle \mathbf{p} \rangle$. Soubor map, které pokrývají plochu S se nazývá* **atlas** *na ploše S.*
Jsou-li $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvě mapy a je-li množina $M = \mathbf{p}(\mathcal{O}) \cap \mathbf{p}'(\mathcal{O}')$ neprázdná, pak budeme zobrazení $\varphi = (\mathbf{p}')^{-1} \circ \mathbf{p} : \mathbf{p}^{-1}(M) \to: \mathbf{p}')^{-1}(M)$ nazývat **přechodové zobrazení** *mezi těmito dvěma mapami.*

Poznámka. Množina M je zřejmě plocha, která má dvě různé parametrizace $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}'$ (zúžené na odpovídající podmnožiny svých definičních oborů). Podle Věty 3.7 je tedy přechodové zobrazení difeomorfismus.
Atlas dané plochy S není určen jednoznačně. Pro popis plochy je vhodné si zvolit atlas, který má konečně mnoho (pokud možno co nejméně) map. Jak uvidíme na příkladech, je takových možností vždy mnoho. Na volbě atlasu nezáleží, ze dvou atlasů můžeme jejich sjednocením vyrobit větši atlas, které oba předchozí atlasy obsahuje. Sjednocení všech atlasů je maximální možný atlas, který má ovšem přiliš mnoho map (nekonečně mnoho), s každou mapou tam při nejmenším leží všechny její restrikce na otevřené podmnožiny jejího definičního oboru. z Věty **??** (2) plyne, že přechodové zobrazení libovolných dvou map je reparametrizací.
Budeme zpravidla definovat plochu pomocí výběru jednoho atlasu. Kdykoliv ale k němu můžeme přidat jakoukoliv další mapu, bude-li třeba.

Příklady.

(1) Rovina.
Je-li R rovina v $\mathbb{R}^3$ a zvolíme-li její tři body $A, B, C \in R$ v obecné poloze, a jeden její atlas se skládá jen z jedné mapy

$$\mathbf{p}(u, v) = A + u(B - A) + v(C - A)$$

(2) Sféra.
Sféra S_2 je dána rovnicí

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Jeden z atlasů na sféře je dán 6 mapami tvaru

$$\mathbf{p}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, \mathcal{O} = \{(u, v) | u^2 + v^2 < 1\}$$

Jiný atlas, který má jen dvě mapy, se získá pomocí stereografické projekce ze severního a jižního pólu sféry. Je-li S severní pól a je-li R rovina $x_3 = 0$, pak úsečka $SA, A \in S_2 - \{S\}$ spojující severní pól s bodem A sféry protíná rovinu R v jediném bodě $X(A)$. Zobrazení $A \mapsto X(A)$ je stereografická

projekce sféry bez bodu S na rovinu R. Rovina zabalí sféru celou, kromě jediného bodu. Příslušné inverzní zobrazení je pak mapa. Napište si vzorce pro tuto mapu, pro mapu odpovídající projekci z jižního pólu a pro příslušné přechodové zobrazení! Ověřte, že jsou to opravdu mapy!
(3) Jako cvičení si sestrojte nějaký atlas na toru (který je zadán pomocí jedné rovnice v $\mathbb{R}^3$ jako v Příkladu (5) v úvodu).
(4) Standarní kužel $K = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ má vrchol v počátku. Je lehké najít mapu, která pokrývá kužel bez jedné přímky:

$$\mathbf{p}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r), r \neq 0, \theta \in (0, 2\pi)$$

a druhou (otočenou) mapu, které pak tvoří atlas pro kužel bez vrcholu. Ale neexistuje mapa, která by pokrývala okolí vrcholu. To je vidět z toho, že pro libovolně malé okolí U počátku 0 v $\mathbb{R}^3$ je množina $U \cap K - \{0\}$ nesouvislá, zatímco její vzor v libovolné mapě je nutně množina souvislá. Ty se ovšem na sebe nemohou žádným homeomorfismem zobrazit. Kužel tedy není plocha ve smyslu naší definice, kužel bez vrcholu plochou je.
(5) Graf hladké funkce je vždy plocha, která má atlas skládající se z jedné mapy.
Plochy v $\mathbb{R}^3$ se nejčastěji zadávají jednou rovnicí

$$S = \{(x_1, x_2, x_3)|f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Pro plochy platí následující speciální případ Věty **??**

Věta 7.2. *Předpokládejme, že f hladká funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a definujme množinu S rovnicí*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Pokud platí podmínka

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \neq 0$$

na celé množině S, pak S je plocha.

KAPITOLA 8

První fundamentální forma.

1. První fundamentální forma plochy.

Pro každý bod x na ploše S jsme definovali tečný prostor T_xS všech tečných vektorů v daném bodě $x \in S$.
Všimněte si, že tečný prostor je podprostor v $\mathbb{R}^3$, tj. vektory jsou umístěny v počátku, ale vektory z tečného prostoru T_xS k ploše si obvykle kreslím umístěné do bodu x. Tento rozdíl je možné formalizovat tím, že by podprostor T_xS byl definován jako koncové body tečných vektorů umístěných do bodu x, byl by to afinní podprostor v $\mathbb{R}^3$ (tj. podprostor, posunutý do bodu mimo počátek) a T_xS by bylo jeho zaměření (tj. množina koncových bodů tečných vektorů, umístěných do počátku).
Pro potřebné výpočty na plochách typicky používáme mapy na dané ploše k tomu, abychom mohli používat standardní analýzu v prostoru parametrů $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. Jak je popsáno v následující definici, výběr mapy $\mathbf{p}$ na ploše S zároveň automaticky indukuje mapu na tečném prostoru T_xS pro každý bod $x \in \mathbf{p}(\mathcal{O}) \subset S$.

