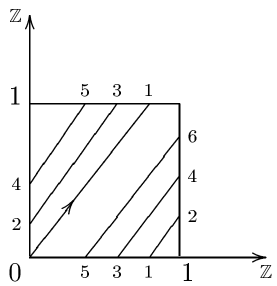
1. Neuzavřené podgrupy

Příklad. $G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$,

$$H_a := \{[x,y] \in T^2;\ y = ax \mod \mathbb{Z}^2\},\ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Pak $H_a \leq G$, ale H_a není uzavřená v G. Dokonce $\overline{H_a} = G$.



H_a je vnořená podgrupa, ale ne vložená (uzavřená). Příslušný kvocient G/H_a (a iracionální) vybavený faktortopologií je triviální topologický prostor (má pouze standardní otevřené množiny – $\emptyset$, G/H_a).

2. Reálné klasické Lieovy grupy

(1) $\mathbf{GL(V)} := \mathrm{Aut}(V) = \{\varphi : V \to V;\ \varphi \text{ automorfismus}\}$.
$\mathbf{GL(n}, \mathbb{R}) := GL(\mathbb{R}^n) =$ regulární matice $n \times n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \det A \neq 0\}$.
$GL(n,\mathbb{R})$ je grupa:

- $\det(A \cdot B) = \det A . \det B \neq 0$ pro A, $B \in GL(n,\mathbb{R})$,
- jednotková matice $E_n \in GL(n,\mathbb{R})$,
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$, operace $\cdot : G \times G \to G$, $(A,B) \mapsto A \cdot B$ a ${}^{-1} : G \to G$, $A \mapsto A^{-1}$ jsou hladké (důkaz plyne z Cramerova pravidla).

$GL(n,\mathbb{R})$ je varieta: je to otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n\times n}$, neboť det je spojitá funkce $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ a $\det^{-1}(0)$ je uzavřená.

(2) $\mathbf{SL(n}, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \det A = 1\}$.
$SL(n,\mathbb{R})$ je grupa: stejné argumenty jako u $GL(n,\mathbb{R})$.
Je to varieta:

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},$$
$$A \mapsto \det A$$
$$\Big(f : (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma . \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\Big).$$

Je třeba ukázat, že pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = \det A = 1$, je $\mathrm{grad} f(A) \neq 0$.

$(\mathrm{grad}A)_{i,j} = \frac{d}{dt}\det(A + t\cdot X_{i,j})\big|_{t=0}$, kde $X_{i,j}$ je matice $n\times n$ s 1 na (i,j)-tém místě, s nulami na ostatních místech. Rozvojem podle j-tého sloupce dostaneme

$$\begin{aligned}(\mathrm{grad}A)_{i,j} &= \frac{d}{dt}\Big(a_{1,j}\det\widetilde{A}_{1,j} - a_{2,j}\det\widetilde{A}_{2,j} + \quad \dots + (-1)^i(a_{i,j}+t)\det\widetilde{A}_{i,j} + \dots \\ &\qquad \dots + (-1)^n a_{n,j}\det\widetilde{A}_{n,j}\Big)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\det A + (-1)^i t\det\widetilde{A}_{i,j}\Big)\Big|_{t=0} = \\ &= (-1)^i\det\widetilde{A}_{i,j},\end{aligned}$$

kde $\widetilde{A}_{i,j}$ je minor získaný z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Protože $\det A = 1$, existuje index (i,j) takový, že $\det\widetilde{A}_{i,j}\neq 0$, tj. vektorově

$$\big(-\det\widetilde{A}_{1,1},\ \det\widetilde{A}_{1,2},\dots,(-1)^n\det\widetilde{A}_{n,n}\big)\neq 0,$$

což je požadovaná regularita zobrazení $\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$.

(3)

$$\begin{aligned}\mathbf{B(n,\mathbb{R})} :&= \text{ regulární horní trojúhelníkové matice } = \\ &= \Big\{A\in\mathbb{R}^n;\ a_{i,j} = 0\ (\forall i>j)\wedge\prod_{i=1}^n a_{i,i}\neq 0\Big\}.\end{aligned}$$

$B(n,\mathbb{R})$ je grupa:

- je podgrupou $GL(n,\mathbb{R})$ (horní trojúhelníkové matice jsou uzavřeny na součiny),
- $(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{\det(\widetilde{A}_{j,i})}{\det A}$ (inverzní matice k horní trojúhelníkové matici je horní trojúhelníková matice).

Je to varieta: uvažujme funkci

$$\begin{aligned}&f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}},\\ &\big(f(A)\big)_{i,j} = \begin{cases}0, & i>j,\\ a_{i,j}, & i\leq j.\end{cases}\end{aligned}$$

$B(n,\mathbb{R})$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$ ($\det\neq 0$) – je to doplněk uzavřené podmnožiny $GL(n,\mathbb{R})$.

$\dim B(n,\mathbb{R}) = \binom{n+1}{2}$.

Definice. *(Částečná) vlajka (flag)* v $\mathbb{R}^n$ je množina k vektorových prostorů $\{L_i\}_{i=1}^k$ v $\mathbb{R}^n$ spolu s inkluzivním uspořádáním: $L_1\subset\subset L_2\subset\subset\dots\subset\subset L_k\subset\subset\mathbb{R}^n$. *Kompletní (úplná) vlajka* je taková, že $k=n$ a $\dim L_i = i$ pro všechna $1\leq i\leq n$.

$B(n,\mathbb{R})$ zachovává kompletní vlajku:

$$\begin{pmatrix}*&*&*&*\\0&*&*&*\\0&0&*&*\\0&0&0&*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}*\\*\\*\\*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\*\\*\\*\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}*&*&*&*\\0&*&*&*\\0&0&*&*\\0&0&0&*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}*\\*\\*\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\*\\*\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}*&*&*&*\\0&*&*&*\\0&0&*&*\\0&0&0&*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}*\\*\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\*\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}*&*&*&*\\0&*&*&*\\0&0&*&*\\0&0&0&*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}*\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(4)

$$\mathbf{BB(n,\mathbb{R})} := \text{ regulární horní blokově trojúhelníkové matice } =$$
$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{i,i} \end{pmatrix};\ \det A \neq 0 \right\}.$$

$BB(n,\mathbb{R})$ je Lieova grupa: důkaz obdobný jako u $B(n,\mathbb{R})$.
$BB(n,\mathbb{R})$ zachovává (částečnou) vlajku.

Poznámka. Tyto grupy jsou často nazývány *parabolickými podgrupami* grupy $GL(n,\mathbb{R})$.

(5)

$$\mathbf{N(n,\mathbb{R})} := \{A \in B(n,\mathbb{R});\ a_{i,i} = 1,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

$\dim N(n,\mathbb{R}) = \binom{n}{2}$.
$N(n,\mathbb{R})$ zachovává úplnou vlajku (na L_i/L_{i-1} se chová jako identita).

(6) Nechť n, $k \in \mathbb{N}$, $n_1 + \cdots + n_k = n$.

$$\mathbf{NN_{n_1,\ldots,n_k}(n,\mathbb{R})} := \{A \in BB(n,\mathbb{R});\ (\forall i \leq k) \text{ blok } A_{i,i} = E_{n_i}\} =$$
$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} E_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & E_{n_i} \end{pmatrix} \right\}.$$

$NN(n,\mathbb{R})$ zachovává (částečnou) vlajku (na L_i/L_{i-1} se chová jako identita).

(7) Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Buď $Q : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineární, tj. $Q(av, bw) = a \cdot b \cdot Q(v,w)$ $(\forall a, b \in \mathbb{K})$.
$\mathbf{O(V,Q)} := \{A \in GL(V);\ Q(Av, Aw) = Q(v,w)\ (\forall v, w \in V)\}$.

