1 Spektrum lineárního zobrazení

V této kapitole budeme zkoumat lineární zobrazení (a matice) a zjišťovat, zda nelze ke každé matici nalézt matici jí podobnou, která má nějaký obzvláště jednoduchý (kanonický) tvar. Ukážeme, že například všechny symetrické matice jsou podobné diagonální matici, a dále že libovolnou matici lze převést podobnostní transformací na tzv. Jordanův kanonický tvar, který má nenulové prvky pouze na diagonále a těsně nad diagonálou.

Zmíněné kanonické tvary budou užitečné například při počítání funkcí matic, z nichž nejdůležitější je exponenciála.

Na úvod připomeneme několik tvrzení týkajících se polynomů.

1.1 Rozklad polynomu na kořenové činitele

Základní informace o polynomech je tzv. Základní věta algebry. Její důkaz se dozvíte např. později v komplexní analýze.

Věta 1 Základní věta algebry
Každý polynom, jehož stupeň je větší nebo roven 1, má v komplexním oboru alespoň jeden kořen.

Jednoduchou matematickou indukcí se z věty 1 odvodí následující důležitý důsledek.

Lemma 1 *Každý polynom $p(z)$ stupně n má právě n kořenů (počítaných včetně násobnosti), t.j. existují navzájem různá komplexní čísla $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, k$ — kořeny — (určená jednoznačně až na permutaci jejich pořadí) a přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k$, — násobnosti kořenů — tak že platí $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ a*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \lambda_j)^{n_j},$$

kde a_n je koeficient u nejvyšší (n-té) mocniny polynomu $p(z)$.

Pokud má polynom p reálné koeficienty, pak jsou buď kořeny λ_i reálné, nebo se vyskytují ve dvojicích komplexních čísel, které jsou navzájem komplexně sdružené.

Důkaz: Podle předchozí věty existuje alespoň jeden kořen polynomu p, označme ho λ_1. Připomeňme teď sérii identit

$$z^2 - a^2 = (z-a)(z+a), \; z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + az + a^2), \; \ldots$$

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-1-k}\,.$$

Pokud tyto identity použijeme pro rozdíl $p(z)-p(a)$, v $p(z)$ a $p(a)$ sdružíme stejné mocniny k sobě, lze z celého výrazu vytknout $z-a$. Tedy existuje polynom $q(z)$ stupně $n-1$ takový, že $p(z)=p(z)-p(\lambda_1)=(z-\lambda_1)q(z)$ pro každé $z\in\mathbb{C}$. Nyní stačí použít indukční předpoklad pro polynom q.

Tvrzení o polynomu s reálnými koeficienty plyne z faktu, že $\overline{p(z)}=p(\overline{z})$ a dále pokud $p(z)=0$, pak $\overline{p(z)}=0$. □

Poznámka:

1. Často se píše rozklad polynomu p na kořenové činitele ve tvaru

$$p(z)=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)\,,$$

   kde se ovšem kořeny $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ vypisují tolikrát za sebou, kolik je jejich násobnost.

2. Předpokládejme, že polynom p je monický, tj. že koeficient a_n u nejvyšší mocniny je roven jedné. Pak zřejmě ostatní koeficienty a_j polynomu p lze vypočítat pomocí kořenů λ_j. Například zřejmě platí

$$a_0=(-1)^n\lambda_1\dots\lambda_n,\quad a_{n-1}=-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)\,.$$

   Uměli byste napsat vzoreček, jak se vypočítají ostatní koeficienty? Obecně se vztahy pro $a_0,\dots,a_{n-1}$ vyjádřené pomocí kořenů rovnice nazývají Viètovy vztahy. Všimněte si, že všechny výrazy pro a_k jsou invariantní vůči libovolné záměně (permutaci) indexů.

1.2 Definice spektra operátoru

Definice 1 Vlastní číslo, vlastní vektor
Předpokládejme, že f je lineární zobrazení lineárního vektorového prostoru V do sebe. Číslo λ se nazývá vlastní číslo *zobrazení f, pokud existuje vektor $v\in V, v\neq 0$, takový, že*

$$f(v)=\lambda v.$$

Vektor v se pak nazývá vlastní vektor*, odpovídající vlastnímu číslu λ. (Pro případ, že prostor V je prostor funkcí, často mluvíme o vlastní funkci místo o vlastním vektoru). Množina všech vlastních čísel zobrazení f se nazývá (bodové)* spektrum zobrazení f.

Příklad:

1. Nechť $V = \mathbb{R}^n$ a nechť A je $n \times n$ matice reálných čísel. Pak zobrazení f, které (sloupcovému) vektoru $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ přiřadí vektor $y = A \cdot x \in \mathbb{R}^n$ je základním příkladem lineárního zobrazení v reálných vektorových prostorech. Vlastní čísla, resp. vlastní vektory f se obvykle nazývají *vlastní čísla,* resp. *vlastní vektory matice* A. Totéž je pravda pro $n \times n$ matice s komplexními prvky, které zadávají typické lineární zobrazení z $\mathbb{C}^n$ do sebe.

2. Nechť V je prostor všech polynomů stupně nejvýše n a f je zobrazení, které každému polynomu přiřadí jeho derivaci (je jedno jestli uvažujeme reálnou nebo komplexní verzi). Jak vypadá spektrum tohoto zobrazení a jaké jsou příslušné vlastní vektory (tj. vlastní funkce)? Jak se vlastně dají najít vlastní čísla a spektrum lineárního zobrazení?

3. Nechť $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ je diagonální (reálná či komplexní) matice, která má na diagonále prvky $d_1, \dots, d_n$. Pak každý element $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (s jedničkou na i-tém místě) kanonické baze je zřejmě vlastní vektor matice A a odpovídající vlastní číslo je d_i. Tedy spektrum matice A je množina $\{d_1, \dots, d_n\}$.

4. Předpokládejme, že matice A je podobná matici B, tj. předpokládejme, že existuje regulární matice C taková, že $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$. Je-li nenulový vektor x vlastním vektorem matice A, odpovídající vlastnímu číslu λ, pak vektor $v' = Cv$ je vlastní vektor matice B, odpovídající témuž vlastnímu číslu λ, neboť

   $$Bv' = BCv = C(C^{-1}BC)v = CAv = C(\lambda v) = \lambda(Cv) = \lambda v'.$$

   Spektrum matice A je tedy stejné jako spektrum matice B. Vlastní vektory stejné nejsou, ale převadějí se na sebe pomocí matice C.

   Podobně, je-li $f : V \to V$ lineární zobrazení a je-li A matice zobrazení f vůči nějaké bazi prostoru V, pak spektrum zobrazení f je rovno spektru matice A. (Odůvodněte sami, úvaha je stejná jako nahoře, místo zobrazení daného maticí C uvažujte isomorfismus $\iota : V \to \mathbb{R}^n\,(\mathbb{C}^n)$ daný volbou baze V; prohlédněte si příslušný komutativní diagram na obr. 1).

   Tento poznatek shrneme

$$\begin{array}{lccc}
\text{V } \mathbb{R}^n\text{:} & A\widetilde{v} & = & \lambda\widetilde{v} \\
 & \updownarrow\ \iota & & \updownarrow\ \iota \\
\text{Ve } V\text{:} & f(v) & = & \lambda v
\end{array}$$

Obrázek 1: Souvislost mezi vlastními čísly (a vektory) lineárního zobrazení f a jeho matice A vzhledem k určité bázi. Izomorfizmus ι přiřazuje vektorům v jejich složky $\widetilde{v}$ vzhledem k uvedené bázi.