Definice 8.1 (Indukovaná mapa na T_xS.)**.** *Nechť* $\mathbf{p}$ *je mapa na* S *a* $s = \mathbf{p}(u), u = (u^1, u^2)$ *je bod v jejím obraze. Pak zobrazení* $d\mathbf{p}_u : \mathbb{R}^2 \to T_sS$ *je lineární izomorfismus, který definuje (indukovanou) globální mapu na* T_sS*. Obrazem elementu* $a \in \mathbb{R}^2$ *je vektor* $a_1\mathbf{p}_{u^1} + a_2\mathbf{p}_{u^2}$*, kde* $\mathbf{p}_{u_1}$*, resp.* $\mathbf{p}_{u_2}$ *označuje parciální derivace* $\mathbf{p}$ *podle* u^1*, resp.* u^2 *v bodě* u*.*

Definice 8.2. *Skalární součin dvou vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *označíme* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$*. Nechť* x *je bod plochy* S*. Bilineární formu*

$$I_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

nazveme **první fundamentální forma plochy S v bodě x.**
Vzor I_x *při zobrazení* $d\mathbf{p}_u$ *je bilineární forma na* $\mathbb{R}^2$*, kterou budeme značit* g_u *:*

$$g_u(a, b) = I_x(d\mathbf{p}_u(a), \mathbf{p}_u(b));\ a, b \in \mathbb{R}^2.$$

Matice této bilineární formy (označíme ji stejným symbolem g_u*) má tvar*

$$g_u = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{u^1} \cdot \mathbf{p}_{u^1} & \mathbf{p}_{u^1} \cdot \mathbf{p}_{u^2} \\ \mathbf{p}_{u^1} \cdot \mathbf{p}_{u^1} & \mathbf{p}_{u^2} \cdot \mathbf{p}_{u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Tradičně se první fundamentální forma symbolicky zapisuje ve tvaru

$$g_{11}d(u^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}d(u^2)^2$$

nebo

$$E(du^1)^2 + 2Fdu^1du^2 + G(du^2)^2$$

Pro libovolný vektor $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *definujeme hodnotu* $I(A)$ *první fundamentální formy*

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2.$$

Poznámka.
První fundamentální formu I jsme definovali jako kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$. Víme, že zvolená mapa $\mathbf{p}$ na ploše S určuje zároveň souřadnice na tečném prostoru v daném bodě P. Každému vektoru se přiřadí jeho souřadnice v bazi $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$. První fundamentální formu je možné, pomocí tohoto ztotožnění, chápat také jako kvadratickou formu v tečném prostoru. Hodnota $I(v)$ pro $v \in T_PS$ je pak prostě délka tohoto vektoru v $\mathbb{R}^3$! Budeme používat stejný symbol I pro obě kvadratické formy.

Předchozí výpočet ukazuje, že pokud počítáme délku křivky ve zvolených souřadnicích, stačí nám znát první fundamentální formu I, resp. její koeficienty E, F, G. Množina $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ je tedy model pro plochu a první fundamentální forma I umožnuje v tomto modelu počítat délky (resp. úhly nebo plochy).

Příklad 8.3. *(1) Pokud je* $\mathbf{p} = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ *parametrizace roviny, pak* $\mathbf{p}_u = \mathbf{b}, \mathbf{p}_v = \mathbf{c}$ *a tedy*

$$E = |\mathbf{b}|^2,\ F = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ G = |\mathbf{c}|^2.$$

Pokud $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, *pak* $F = 0$. *Pokud* $|\mathbf{b}| = \mathbf{c}| = 1$, *pak* $E = G = 1$.
(2) Jsou-li θ, φ *obvyklé sférické souřadnice na jednotkové sféře, pak* $E = 1, F = 0$ *a* $G = \cos^2 \theta$.
(3) Zvolte si parametrizaci válce a spočítejte si tvar první fundamentální formy pro válec.
(4) Parametrický popis standardního kuželu je

$$\mathbf{p}(v, \varphi) = (v \cos \varphi, v \sin \varphi, v);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Příslušná první fundamentální forma je rovna $2dv^2 + v^2 d\varphi^2$.

KAPITOLA 9

Druhá fundamentální forma.

1. Orientace pomocí normály.

Definice 9.1. *Je-li T_xS tečný prostor v bodě x k ploše S, pak existuje jednotkový vektor $\mathbf{N}$ tak, že*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0.\}$$

Vektor $\mathbf{N}$ je určen jednoznačně až na znaménko a nazývá se vektor jednotkové normály k ploše S v bodě s.
Je-li $\mathbf{p}$ mapa na S, pak je normálový vektor $\mathbf{N}$ jednoznačně předpisem

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

Dvě mapy pro tentýž bod mají stejnou jednotkovou normálu právě když determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě je kladný. V tom případě nazýváme tyto mapy souhlasně orientovanými. Pokud je determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě záporný, nazveme mapy opačně orientovanými.
Atlas plochy nazveme orientovaným atlasem, pokud jsou všechny jeho mapy po dvou souhlasně orientované. Orientovaná plocha S je plocha s orientovaným atlasem.
Orientovatelná plocha je plocha, pro kterou existuje orientovaný atlas.

Zkuste si najít příklad plochy, která není orientovatelná. Najděte tečné prostory a vektory jednotkové normály pro příklady ploch, které jsme si uváděli. Ukažte, že jsou všechny orientovatelné.
Zvolím-li si mapu na orientovatelné ploše, pak mohu vzít maximální orientovaný atlas jako sjednocení všech souhlasně orientovaných map s vybraným atlasem. Podobně lze vzít množinu všech opačně orientovaných map, které opět dohromady tvoří orientovaný atlas (ověřte!).
Na orientovatelné ploše tedy existují dva disjunktní orientované atlasy, které na ploše zadávají dvě různé (opačné) orientace. Na neorientovatelné ploše žádný orientovaný atlas neexistuje.

2. Hladké zobrazení mezi plochami, tečné zobrazení.

sectionHladké zobrazení mezi plochami, tečné zobrazení.

Definice 9.2. *Nechť S a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a F zobrazuje S do $\tilde{S}$. Řekneme, že je zobrazení F hladké v bodě $s \in S$, pokud existuje mapa $(U, \mathbf{p})$ na S obsahující bod s a mapa $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ na $\tilde{S}$, obsahující bod $f(s)$ tak, že zobrazení $(\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ je hladké v bodě $(\mathbf{p})^{-1}(s)$.*
Zobrazení F je hladké na S, pokud je hladké v každém bodě S. Zobrazení F je difeomorfismus S na $\tilde{S}$, pokud je F vzájemně jednoznačné a F i F^{-1} jsou hladké na svých definičních oborech.