Tvrzení. *Zvolme pevně bázi prostoru V, buď A' matice odpovídající automorfismu A, tj. $Av = A' \cdot v$ $(\forall v \in V)$, buď Q' matice formy Q. Potom $A \in O(V,Q)$, právě když ${A'}^T \cdot Q' \cdot A' = Q'$.*

Důkaz. $Q : V \times V \to \mathbb{K}$, $(v,w) \mapsto v^T Q' w$.

$$A \in O(V,Q) \Leftrightarrow (\forall v, w)\ (A'v)^T \cdot Q' \cdot (A'w) = v^T \cdot Q' \cdot w \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall v, w)\ v^T \cdot {A'}^T \cdot Q' \cdot A' \cdot w = v^T \cdot Q' \cdot w \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow {A'}^T \cdot Q' \cdot A' = Q'. \quad \square$$

$O(V,Q)$ je podgrupa $GL(V)$:

- $A, B \in O(V,Q) \Rightarrow Q(ABv, ABw) = Q(Bv, Bw) = Q(v,w) \Rightarrow A \cdot B \in O(V,Q)$,
- $A \in O(V,Q) \Rightarrow Q(A^{-1}v, A^{-1}w) = Q(AA^{-1}v, AA^{-1}w) = Q(v,w) \Rightarrow A^{-1} \in O(V,Q)$.

$O(V,Q)$ je podvarieta $GL(V)$: je určena rovnicí ${A'}^T \cdot Q' \cdot A' = Q'$, tedy v souřadnicích ($Q' = (q_{i,j})_{i,j}$, $A' = (a_{i,j})_{i,j}$):

$$(q_{i,j})_{i,j} = (a_{j,i})_{i,j}.(q_{i,j})_{i,j}.(a_{i,j})_{i,j} = (a_{j,i})_{i,j}.\Big(\sum_{k=1}^{n} q_{i,k}.a_{k,j}\Big)_{i,j},$$
$$(\forall i,j)\ q_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{l,i}.\sum_{k=1}^{n} q_{l,k}.a_{k,j} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{l,i}.a_{k,j}.q_{l,k}.$$

Pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tedy máme (Q a Q' budeme ztotožňovat):

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^q,$$
$$A \mapsto A^T Q A,$$

kde $q = \dim K(Q)$ a $K(Q) = \operatorname{Im} f$ je prostor všech matic kongruentních (podobných) s Q. Speciálně pro $Q = E_n$ je $f : A \mapsto A^T A$ zobrazení $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} \cong \mathrm{Sym}(n)$ (prostor všech symetrických matic $n \times n$), pro $n = 2k$ a $Q = J_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ je $f : A \mapsto A^T Q A$ zobrazení $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \cong \mathrm{Antisym}(n)$ (prostor všech antisymetrických matic $n \times n$).

K důkazu, že $O(V,Q)$ je podvarieta, stačí ověřit, že $\mathrm{Jac} f$ je surjektivní (pak má maximální hodnost).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(A+tX)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(A+tX)^T Q (A+tX)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}\big(A^T Q A + A^T Q t X + t X^T Q A + t^2 X^T Q X\big)\Big|_{t=0} = \\ &= A^T Q X + X^T Q A \quad (\forall X \in \mathbb{R}^{n\times n}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{grad}(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^q \cong K(Q),$$
$$X \mapsto A^T Q X + X^T Q A.$$

Nyní chceme dokázat, že (je-li $A \in O(V,Q)$ pevné) pro každou matici B kongruentní s Q (tj. takovou, že $(\exists C)\ B = C^T Q C$) existuje $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $B = A^T Q X + X^T Q A$.

- Řešení pro $Q = E_n$: $X \mapsto A^T X + X^T A = A^T X + (A^T X)^T$, $B = C^T C$, tedy existuje D tak, že $B = D + D^T$ a rovnice $D = A^T X$ má řešení $X = (A^T)^{-1} D$.
- Řešení pro $Q = J_{2k}$: $X \mapsto A^T Q X - (A^T Q X)^T$, $B = C^T Q C$, tedy existuje D tak, že $B = D - D^T$ $\Big($je-li $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, lze položit $D = \begin{pmatrix} a^T c & a^T d \\ b^T c & b^T d \end{pmatrix}\Big)$ a rovnice $D = A^T Q X$ má řešení $X = (A^T J_{2k})^{-1} D$.

Obecnou formu rozložíme na symetrickou a antisymetrickou část (ne nutně regulární): $Q = Q_S + Q_A$. Pak

$$X \mapsto A^T Q_S X + (A^T Q_S X)^T + A^T Q_A X - (A^T Q_A X)^T,$$
$$B = C^T Q C = C^T Q_S C + C^T Q_A C = D_S + D_S^T + D_A - D_A^T. \quad \square$$

Označme $Q_{k,l}$ matici $(e_{i,j})_{i,j=1}^{k+l}$, kde

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1, \ 1 \le i = j \le k, \\ -1, \ k+1 \le i = j \le n, \\ 0, \ i \ne j, \end{cases} \quad \text{tj. } Q_{k,l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pro $Q = Q_{k,l}$ definujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{O(k,l,}\mathbb{R}) &:= O(\mathbb{R}^{k+l}, Q_{k,l}), \\ \mathbf{SO(k,l,}\mathbb{R}) &:= O(k,l,\mathbb{R}) \cap SL(k+l,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$O(k,l,\mathbb{R})$ je grupa všech invertibilních zobrazení zachovávajících kvadratickou formu

$$(x_1, \dots, x_{p+q}) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots x_{p+q}^2.$$

Platí: $A \in O(k,l,\mathbb{R}) \Rightarrow \det A \in \{1,-1\}$.
Pro $Q = E_n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{O(n,}\mathbb{R}) &:= O(\mathbb{R}^n, E_n), \\ \mathbf{SO(n,}\mathbb{R}) &:= O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R}) = SO(0,n,\mathbb{R}) = SO(n,0,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$\dim O(n,\mathbb{R}) = n^2 - \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2}$.
Pokud $Q = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} = J_{2n}$,

$$\mathbf{Sp(2n,}\mathbb{R}) := O(\mathbb{R}^{2n}, J_{2n}).$$

$\dim Sp(2n,\mathbb{R}) = 4n^2 - \binom{2n}{2} = \binom{2n+1}{2}$.

Tvrzení.
(a) $A \in O(V,Q)$, Q nedegenerovaná, pak $\det A \in \{1,-1\}$.
(b) $A \in Sp(2n,\mathbb{R})$, pak $\det A = 1$.

Důkaz. (a) $A^T Q A = Q \Rightarrow \det A^T . \det Q . \det A = \det Q \Rightarrow (\det A)^2 = 1$.
(b) Nechť $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pak

$$\begin{aligned} A^T(J_{2n}A) = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix} = \\ = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

....

3. Komponenty O, SO

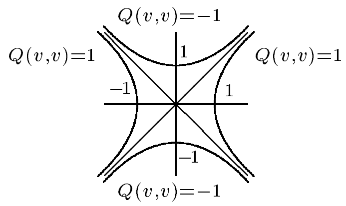
$A \in O(k,l,\mathbb{R}) \Rightarrow \det A \in \{1,-1\}$. Přitom existují A_+, $A_- \in O(k,l,\mathbb{R})$ tak, že $\det A_+ = 1$, $\det A_- = -1$ (stačí položit $A_+ = E_n$, $A_- = -E_{1,n-1}$). Protože det je spojitá funkce, existují aspoň dvě komponenty prostoru $O(k,l,\mathbb{R})$.

Tvrzení. *k, $l \geq 1 \Rightarrow SO(k,l,\mathbb{R})$ má 2 komponenty.*

Důkaz. Kvadrika $K := \{v \in \mathbb{R}^{k+l};\ Q(v,v) = 1\}$ je $SO(k,l,\mathbb{R})$-invariantní:

$$A \in SO(k,l,\mathbb{R}),\ v \in K \Rightarrow Q(Av,Av) = Q(v,v) = 1.$$

Příklad: $k = l = 1$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



□

Nahlédneme, proč má $SO(n,\mathbb{R})$ jednu komponentu ($O(n,\mathbb{R})$ má dvě komponenty). Buď dána ortogonální matice $A = (x^1,\dots,x^n)$, hledáme trasu z A do E_n $\left(\text{resp. do } E_n' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, která celá leží v $SO(n,\mathbb{R})$ (resp. v $O(n,\mathbb{R})$).

Zvolíme 1.vektor (x^1) a otáčíme bázi A tak, že x^1 se otočí do $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. pro $s \in \langle 0,1 \rangle$ násobíme ortogonálními maticemi $B(s)$ takovými, že

$$B(0) = E_n,$$
$$B(1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Takto postupujeme indukcí; získáme E_n nebo E_n'.