Lemma 2 *Podobné matice mají stejné spektrum. Je-li f lineární zobrazení, kterému odpovídá v nějaké bazi matice A, pak spektrum f je stejné jako spektrum matice A.*

Příklad:

5. Předpokládejme, že matice A je diagonalizovatelná, tj. že je podobná ($A = CDC^{-1}$) diagonální matici $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Pak spektrum matice A je množina $\{d_1, \ldots, d_n\}$. Pro takovéto matice se tedy jejich spektrum dá najít převedením na diagonální tvar (pokud to ovšem budeme umět). Je každá matice diagonalizovatelná nebo existují matice, které nejsou podobné diagonální matici? Jak najít matici C? Existují jiné způsoby jak spektrum počítat?

Věta 2 Charakteristický polynom zobrazení
Označme symbolem Id *identické zobrazení na vektorovém prostoru V. Je-li $f : V \to V$ lineární zobrazení, pak definujeme jeho* charakteristický polynom *$p(\lambda)$ vzorcem*

$$p(\lambda) := \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}),$$

kde det *je determinant příslušného lineárního zobrazení.*

Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo zobrazení f právě když λ je kořenem příslušného charakteristického polynomu.

Důkaz: Připomeňme si, že determinant lineárního zobrazení byl definován jako determinant libovolné matice, reprezentující toto zobrazení a že nezávisel na výběru této matice (determinanty podobných matic jsou stejné).

Vlastní vektor zobrazení f odpovídající vlastnímu číslu λ je totéž jako nenulový prvek v jádru zobrazení $f_\lambda := f - \lambda\,\mathrm{Id}$. Ale my už víme, že jádro lineárního zobrazení f_λ je triviální, právě když matice, která ho reprezentuje (v libovolné bazi) je regulární, což je pravda právě když determinant zobrazení f_λ je nenulový. $\square$

Definice 2 Algebraická násobnost vlastního čísla
Nechť λ je vlastní číslo zobrazení f. Podle věty 2 je toto číslo kořenem charakteristického polynomu zobrazení f. Násobnost tohoto kořenu (lemma 1) nazveme (algebraickou) násobností vlastního čísla λ.

Poznámka: Další způsob, jak najít spektrum lineárního zobrazení f, je tedy následující. Stačí zvolit libovolnou bazi V, najít matici A zobrazení f vůči této bazi, spočítat determinant matice $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ jako polynom v proměnné λ a najít jeho všechny kořeny (pokud toto vše budeme umět spočítat). Často je lineární zobrazení f už zadáno maticí, takže první část úlohy odpadá.

Věta 3 O bázi z vlastních vektorů
Předpokládejme, že charakteristická rovnice lineárního zobrazení $f : V \to V$ má všechny kořeny λ_i, $i = 1, \ldots, n$ navzájem různé (tj. jednonásobné) — takové spektrum se nazývá prosté *nebo také* nedegenerované. *Označíme-li pro v_i libovolný vlastní vektor s vlastním číslem λ_i, $i = 1, \ldots, n$, pak $v_1, \ldots, v_n$ je baze V a matice zobrazení f vůči této bazi je diagonální matice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Důkaz: Označme $L_i = L(v_1, \ldots, v_i)$ lineární obal prvních i vlastních vektorů. Víme, že vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, právě když všechny inkluze v posloupnosti $\{0\} \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$ jsou ostré.

Předpokládejme, že to neplatí. Pak existuje $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ takové, že první neostrá inkluze je $L_k = L_{k+1}$. To znamená, že vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou nezávislé a $v_{k+1} \in L(v_1, \ldots, v_k)$. Tedy existují (jednoznačně určená) čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, taková, že $v_{k+1} = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$. Tedy platí také $\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{j=1}^k \lambda_{k+1} \alpha_j v_j$. Na druhou stranu, použijeme-li na vektor v_{k+1} zobrazení f, pak dostaneme vztah

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = f(v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_j v_j.$$

Tedy odečtením dostaneme $0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j [\lambda_{k+1} - \lambda_j] v_j$ a protože $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé, platí pro všechna $j = 1, \ldots, k$ rovnost $\alpha_j(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0$. Protože podle předpokladu je spektrum zobrazení f prosté, je $\alpha_j = 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, k$ a $v_{k+1} = 0$, což je spor. $\square$

Poznámka: Už bylo zdůrazněno, že rozklad polynomu na kořenové činitele je možný jen v tělese komplexních čísel (to je jedna z jeho naprosto základních vlastností a důvod pro neustálé a systematické používání komplexních čísel). I v případě, že A je reálná čtvercová matice, hledáme vlastní čísla a vlastní vektory v komplexním oboru. Charakteristický polynom reálné matice má reálné koeficienty a tak víme, že vlastní čísla s netriviální imaginární částí se vyskytují vždy ve dvojicích navzájem komplexně sdružených. Všimněte si, že totéž platí i pro příslušné vlastní vektory: platí-li $v \in \mathbb{C}^n, Av = \lambda\, v$, pak také platí $A \cdot \overline{v} = \overline{\lambda v}$. To plyne ihned ze známé vlastnosti $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, která platí pro libovolná dvě komplexní čísla.

Na závěr ještě uveďme jednoduché, ale velmi důležité tvrzení.

Lemma 3 *Je-li V komplexní vektorový prostor a F lineární zobrazení, pak má F alespoň jedno vlastní číslo a vlastní vektor.*

Důkaz: Charakteristický polym má alespoň jeden kořen λ, tedy lineární zobrazení $F - \lambda\,\mathrm{Id}$ má nulový determinant a jeho jádro je tedy netriviální. Nenulový prvek tohoto jádra je pak vlastní vektor pro vlastní číslo λ. □
Poznámka:

Uvedené tvrzení platí jen v komplexním oboru, lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory nemusí mít žádné vlastní číslo a vlastní vektor. Typickým příkladem je např rotace o ostrý úhel v rovině, t.j. v $\mathbb{R}^2$ (rozmyslete si proč!).

1.3 Kanonický tvar operátoru — diagonální matice

Zobrazení z libovolného prostoru do sebe se dají skládat. Je-li M libovolná množina a V vektorový prostor, pak množina všech zobrazení z M do V je opět vektorový prostor s přirozeně definovaným součtem a násobením číslem $((f+g)(m) := f(m)+g(m); (\alpha f)(m) := \alpha f(m))$. To vede ihned k následující definici.

Definice 3 Polynomická funkce zobrazení
Je-li $F : V \to V$ libovolné zobrazení, pak definujeme kvadrát zobrazení F jako složení $F^2 := F \circ F$ a n-tou mocninu zobrazení F pomocí vztahu $F^n := F \circ \ldots \circ F$ (složení F n-krát).

Je-li tedy $p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ libovolný polynom a F je libovolné linerání zobrazení, je dobře definované zobrazení $p(F) = \sum_{i=1}^n a_i F^i$ z V do v.

Poznámka: Připomeňme si, že skládání lineárních zobrazení odpovídá v dané bázi násobení příslušných matic. Je-li tedy A matice lineárního zobrazení F vůči nějaké basi, pak F^n odpovídá matici $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n činitelů) a $p(F)$ odpovídá matici $\sum_{i=1}^{n} a_i A^i$, kde A^i znamená součin $A \cdot \ldots \cdot A$ (s i činiteli).

Pro lineární zobrazení F z komplexního vektorového prostoru do sebe má smysl uvažovat $p(F)$ i pro polynomy s komplexními koeficienty.

Pro pořádek poznamenejme, že množina $L(V, V)$ všech lineárních zobrazení z V do V je opět vektorový prostor. Spolu s binární operací skládání tvoří matematický objekt, který by se v algebře nazýval okruh (resp. algebra). Totéž je samozřejmě pravda pro množinu všech $n \times n$ matic. Do polynomů mohu zřejmě smysluplně dosazovat nejen čísla, ale libovolné prvky okruhů (algeber). Polynomiální funkce lineárních zobrazení jsou tedy speciálním případem této obecné situace.