Cvičení. Rozmyslete si, že definice hladkosti v daném bodě je nezávislá na výběru map ve vzorech a obrazech.

Definice 9.3. *NechťS a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a F zobrazuje S do $\tilde{S}$. Pak pro každý bod $s \in S$ definujeme* **tečné zobrazení**

$$T_sF : T_sS \to T_{f(s)}\tilde{S}$$

následujícím předpisem:
je-li $\mathbf{c}$ na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ regulární křivka, $\mathbf{c}(0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(0) = \mathbf{v} \in T_sS$, pak definujeme

$$T_sF(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(F \circ \mathbf{c})(0) \in T_{f(s)}\tilde{S}.$$

Lemma 9.4. *(1) Zobrazení T_sF je dobře definované, tj. jeho hodnota nezávisí na výběry křivky, jejíž tečný vektor je vektor $s \in T_sS$.*
2) Zobrazení T_sF je lineární.
3) Pokud bod s patří do mapy $(U, \mathbf{p})$ a bod $f(s)$ patří do mapy $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$, pak tyto mapy určují souřadnice vektorových prostorůT_sS a $T_{f(s)}\tilde{S}$ a matice tečného zobrazení T_sF vzhledem k těmto bazím je Jakobiho matice zobrazení $\bar{F} = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ v bodě $\mathbf{p}^{-1}(s)$.

Důkaz
Je-li $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(0)$, pak souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bazi $(\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2})$ v tečném prostoru T_sS jsou složky vektoru $(\dot{d}_1, \dot{d}_2)$, kde $d = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{c}$, $d = (d_1, d_2)$.
Tedy

$$(F \circ \mathbf{c})(t) = (F \circ \mathbf{p})(d_1(t), d_2(t)),$$
$$\frac{d}{dt}\left[(F \circ \mathbf{p}) \circ d\right](0) = \dot{d}_1 \frac{\partial}{\partial u_1}(F \circ \mathbf{p}) + \dot{d}_2 \frac{\partial}{\partial u_2}(F \circ \mathbf{p}).$$

Obraz $T_F(\mathbf{v})$ tedy závisí jen na souřadnicích vektoru $\mathbf{v}$, ne na volbě křivky $\mathbf{c}$ a zobrazení T_F je zřejmě lineární.
Souřadnice obrazu $T_F(\mathbf{v})$ v bazi indukované mapou $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ spočteme takto. Podle definice musíme vypočítat souřadnice obrazůbazových vektorův T_sS vùči bazi v $T_{F(s)}\tilde{S}$. První vektor $\mathbf{v} = \mathbf{p}_{u_1}$ je určen křivkou $d(t) = (t, 0)$ a jeho obraz je

$$T_sF(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial u_1}[F \circ \mathbf{p}_1] = \frac{\partial}{\partial u_1}[\tilde{\mathbf{p}} \circ \bar{F}] = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{u}_1}\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{u}_2}\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial u_1}.$$

Stejně se vypočte obraz druhého vektoru baze.

3. Druhá fundamentální forma plochy, Gaussovo zobrazení.

Definice 9.5. *Označme symbolem S_2 jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$. Předpokládejme, že S je plocha s orientací zadanou pomocí spojitě diferencovatelného zobrazení $\mathbf{N} : S \to S_2$ (tradiční jméno pro $\mathbf{N}$ je Gaussovo zobrazení).*
Pak v každém bodě $s \in S$ existuje tečné zobrazení

$$T_s\mathbf{N} : T_s\,S \to T_{\mathbf{N}(s)}\,S_2.$$

Vzhledem k tomu, že oba tečné prostory $T_s\,S$ a $T_{\mathbf{N}(s)}\,S_2$ jsou kolmé na normálu $\mathbf{N}(s)$, platí $T_s\,S = T_{\mathbf{N}(s)}\,S_2$. Tedy můžeme zobrazení $T_s\,\mathbf{N}$ považovat za zobrazení z $T_s\,S$ do sebe.
Lineární zobrazení

$$W_s := -T_s\,\mathbf{N} : \,T_s\,S \to T_s\,S$$

budeme nazývat Weingartenovo zobrazení.

Definice 9.6. *Předpokládejme, že S je plocha s orientací zadanou pomocí Gaussova zobrazení $\mathbf{N} : S \to S_2$.*
Druhá fundamentální forma II_s plochy S v bodě $s \in S$ je bilineární forma na $T_s\,S$ zadaná předpisem

$$\boxed{II_s(X, Y) := -T_s\mathbf{N}(X) \bullet Y;\; X, Y \in T_s\,S.}$$

Pro jednoduchost označení budeme často index s pro první a druhou fundamentální formu vynechávat a psát jenom I nebo II.

Druhá fundamentální forma je tedy bilineární forma na tečných prostorech. V její definici se nepužívá parametrizace plochy, definice záleží jen na výbětu orientace. Následující lemma říká, že je to symetrická bilineární forma a jak se vypočítá v lokálních souřadnicích. Matice druhé fundamentální formy v mapě už závisí na volbě mapy a je možné explicitně popsat (a je to užitečné cvičení!), jak se změní tato matice při změně mapy pomocí reparametrizace. Pro stručnost a přehlednost budeme zkráceně označovat parciální derivace funkce či vektorového pole spodním indexem, například

$$\mathbf{p}_{u^i} := \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^i}.$$

Lemma 9.7. *Druhá fundamentální forma je symmetrická bilineární forma. To znamená, že pro všechny $X, Y \in T_s S$ platí*

$$II(X,Y) = I(W(X),Y) = I(X,W(Y)) = II(Y,X).$$

Je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa na S obsahující bod $s \in S$, pak má druhá fundamentální forma v lokálních souřadnicích daných bazí $\mathbf{p}_{u^1}, \mathbf{p}_{u^2}$ tvar

$$II(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} h^{ij}\alpha_i\beta_j;\ X = \alpha_1\mathbf{p}_{u^1} + \alpha_2\mathbf{p}_{u^2};\ Y = \beta_1\mathbf{p}_{u^1} + \beta_2\mathbf{p}_{u^2}$$

kde

$$\boxed{h^{ij} = -(\mathbf{N}\circ\mathbf{p})_{u^i}\cdot\mathbf{p}_{u^j} = (\mathbf{N}\circ\mathbf{p})\cdot\mathbf{p}_{u^iu^j}.} \tag{9.1}$$