4. Komplexní Lieovy grupy

$\mathbf{GL(n,\mathbb{C})} := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n};\ \det A \neq 0\}$.
$GL(n,\mathbb{C}) \subset GL(2n,\mathbb{R})$, je to vlastní podgrupa:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} GL(n,\mathbb{C}) &= n^2, \\ \dim_{\mathbb{R}} GL(n,\mathbb{C}) &= 2n^2, \\ \dim_{\mathbb{R}} GL(2n,\mathbb{R}) &= 4n^2. \end{aligned}$$

$\mathbf{SL(n,\mathbb{C})} := \{A \in GL(n,\mathbb{C});\ \det A = 1\}$.
$\mathbf{O(n,\mathbb{C})} := O(\mathbb{C}^n, M_n)$, kde

$$\begin{aligned} n = 2m \Rightarrow M_{2m} &= \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \\ n = 2m+1 \Rightarrow M_{2m+1} &= \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathbf{O}}\mathbf{(n,\mathbb{C})} := O(\mathbb{C}^n, E_n)$.

Poznámka. Všechny nedegenerované symetrické bilineární formy na $\mathbb{C}^n$ jsou izomorfní, lze tedy volit vhodného zástupce (M_n). Důsledkem je, že všechny grupy $O(\mathbb{C}^n, Q)$ (pro Q nedegenerované) jsou konjugované.

$\mathbf{SO(n,\mathbb{C})} := O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n,\mathbb{C})$ je grupa invertibilních zobrazení zachovávajících kvadratickou formu

$$(z_1,\dots,z_n) \mapsto z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

tj. $SO(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n};\ A^T \cdot A = E_n \wedge \det A = 1\}$.
$\mathbf{Sp(n,\mathbb{C})} := O(\mathbb{C}^{2n}, J_{2n})$ je grupa všech invertibilních zobrazení zachovávajících antisymetrickou 2-formu

$$(z_1,\dots,z_{2n}) \mapsto z_1 \wedge z_{n+1} + z_2 \wedge z_{n+2} + \dots + z_n \wedge z_{2n}.$$

$\mathbf{Sp(p,q)} \subset Sp(p+q,\mathbb{C})$ se definuje jako grupa invertibilních zobrazení zachovávajících hermitovskou formu

$$z = (z_1,\dots,z_{2(p+q)}) \mapsto z^T \cdot K_{p,q} \cdot \bar{z},$$

tj.

$$A \in Sp(p,q) \Leftrightarrow \big(A \in Sp(p+q,\mathbb{C}) \wedge A^T \cdot K_{p,q} \cdot \bar{A} = K_{p,q}\big),$$

kde

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -E_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_q \end{pmatrix}.$$

Z definic vyplývá, že pro $\mathbf{Sp(n)} := Sp(n,0) = Sp(0,n)$ platí

$$Sp(n) = Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n).$$

5. Grupa U

Definice. *Hermitovský skalární součin* na $\mathbb{C}^n$ je zobrazení $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $H(v,w) = \bar{v}^T.w$.

H je $\mathbb{R}$-bilineární a $\mathbb{C}$-hermitovská forma $\big(H(v,w) = \overline{H(w,v)}$, $H(\lambda v, \mu w) = \bar{\lambda}\mu H(v,w)$, $(\forall v \neq 0)$ $H(v,v) > 0\big)$, nikoli však $\mathbb{C}$-bilineární (je "seskvilineární").

$\mathbf{U(n)} := O(\mathbb{R}^{2n}, H) \cap GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n};\ \bar{A}^T A = E_n\}$ $\big($důkaz: $(\forall u,v)$ $H(Au,Av) = \bar{u}^T\bar{A}^T Av = H(u,v) = \bar{u}^T v \Rightarrow \bar{A}^T A = E\big)$. Prvky $U(n)$ se nazývají *unitární matice.*

$\mathbf{SU(n)} := U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$.

Poznámka. $U(n) \cong O(2n,\mathbb{R}) \cap Sp(2n,\mathbb{R})$.

Poznámka. $A \in U(n) \Rightarrow \det A \in \mathbb{C}$, $|\det A| = 1$ (neboť $\det \bar{A} = \overline{\det A}$).

Poznámka. Grupy $U(n)$, $SU(n)$ jsou reálné Lieovy grupy, ne však komplexní. To plyne z obecného faktu, že každá kompaktní komplexní Lieova grupa je abelovská. (Tedy $SU(n) \subset SL(n,\mathbb{C})$ není komplexní podgrupou.)

$\mathbf{U(p,q,\mathbb{C})} \subset GL(p+q,\mathbb{C})$ se definuje jako podgrupa zachovávající hermitovskou formu

$$(z_1,\dots,z_{p+q}) \mapsto -z_1\bar{z}_1 - \cdots - z_p\bar{z}_p + z_{p+1}\bar{z}_{p+1} + \cdots + z_{p+q}\bar{z}_{p+q},$$

tj.

$$U(p,q,\mathbb{C}) := \{A \in GL(p+q,\mathbb{C});\ A^T E_{p,q}\bar{A} = E_{p,q}\},$$

kde $E_{p,q} = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}$.

Potom $U(n) = U(n,0) = U(0,n)$ a lze definovat

$$\mathbf{SU(p,q)} := U(p,q) \cap SL(p+q,\mathbb{C}).$$

Dále

$$\mathbf{S(U(p)\times U(q))} := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix};\ A_1 \in U(p) \wedge A_2 \in U(q) \wedge \det A_1 = \det A_2 = 1 \right\}.$$

$\mathbf{SU^*(2n)} \subset SL(2n,\mathbb{C})$ je grupa všech invertibilních transformací $A : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ komutujících se zobrazením Ψ (tzn. $A\Psi = \Psi A$), kde

$$\Psi : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n},$$
$$(z_1,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_{2n}) \mapsto (\bar{z}_{n+1},\dots,\bar{z}_{2n},-\bar{z}_1,\dots,-\bar{z}_n).$$

Podobně můžeme definovat $\mathbf{SO^*(2n)} \subset SO(2n,\mathbb{C})$ jako grupu invertibilních zobrazení zachovávajících seskvilineární hermitovskou formu

$$(z_1,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_{2n}) \mapsto -z_1\bar{z}_{n+1} + z_{n+1}\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_{n+2} + z_{n+2}\bar{z}_2 - \cdots - z_n\bar{z}_{2n} + z_{2n}\bar{z}_n.$$

Tedy

$$A \in SO^*(2n) \Leftrightarrow \big(A^T \cdot J_{2n}\bar{A} = J_{2n} \wedge A^T \cdot A = E_{2n} \wedge \det A = 1\big).$$

Lemma. *Nechť relace "$\cong$" označuje izomorfismus topologických Lieových grup. Pak*
(a) $SO(2n) \cap Sp(n) \cong U(n)$,
(b) $Sp(p,q) \cap U(2p+2q) \cong Sp(p) \times Sp(q)$,
(c) $Sp(n,\mathbb{R}) \cap U(2n) \cong U(n)$,
(d) $SO^*(2n) \cap U(2n) \cong U(n)$,
(e) $SU(p,q) \cap U(p+q) \cong S(U(p) \times U(q)) \sim SU(p) \times T \times SU(q)$ *(poslední relace znamená, že grupy jsou pouze homeomorfní),*
(f) $SU^*(2n) \cap U(2n) \cong Sp(n)$.

Důkaz. (a) Každý prvek $g \in Sp(n)$ má $\det g = 1$, tj. $g \in SO(2n) \cap Sp(n)$ při kanonickém vnoření těchto grup do $GL(2n,\mathbb{C})$. To je ekvivalentní následujícím podmínkám:

$$\begin{aligned} g^T g &= E_{2n}, \\ g^T J_{2n} g &= J_{2n}, \\ g^T \bar{g} &= E_{2n}. \end{aligned}$$

Pro $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, kde A, B, C, $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tyto relace dávají

$$\begin{aligned} g &\in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \\ A &= D, \\ B &= -C, \\ A^T B - B^T A &= 0, \\ A^T A + B^T B &= E_n. \end{aligned}$$

Tj. $g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} A, B &\in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ A^T B - B^T A &= 0, \\ A^T A + B^T B &= E_n, \end{aligned}$$

což je ovšem definice toho, že $A + iB \in U(n)$, neboli $(A+iB)^T(A-iB) = A^T A + B^T B + i(B^T A - A^T B) = E_n$, tj. $g^T \cdot \bar{g} = E_{2n}$.

