Cvičení: Průběh funkce a její vlastnosti, Taylorovy rozvoje, limity pomocí Taylorových rozvojů:

- Z definice Taylorova rozvoje dokažte:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- Užitím Taylorova rozvoje dokažte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- Užitím Taylorova rozvoje spočtěte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinh(tgx) - x}{x^3}$$

- Spočtěte $\frac{1}{\cos x}$ do 3-ího řádu Taylorova rozvoje v okolí $x = 0$ (tj. $o(x^3)$) a najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$x = a \sin x + b \frac{\sin x}{\cos x} + o(x^4)$$

- Spočtěte Taylorův rozvoj funkce:

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

  v okolí $x = 0$ do třetího řádu, tj. do $o(x^3)$.

- Nakreslete grafy funkcí:

1. $f(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, n sudé
2. $f(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, n liché
3. $f(x) = x \ln \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = arcsin(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1})$