Důkaz. Postupně provedeme výpočty v dané mapě $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$.
(i) Indukovaná mapa na T_sS.
Mapa $\mathbf{p}$ indukuje mapu na T_sS pomocí tečného zobrazení $T_u\mathbf{p} : \mathbb{R}^2 \to T_sS, s = \mathbf{p}(u), u \in \mathcal{O}$:

$$T_u\mathbf{p} : \alpha \in \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha_1\mathbf{p}_{u^1}(u) + \alpha_2\mathbf{p}_{u^2}(u) \in T_sS.$$

(ii) Gaussovo zobrazení přenesené do souřadnic označíme

$$\mathbf{n} = \mathbf{N}\circ\mathbf{p}$$

vypočteme ho pomocí vztahu

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\mathbf{p}_{u^1}\times\mathbf{p}_{u^2}}{||\mathbf{p}_{u^1}\times\mathbf{p}_{u^2}||},\ \mathbf{p}_{u^i} = \mathbf{p}_{u^i}(u).$$

(iii) Druhou fundamentální formu přeneseme do souřadnic pomocí indukované mapy na tečném prostoru. $h_u(\alpha,\beta) = II(T_u\mathbf{p}(\alpha), T_u\mathbf{p}(\beta))$. Použijeme definici druhé fundamentální formy, indukované mapy a definici tečného zobrazení $T_u\mathbf{n}(\alpha) = \sum_i \mathbf{n}_{u^i}\alpha_i$, a dostaneme

$$h_u(\alpha,\beta) = \sum_{i,j} h_u^{ij}\alpha_i\beta_j;\ h_u^{ij} = -\mathbf{n}_{u^i}\cdot\mathbf{p}_{u^j} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_{u^iu^j}. \tag{9.2}$$

kde se poslední rovnost dostane derivacemi identity (normála je kolmá na vektory v T_sS)

$$\mathbf{n}(u)\cdot\mathbf{p}_{u^i}(u) = 0,\ u \in \mathcal{O}.$$

Symetrie druhé fundamnetální formy plyne z jejího vyjádření v lokálních souřadnicích a ze záměnnosti druhých parciálních derivací.

$\square$

Chování a vlastnosti křivky na dané ploše S jsou shrnuty v následující důležité větě.

Věta 9.8 (Meusnier)**.** *Nechť S je plocha se zadanou orientací pomocí Gaussova zobrazení $N : S \to S_2$ a $c : I \to S$ je regulární křivka s tečným vektorem $\mathbf{t}(s)$ (parametrizovaná obloukem), s nenulovou křivostí $\kappa(s)$, a hlavní normálou $\mathbf{n}(s)$, $s \in S$.*
Pak

$$II(\mathbf{t}(s,\mathbf{t}(s)) = \kappa(s)\,\cos\beta \tag{9.3}$$

kde β je úhel mezi oběmi normálami $\mathbf{N}(c(s))$ a $\mathbf{n}(s)$.
Poznámka. Pokud je křivost křivky c v bodě $s \in S$ nulová, pak $II(c'(s), c'(s)) = 0$.

Důkaz.
Můžeme předpokládat, že existuje mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$, pro kterou $c(I) \subset \mathbf{p}(\mathcal{O})$ Pak existuje regulární křivka $u = \mathbf{p}^{-1}\circ c : I \to \mathcal{O}; c = \mathbf{p}\circ u; u = u(s)$, a tedy $T_{u(s)}\mathbf{p}(u'(s)) = c'(s)$. V souřadnicích daných

mapou tedy platí

$$
\begin{aligned}
II_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) = \\
&= -T_{u(s)}\mathbf{n}(u'(s)) \bullet T_{u(s)}\mathbf{p}(u'(s)) = \\
&= -(\mathbf{n} \circ u)'(s) \bullet c'(s) = \\
&= (\mathbf{n} \circ u) \bullet c''(u) = \\
&= \kappa(s)\mathbf{N}(c(s)) \bullet \mathbf{n}(s) = \\
&= \kappa(s) \cos \beta
\end{aligned}
$$

První rovnost ve výpočtu používá jen definici přenesení druhé fundamentální formy do souřadnic na T_sS indukovaných mapou. Druhá rovnost je dosazení definice druhé fundamentální formy v souřadnicích. Rovnost $T_{u(s)}\mathbf{n}(u'(s)) = (\mathbf{n} \circ u)'(s)$ je tečné zobrazení pro složení dvou zobrazení, z nichž vnitřní zobrazení je křivka, a tedy její tečné zobrazení je obyčejná derivace. Rovnost $T_{u(s)}\mathbf{p}(u'(s)) = c'(s)$ je souřadnicový popis tečného vektoru $c'(s)$. Pro další rovnost je potřeba použít derivace identity $(\mathbf{n} \circ u) \bullet c'(u) = 0$. Frenetovy vzorce říkají, že $c''(u) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$. Poslední rovnost je vzorec pro úhel dvou jednotkových vektorů. □

V lokálních souřadnicích indukovaných mapou $(U, \mathbf{p})$ značíme obvykle matici 1. fundamentální formy symbolem $g_u = (g_u^{ij})$, matici 2. fundamentální formy symbolem $h_u = (h_u^{ij})$, a matici Weingartnerova zobrazení symbolem $w_u = (w^{ij})$. Z definice 2. fundamentální formy pak dostaneme (v daných souřadnicích) vztah

$$h_u = g_u \cdot w_u;\ w_u = (g_u)^{-1} \cdot h_u.$$

Druhá fundamentální forma plochy se často píše v symbolickém tvaru jako kvadratická forma

$$L du_1^2 + 2M du_1 du_2 + N du_2^2;\ L = h^{11}, M = h^{12} = h_{21}, N = h^{22},$$

Diferenciály du_1, du_2 jsou formální výrazy, které nemají samostatný význam a označují jen proměnné v příslušné kvadratické formě.
Dá se odvodit, že druhá fundamentální forma na tečném prostoru se nemění při změně parametrizace, která zachovává orientaci (a tedy nemění $\mathbf{N}$). Na rozdíl od první fundamentální formy, která na parametrizaci zřejmě nezávisí, mění druhá fundamentální forma znaménko při změně parametrizace, která mění orientaci. Druhá fundamentální forma se také nemění, pokud plochu v prostoru posuneme nebo otočíme. Obě tyto tvrzení lze dokázat přímo výpočtem změny formy II při změně orientace nebo při složení parametrizace se shodností (je to užitečné domácí cvičení!).