(b) Zavedeme označení

$$M := \{g \in GL(2p+2q,\mathbb{C});\ g^T K_{p,q} \bar{g} = K_{p,q}\}.$$

Pak $g \in U(2p+2q) \cap M$, právě když

$$\begin{aligned} g^T \bar{g} &= E_{2p+2q}, \\ g^T K_{p,q} \bar{g} &= K_{p,q}. \end{aligned}$$

Tyto relace jsou ekvivalentní

$$g = \begin{pmatrix} X_{1,1} & 0 & X_{1,3} & 0 \\ 0 & X_{2,2} & 0 & X_{2,4} \\ X_{3,1} & 0 & X_{3,3} & 0 \\ 0 & X_{4,2} & 0 & X_{4,4} \end{pmatrix},$$

kde $\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,3} \\ X_{3,1} & X_{3,3} \end{pmatrix} \in U(2p)$, $\begin{pmatrix} X_{2,2} & X_{2,4} \\ X_{4,2} & X_{4,4} \end{pmatrix} \in U(2q)$.

Dle definice $Sp(p,q) = Sp(p+q,\mathbb{C}) \cap M$, tj.

$$Sp(p,q) \cap U(2p+2q) = Sp(p+q,\mathbb{C}) \cap U(2p+2q) \cap M.$$

Tedy g náleží $Sp(p,q) \cap U(2p+2q)$, právě když $g^T J_{2(p+q)} g = J_{2(p+q)}$ (to je podmínka pro průnik s $Sp(p+q,\mathbb{C})$). Odtud

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,3} \\ X_{3,1} & X_{3,3} \end{pmatrix} \in U(2p) \cap Sp(p,\mathbb{C}) = Sp(p),$$
$$\begin{pmatrix} X_{2,2} & X_{2,4} \\ X_{4,2} & X_{4,4} \end{pmatrix} \in U(2q) \cap Sp(q,\mathbb{C}) = Sp(q).$$

Tyto vztahy dle definic implikují (b).

(c) Protože $Sp(n,\mathbb{R}) \cap U(2n) = Sp(n) \cap SO(2n)$, je podle (a) pravá strana izomorfní $U(n)$. Odtud (c).

(d) $g \in SO^*(2n)$, právě když

$$g^T g = E_{2n},$$
$$g^T J_{2n} \bar{g} = J_{2n}.$$

Odtud $SO^*(2n) \cap U(2n) = SO(2n) \cap Sp(n,\mathbb{C}) = SO(2n) \cap Sp(n) \cong U(n)$.

(e) $g \in SU(p,q) \cap U(p+q)$, právě když $g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$, kde $g_1 \in U(p)$, $g_2 \in U(q)$, $\det g_1 . \det g_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det g_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

$\gamma_1 \in SU(p)$, $\gamma_2 \in SU(q)$. Tedy máme zobrazení

$$SU(p,q) \cap U(p+q) \to SU(p) \times T \times SU(q),$$
$$g \mapsto (\gamma_1, \det g_1, \gamma_2),$$

které je spojité, prosté a na (ale obecně to není homomorfismus).

(f) $g \in SU^*(2n)$, právě když $\bar{g} J_{2n} = J_{2n} g$ a $\det g = 1$. Tedy $g \in SU^*(2n) \cap U(2n)$, právě když

$$\bar{g} J_{2n} = J_{2n} g,$$
$$g^T \bar{g} = E_{2n},$$
$$\det g = 1.$$

Avšak první a druhá podmínka dává $g^T J_{2n} g = J_{2n}$, tedy $g \in Sp(n)$. $\square$

Lemma. *Lieovy grupy $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{C})$, $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$, $Sp(n,\mathbb{C})$, $Sp(n)$ jsou souvislé topologické prostory.*

Lieova grupa $GL(n,\mathbb{R})$ má dvě komponenty souvislosti.

Bez důkazu. $\square$

6. Kvaternionové Lieovy grupy

Vektorový prostor V nad kvaternionovým tělesem $\mathbb{H}$ uvažujme jako pravý $\mathbb{H}$-modul (tj. s násobením prvky $\mathbb{H}$ zprava).

Matice z $\mathbb{H}^{n\times n}$ působí na $\mathbb{H}^n$ zleva: $A\cdot v$, odtud $A\cdot(v\cdot h)=(A\cdot v)\cdot h$. Skalární násobení zleva je $\mathbb{H}$-lineární:

$$g.(v.h)=(g.v).h,$$
$$g.(v+w)=g.v+g.w,$$

$\big($ale obecně $g.(h.v)\neq h.(g.v)\big)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{GL(n,\mathbb{H})} :&= \{A\in\mathbb{H}^{n\times n};\ \det A\neq 0\}=\{A\in GL(2n,\mathbb{C});\ AJ_{2n}=J_{2n}\bar{A}\},\\ \mathbf{SL(n,\mathbb{H})} :&= \{A\in\mathbb{H}^{n\times n};\ \det A=1\in\mathbb{R}\}=\\ &=\{A\in GL(2n,\mathbb{C});\ AJ_{2n}=J_{2n}\bar{A}\wedge\det A=1\}.\end{aligned}$$

Buď K kvaternionová hermitovská forma $\big(K(v,w)=\overline{K(w,v)},\ K(v.\lambda,w.\mu)=\bar{\lambda}\mu K(v,w)$, pokud navíc $(\forall v\neq 0)\ K(v,v)>0$, je K pozitivně definitní$\big)$, standardně $K(v,w)=\bar{v}^T.w=\sum_i\bar{v}_i.w_i$.

Definice. Grupa zachovávající kvaternionovou hermitovskou formu K $\big(\mathbf{Sp(n,\mathbb{H})}$ neboli $\mathbf{U_{\mathbb{H}}(n)}\big)$ se nazývá *kompaktní symplektická grupa.*

Poznámka. Lze ukázat: $Sp(n,\mathbb{H})=U(2n)\cap Sp(2n,\mathbb{C})$.

Důsledek. $Sp(2n,\mathbb{C})\subset SL(2n,\mathbb{C})\Rightarrow Sp(n)\subset SL(2n,\mathbb{C})$, $Sp(n)=SU(2n)\cap Sp(2n,\mathbb{C})$.

Speciálně: $Sp(1)=\{q\in\mathbb{H};\ (\forall v,w\in\mathbb{H})\ \overline{q.v}.q.w=\bar{v}.\bar{q}.q.w=\bar{v}.w\}=\{q\in\mathbb{H};\ \bar{q}.q=1\}$. Platí: $Sp(1)=(S)U(2)\cap Sp(2,\mathbb{C})=SU(2)$.

Nechť $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U(2)$, tj. $A\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, $\bar{A}^TA=E_2$, tedy

$$\begin{pmatrix}\bar{a}&\bar{c}\\\bar{b}&\bar{d}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

po souřadnicích

$$\begin{aligned}\bar{a}a+\bar{c}c&=1,\\ \bar{b}b+\bar{d}d&=1,\\ \bar{a}b+\bar{c}d&=0.\end{aligned}$$

Navíc platí: $\det A=ad-bc$, a tedy

$$\begin{aligned}||\det A||^2=\overline{\det A}.\det A&=(\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c})(ad-bc)\\ &=\bar{a}a\bar{d}d+\bar{b}b\bar{c}c-\bar{a}\bar{d}bc-\bar{b}\bar{c}ad\\ &=\bar{a}a(1-\bar{b}b)+\bar{b}b(1-\bar{a}a)+\bar{a}ba\bar{b}+\bar{b}a\bar{a}b\\ &=\bar{a}a+\bar{b}b=(1-\bar{c}c)+(1-\bar{d}d),\end{aligned}$$

analogicky

$$||\det A||^2=\bar{c}c+\bar{d}d,$$

z těchto dvou rovností dostáváme

$$\bar{c}c+\bar{d}d=1.$$

7. Univerzální nakrytí $SU(2) \to SO(3)$

Ztotožňujeme $SU(2) = Sp(1) = \{q \in \mathbb{H};\ q.\bar{q} = 1\} \cong S^3$.

Tvrzení. *Pro každé $q \in SU(2)$ je zobrazení $\varphi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto qv\bar{q}$, izometrie vzhledem ke kanonické bilineární formě na $\mathbb{R}^3$.*

Zobrazení $\varphi : SU(2) \to SO(3)$, $q \mapsto \varphi_q$, je 2-1 nakrytí. Protože je sféra $S^3 = \{q.\bar{q} = 1\}$ jednoduše souvislá, $\pi_1(S^3) \cong \{0\}$, je φ univerzální nakrytí.

