Cvičení: Určitý Riemannův integrál:

- Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,dx$. Ukažte, že $I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$. Metodou per-partes spočtěte I_n a dosazením do předchozí nerovnosti dokažte Wallisovu formuli

$$\pi = lim_{n\to\infty} 2(n+1)(\frac{n!!}{(n+1)!!})^2$$

- Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definujeme $\int f\,dx := \int Re(f)\,dx + i\int Im(f)\,dx$. Užitím této definice spočtěte

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx$$

- Buď f kvadratický polynom. Dokažte:

$$\int_a^b f\,dx = (\frac{1}{6}f(a) + \frac{1}{6}f(b) + \frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2}))(b-a)$$

- Užitím definice Riemannova integrálu spočtěte:

$$lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

- Buď n liché. Spočtěte:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$