4. Normálová křivost, normálové řezy.

Zvolme bod s plochy S a jednotkový tečný vektor $\mathbf{v} \in T_PS$, $|\mathbf{v}| = 1$. Jednotková normála $\mathbf{N}$ určuje spolu s vektorem $\mathbf{v}$ rovinu R, která protíná plochu S v křivce $\mathbf{c}$. Tuto křivku nazveme normálovým řezem ve směru $\mathbf{v}$.
Je zřejmé, že průběh křivosti normálového řezu při změně jednotkového tečného vektoru $\mathbf{v}$ vystihuje velmi dobře 'zakřivení' plochy v okolí daného bodu v různých směrech. To vede k následujícím definicím.

Definice 9.9. *Nechť S je orientovaná plocha, $s \in S$ bod na ploše, a $\mathbf{v} \in T_sS$ nenulový tečný vektor.* **Normálová křivost κ_n plochy S v bodě s a ve směru $\mathbf{v}$** *je definována předpisem*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{II(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{I(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

Meusnierova věta říká, že $|\kappa_n(\mathbf{v})|$ rovná křivosti křivky normálového řezu ve směru $\mathbf{v}$. Znaménko závisí na tom, je-li $\mathbf{N} = \mathbf{n}$, nebo $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$. To je tedy geometrická interpretace normálové křivosti. Rovnost platí, pokud $\mathbf{N} = \mathbf{n}$; křivosti jsou opačné, pokud $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$.

4.1. Gaussova a střední křivost. Normálová křivost $\kappa_n(\alpha_1, \alpha_2) = II(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ je spojitá funkce na jednotkové kružnici $\{X \in T_sS|||X|| = 1\}$. Nabývá tedy svého maxima i minima. Hodnoty těchto extrémů a směry ve kterých se nabývají, jsou důležité geometrické informace o dané ploše.

Definice 9.10. *Nechť S je orientovaná plocha. Minimum $\kappa_1(s)$ a maximum $\kappa_2(s)$ normálové křivosti v bodě $s \in S$ se nazývají* **hlavní křivosti** *a odpovídající směry se nazývají* **hlavní směry.**
V každém bodě s orientované plochy S definujeme **Gaussovu křivost** $K = K(s)$ *a* **střední křivost** $H = H(s)$ *vztahy*

$$K(s) = \kappa_1\kappa_2;\ \ H(s) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Definice 9.11. *Bod $s \in S$ orientované plochy se nazývá*
(1) **eliptický**, *pokud $K(s) > 0$; je-li navíc $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$, nazývá se* **kruhový;**
(2) **parabolický,** *pokud $K(s) = 0$; je-li navíc $\kappa_1(s) = \kappa_2(s) = 0$, nazývá se* **planární;**
(3) **hyperbolický**, *pokud $K(s < 0)$.*

Při změně orientace mění druhá fundamentální forma plochy, normálové křivosti, hlavní křivosti a střední křivost znaménko, hlavní směry a Gaussova křivost se nemění. Navíc je zřejmé, že tyto charakteristiky plochy se nemění při posunutí nebo otočení plochy.
Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí je klasická úloha hledání vázaných extrémů funkce. Hledáme extrémy funkce $II(X, X)$s vazbou $I(X, X) = 1$.
Výsledek vypadá takto.

Věta 9.12. *(1) Jsou-li hlavní křivosti různé, jsou odpovídající hlavní směy $X_i, i = 1, 2$ na sebe kolmé a jsou to vlastní vektory pro Weingartenovo zobrazení s vlastními čísly κ_i :*

$$W(X_i) = \kappa_i X_i;\ i = 1, 2$$

Ověření tvrzení v přechozí větě je vidět z výpočtů, které se provádí v souřadnicích daných mapou.

Věta 9.13. *(1) Předpokládejme, že číslo λ je hlavní křivost plochy v bodě $s \in S$ a $(U, \mathbf{p})$ je mapa v okolí bodu s. Pak pro matice $g = g_u$, resp. $h = h_u$ první, resp. druhé fundamentální formy v bodě s vzhledem k dané mapě platí*

$$\det \begin{vmatrix} h^{11} - \lambda g^{11} & h_{12} - \lambda g^{12} \\ h^{21} - \lambda g^{21} & h_{22} - \lambda g^{22} \end{vmatrix} = \det(h - \lambda g) = 0. \tag{9.4}$$

Hlavní směry jsou pak řešení lineární soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} h^{11} - \lambda g^{11} & h^{12} - \lambda g^{12} \\ h^{21} - \lambda g_{21} & h^{22} - \lambda g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (h - \lambda g) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

(2) Hlavní směry, resp. hlavní křivosti, jsou vlastní vektory, resp. vlastní čísla Weingartenovy matice

$$w = g^{-1}\, h.$$

(3) Jsou-li hlavní křivost různé, pak jsou odpovídající hlavní směry na sebe kolmé.

Důkaz.
(1) Vázané extrémy funkce κ_n najdeme pomocí Lagrangeových multiplikátorù. Snadno se zjistí, že

$$\operatorname{grad} I(\alpha_1, \alpha_2) = 2g \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix};\ \operatorname{grad} II(\alpha_1, \alpha_2) = 2h \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Je-li (α_1, α_2) kritický bod κ_n, pak

$$(h - \lambda g) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnice pro hlavní křivosti je pak

$$\det(h - \lambda g) = 0.$$

(2) Tvrzení plyne z rovnosti

$$h - \lambda g = g\,(w - \lambda \mathbb{I})\,,$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice. $\square$

(3) Nechť $\kappa_1 \neq \kappa_2$ jsou hlavní křivosti a $\alpha \in \mathbb{R}^2$, resp. $\beta \in \mathbb{R}^2$ jsou odpovídající hlavní směry. Ze vztahu (9.5) plyne, že

$$\alpha^t(h - \kappa_2 g)\beta = 0, \beta^t(h - \kappa_1 g)\alpha = 0.$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $(\kappa_1 - \kappa_2)[\alpha^t g \beta] = 0$ a z toho plyne kolmost hlavních směrů.