Důkaz. Nechť $q \in S^3$; $v = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ zapíšeme jako $bi + cj + dk$.

$$\begin{aligned} q &= \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k, \\ \bar{q} &= \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k, \\ 1 = q.\bar{q} &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2. \end{aligned}$$

Dokážeme izometričnost zobrazení $v \mapsto v\bar{q}$:

$$\begin{aligned} ||v\bar{q}||^2 &= (b\beta + c\gamma + d\delta)^2 + (b\alpha - c\delta + d\gamma)^2 + (b\delta + c\alpha - d\beta)^2 + (-b\gamma + c\beta + d\alpha)^2 = \\ &= b^2 + c^2 + d^2 = ||v||^2. \end{aligned}$$

Obdobně se ukáže, že $v \mapsto qv$ je izometrie, rovněž tedy složení $\varphi_q : v \mapsto qv\bar{q}$.

Zřejmě $\{1, -1\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Dokážeme opačnou inkluzi: $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{1, -1\}$.

Nechť $q \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, tj. $\varphi_q = \mathrm{id}$, $v := i$.

$$\begin{aligned} qi\bar{q} &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k).(\alpha i + \beta - \gamma k + \delta j) = \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)i + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)j + (-2\alpha\gamma + 2\beta\delta)k = i, \end{aligned}$$

odtud

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 &= 1, \\ \alpha\delta &= -\beta\gamma \\ \alpha\gamma &= \beta\delta. \end{aligned}$$

Od první rovnice odečteme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, dostaneme $\gamma^2 + \delta^2 = 0$, tedy $\gamma = \delta = 0$ a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Analogický postup pro $v := j$ dává $\beta = \delta = 0$. Odtud $\alpha \in \{1, -1\}$, $\beta = \gamma = \delta = 0$ a $q \in \{1, -1\}$. $\square$

8. Klasické Lieovy algebry

V kapitolách 2., 4. a 5. jsme popsali Lieovy podgrupy obecné grupy lineárních transformací $GL(n, \mathbb{C})$. Příslušné Lieovy algebry jsou pak identifikovány s podalgebrami $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ chápanými jako reálné Lieovy podalgebry.

Explicitní popis Lieových podalgeber nám umožní následující

Fakt. *Je-li G Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, pak Lieova algebra topologické Lieovy podgrupy $H \subset G$ je dána předpisem*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp(tX) \in H \ \textit{pro}\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Definice. *Lieova závorka* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je antisymetrické bilineární zobrazení splňující *Jacobiho identitu*:

$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0.$$

Tvrzení. *Lieova algebra grupy* $G = GL(n,\mathbb{R})$ *je* $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$.

Důkaz. Využijeme vztahu

$$T_eG = \{\gamma'(0);\ \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G \text{ je hladká křivka},\ \gamma(0) = e = E_n\}$$

Dokážeme, že $\mathfrak{g} \subset T_eG$. Protože $\dim\mathfrak{g} = \dim G = \dim T_eG$, bude $\mathfrak{g} \cong T_eG$. Nechť $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definujme $\gamma(t) := E_n + t.X \in GL(n,\mathbb{R})$ pro vhodné ε a pro všechna $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Pak $\gamma(0) = E_n$ a $\gamma'(0) = X$, tedy $X \in T_eG$. □

Tvrzení. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R});\ \mathrm{tr}X = 0\}$.

Lemma. *Pro každou matici A platí:* $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$.

Nástin důkazu.

$$\mathrm{e}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}.$$

Buď A diagonální matice, $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$. Pak $A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^m \end{pmatrix}$ a $\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{a_n} \end{pmatrix}$. Odtud $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{a_1+\cdots+a_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.

Buď nyní A diagonalizovatelná, $A = MDM^{-1}$, kde D je diagonální, M regulární. Pak $A^m = MD^mM^{-1}$, $\mathrm{e}^A = M\mathrm{e}^DM^{-1}$ a $\det(\mathrm{e}^A) = \det(\mathrm{e}^D) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(D)} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$ (poslední rovnost plyne z toho, že pro lineární zobrazení konečného ranku se stopa rovná sumě vlastních čísel).

Každá matice $A \in SL(n,\mathbb{R})$ je limitou diagonalizovatelných. □

Důkaz tvrzení. Hledáme $A(t)$ ve tvaru $\mathrm{e}^{Bt}(\in SL(n,\mathbb{R}))$. Pak $A'(0) = B$. Ovšem $\det A(t) = 1$, $\det(\mathrm{e}^{Bt}) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(Bt)}$, tedy $(\forall t)\ \mathrm{tr}(Bt) = t.\mathrm{tr}(B) = 0$, odtud $\mathrm{tr}(B) = 0$. Ukázali jsme, že $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \subset \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R});\ \mathrm{tr}X = 0\}$. Opačná inkluze platí také, neboť dimenze obou stran je $n^2 - 1$. □

Poznámka. $SO(n,\mathbb{R}) \subset O(n,\mathbb{R})$ a $SO(n,\mathbb{R})$ je komponentou souvislosti prvku $e = E_n$, tedy pro Lieovy algebry platí $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$.

Tvrzení. $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{Antisym}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n};\ X^T = -X\}$.

Důkaz. Mějme $A(t) \in SO(n,\mathbb{R})$ pro všechna $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $A(0) = E_n$, $A'(0) = X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (respektive $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$).

$$0 = \frac{d}{dt}\big(v^Tw\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big(v^TA(t)^TA(t)w\big)\Big|_{t=0} = v^TA'(0)^TA(0)w + v^TA(0)^TA'(0)w =$$
$$= v^TX^TE_nw + v^TE_nX^Tw\ (\forall v,w).$$

Odtud $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \subset \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R});\ X^T + X = 0\} = \mathrm{Antisym}(n,\mathbb{R})$.

Porovnání dimenzí obou stran dává $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{Antisym}(n,\mathbb{R})$. □

Důsledek. $\dim(\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\mathfrak{so}(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+q)\times(p+q)};\ X_1 = X_1^T \in \mathbb{R}^{p\times p} \wedge X_3 = X_3^T \in \mathbb{R}^{q\times q} \right\}.$$

Obdobně jako $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ vypočteme

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^T \end{pmatrix};\ X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^{n\times n} \wedge X_2 = X_2^T \wedge X_3 = X_3^T \right\}:$$

$$A(t)^T J_{2n} A(t) = J_{2n},\ J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},\ A(0) = E_{2n},\ A'(0) = X.$$

$$0 = \frac{d}{dt}\big(v^T J_{2n} w\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big(v^T A(t)^T J_{2n} A(t) w\big)\Big|_{t=0} = v^T X^T J_{2n} w + v^T J_{2n} X w\ (\forall v, w)$$
$$\Rightarrow X^T J_{2n} + J_{2n} X = 0.$$

9. Komplexní Lieovy algebry

(1) Klasické komplexní Lieovy algebry.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(GL(n,\mathbb{C})) &= \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^n),\\
\mathcal{L}(SL(n,\mathbb{C})) &= \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ \mathrm{tr}(X) = 0\},\\
\mathcal{L}(SO(n,\mathbb{C})) &= \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ X^T M_n + M_n X = 0\},\\
\mathcal{L}(Sp(n,\mathbb{C})) &= \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ X^T J_n + J_n X = 0\} =\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^T \end{pmatrix};\ Z_i \in \mathbb{C}^{n\times n} \wedge Z_2 = Z_2^T \wedge Z_3 = Z_3^T \right\},
\end{aligned}$$

kde $M_n = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix}$, je-li $n = 2k$, a $M_n = \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, je-li $n = 2k+1$. (V komplexním případě nezáleží na volbě M_n: jakákoli jiná matice indukuje automorfismus algebry $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.)