Definice 4 Diagonalizovatelná zobrazení a matice.
Řekneme, že zobrazení $f : V \to V$ je diagonalizovatelné*, pokud platí, že v prostoru V existuje báze složená pouze z vlastních vektorů zobrazení f. V této basi je tedy matice zobrazení f diagonální a na diagonále jsou všechna její vlastní čísla (každé se svojí násobností).*

Řekneme, že matice je diagonalizovatelná, pokud jí odpovídající lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ je diagonalizovatelné. Matice je zřejmě diagonalizovatelná, právě když je podobná diagonální matici.

Poznámka: Je snadno vidět, že f je diagonalizovatelné, právě když existuje báze, vůči které je příslušná matice zobrazení f diagonální.

Podobně matice A je diagonalizovatelná právě když je podobná diagonální matici.
Příklad:

1. Podle věty 3 je každé zobrazení, které má prosté spektrum (t.j. má navzájem různá vlastní čísla), diagonalizovatelné. Diagonalizovatelná jsou ovšem i některá lineární zobrazení, jejichž některá vlastní čísla mají vyšší násobnost. V řeči matic jsou to např. všechny matice podobné libovolné diagonální matici (která může mít na diagonále cokoliv, například i jen jedno opakující se číslo).

2. Ale ne každé zobrazení je diagonalizovatelné. Uvažme například 2×2 matici
$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristický polynom je zřejmě roven $(1-\lambda)^2$ a má číslo 1 jako dvojnásobný kořen. Vlastní vektory najdeme jako netriviální prvky jádra matice

$$J_2 - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadným výpočtem zjistíme, že všechny vlastní vektory jsou násobky vektoru $v = (1,0)^t$. Tedy tato matice nemá basi složenou z vlastních vektorů.

Totéž se ukáže stejným způsobem pro matici

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $n \times n$ matice J_n, které jsou horní trojúhelníkové a mají na diagonále a na horní vedlejší diagonále jedničky a jinde nuly. Tyto matice se budou vyskytovat zanedlouho v tzv. Jordanově kanonickém tvaru matice, jsou to speciální případy tzv. Jordanových buněk.

Matice J_n mají tedy jediné vlastní číslo s algebraickou násobností n a s *geometrickou násobností* rovnou jedné.

3. V budoucnosti potkáme ještě další důležitou třídu diagonalizovatelných zobrazení, kterým se říká normální zobrazení (to jsou zobrazení, jejichž matice A splňuje $AA^T = A^T A$). Mezi ně budou patřit tzv. hermitovská (resp. anti-hermitovská) zobrazení a unitární zobrazení, které hrají v kvantové fyzice základní roli.

Poznámka:

1. Všimněte si pozoruhodné věci. Je-li zobrazení f diagonalizovatelné, pak tedy mohu počítat jeho determinant a stopu v bazi vlastních vektorů a dostanu velmi zajímavé vztahy

$$\det f = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n; \qquad \mathrm{Tr}\, f = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Všimněte si, že tedy $\det f$ je roven (až na znaménko) koeficientu a_0 v charakteristickém polynomu zobrazení f a stopa $\mathrm{Tr}\, f$ je rovna koeficientu a_{n-1} téhož polynomu.

Z toho se přímo nabízí, že determinant a stopa jsou jen dva z více možných výrazů, které dokáži napsat pomocí elementů dané čtvercové matice a které jsou stejné (invariantní) pro podobné matice (jinými slovy: nezávisí na volbě báze). Stačí definovat číslo $a_j, j = 1, \ldots, n$ takto: je-li A čtvercová matice a $p(z) = \det(A - z\,\mathrm{Id})$ její charakteristický polynom, pak $(-1)^n p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ je zřejmě monický ($a_n = 1$) polynom stupně n. Jeho koeficienty a_j jsou funkce prvků matice A. Vzhledem k tomu, že charakteristický polynom podobných matic je stejný, jsou tyto všechny výrazy, podobně jako determinant a stopa, invarianty při podobnosti. Zkuste si vypočítat koeficient a_1 pro případ 3×3 matic! Je možné napsat formulku pro a_j v obecném případě?

2. Pro diagonalizovatelné zobrazení F se jednoduše počítají polynomiální funkce $p(F)$. Zkusme nejdříve spočítat, jak vypadá polynom diagonalizovatelné $k \times k$ matice A. Podle definice tedy existuje regulární matice C a diagonální matice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, pro které platí $A = C^{-1}DC$. Připomeňme si, že čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou vlastní čísla matice A. Pak ale zřejmě

$$a_n(C^{-1}DC)^n = a_nC^{-1}D^nC,\ a \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \ D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n)$$

a tudíž

$$p(A) = p(C^{-1}DC) = C^{-1}p(D)C,\ p(D) = \mathrm{diag}(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k)). \quad (1)$$

Totéž je pravda ze stejného důvodu i pro diagonalizovatelné zobrazení. Abychom se pořád neopakovali, řekneme následující poznámky už jen pro matice.

3. Výše uvedený jednoduchý popis polynomiálních funkcí diagonalizovatelných matic umožňuje uhodnout mnoho zajímavých a důležitých výsledků, které platí i pro obecné matice (resp. obecné lineární zobrazení). Pro libovolnou diagonalizovatelnou matici A např. dostaneme ihned následující zajímavé tvrzení (které se obvykle nazývá Hamilton-Cayleova věta):

Je-li $p(z)$ charakteristický polynom matice A, pak $p(A) = 0$.

Vskutku, jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice A, pak má matice A v basi vlastních vektorů tvar $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ a $p(A)$ má tvar $\mathrm{diag}(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k))$. Ale vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu, tedy poslední matice je identicky nulová.

4. Další velmi zajímavý a důležitý vztah je možné uhodnout pro trochu obecnější funkci matic, pro exponencielu matic. Exponenciální funkce e^x má mnoho zobecnění pro obecnější objekty x, než jen čísla. Jak se brzy dozvíte v analýze, funkce e^x je na celé reálné ose součtem své Taylorovy řady $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. Mocninné řady (o kterých se brzy dozvíte víc) jsou přirozené zobecnění polynomů a většina standardních funkcí se dá vyjádřit jako jejich součet. S trochou znalostí z analýzy není těžké si definici polynomiálních funkcí operátorů rozšířit na případ mocniných řad (je jen třeba ověřit, že nekonečný součet konverguje komponenta po komponentě i pro případ, že x je matice). Na okamžik si zavedeme exponencielu matice pro diagonalizovatelné matice pochopitelným předpisem:

   je-li $A = C^{-1}DC$, kde $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je diagonální matice, pak definujeme

   $$\exp A \stackrel{=}{def}\ C^{-1} \exp DC,\ \exp D \stackrel{=}{def}\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$$

   Pak platí
   $$\det(\exp A) = e^{\mathrm{Tr}\, A}$$

   Vskutku, levá strana se zřejmě rovná $\det(\exp D) = e^{\lambda_1} \ldots e^{\lambda_n}$, zatímco pravá strana je rovna $e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$.

   Zatím umíme oba výše uvedené vztahy ověřit pro diagonalizovatelné matice, později si ukážeme, že platí pro libovolné matice (zobrazení). (Je velmi užitečné si nejrůznější vztahy, které chcete pochopit, testovat nejprve pro případ diagonalizovatelných matic, kde jsou obvykle velmi jednoduché a srozumitelné.) Abychom uměli pracovat i s případem obecné matice, je potřeba nejdříve se dozvědět více o jejich struktuře a jejich kanonickém (Jordanově) tvaru.

1.4 Kanonický tvar operátorů — nediagonalizovatelné matice

Uvažujme operátor derivace na prostoru všech polynomů stupně nejvýše n. Tento operátor má jediné vlastní číslo, a to nulu (jemu odpovídající vlastní vektor je konstantní funkce). Je tedy zřejmé, že matice tohoto operátoru vzhledem k libovolné bázi nemůže být podobná diagonální matici s vlastními čísly na diagonále. Tato vlastnost úzce souvisí s tím, že algebraická násobnost tohoto jediného vlastního čísla (rovná $n+1$; charakteristický polynom je $p(\lambda) = \lambda^{n+1}$) je větší než jeho geometrická násobnost[1] (tedy počet příslušných lineárně nezávislých vlastních vektorů).

