Cvičení: Derivace, parciální derivace, differenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty:

- Ověřte, že funkce $f(x) = \frac{1}{|x|}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ Laplaceovu rovnici

$$\triangle f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

- Ověřte, že funkce $g(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $(\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times (0, \infty)$ rovnici vedení tepla

$$\triangle g = \frac{\partial g}{\partial t}$$

- Dokažte, že funkce $y(x) = c_1 e^{\lambda_1} x + c_2 e^{\lambda_2} x$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, vyhovuje rovnici

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{dy(x)}{dx} + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$$

- Určete definiční obory hyperbolických funkcí a dokažte z definice, že

$$\frac{d(sinh(x))}{dx} = cosh(x), \frac{d(cosh(x))}{dx} = sinh(x)$$

- Určete definiční obory hyperbolických funkcí a dokažte z definice, že

$$\frac{d(tgh(x))}{dx} = \frac{1}{cosh^2(x)}, \frac{d(ctgh(x))}{dx} = -\frac{1}{sinh^2(x)}$$

- Určete definiční obory hyperbolometrických funkcí a dokažte z definice, že

$$\frac{d(argsinh(x))}{dx} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \frac{d(argcosh(x))}{dx} = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

- Určete definiční obory hyperbolometrických funkcí a dokažte z definice, že

$$\frac{d(argtgh(x))}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \frac{d(argctgh(x))}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

Řešte diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou:

- $$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = e^{4x}$$
- $$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) = \cos x - 3\sin x$$
- $$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \frac{dy(x)}{dx} = cosh(2x)$$
- $$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2\frac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = x^2$$