Výpočet $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$: $X^T M_n + M_n X = 0$, a tedy, protože $M_n^{-1} = M_n$, dostáváme

$$X^T = -M_n X M_n.$$

Nechť $n = 2k$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde a, b, c, $d \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

$$X^T = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} =$$
$$= -M_n X M_n.$$

Odtud

$$a^T = -d,\ c^T = -c,\ b^T = -b,$$

tedy $\dim(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})) = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = 2k^2 - k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Nechť nyní $n = 2k+1$, $X = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$.

$$X^T = \begin{pmatrix} a^T & c^T & g^T \\ b^T & d^T & h^T \\ e^T & f^T & j^T \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} d & c & f \\ b & a & e \\ h & g & j \end{pmatrix}.$$

Odtud

$$a^T = -d,\ c^T = -c,\ b^T = -b,\ g^T = -f,\ h^T = -e,\ j^T = -j = 0,$$

a tedy $\dim(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})) = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + k + k = 2k^2 + k = \frac{2k(2k+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\mathcal{L}(B_n) = \mathfrak{b}_n = \text{ horní trojúhelníkové matice,}$$

$$\mathcal{L}(N_n) = \mathfrak{n}_n = \text{ ostře horní trojúhelníkové matice.}$$

Nechť $X \in \mathfrak{b}_n$, $X = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$. Pak X^m a e^{tX} jsou opět horní trojúhelníkové matice, e^{tX} je regulární $\big(\det \mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tX)} \neq 0\big)$.

Je-li $X \in \mathfrak{n}_n$, $X = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pak pro $m \geq 1$ jsou matice X^m ostře horní trojúhelníkové, $X^0 = E_n$, tedy $\mathrm{e}^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathfrak{sp}(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & Z_{1,3} & Z_{1,4} \\ \bar{Z}_{1,2}^T & Z_{2,2} & Z_{1,4}^T & Z_{2,4} \\ -\bar{Z}_{1,3} & \bar{Z}_{1,4} & \bar{Z}_{1,1} & -\bar{Z}_{1,2} \\ \bar{Z}_{1,4}^T & -\bar{Z}_{2,4} & -Z_{1,2}^T & \bar{Z}_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2(p+q)\times 2(p+q)};\right.$$

$$Z_{1,1}, Z_{1,3} \in \mathbb{C}^{p\times p} \wedge Z_{1,2}, Z_{1,4} \in \mathbb{C}^{p\times q} \wedge$$

$$\left.\wedge\, Z_{1,1} = \bar{Z}_{1,1}^T \wedge Z_{2,2} = \bar{Z}_{2,2}^T \wedge Z_{1,3} = Z_{1,3}^T \wedge Z_{2,4} = Z_{2,4}^T \right\},$$

$$\mathfrak{u}(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \bar{Z}_2^T & Z_3 \end{pmatrix};\ Z_1 = \bar{Z}_1^T \in \mathbb{C}^{p\times p} \wedge Z_3 = \bar{Z}_3^T \in \mathbb{C}^{q\times q} \right\},$$

$$\mathfrak{su}(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \bar{Z}_2^T & Z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(p,q);\ \mathrm{Tr}(Z_1) + \mathrm{Tr}(Z_3) = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix};\ Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^{n\times n} \wedge \mathrm{Tr}(Z_1) + \mathrm{Tr}(\bar{Z}_1) = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix};\ Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^{n\times n} \wedge Z_1 = Z_1^T \wedge Z_2 = \bar{Z}_2^T \right\}.$$

Důkaz. Pro grupu $SU^*(2n)$:
Z definice víme, že $g \in SU^*(2n)$, právě když $g\Psi = \Psi g$, $\det g = 1$. Tedy $A \in \mathfrak{su}^*(2n)$, právě když $A\Psi = \Psi A$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Nechť $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, kde A_i jsou komplexní matice typu $n \times n$. Pak pro libovolné vektory (matice typu $n \times 1$) U, V platí

$$A \cdot \Psi \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{V} \\ -\bar{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\bar{V} - A_2\bar{U} \\ A_3\bar{V} - A_4\bar{U} \end{pmatrix},$$
$$\Psi A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} A_1U + A_2V \\ A_3U + A_4V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_3\bar{U} + \bar{A}_4\bar{V} \\ -\bar{A}_1\bar{U} - \bar{A}_2\bar{V} \end{pmatrix},$$

z čehož plyne výše uvedený výsledek:

$$A_3 = -\bar{A}_2$$
$$A_4 = \bar{A}_1.$$

Pro $Sp(n, \mathbb{C})$:
Zapisujeme symbolicky: $2(z_1 \wedge z_{n+1} + \cdots + z_n \wedge z_{2n}) = (z_1, \ldots, z_{2n}) \wedge J_{2n}(z_1, \ldots, z_{2n})^T$.
Víme, že $g \in Sp(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow g^T J_{2n} g = J_{2n}$.

Pro $g = \exp(tZ)$, $t \in \mathbb{R}$, je

$$A \cdot \exp(tZ) \cdot A^{-1} = \exp(A \cdot tZ \cdot A^{-1}),$$
$$(\exp(Z))^T = \exp(Z^T),$$
$$\exp\left(t(J_{2n}^{-1} Z^T J_{2n})\right) = \exp(-tZ).$$

Odtud $Z \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, právě když $Z^T J_{2n} + J_{2n} Z = 0$.

Pro $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}$, kde $Z_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dostáváme:

$$Z_1^T + Z_4 = 0,$$
$$Z_2 = Z_2^T,$$
$$Z_3 = Z_3^T. \quad \square$$

(2) Exponenciální zobrazení. Označme $G := GL(n, \mathbb{R})$.

Kanonická struktura Lieovy algebry na $\mathfrak{g} = T_eG = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ je určena standardním komutátorem vektorových polí.

$G \subset \mathbb{R}^{n^2}$, G je otevřená podmnožina, strukturu variety lze tedy definovat pomocí jediné mapy. Souřadnice $(x_{i,j})_{i,j=1}^n$ na $\mathbb{R}^{n^2}$ určují souřadnice na G. Obecné hladké vektorové pole X na G má v libovolném bodě $x \in G$ tvar

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}},$$

kde $x_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n^2})$ $\left(\text{báze } T_xG \text{ je } \left(\frac{\partial}{\partial x_{i,j}}\right)_{i,j=1}^n\right)$.

$T_eG = \{$levo-invariantní vektorová pole$\}$. Co to je levá invariance?

Máme-li křivku $B(t)$, $B : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, $B(0) = e$, je levý posun do bodu $x \in GL(n, \mathbb{R})$ vyjádřen

$$\begin{aligned} L_x B(t) &:= x \cdot B(t) \text{ (násobení matic v } GL(n,\mathbb{R})), \\ B'(t) = v \Rightarrow (L_x)_* v &:= x \cdot v \text{ (násobení matic v } GL(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})), \end{aligned}$$

tedy $(L_x)_* : T_eG \to T_xG$.

Pro každé $v = \sum_{i,j} v_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \in T_eG$ definuje prvek $x \in GL(n,\mathbb{R})$ levo-invariantní pole X_v takto:

$$X_v(x) := (L_x)_*(v) = x \cdot v = \sum_{i,j} \sum_k x_{i,k} v_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}.$$

Potom komutátor dvou levo-invariantních vektorových polí $X_v(x) = \sum_{i,j,k} x_{i,k} v_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}$, $X_w(x) = \sum_{p,q,r} x_{p,r} w_{r,q} \frac{\partial}{\partial x_{p,q}}$ (v bodě $x \in GL(n,\mathbb{R})$) je

$$\begin{aligned} [X_v, X_w](x) = \Big(\sum_{i,j,k} x_{i,k} v_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \Big) \Big(\sum_{p,q,r} x_{p,r} w_{r,q} \frac{\partial}{\partial x_{p,q}} \Big) - \\ - \Big(\sum_{p,q,r} x_{p,r} w_{r,q} \frac{\partial}{\partial x_{p,q}} \Big) \Big(\sum_{i,j,k} x_{i,k} v_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \Big). \end{aligned}$$

$G := GL(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Tvrzení. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *je standardní exponenciela matic:* $\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!}$.

Důkaz. Definujme tok vektorového pole $v \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ předpisem $\exp(v) := \theta_v(1)$, kde $\theta_v : \mathbb{R} \to G$ je homomorfismus takový, že

$$\begin{aligned} \theta_v(s+t) &= \theta_v(s)\theta_v(t), \\ \theta_v'(0) &= v, \\ \theta_v'(t) &= x_v(\theta_v(t)). \end{aligned}$$

Pro každé A, $B \in \mathfrak{g}$ platí: $[A,B] = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{A+B}$ (viz Campbellova – Hausdorffova formule).