Jak zacházet s nediagonalizovatelnými maticemi pochopíme nejprve u *nilpotentních* matic (těch, které mají jediné vlastní číslo, a to nulu). Pro obecnou matici A s více vlastními čísly λ_i pak budeme ve druhém kroku zkoumat matice $A-\lambda_1 E$, $A-\lambda_2 E$, které jsou nilpotentní na určitém prostoru (v tuto chvíli je přinejmenším vidět, že budou mít mimo jiné vlastní číslo nula).

1.4.1 Nilpotentní zobrazení

Základní případ nilpotentních matic, jsou ostře horní trojúhelníkové matice (na diagonále a pod diagonálou jsou nuly). Tyto matice mají jednoduchou vlastnost, která je charakterizuje — pro každou horní trojúhelníkovou matici A existuje přirozené číslo k takové že $A^k = 0$. Pro obecnou ostře horní trojúhelníkovou matici má totiž matice A^2 nuly pod, na a jednu řadu těsně nad diagonálou, A^3 má nuly ve dvou řadách těsně nad diagonálou a tak dále.

Definice 5 Nilpotentní zobrazení
Řekneme, že lineární zobrazení $F : V \to V$ je nilpotentní, *pokud existuje přirozené číslo k takové, že $F^k = 0$. Nejmenší číslo, pro které toto platí se nazývá* stupeň zobrazení *F.*

Je-li $v \in V$, pak stupeň *v je nejmenší číslo m takové, že $F^m(v) = 0$. Stupeň vektoru v je vždy nejvýše roven stupni F, ale je často menší.*

Poznámka: Pro další úvahy bude podstatná tato posloupnost do sebe zařazených podprostorů V (platnost příslušných inklusí plyne ihned z definice příslušných podprostorů):

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} F^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} F^k \subset \operatorname{Ker} F^{k+1} \subset \ldots.$$

Pro případ, že F je nilpotentní řádu k, dostaneme

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} F^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} F^k = V.$$

[1] Toto je ve skutečnosti ekvivalentní podmínka nediagonalizovatelnosti: neexistuje-li k libovolnému n–násobnému vlastnímu číslu n nezávislých vlastních vektorů, pak nelze sestrojit bázi z vlastních vektorů, tedy diagonalizovat.

Zároveň s touto posloupností inklusí je užitečné uvažovat doplňkovou posloupnost (odpovídající inkluse plynou ihned z definice):

$$V \supset \operatorname{Im} F \supset \operatorname{Im} F^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} F^k = \{0\}.$$

Z minulého semestru víme, že pro každé $j = 1, \ldots, k$ platí $\dim \operatorname{Ker} F^j + \dim \operatorname{Im} F^j = \dim V$. Z toho například plyne, že inkluse na odpovídajících si místech těchto dvou posloupností jsou buď obě současně ostré, nebo obě současně neostré.

Věta 4 Ekvivalentní podmínka nilpotence
Lineární zobrazení F na konečnědimenzionálním prostoru *je nilpotentní, právě když jediné vlastní číslo F je nula.*

Poznámka: Doposud jsme nemluvili o prostorech nekonečné dimenze. Jejich vlastnosti se někdy shodují s vlastnostmi konečnědimenzionálních prostorů, ale ne vždy. Například v prostoru *všech* polynomů není operátor derivace nilpotentní, i když má jediné vlastní číslo, a to nulu. Ať totiž vezmeme libovolně vysokou (n–tou) mocninu tohoto operátoru, vždy budou existovat vektory, které se nezobrazí do nuly. Budou to všechny polynomy stupně alespoň $n+1$.
Důkaz: Je-li F nilpotentní a v jeho vlastní vektor pro vlastní číslo λ, pak $F^k(v) = \lambda^k v = 0$, tedy $\lambda^k = 0$ a $\lambda = 0$.

Pro důkaz druhé implikace ($\Leftarrow$) budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 4 *Předpokládejme, že jsou všechna vlastní čísla zobrazení F nulová a že existuje přirozené číslo j, pro které platí* $\operatorname{Ker} F^j = \operatorname{Ker} F^{j+1}$.

Pak $\operatorname{Ker} F^j = V$ *a zobrazení F je nilpotentní.*

Důkaz: Nechť tedy platí $\operatorname{Ker} F^j = \operatorname{Ker} F^{j+1}$. Pak také $\operatorname{Im} F^j = \operatorname{Im} F^{j+1}$ (vzpomeňte si na větu o součtu dimenzí jádra a obrazu a již zmíněnou obecnou pravdu $\operatorname{Im} F^{j+1} \subset \operatorname{Im} F^j$). Zobrazení F tedy zobrazuje podprostor $\operatorname{Im} F^j$ *na sebe.* Zúžení F na $\operatorname{Im} F^j$ je tedy prosté. Pokud by $\operatorname{Im} F^j$ byl netriviální podprostor, pak v něm existuje vlastní vektor a odpovídající vlastní číslo F je nenulové (F je na $\operatorname{Im} F^j$ prosté!).

Tedy $\operatorname{Im} F^j = \{0\}$ a $\operatorname{Ker} F^j = V$. □

Důkaz věty 4: Předpokládejme, že jsou všechna vlastní čísla F nulová. Dimense V je konečná, tedy v posloupnosti

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} F^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} F^k \subset \operatorname{Ker} F^{k+1} \subset \ldots.$$

nemohou být všechny inkluse ostré. Tedy existuje j přirozené, pro které platí $\operatorname{Ker} F^j = \operatorname{Ker} F^{j+1}$. Z Lematu 4 pak plyne, že F je nilpotentní stupně j.

$\square$

Poznámka: V další diskusi struktury nilpotentních zobrazení bude hrát podstatnou roli pojem (maximálního) řetězce vektorů pro dané zobrazení F. Pomocí nich v následující větě popíšeme obecnou strukturu nilpotentního zobrazení.

Definice 6 Řetězce vektorů

Nechť $F : V \to V$ je lineární zobrazení, pak řetězec vektorů *pro zobrazení F je posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$, pro kterou $v_{k-1} = F(v_k), v_{k-2} = F(v_{k-1}), \ldots, v_1 = F(v_2), F(v_1) = 0$. Řetězec vektorů budeme stručně symbolicky značit $v_k \to v_{k-1} \to \ldots \to v_1 \to 0$. Číslo k nazveme* délka řetězce.

Řekneme, že řetězec je maximální řetězec, *pokud není částí žádného delšího řetězce. To je ekvivalentní s tím, že $v_k \notin \operatorname{Im} F$.*

Věta 5 O struktuře nilpotentního zobrazení — pomocí řetězců

Předpokládejme, že $F : V \to V$ je nilpotentní zobrazení stupně k. Pak existuje báze V složená z vektorů maximálních řetězců zobrazení f. Řetězce mohou mít obecně různé či stejné délky, nejvíce však k.