$\square$

Věta 9.14. *Jsou-li $g = g_u$, resp. $h = h_u$ matice první, resp. druhé fundamentální formy plochy S v bodě $s = \mathbf{p}(u) \in S$ vzhledem k mapě $(U, \mathbf{p})$, a $w = w_u$ je matice Weingartnerova zobrazení v tomto bodě, pak:*

(1)

$$K(\mathbf{p}(u)) = \det w = \frac{\det h}{\det g};$$

(2)

$$H(s) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(w) = \frac{g^{11}h^{22} + g^{22}h^{11} - 2g^{12}h^{12}}{2\det g},$$

kde $\mathrm{Tr}\, w_u$ *označuje stopu matice w_u;*

(3)

$$\kappa_{1,2} = H(s) \pm \sqrt{H(s)^2 - K(s)}.$$

Důkaz.

Rovnice pro $\kappa_{1,2}$ má tvar

$$\det(h - \lambda\, g) = \det g \det(w - \lambda\, \mathrm{Id}) = 0.$$

kde $w = g^{-1} \cdot h$. Tedy platí

$$(\kappa^2 - \kappa\,\mathrm{Tr}\, w + \det w) = 0.$$

Stačí tedy dosadit do vzorců pro řešení kvadratické rovnice. Ze vztahu

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g}\begin{pmatrix} g^{22} & -g^{21} \\ -g^{12} & g^{11} \end{pmatrix}$$

plyne, že $\mathrm{Tr}\, W = g^{11}h^{22} + g^{22}h^{11} - 2g^{12}h^{12}$. $\square$

Všimněte si, že K a H jsou základní symmetrické polynomy v proměnných κ_1, κ_2.

Definice 9.15. *Nechť S je orientovaná plocha a $\mathbf{p}$ souhlasně orientovaná mapa na S.*
(1) Křivky $u \mapsto \mathbf{p}(u, v)$ pro v pevné a $v \mapsto \mathbf{p}(u, v)$ pro u pevné se nazývají **parametrické křivky** *mapy $\mathbf{p}$ na ploše S.*
(2) Regulární křivka $c : I \to S$ je **hlavní křivka**, *pokud $c'(t)$ je hlavní směr pro každé $t \in I$.*
(3) Nenulový vektor $X \in T_s S$ je **asymptotický směr** *na ploše S v bodě s, jestliže $II_s(X, X) = 0$.*
(4) Regulární křivka $c : I \to S$ je **asymptotická křivka,** *pokud $c'(t)$ je asymptotický směr pro každé $t \in I$.*

Věta 9.16. *Nechť S je orientovaná plocha a $s \in S$.*
(1) Pokud $K(s) > 0$, neexistuje v bodě s žádný asymptotický směr.
(2) Pokud $K(s) < 0$, pak existují v bodě s právě dva různé asymptotické směry.
(3) Pokud $K(s) = 0$ a $0 = \kappa_1(s) \neq \kappa_2(s)$, pak existuje v bodě s právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.
(4) Pokud $K(s) = 0$ a $0 = \kappa_1(s) = \kappa_2(s)$, pak je v bodě s každý směr asymptotický.

Důkaz.

(1) V tomto případě je normálová křivost pořád kladná nebo pořád záporná.
(2) V tomto případě je jedna hlavní křivost kladná a druhá záporná, a tak je ze spojitosti normálová křivost ve dvou směrech nulová.
(3) První hlavní křivost je nula, tedy první hlavní směr je zároveň asymptotickým směrem.

(4) Toto tvrzení je zřejmé.

Věta 9.17. *Nechť S je orientovaná plocha s mapou $\mathbf{p}$ a $c(t) = \mathbf{p}(u(t)), t \in I$ je regulární křivka na S.*
(1) Křivka c je hlavní, právě když

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} g^{11}u' + g^{12}v' & h^{11}u' + h^{12}v' \\ g^{21}u' + g^{22}v' & h^{21}u' + h^{22}v' \end{pmatrix} = 0.$$

(2) Křivka c je asymptotická právě když

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0.$$

Důkaz.
(1) Je ihned vidět, že jsou oba determinanty ve vztahu (1) stejné, druhý z nich je ekvivalentní s podmínkou (9.5) ve Větě 9.13.
(2) Plyne ihned z definice asymptotického směru.

Příklad 9.18. *(1) Jednotková sféra má hlavní křivosti $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, tedy $K = H = 1$ všude.*
(2) Válec nad jednotkovou kružnicí má hlavní křivosti $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0$, tedy $K = 0$ a $H = \frac{1}{2}$ všude.
(3) Pro rovinu platí $\kappa_1 = \kappa_2 = 0 = K = H$ všude.
(4) Pro rotační plochu

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u));\ \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1, f > 0$$

platí

$$E = 1, F = 0, G = f^2;\ L = \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g}, M = 0, N = f\dot{g}.$$

Ze vztahu $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ plyne, že $\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} = 0$. Pak

$$K = \frac{(\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})f\dot{g}}{f^2} = \frac{-\ddot{f}f}{f^2} = \frac{-\ddot{f}}{f}.$$

5. Gaussova rovnice a Codazzi-Mainardova rovnice.

V minulém semestru jste probírali vlastnosti křivek v prostoru. Klíčová informace byla obsažena v v definici Frenetova reperu a v rovnicích, ve kterých se derivace Frenetova reperu popsaly pomocí rozkladu do Frenetovy baze v daném bodě. Jako koeficienty v tomto vyjádření se objevila křivost κ a torze τ křivky a bylo možné dokázat, že tyto dvě veličiny charakterizují danou křivku. Přesněji to znamenalo, že pokud zvolíme na daném intervalu kladnou funkci κ a funkci τ, existuje křivka zadaná na tomto intervalu, která má tyto funkce jako svou křivost a torzi. a tato křivka je určena jednoznačně až na shodnost.