Buď $A \in G$ pevná. Potom pro $\theta(t) := \mathrm{e}^{tA}$ platí:

$$\begin{aligned} \theta'(t) = A.\mathrm{e}^{tA} &\Rightarrow \theta'(0) = A, \\ \theta(s+t) = \mathrm{e}^{sA+tA} = \mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA} = \theta(s)\theta(t) = \theta(t)\theta(s) &\Rightarrow \exp A = \mathrm{e}^A. \end{aligned}$$

(Tedy θ je jednoparametrická podgrupa generovaná vektorovým polem – tj. maticí – A.) $\square$

10. Campbellova – Hausdorffova formule

Pro matice X, Y chceme definovat $X * Y$, aby platilo

$$\mathrm{e}^X \cdot \mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^{X*Y}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^X &= 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \dots,\\
\mathrm{e}^Y &= 1 + Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{6} + \dots,
\end{aligned}$$

odtud

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^X \cdot \mathrm{e}^Y &= \Big(E_n + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \dots\Big) \cdot \Big(E_n + Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{6} + \dots\Big) =\\
&= E_n + (X+Y) + \Big(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}\Big) + \Big(\frac{X^3}{6} + \frac{X^2Y}{2} + \frac{XY^2}{2} + \frac{Y^3}{6}\Big) + \dots
\end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
X * Y &= \log\big(\mathrm{e}^X \cdot \mathrm{e}^Y\big) =\\
&= (X+Y) + \Big(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}\Big) + \Big(\frac{X^3}{6} + \frac{X^2Y}{2} + \frac{XY^2}{2} + \frac{Y^3}{6}\Big) + \dots -\\
&- \frac{1}{2}\Big(X^2 + XY + YX + Y^2 + \frac{X^3}{2} + X^2Y + \frac{XY^2}{2} + \frac{YX^2}{2} + YXY + \frac{Y^3}{2} +\\
&\qquad + \frac{X^3}{2} + XYX + \frac{Y^2X}{2} + \frac{X^2Y}{2} + XY^2 + \frac{Y^3}{2} + \dots\Big) +\\
&+ \frac{1}{3}\left(X^3 + X^2Y + XYX + XY^2 + YX^2 + YXY + Y^2X + Y^3 + \dots\right) -\\
&- \frac{1}{4} \cdots =\\
&= (X+Y) + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\left(\big[X,[X,Y]\big] + \big[Y,[Y,X]\big]\right) + \dots
\end{aligned}$$

11. Reprezentace Lieových grup a algeber

Buď G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra. Nechť ρ_1 je reprezentace G na V_1 a ρ_1' odpovídající reprezentace $\mathfrak{g}$ na V_1 $\big($tj. $\rho_1'(X)(v_1) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\big[\rho_1(\gamma(t))\big]v_1$, kde $\gamma(0) = E$, $\gamma'(0) = X$ $\big)$. Nechť ρ_2 je reprezentace G na V_2 a ρ_2' příslušná reprezentace $\mathfrak{g}$ na V_2.

Definujme reprezentaci $\rho_1 \otimes \rho_2$ na $V_1 \otimes V_2$ předpisem

$$\big[(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)\big](v_1 \otimes v_2) := \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2 \ (g \in G).$$

Poznámka. Tento předpis skutečně zadává homomorfismus $G \to \mathrm{Aut}(V_1 \otimes V_2)$, tj.

$$\begin{aligned}
(\rho_1 \otimes \rho_2)(gh) = \rho_1(gh) \otimes \rho_2(gh) &= \rho_1(g)\rho_1(h) \otimes \rho_2(g)\rho_2(h) =\\
&= \big(\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)\big)\big(\rho_1(h) \otimes \rho_2(h)\big).
\end{aligned}$$

Reprezentace $\rho_1 \otimes \rho_2$ grupy G indukuje reprezentaci $(\rho_1 \otimes \rho_2)'$ algebry $\mathfrak{g}$, pro niž platí

$$\big[(\rho_1 \otimes \rho_2)'(X)\big](v_1 \otimes v_2) = \rho_1'(X)(v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2'(X)(v_2) \ (\forall X \in \mathfrak{g}).$$

Důkaz. Položme $\gamma(t) = \exp(tX) \in G$, $X \in \mathfrak{g}$.

$$y(t) := (\rho_1 \otimes \rho_2)(\exp(tX))(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(\exp(tX))v_1 \otimes \rho_2(\exp(tX))v_2,$$

tedy

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\big[\rho_1(\exp(tX))v_1\big] \otimes \rho_2(\exp(tX))v_2 + \rho_1(\exp(tX))v_1 \otimes \frac{d}{dt}\big[\rho_2(\exp(tX))v_2\big].$$

Pro $t = 0$

$$y'(0) = \rho_1'(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2'(X)v_2.$$

□

Poznámka. Vztah $(\rho_1 \otimes \rho_2)'([X, Y]) = \big[(\rho_1 \otimes \rho_2)(X), (\rho_1 \otimes \rho_2)(Y)\big]$ lze dokázat z definice, neboť $(\rho_1 \otimes \rho_2)'$ je indukovaná reprezentace.

12. Kontragradientní (duální) reprezentace

Buď ρ reprezentace Lieovy grupy G na V. Definujeme reprezentaci ρ^* na V^*:

$$\langle \rho^*(g)(v^*), v\rangle = \langle v^*, \rho(g^{-1})v\rangle \ (\forall v^* \in V^*) \ (\forall v \in V) \ (\forall g \in G).$$

ρ^* je reprezentací, neboť

$$\begin{aligned}\langle \rho^*(gh)(v^*), v\rangle &= \langle v^*, \rho(h^{-1}g^{-1})v\rangle = \langle v^*, \rho(h^{-1})\rho(g^{-1})v\rangle = \\ &= \langle \rho^*(h)(v^*), \rho(g^{-1})v\rangle = \langle \rho^*(g)\rho^*(h)(v^*), v\rangle.\end{aligned}$$

Tvrzení. *Reprezentace ρ^* indukuje reprezentaci $(\rho')^* = \rho^{*\prime}$ algebry $\mathfrak{g}$ na V^*:*

$$\langle \rho^{*\prime}(X)v^*, v\rangle = \langle v^*, -\rho(X)v\rangle, \ X \in \mathfrak{g}, \ v \in V, \ v^* \in V^*.$$

Důkaz. $\gamma(0) = E$, $\gamma'(0) = X$.

$$\begin{aligned}\langle \rho^*(\gamma(t))v^*, v\rangle &= \langle v^*, \rho(\gamma(t)^{-1})v\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle \rho^*(\gamma(t))v^*, v\rangle\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\langle v^*, \rho(\gamma(t)^{-1})v\rangle\Big|_{t=0}, \\ \langle \rho^{*\prime}(X)v^*, v\rangle &= \langle v^*, \rho(-X)v\rangle.\end{aligned}$$

$\big((\gamma(t))^{-1}\big)' = -\gamma(t)^{-1}.\gamma'(t).\gamma(t)^{-1} =_{t=0} -E^{-1}.X.E^{-1} = -X.$ □

Poznámka. Nechť (e_i), (e_i^*) jsou navzájem duální báze. Mějme maticová vyjádření: $\rho \ldots A$, $\rho^* \ldots A^*$, pak $A^* = (A^{-1})^T$. Podobně $\rho' \ldots A'$, $\rho^{*\prime} \ldots A^{*\prime}$ dává $A^{*\prime} = -(A')^T$.

Tvrzení. *Buď ρ reprezentace G na V. Pak $\Lambda^k V$, $\odot^k V$ jsou invariantní podprostory v reprezentaci*

$$(\rho^{\otimes k}, V^{\otimes k}) := (\rho \otimes \cdots \otimes \rho, V \otimes \cdots \otimes V).$$

Důkaz. Nechť $\omega \in \Lambda^k V$. Dokážeme, že $(\forall g)\ \rho^{\otimes k}(g)\omega \in \Lambda^k V$.

Buď $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}\pi . v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(k)}$. Pak

$$\begin{aligned}[\rho(g)](\omega) = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}\pi . \big(\rho(g) v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \rho(g) v_{\pi(k)}\big) = \\ = \rho(g) v_1 \wedge \cdots \wedge \rho(g) v_k = \det \rho(g) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \det \rho(g)(\omega).\end{aligned}$$

Důkaz pro $\odot^k V$ je obdobný. $\square$

13. Adjungovaná reprezentace

Buď G Lieova grupa, $g \in G$.

Definice. Definujme zobrazení $\Psi_g : G \to G$ předpisem: $\Psi_g(h) := ghg^{-1}$.