Jiná formulace: *Budiž $F : V \to V$ nilpotentní zobrazení stupně k. Pak existují nezáporná celá čísla $n_1, \ldots, n_k$ s vlastností $\sum_{i=1}^{k} i\, n_i = n$ a maximální řetězce vektorů*

$$\left.\begin{array}{r} v^k_{k,1} \to v^{k-1}_{k,1} \to \ldots \to v^1_{k,1} \to 0, \\ \vdots \\ v^k_{k,n_k} \to v^{k-1}_{k,n_k} \to \ldots \to v^1_{k,n_k} \to 0, \end{array}\right\} \quad \textit{řetězce délky } k,$$

$$\left.\begin{array}{r} v^{k-1}_{k-1,1} \to v^{k-2}_{k-1,1} \to \ldots \to v^1_{k-1,1} \to 0, \\ \vdots \\ v^{k-1}_{k-1,n_{k-1}} \to v^{k-1}_{k-1,n_{k-1}} \to \ldots \to v^1_{k-1,n_{k-1}} \to 0, \end{array}\right\} \quad \textit{řetězce délky } k-1,$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{r} v^2_{2,1} \to v^1_{2,1} \to 0, \\ \vdots \\ v^2_{2,n_2} \to v^1_{2,n_2} \to 0, \end{array}\right\} \quad \textit{řetězce délky } 2,$$

$$\left.\begin{array}{r} v^1_{1,1} \to 0, \\ \vdots \\ v^1_{1,n_1} \to 0, \end{array}\right\} \quad \textit{řetězce délky } 1,$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
\cline{2-3}
 & v^3_{3,1} & v^3_{3,2} \\
\cline{2-6}
F\downarrow & v^2_{3,1} & v^2_{3,2} & v^2_{2,1} & v^2_{2,2} & v^2_{2,3} \\
\cline{2-7}
F\downarrow & v^1_{3,1} & v^1_{3,2} & v^1_{2,1} & v^1_{2,2} & v^1_{2,3} & v^1_{1,1} \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Obrázek 2: Strukturní diagram nilpotentního zobrazení, pro nějž je $\dim V = 13, n_3 = 2, n_2 = 3, n_1 = 1$. Vektory ze spodního řádku zobrazí F na nulu, jsou to tedy vlastní vektory F.

takové, že množina všech nenulových vektorů všech těchto řetězců tvoří basi prostoru V.

Poznámka: Je užitečné si nakreslit pro zkoumané nilpotentní zobrazení F strukturní diagram, ve kterém si nakreslíme řetězce do sloupců, postupně podle jejich délky. Prohlédněte si příklad na obrázku 2.

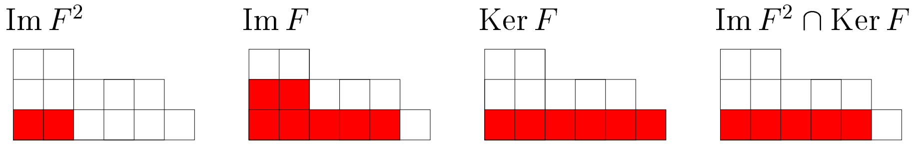
Ověřte, že spodní řádka tohoto diagramu je base podprostoru $\operatorname{Ker} F$, první dvě řádky dohromady tvoří basi $\operatorname{Ker} F^2$, atd. Zkuste si na obrázku uvědomit, jak vypadají base prostorů $\operatorname{Im} F, \operatorname{Im} F^2, \dots$ a prostorů $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F, \operatorname{Im} F^2 \cap \operatorname{Ker} F, \dots$ Řešení naleznete na obrázku 3.

Lemma 5 *Předpokládejme, že je dán systém (maximálních) řetězců v prostoru V jako ve větě 5. Pak množina všech netriviálních vektorů všech řetězců je lineárně nezávislá právě když je nezávislá ta skupina z nich, která leží v* $\operatorname{Ker} F$ *(t.j. na nejnižším netriviálním řádku diagramu).*

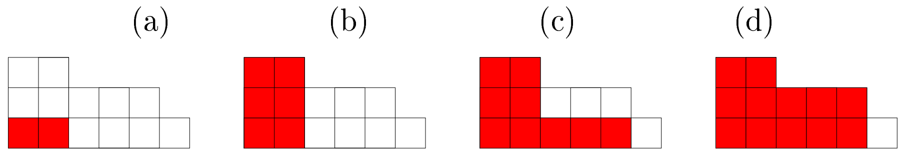
Důkaz: Jedna implikace je triviální (protože každá podmnožina lineárně nezávislé skupiny vektorů je lineárně nezávislá).

Předpokládejme naopak, že je lineárně nezávislá ta skupina nenulových vektorů všech řetězců, která leží v $\operatorname{Ker} F$. Pokud by množina všech vektorů všech řetězců byla lineárně závislá, existuje jejich netrivální lineární kombinace, rovná nulovému vektoru.

Označme si pro pohodlí vektory v řetězcích podle jednotlivých řádků diagramu tak, že vektory v prvním řádku odspodu jsou označeny $v^1_1, \dots, v^1_{s_1}$, ve druhém řádku odspodu $v^2_1, \dots, v^2_{s_2}$, až konečně nejvyšší řádek obsahuje vektory $v^k_1, \dots, v^k_{s_k}$. Platí $n = \sum_{i=1}^k s_i$ a předpokládáme, že F zobrazuje každý vektor na příslušný vektor pod ním. Nechť tedy existují čísla α^j_i tak, že



Obrázek 3: Báze prostorů $\operatorname{Im} F^2, \operatorname{Im} F, \operatorname{Ker} F, \operatorname{Im} F^2 \cap \operatorname{Ker} F$. Jedná se o stejný operátor F jako na obrázku 2.



Obrázek 4: Postup konstrukce báze ve větě 5. Operátor F je stejný jako na obrázku 2.

$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j = 0$. Předpokládejme dále, že všechny koeficienty α_i^j jsou nulové pro řádky s indexem $j = l+1, \ldots, k$ a že v l-tém řádku existuje alespoň jeden nenulový koeficient, který označíme $\alpha_{j_0,l}$. Pak $\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j = 0$ a tedy i $F^{l-1}(\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j) = 0$. Ale pak

$$F^{l-1}(\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j) = \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_i^l v_i^1 = 0.$$

Z lineární nezávislosti prvního netriviálního řádku diagramu ale plyne, že všechny koeficienty $\alpha_1^l \ldots, \alpha_{s_l}^l$ jsou nulové, což je spor.

Shrnutí důkazu: dokazujeme, že pokud jsou všechny vektory závislé, pak jsou závislé i vektory z nejnižšího řádku. Napíšeme proto netriviální lineární kombinaci všech vektorů, která dává nulový vektor. Zjistíme, kde ve strukturní tabulce (viz obrázek 2) leží vektory obsažené v této lineární kombinaci, nejvyšší řádek, ve kterém je nějaký vektor označíme l. Když nyní na uvedenou lineární kombinaci zapůsobíme F^{l-1}, zobrazí se všechny vektory z nejnižších $l-1$ řádků na nulu a zbude jen lineární kombinace vektorů z nejnižšího řádku, která má být rovna nule. □

Důkaz věty 5: Požadovanou sadu (maximálních) řetězců sestrojíme postupně (striktně vzato bychom měli používat indukci); ve druhém kroku pak ukážeme nezávislost těchto vektorů a to, že je jich právě $\dim V$.

Nejdříve si vezmeme libovolnou basi podprostoru $\operatorname{Im} F^{k-1} \subset \operatorname{Ker} F$, a označíme ji $v^1_{k,1}, \ldots, v^1_{k,n_k}$ (viz obr. 4a). To budou nejnižší vektory, které doplníme pomocí příslušných vzorů (tyto vzory existují, protože vektory patří do $\operatorname{Im} F^{k-1}$) do n_k řetězců délky k (obr. 3b).

Další krok v konstrukci bude tento. Protože $\operatorname{Im} F^{k-1} \subset [\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F]$, můžeme doplnit dříve zvolenou basi prostoru $\operatorname{Im} F^{k-1}$ pomocí vektorů $v^1_{k-1,1}$, $\ldots, v^1_{k-1,n_{k-1}}$ do base celého prostoru $\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker}$ (obr. 3c). Opět můžeme tyto nejnižší vektory doplnit na řetězce délky $k-1$ (obr. 3d).

Stejně postupujeme dále, basi prostoru $\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F$, kterou jsem již sestrojili, doplníme na basi prostoru $\operatorname{Im} F^{k-3} \cap \operatorname{Ker} F$ a nově přidané vektory doplníme na řetězce délky $k-2$, atd., až nakonec získanou basi prostoru $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F$ doplníme na basi prostoru $\operatorname{Ker} F$, posledně doplněné vektory už bude samy řetězce délky 1.

