Cvičení: Číselné řady, kritéria konvergence:

Řady s nezápornými členy:

- Buď $A \subset \mathbb{N}$ taková podmnožina, že přirozené číslo $a \in A$ neobsahuje ve svém dekadickém rozvoji číslo 0. Zjistěte, zda $\sum_A \frac{1}{n}$ konverguje, a najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ pro které $\sum_A \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje.
- Diskutujte konvergenci resp. divergenci řady v závislosti na $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}$$

- Dokažte modifikaci Raabeho kritéria: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy konverguje (diverguje), pokud pro

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(\frac{a_n}{a_{n+1}}) = r \in \mathbb{R}$$

platí $r > 1$ $(r < 1)$.

Diskutujte konvergenci resp. divergenci řady v závislosti na $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$$
- Diskutujte konvergenci resp. divergenci řady v závislosti na $a \in \mathbb{R}, a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)}$$

Najděte součet řady:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin(n\alpha)\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n\alpha)\ ,\ |q| < 1\ ,\ q, \alpha \in \mathbb{R}$$

Rozhodněte o konvergenci řady:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$, $p \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}$, $p \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)})^p$, $p \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos \frac{a}{n})^{n^3}$, $a \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^p} - 1)$, $p \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{a^2}{n \ln^2 n})$, $a \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$