V této části přednášky si chceme rozmyslet, jestli existuje nějaká vhodná analogie takovéto charakterizace v případě ploch. První otázka je, jestli existuje přirozená analogie Frenetova reperu. To co se nabízí je toto. V každé bodě s orientované plochy S je k dispozici normála $\mathbf{N}(s)$ k tečnému prostoru T_sS. Pokud si navíc zvolíme mapu $\mathbf{p}(u), u \in \mathcal{O}, s = \mathbf{p}(u)$, máme také určenou bazi $\{\mathbf{p}_{u^1}, \mathbf{p}_{u^2}\}$ tečného prostoru a trojice

$$\{\mathbf{p}_{u^1}, \mathbf{p}_{u^2}, \mathbf{n}\},\ \mathbf{n} = \mathbf{N} \circ \mathbf{p}$$

je význačná baze v $\mathbb{R}^3$, která určuje trojici vektorových polí v bodech $s = \mathbf{p}(u)$ dané plochy S. Jako v případě křivek, chtěli bychom teď spočítat derivace těchto tří vektorových polí podle souřadnic $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{O}$. Pro stručnost a přehlednost zápisu si zavedeme následující označení. Pro vektorové funkce (např. $\mathbf{p}, \mathbf{N}$, nebo jejich derivace) na ploše S popsané pomocí souřadnic $u \in \mathcal{O}$ si označíme dolním indexem i parciální derivaci podle proměnné u^i, např.

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{u^i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^i},\ \ \mathbf{p}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^i \partial u^j}$$

Všechny součty v následujících výpočtech jsou vždy součty pro hodnoty daného indexu od 1 do 2.

Věta 9.19. *Platí*

$$(1) \quad \mathbf{p}_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \mathbf{p}_k + h^{ij} \mathbf{n},$$

$$(2) \quad \mathbf{n}_i = \sum_k \sum_\ell h^{i\ell} a^{\ell k} \mathbf{p}_k,$$

kde 2×2 *matice* $a = (a^{ij})$ *je matice inverzní k matici první fundamentální formy* g^{ij},

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_\ell a^{k\ell} (\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_\ell),$$

a $h^{i\ell}$ *je matice druhé fundamentální formy.*

Důkaz.
(1) Vektor $\mathbf{p}_{ij}$ lze napsat jako lineární kombinaci baze s koeficienty, které je třeba spočítat. Rozklad má tvar

$$\mathbf{p}_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \mathbf{p}_k + m^{ij} \mathbf{n},$$

s neznámými koeficienty Γ^k_{ij} a m^{ij}. Pokud vynásobíme obě strany rovnosti (1) vektorem $\mathbf{n}$ pomocí skalárního součinu označeného symbolem $\cdot$, vidíme, že

$$m^{ij} = \mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{n} = h^{ij}.$$

Po vynásobení vektorem $\mathbf{p}_\ell$, dostaneme vztah

$$\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_\ell = \sum_k \Gamma^k_{ij} g^{k\ell}.$$

a po vynásobení nverzní maticí $a = g^{-1}$ dostaneme vztah pro Γ^k_{ij}.
(2) Normála $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor. Derivací identity $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ dostaneme rovnost $2\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n} = 0$. Tedy vektor $\mathbf{n}_i$ je tečný vektor v bodě $s = \mathbf{p}(u)$ a pro vhodné koeficienty platí

$$\mathbf{n}_i = \sum_\ell \alpha^k_i \mathbf{p}_k.$$

Vynásobením vektorem $\mathbf{p}_\ell$ dostaneme

$$-h^{i\ell} = -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p}_\ell = \sum_i \alpha^k_i g^{k\ell}$$

a tedy

$$\alpha^k_i = -\sum_\ell h^{i\ell} a^{\ell k}.$$

□

Lemma 9.20. *Čísla* Γ^k_{ij} *se nazývají* **Christoffelovy symboly** *a platí pro ně*

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_\ell a^{k\ell} (\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_\ell) = \frac{1}{2} \sum_\ell a^{k\ell} (g^{i\ell}_{,j} + g^{j\ell}_{,i} + g^{ij}_{,\ell}),$$

kde například $g^{i\ell}_{,j} = \frac{\partial g^{i\ell}}{\partial u^j}$.

Důkaz. Stačí upravit

$$\begin{aligned} (g^{i\ell}_{,j} + g^{j\ell}_{,i} - g^{ij}_{,\ell}) &= (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_\ell)_j + (\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_\ell)_i - (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j)_\ell = \\ &= \mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_\ell + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_{\ell j} + \mathbf{p}_{ji} \cdot \mathbf{p}_\ell + \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_{\ell i} - \mathbf{p}_{i\ell} \cdot \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_{j\ell} = \\ &= 2(\mathbf{p}_{ij} \cdot \mathbf{p}_\ell). \end{aligned}$$

Tvrzení Věty 9.19 je tedy analogií věty o Frenetově reperu a jeho derivacích a matice první a druhé fundamentální formy jsou analogií křivosti a torze křivky. Podmínka, že křivost křivky (bez inflexních bodů) musí být kladná má jako svou analogii podmínku, že matice první fundamentální formy plochy je vždy symmetrická a positivně definitní. Také matice druhé fundamentální formy je vždy symetrická. Je tu ale jeden velmi podstatný rozdíl. Následující tvrzení ukazuje, že matice první a druhé fundamentální formy dané plochy a jejich parciální derivace splňují velmi komplikované relace. Tyto relace jsou důsledkem faktu, že třikrát spojitě diferencovatelné funkce mají záměnné třetí parciální derivace. Konkrétně, pro každou dostatečně hladkou mapu $\mathbf{p}$ musí platit $\mathbf{p}_{ijk} - \mathbf{p}_{ikj} = 0$; $i, j, k = 1, 2$. Všimněte si, že relace v následující větě mají tvar rozdílu dvou jednodušších výrazů. které se od sebe liší jen záměnnou indexů j a k.