Chtěli bychom nyní ukázat, že množina všech takto sestrojených řetězců tvoří basi prostoru V.

Pro důkaz lineární nezávislosti stačí použít lemma 5, protože konce řetězců tvoří podle konstrukce basi prostoru $\operatorname{Ker} F$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Abychom věděli, že je to base V, stačí spočítat, že počet těchto vektorů je právě $n = \dim V$.

Označme

$$\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} F^j - \dim \operatorname{Ker} F^{j-1}, j = 2, \ldots, k; \alpha_1 = \dim \operatorname{Ker} F.$$

Prohlídkou diagramu řetězců se snadno přesvědčíme, že $\dim \operatorname{Ker} F^j$ je počet vektorů ve spodních j řádcích a že tedy α_j je počet prvků v j-tém řádku. Zároveň se z diagramu snadno vidí, že postupně

$$\begin{aligned}
n_k &= \alpha_k = \dim \operatorname{Im} F^{k-1} \\
n_{k-1} &= \alpha_{k-1} - \alpha_k = \dim(\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F) - \dim(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F) \\
&\vdots \\
n_2 &= \alpha_2 - \alpha_3 = \dim(\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F) - \dim(\operatorname{Im} F^2 \cap \operatorname{Ker} F) \\
n_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 = \dim \operatorname{Ker} F - \dim(\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F)\,.
\end{aligned}$$

Celkový počet vektorů v sestrojených řetězcích je tedy

$$\alpha_k\, k + (\alpha_{k-1} - \alpha_k)(k-1) + \ldots + (\alpha_2 - \alpha_3)2 + (\alpha_1 - \alpha_2) =$$
$$\alpha_k + \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1 = \dim \operatorname{Ker} F^k = \dim V.$$

$\square$

1.4.2 Nilpotentní zobrazení pomocí matic

Pro lepší pochopení toho, co jsme právě odvodili, je užitečné si větu 5 zformulovat ještě jednou jiným způsobem, v řeči invariantních podprostorů a jejich přímých součtů.

Prostor V budeme chtít rozložit na disjunktní podprostory (lineární obaly jednotlivých řetězců). Matice (vzhledem k bázi z řetězců) zobrazení F zúženého na kterýkoliv z těchto podprostorů pak bude mít obzvláště jednoduchý tvar (Jordanova buňka J_i).

Definice 7 Přímý součet vektorových podprostorů
Jsou-li V_1, V_2 dva podprostory V, pak lineární obal $L(V_1 \cup V_2)$ nazveme součtem podprostorů V_1 a V_2 *a označíme $V_1 + V_2$. Tento součet lze také vyjádřit takto (rozmyslete si!):*

$$V_1 + V_2 = \{v \in V | \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v = v_1 + v_2\}.$$

Pokud navíc ještě platí, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, pak řekneme, že podprostor $W = V_1 + V_2$ je přímý (direktní) součet podprostorů V_1 *a* V_2 *a označíme to symbolem*

$$W = V_1 \oplus V_2.$$

V tomto případě platí, že každý element $v \in V$ se dá napsat právě jedním způsobem jako součet $v = v_1 + v_2$; $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ (proč?).

To umožňuje definovat projekce p_1, p_2 na oba podprostory takto: $p_i : V_1 \oplus V_2 \to V_i,\ i = 1, 2$ jsou lineární zobrazení definované předpisem $p_i(v) = v_i$, pokud $v = v_1 + v_2$.

Analogicky (indukcí) se definuje součet $V_1 + \ldots + V_k$ a přímý součet $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ a odpovídající projekce. Podmínka pro přímý součet je, že $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro všechna $i, j; i \neq j$.

Příklad:

1. Nejjednodušší příklad direktního rozkladu je $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l, k + l = n$ definovaný vztahem

   $$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow$$
   $$x = x' + x'',\ x' = (x_1, \ldots, x_k),\ x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

   Totéž lze napsat pro složitější součet $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{k_l};\ \sum_{j=1}^{l} k_j = n$.

2. Rozmyslete si a nakreslete, že $\mathbb{R}^3$ lze napsat jako součet, ale ne jako přímý součet dvou dvoudimensionálních podprostorů (rovin). Nakreslete si případ, kdy $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem jednodimensionálního a dvoudimensionálního podprostoru.

Definice 8 Blokový zápis zobrazení
Předpokládejme, že $V = V_1 \oplus V_2, W = W_1 \oplus W_2$, a $F : V \to W$ je lineární zobrazení. Pak pro každé $v_1 \in V_1$ lze obraz $F(v_1)$ jednoznačně napsat ve tvaru $F(v_1) = w_1 + w_2$; $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Můžeme tedy definovat zobrazení $F_{11} : V_1 \to W_1$ a $F_{21} : V_1 \to W_2$ předpisem $F_{11}(v_1) = w_1, F_{21}(v_1) = w_2$. Stejně se definují zobrazení $F_{12} : V_2 \to W_1$ a $F_{22} : V_2 \to W_2$.

Je-li $v = v_1 + v_2 \in V$, pak

$$F(v) = F(v_1) + F(v_2) = (F_{11}(v_1) + F_{21}(v_1)) + (F_{12}(v_2) + F_{22}(v_2)).$$

Symbolicky toto budeme zapisovat ve maticovém tvaru

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}; \quad F(v) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(v_1) + F_{12}(v_2) \\ F_{21}(v_1) + F_{22}(v_2) \end{pmatrix}.$$

Odpovídající 2×2 *matici budeme nazývat* blokový zápis zobrazení F.

Analogicky (indukcí) lze definovat blokový zápis zobrazení pro případ složitějších rozkladů $V = V_1 \oplus \ldots V_n, W = W_1 \oplus \ldots W_m$. V tomto případě je zobrazení F representováno maticí zobrazení

$$F = (F_{ji})_{i=1,j=1}^{n,m}, F_{ji} : V_i \to W_j.$$

Příklad: Nejjednodušší je pochopení blokového zápisu lineárních zobrazení v řeči matic. Předpokládejme, že $m \times n$ matice A representuje příslušné lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a že máme dané rozklady

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{k_l}; \ \sum_{j=1}^{l} k_j = n, \qquad \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{s_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{s_t}; \ \sum_{j=1}^{t} s_j = m.$$

Pak příslušný rozklad zobrazení, odpovídajícího matici A, je dán prostým rozdělením matice na bloky příslušných podmatic.

Pro základní případ 2×2 blokové matice vypadá situace takto:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}.$$

Formule pro blokové násobení je tedy stejná, jako by příslušné elementy byly čísla. Nesmí se ale zapomenout, že každý jednotlivý součin je v tomto případě násobení příslušných podmatic!

Příklad: Budiž $V = W = \mathbb{R}^4$, $V_1 = W_1 = \{(x, y, 0, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = W_2 = \{(0, 0, x, y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Zobrazení F je v kanonické bázi zadáno maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$, lze psát zobrazení F v blokovém tvaru uvedeném v definici 8. Jednotlivá zobrazení F_{ij}, $i, j = 1, 2$ mají vzhledem ke kanonickým bázím ve $V_{1,2}, W_{1,2}$ následující matice

$$F_{11} : V_1 \to W_1, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F_{12} : V_2 \to W_1, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{21} : V_1 \to W_2, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_{22} : V_2 \to W_2, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matici A můžeme napsat v blokově diagonálním tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Definice 9 Podprostor invariantní vzhledem k zobrazení, nerozložitelný podprostor

Předpokládejme, že $F : V \to V$ je lineární zobrazení. Řekneme, že podprostor $W \subset V$ je invariantní podprostor vůči zobrazení F, *pokud F zobrazuje W do sebe, tj.* $\operatorname{Im} F \subset W$. *Potom má smysl mluvit o zúžení (restrikci) zobrazení na podprostor W. Toto zúžení budeme značit symbolem $F|_W : W \to W$.*

Řekneme, že invariantní podprostor W je nerozložitelný (či ireducibilní) *vůči F, pokud ho nelze napsat jako přímý součet jeho dvou invariantních podprostorů.*

Příklad:

1. Předpokládejme, že F je dáno maticí A. Rozdělme $\mathbb{R}^n$ na přímý součet $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l, k + l = n$ a napišme matici A v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

   Rozmyslete si, že $\mathbb{R}^k$ je invariantní podprostor pro zobrazení A právě když $A_{21} = 0$.