Pak platí: (a) $\Psi_{gg'} = \Psi_g \Psi_{g'}$, tedy

$$\begin{aligned}\Psi : G &\to \operatorname{End}(G),\\ g &\mapsto \Psi_g,\end{aligned}$$

je homomorfismus.

(b) Navíc, pokud $\varphi : G \to H$ je homomorfismus grup, pak každý diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Psi_g"'] & H \arrow[d, "\Psi_{\varphi(g)}"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

je komutativní.

Uvažujme

$$\begin{aligned}\alpha &:= \varphi_* : T_e G \to T_e H,\\ \mathrm{Ad}_g &:= [(\Psi_g)_*](e) : T_e G \to T_e G.\end{aligned}$$

Potom

(a) $$[(\Psi_g)_*][(\Psi_{g'})_*](e) = [(\Psi_{gg'})_*](e),$$

(b) $$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_g"'] & T_eH \arrow[d, "\mathrm{Ad}_{\varphi(g)}"] \\ T_eG \arrow[r, "\alpha"] & T_eH \end{tikzcd} .$$

Máme tedy grupový homomorfismus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(T_eG)$, zderivujme jej:

$$\mathrm{ad} := d(\mathrm{Ad}_e) : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$$

a definujme

$$[X, Y] := \mathrm{ad}(X)(Y).$$

Konkrétně pro maticové grupy (buď $\mathbb{K}$ těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$): Nechť $G \subset GL(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Pro g, $h \in G$ je $\mathrm{Ad}_g(h) = ghg^{-1}$. Volme $X \in \mathfrak{g}$.

$$\mathrm{Ad}_g(X) = \frac{d}{dt}\big(g\gamma(t)g^{-1}\big)\Big|_{t=0} = g\gamma'(0)g^{-1} = gXg^{-1},$$

kde $\gamma(0) = e = E_n$, $\gamma'(0) = X$.

Pokud navíc $Y \in \mathfrak{g}$, máme

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\gamma(t)}(Y)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t).Y.\gamma(t)^{-1}\Big|_{t=0} = \\ = X.Y.E_n^{-1} + E_n.Y.(-E_n^{-1}).X.E_n^{-1} = XY - YX,\end{aligned}$$

neboť platí následující

Lemma. *Pro hladkou křivku $\gamma : \mathbb{R} \to G$ platí*

$$(\gamma(t)^{-1})' = -\gamma(t)^{-1}.\gamma(t)'.\gamma(t)^{-1} \ (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Důkaz. $\gamma(t).\gamma(t)^{-1} = e \in G$, $(\gamma(t).\gamma(t)^{-1})' = 0 \in \mathfrak{g} = T_eG$. Přitom $(\gamma(t).\gamma(t)^{-1})' = \gamma'(t).\gamma(t)^{-1} + \gamma(t).(\gamma(t)^{-1})'$, odtud $(\gamma(t)^{-1})' = -\gamma(t)^{-1}.\gamma'(t).\gamma(t)^{-1}$. □

Poznámka. Přesný význam výpočtu z předchozího lemmatu je obsažen v následujícím "posunu tečného prostoru": $\gamma(t) \in G$ $(\forall t)$, a tedy $\gamma'(t) = \big(\frac{d}{dt}\gamma\big)(t) \in T_{\gamma(t)}G$, $(\gamma(t)^{-1})' \in T_{\gamma(t)^{-1}}G$.

$$\begin{aligned}\gamma'(t).\gamma(t)^{-1} &\in T_{\gamma(t).\gamma(t)^{-1}}G = T_eG = \mathfrak{g},\\ \gamma(t).(\gamma(t)^{-1})' &\in T_{\gamma(t).\gamma(t)^{-1}}G = T_eG = \mathfrak{g},\\ (\gamma(t)^{-1})' &\in T_{\gamma(t)^{-1}}G,\\ -\gamma(t)^{-1}.\gamma'(t).\gamma(t)^{-1} &\in T_{\gamma(t)^{-1}.\gamma(t).\gamma(t)^{-1}} = T_{\gamma(t)^{-1}}G.\end{aligned}$$

Naopak, vztah $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ definuje (tzv. adjungovanou, přidruženou) reprezentaci ad. Platí totiž

Lemma. $\mathrm{ad}([X, Y])(Z) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}([X,Y])(Z) = \big[[X,Y],Z\big] = -\big(\big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big]\big) = \\ = \big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] = \mathrm{ad}(X)([Y,Z]) + \mathrm{ad}(Y)([Z,X]) = \\ = \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z).\end{aligned}$$

□

Lemma. *Nechť V, W jsou vektorové prostory, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\psi \in \mathrm{End}(W)$. Nechť α, β jsou vlastní čísla φ, ψ odpovídající vlastním vektorům v, w. Pak $v \otimes w$ je vlastní vektor $\varphi \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \psi \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ s vlastním číslem $\alpha + \beta$.*

Důkaz. Platí: $\varphi(v) = \alpha.v$, $\psi(w) = \beta.w$. Odtud

$$(\varphi \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes w + v \otimes \psi(w) = \alpha v \otimes w + v \otimes \beta w = (\alpha+\beta) v \otimes w.$$

□

Aplikace na reprezentace algebry $A_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Položme $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Buď $\{e_1, e_2\}$ kanonická báze $\mathbb{C}^2$, ρ fundamentální vektorová reprezentace $\mathbb{C}^2$.

Platí: $H \cdot e_1 = e_1$, $H \cdot e_2 = -e_2$, a tedy e_1, e_2 jsou vlastní vektory ρ s odpovídajícími vlastními čísly 1, -1. Z lemmatu vyplývá, že $\rho^2 = \rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho$ má vlastní vektory

$$\begin{aligned}
&e_1 \otimes e_1 \text{ s vlastním číslem } && 2,\\
&e_1 \otimes e_2 \text{ s vlastním číslem } && 0,\\
&e_2 \otimes e_1 \text{ s vlastním číslem } && 0,\\
&e_2 \otimes e_2 \text{ s vlastním číslem } && -2.
\end{aligned}$$

Obecně: ρ^n má vlastní vektory

$$\begin{aligned}
&e_1 \otimes \cdots \otimes e_1 \text{ s vlastním číslem } && n,\\
&e_1 \otimes \cdots \otimes e_2 \text{ s vlastním číslem } && n-2,\\
&\vdots && \vdots\\
&e_n \otimes \cdots \otimes e_n \text{ s vlastním číslem } && -n.
\end{aligned}$$

Reprezentace ρ^2 se rozkládá jako $\odot^2(\mathbb{C}^2) \oplus \Lambda^2(\mathbb{C}^2)$:

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes e_1 &\in \odot^2(\mathbb{C}^2),\\
e_1 \odot e_2 := \frac{1}{2}\Big(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1\Big) &\in \odot^2(\mathbb{C}^2),\\
e_2 \otimes e_2 &\in \odot^2(\mathbb{C}^2),\\
e_1 \wedge e_2 := \frac{1}{2}\Big(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\Big) &\in \Lambda^2(\mathbb{C}^2).
\end{aligned}$$

Obecně: v reprezentaci $\rho^n := \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \rho \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ (ρ na i-tém místě) je vždy

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_1,$$

je to vektor nejvyšší váhy n a zřejmě $e_1 \otimes \cdots \otimes e_1 \in \odot^n \mathbb{C}^2$.

Víme, že $\odot^n \mathbb{C}^2$ je podreprezentací, a tedy čísla $n, n-2, \ldots, 2-n, -n$ jsou vahami reprezentace $\odot^n \mathbb{C}^2$. Těchto čísel je $n+1$, a tedy dimenze invariantního podprostoru s nejvyšší vahou n je alespoň $n+1$. Ovšem $\dim(\odot^n \mathbb{C}^2) = \binom{n+2-1}{2-1} = n+1$, a tedy $\odot^n \mathbb{C}^2$ je invariantní podprostor dimenze $n+1$ s nejvyšší vahou n.

Položme $V^{(n)} := \odot^n V$ a počítejme reprezentace $\mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{(k)} \otimes (\mathbb{C}^2)^{(l)}$. Platí následující vzorec:

$$(\mathbb{C}^2)^{(k)} \otimes (\mathbb{C}^2)^{(l)} = (\mathbb{C}^2)^{(k+l)} \oplus (\mathbb{C}^2)^{(k+l-2)} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}^2)^{(k-l+2)} \oplus (\mathbb{C}^2)^{(k-l)}.$$