Věta 9.21 (Gauss, Codazzi-Mainardi)**.** *Pro první a druhou fundamentální formu plochy platí následující identity.*

(1) **Gauss:** $\Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_\ell (\Gamma^\ell_{ij}\Gamma^m_{\ell k} - \Gamma^\ell_{ik}\Gamma^m_{\ell j}) = \sum_\ell a^{\ell m}(h^{ij}h^{k\ell} - h^{ik}h^{j\ell})$,

kde například $\Gamma^m_{ij,k} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k}$.

(2) **Codazzi-Mainardi:** $\sum_\ell (\Gamma^\ell_{ij}h^{\ell k} - \Gamma^\ell_{ik}h^{\ell j}) + h^{ij}_{,k} - h^{ik}_{,j}$ *kde například* $h^{ij}_{,k} = \frac{\partial^{ij}}{\partial u^k}$.

Důkaz.
Pokud dosadíme relaci (1) z Věty 9.19 do podmínky $\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_{ikj}$, dostaneme vztah

$$\sum_\ell (\Gamma^\ell_{ij,k}\mathbf{p}_\ell + \Gamma^\ell_{ij}\mathbf{p}_{\ell k}) + h^{ij}_{,k} + h^{ij}\mathbf{n}_k = \sum_\ell (\Gamma^\ell_{ik,j}\mathbf{p}_\ell + \Gamma^\ell_{ik}\mathbf{p}_{\ell j}) + h^{ik}_{,j} + h^{ik}\mathbf{n}_j.$$

A pokud znovu dosadíme za parciální derivace ze vztahů (1) a (2) z Věty 9.19 a obě strany odečteme, dostaneme identitu

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_\ell (\Gamma^\ell_{ij,k} - \Gamma^\ell_{ik,j})\mathbf{p}_\ell + (h^{ij}_{,k} - h^{ik}_{,j})\mathbf{n} \\ &+ \Gamma^\ell_{ij}(\Gamma^m_{\ell k}\mathbf{p}_m + h^{\ell k})\mathbf{n} - \Gamma^\ell_{ik}(\Gamma^m_{\ell j}\mathbf{p}_m + h^{\ell j})\mathbf{n} \\ &- h^{ij}\sum_\ell\sum_m h^{k\ell}a^{\ell m}\mathbf{p}_m + h^{ik}\sum_\ell\sum_m h^{j\ell}a^{\ell m}\mathbf{p}_m. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u prvků baze $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{n}\}$ v předchozím vztahu dostaneme tvrzení věty. □
Pro informaci si uvedeme následující větu (kterou nebudeme dokazovat), která tvrdí, že matice první a druhé fundamentální formy plochy charakterizují danou plochu.

Věta 9.22 (Bonnet)**.** *Nechť $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a g, h jsou dvě symmetrické 2×2 dostatečně krát spojitě diferencovatelné maticové funkce na $\mathcal{O}$, pro které jsou na $\mathcal{O}$ splněny relace (1) a (2) Věty 9.21. Pak existuje plocha S a její paramterizace na množině $\mathcal{O}$, pro kterou jsou g a h matice první a druhé fundamentální formy. Pokud je $\mathcal{O}$ souvislá, je plocha S určena jednoznačně až na shodnost.*

6. Vnitřní vlastnosti plochy, Gaussova 'Theorema egregium'.

První fundamentálí forma umožňuje počítat vzdálenosti, úhly, nebo plochy. Všem vlastnostem plochy, které závisí jen na první fundamentální formě plochy se říká vnitřní vlastnosti plochy. Izometrie mezi dvěma plochami zachovává vnitřní vlastnosti plochy v odpovídajících bodech. Druhá fundamentální forma není vnitřní vlastnost plochy. Názorně je to vidět, pokud vezmeme list papíru (tj. kus roviny) a začneme ho v prostoru ohýbat, aniž bychom ho deformovali. Typicky takovým způsobem můžeme změnit plochý list papíru a ohnout ho do tvaru válce, nebo kornoutu. Při takovém ohybu se vzdálenosti na ploše nemění (papír se nedeformuje), ale normála k ploše se podstatně mění, pro kus roviny je konstantní, zatímco v různých bodech válce je obecně různá.
Jako důsledek výpočtů v předchozí části dostaneme nečekaný a principiálně důležitý důsledek, který objevil Karl Fridrich Gauss a který považoval za jeden ze svých nejdůležitějších a nejpodstatnějších výsledků. Říká se mu tradičně **Theorema egregium**, (v češtině vynikající, skvělá, znamenitá věta).

Věta 9.23 (Theorema egregium.)**.** *Gaussova křivost K parametrizované plochy se vypočítá pomocí první fundamentální formy plochy a jejích derivací vzorcem*

$$K = (g^{11})^{-1}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \sum_\ell (\Gamma^\ell_{11}\Gamma^2_{\ell 2} - \Gamma^\ell_{12}\Gamma^2_{\ell 1})\right).$$

Gaussova křivost je tedy vnitřní vlastností plochy.

Důkaz. Stačí použít Gaussovu rovnici (1) z Věty 9.21 pro speciální hodnoty $i = j = 1, k = \ell = 2$. Pravá strana má tvar

$$\sum a^{\ell 2}(h^{11}h^{2\ell} - h^{12}h^{1\ell}) = a^{22}\det h = g^{11}\frac{\det h}{\det g} = g^{11}K.$$

□

Jako důsledek dostaneme následující efektivní nutnou podmínku pro to, aby dvě plochy byly izometrické.

Věta 9.24. *Izometrické parametriovatelné plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.*

Tím jsme například dokázali, že žádný (malý) kousek sféry není izometrický nějaké otevřené podmnožině roviny. Jinak řečeno, každá mapa je nepřesná a skresluje vzdálenosti. Ve speciálním případě nulové Gaussovy křivosti platí i opačná implikace. Pro informaci (a bez důkazu), platí následující tvrzení.

Věta 9.25. *Je-li S plocha s nulovou Gaussovou křivostí, pak pro každý její bod $s \in S$ existuje okolí U s vlastností, že $S \cap U$ j izometrická otevřené podmnožině roviny.*

Pro nenulovou Gaussovu křivost opačná implikace neplatí. Existují dvě parametrické plochy, které mají stejnou Gaussovu křivost v odpovídajících bodech, ale nejsou izometrické.