   Obdobně platí, že oba podprostory $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^l$ jsou invariantní vůči A právě když A je „blokově diagonální“, tj. $A_{12} = A_{21} = 0$.

   Totéž platí pro lineární zobrazení místo matic (zformulujte si sami!).

2. Uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které otáčí vektory okolo osy z o úhel α. Toto zobrazení má dva invariantní podprostory, a to přímku ve směru z (V_1) a rovinu na ní kolmou (V_2): vektor z V_1, resp. V_2 se zobrazí do V_1, resp. V_2. Podle předchozího příkladu pak pro matici φ v bázi vzniklé sloučením bází V_1 a V_2 musí platit $A_{12} = A_{21} = 0$. Pokud zvolíme ve V_2 například libovolnou ortonormální bázi, pak tato matice bude

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Uvažujme nilpotentní zobrazení F stupně k na prostoru V a předpokládejme, že existuje base $v_k, \dots, v_1$ prostoru V taková, že tato base je (maximálním) řetězcem pro F, tj. $F(v_j) = v_{j-1}, j = 2, \dots, k; F(v_1) = 0$.

   Rozmyslete si, že podprostory $L_j = L(v_j, \dots, v_1)$, $j = 1, \dots, k$ jsou invariantní podprostory V (ve skutečnosti už žádné další invariantní podprostory neexistují) a že V se nedá rozložit na přímý součet dvou invariantních podprostorů.

   Vidět je to na matici F vůči basi $v_1, \dots, v_k$: je to Jordanova buňka J_k

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Všimněte si, že J_k^2 vypadá podobně jako J_k, jedničky jsou ale posunuté o diagonálu výše. Podobně je to u J_k^3 až konečně $J_k^k = 0$, jak se sluší na nilpotentní zobrazení stupně k.

Výše uvedené definice nám umožní teď vyslovit větu 5 o struktuře nilpotentních zobrazení v jednodušším tvaru.

Věta 6 O struktuře nilpotentního zobrazení — pomocí matic
Předpokládejme, že $F : V \to V, \dim V = n$, je nilpotentní zobrazení stupně k. Pak existují nerozložitelné invariantní podprostory $V_1, \ldots V_s$ takové že $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$.

Zúžená zobrazení $F|_{V_j}, j = 1, \ldots, s$ jsou nilpotentní stupně $s_j = \dim V_j$, kde $s_j \leq k$. V prostoru V_j pak lze najít bázi $v_1, \ldots, v_{s_j}$, jejíž prvky tvoří maximální řetězec pro zobrazení F. Vůči této basi odpovídá zúžené zobrazení $F|_{V_j}$ Jordanově buňce J_{s_j}.

Lze tedy zvolit basi V tak, že zobrazení F v ní odpovídá blokově diagonální matici, jejíž bloky tvoří Jordanovy buňky, jejichž dimense jsou menší nebo rovny k. Tento tvar je jednoznačně určen zobrazením F až na pořadí Jordanových buněk na diagonále. Obvykle jsou Jordanovy buňky seřazeny sestupně podle velikostí jejich dimensí. Tato diagonální bloková matice se nazývá obvykle Jordanův kanonický tvar zobrazení F.

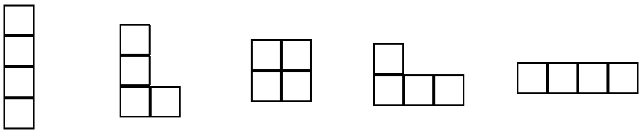
Tvar této blokově diagonální matice je tedy určen znalostí rozdělení násobností $n_j, j = 1, \ldots, k$; $n = kn_k + \ldots + 1n_1$ se kterou se Jordanova buňka J_j dimense j na diagonále vyskytuje. Tyto násobnosti určíme ze znalosti dimensí $\dim \operatorname{Ker} F^j, j = 1, \ldots, k$ takto: označme $\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} F^j - \dim \operatorname{Ker} F^{j-1}$,

$$n_k = \alpha_k, n_{k-1} = \alpha_{k-1} - \alpha_k, \ldots, n_1 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Podívejte se znovu na obrázek 3, báze $\operatorname{Ker} F^j$ jsou všechny vektory v prvních j řádcích odspodu, tedy α_j je počet řetězců délky alespoň j, a n_j je tudíž počet řetězců délky právě j.

Shrnutí: matice nilpotentního zobrazení F v bázi (maximálních) řetězců (věta 5) je blokově diagonální, na diagonále jsou Jordanovy buňky J_k a každému řetězci délky s odpovídá jedna Jordanova buňka J_s.
Důkaz: Ve větě 5 jsme sestrojili basi V z maximálních řetězců vůči zobrazení F. Stačí vzít jako podprostory V_j postupně lineární obaly vektorů obsažených v těchto maximálních řetězcích. Struktura invariantních podprostorů pro F je tedy okamžitě vidět z diagramu, popisujícího strukturu maximálních

Strukturní diagramy:



Stupeň nilpotence (k):	4	3	2	2	1
Dimenze Jordanových buněk:	4	$3, 1$	$2, 2$	$2, 1, 1$	$1, 1, 1, 1$
$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:	$1, 1, 1, 1$	$2, 1, 1$	$2, 2$	$3, 1$	4
$n_1, \ldots, n_k$:	$0, 0, 0, 1$	$1, 0, 1, 0$	$0, 2, 0, 0$	$2, 1, 0, 0$	$4, 0, 0, 0$

Obrázek 5: Struktury nilpotentních zobrazení pro $\dim V = 4$.

řetězců pro F a vztahy pro odpovídající násobnosti řetězců jsou odvozeny v důkazu věty 5. $\square$

Počet různých typů struktury nilpotentního zobrazení F pro danou dimensi n je tedy dán počtem rozkladů $n = n_k + \ldots + n_1$, kde n_i jsou přirozená čísla, pro která $n_k \geq n_{k-1} \geq \ldots \geq n_1$.
Příklad: Je-li $\dim V = 4$, pak existuje 5 typů nilpotentních zobrazení, jejichž Jordanovy buňky mají postupně dimense $\{4\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 1, 1\}$, $\{1, 1, 1, 1\}$. To odpovídá rozkladům $4 = 4, 4 = 3+1, 4 = 2+2, 4 = 2+1+1, 4 = 1+1+1+1$. Poslední případ (jediný) odpovídá diagonalizovatelné matici (a to matici obzvlášť jednoduché, totiž identicky nulové matici). Vše je znázorněno na obrázku 5.

Udělejte si sami podobný rozbor v dimensi 2 a 3.

1.4.3 Jak hledat Jordanův tvar obecné nilpotentní matice

Mějme nilpotentní zobrazení F. Dimense jader mocnin F jsou čísla, která lze spočítat nejdřív. Stačí si napsat matici A zobrazení F v libovolné basi, spočítat si její mocniny A^j a jejich hodnosti a využít vztahu $\dim \operatorname{Ker} F^j = n - h(A^j)$. Z nich lze snadno zpětně odvodit čísla α_j a násobnosti n_j Jordanových buněk — nebo jinak řečeno, lze nakreslit strukturní diagram. Tento výpočet je potřeba udělat nejdřív, ještě než se začne hledat podle věty 5 báze, ve které má F blokově diagonální tvar s Jordanovými buňkami na diagonále.

Věta 5 naznačuje, jak se příslušná baze dá hledat. Zaručený postup je ten, že se nejdříve najde typ rozkladu na invariantní podprostory (čísla α_j, n_j, viz výše) spočítá se prostor $\operatorname{Ker} F$, v něm najde posloupnost podprostorů

$$(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F) \subset (\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F) \subset \ldots (\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F) \subset \operatorname{Ker} F.$$

Postupně se najde báze[2] $(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F)$, doplní se na bázi $(\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F)$, atd. a postupně až na basi celého $\operatorname{Ker} F$. Tato skupina vektorů jsou koncové vektory příslušných maximálních řetězců, ke kterým je třeba najít příslušné vzory (v prostoru $(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F)$ jich musí být $k-1$, pro další doplněné vektory v $(\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F)$ je jich $k-2$, atd.).

Tento postup je sice jistý, ale hledání vzorů vektorů vyžaduje řešit příslušné soustavy rovnic, což je dost práce. Jednodušší, ale ne zcela zaručený postup je konstruovat příslušné řetězce odshora. Jejich strukturu je třeba v každém případě od začátku znát a mít spočítanou. Pak vezmu α_k vektorů v $\operatorname{Ker} F^k = V$ náhodně (často je dobré zkusit nejdříve prvky kanonické base) a budu doufat, že jejich obrazy při zobrazení F^{k-1}, které se lehce spočítají, vyjdou lineárně nezávislé v $\operatorname{Ker} F$; pokud ne, je třeba volbu korigovat).

Podobně pak sestrojuji řetězce délky kratší. Řetězce délky jedna je třeba nakonec sestrojit doplněním koncových vektorů už sestrojených řetězců do base $\operatorname{Ker} F$.

Pro příklady, které jsme schopni sami spočítat, se jedná zpravidla o nejvýše 4×4 matice a tam tento návod již zpravidla stačí.

Příklad: Najděte strukturu Jordanova kanonického tvaru nilpotentní matice

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ihned zjistíme, že $A^2 = 0$, a že tedy je matice A nilpotentní matice stupně 2. Snadným výpočtem zjistíme, že hodnost matice A je 2. Tedy $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ a $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 4$, $\alpha_2 = 4-2 = 2$, $\alpha_1 = 2$, a $n_2 = 2$, $n_1 = 2-2 = 0$. Matice má tedy strukturu odpovídající rozkladu $4 = 2 + 2$, má dva maximální řetězce délky 2 a žádné další.

Stačí tedy najít tyto dva řetězce. Nejjednodušší je zkusit uhodnout počáteční vektory dvou řetězců. Stačí např. zvolit dva vektory kanonické base a spočítat jejich obrazy při zobrazení F. Volba e_2, e_3 funguje (obrazy jsou lineárně nezávislé), ale např. volba e_3, e_4 by nebyla přípustná, protože jejich obrazy jsou lineárně závislé.

[2] Nelze najít nejprve všechny vlastní vektory, tedy zcela libovolnou bázi $\operatorname{Ker} F$ a tu pak doplňovat na řetězce. I bázi $\operatorname{Ker} F$ je potřeba konstruovat postupně (nejprve najdeme bázi $\operatorname{Im} F^{k-1} \subset \operatorname{Ker} F$ atd.)

Tedy v basi $e_2, F(e_2), e_3, F(e_3)$ odpovídá matici A bloková matice tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro kontrolu můžete zkusit, že pro matici C, jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů vybrané base platí $J = C^{-1} A\, C$, neboli $A = C\, J\, C^{-1}$. Pokud se vám nechce vypočítávat inversní matici k C, ověřte místo toho ekvivalentní vztah $A\, C = C\, J$.

1.5 Jordanův kanonický tvar obecné matice

Zatím jsme se zabývali pouze nilpotentními operátory, tedy těmi, jejichž jediné vlastní číslo je nula. Na Jordanův kanonický tvar bychom ale nyní dokázali snadno převést i libovolný operátor F, který má jediné vlastní číslo $\lambda \neq 0$. Operátor $F_1 = F - \lambda\,\mathrm{Id}$ je pak totiž nilpotentní. Matice $F = F_1 + \lambda\,\mathrm{Id}$ se bude tedy v bázi z řetězců $(F - \lambda\,\mathrm{Id})$ skládat z Jordanových buněk J_k, které mají ale na diagonále místo nul číslo λ.

Co budeme dělat v případě, že má operátor F například dvě vlastní čísla $\lambda_1 \neq \lambda_2$? Ve fundamentální větě 7 ukážeme, že celý prostor V lze v takovém případě zapsat jako (lineární obal) sjednocení dvou disjunktních podprostorů V_1 a V_2 (tzv. vlastních podprostorů) takových, že zobrazení $F - \lambda_1\,\mathrm{Id}$ zobrazuje V_1 do sebe a podobně $F - \lambda_2\,\mathrm{Id}$ s V_2. Pak ale restrikce zobrazení F na V_1 (tedy zobrazení $F - \lambda_1\,\mathrm{Id} : V_1 \to V_1$) je nilpotentní a lze najít bázi ve V_1 složenou z řetězců. Jordanův kanonický tvar obecného zobrazení bude tedy opět blokově diagonální a bude se skládat z Jordanových buněk, které na diagonále budou mít vlastní čísla místo nul.

Nejprve tedy budeme mluvit o rozkladu prostoru V na vlastní podprostory příslušné jednotlivým vlastním číslům.

Lemma 6 O vlastních podprostorech zobrazení
Předpokládejme, že $F : V \to V$ je lineární zobrazení a $\lambda \in \sigma(F)$ je jeho vlastní číslo. Označme symbolem F_λ lineární zobrazení $F_\lambda \overset{=}{\mathrm{def}}\ F - \lambda\,\mathrm{Id}$.

Pak existuje přirozené číslo k takové, že

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}\, F_\lambda \subset \mathrm{Ker}\, F_\lambda^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\, F_\lambda^k = \mathrm{Ker}\, F_\lambda^{k+1} = \ldots$$

a
$$V \supset \operatorname{Im} F_\lambda \supset \operatorname{Im} F_\lambda^2 \subset \ldots \supset \operatorname{Im} F_\lambda^k = \operatorname{Im} F_\lambda^{k+1} = \ldots$$

Navíc jsou podprostory $\operatorname{Ker} F_\lambda^k$ *a* $\operatorname{Im} F_\lambda^k$ *invariantní vůči* F_λ *a platí pro ně*
$$\operatorname{Ker} F_\lambda^k \oplus \operatorname{Im} F_\lambda^k = V.$$

Poznámka: Dimenze $\operatorname{Ker} F_\lambda$, neboli počet nezávislých vlastních vektorů od vlastního čísla λ se někdy nazývá *geometrická násobnost* vlastního čísla. Později v tomto paragrafu uvidíme, že se $\dim \operatorname{Ker} F_\lambda^k$ musí rovnat algebraické[3] násobnosti λ. Matici tedy nelze diagonalizovat pokud je pro některé vlastní číslo geometrická násobnost menší než algebraická.

Důkaz: První ostrá inkluse v první posloupnosti lemmatu platí, protože λ je vlastní číslo zobrazení F a tedy jádro $\operatorname{Ker} F_\lambda$ je netriviální. Protože V má konečnou dimensi, existuje přirozené číslo k takové, že $\operatorname{Ker} F_\lambda^k = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1}$, můžeme vzít za k nejmenší číslo s touto vlastností. Pak je lehké vidět, že rovnosti jsou na všech dalších místech inklusí. Vskutku, rovnost $\operatorname{Ker} F_\lambda^k = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1}$ je ekvivalentní s implikací $v \in V, F_\lambda^{k+1}(v) = 0 \Longrightarrow F_\lambda^k(v) = 0$. Je-li tedy $v \in V, F_\lambda^{k+2}(v) = F_\lambda^{k+1}(F_\lambda(v)) = 0$, pak $F_\lambda^k(F_\lambda(v)) = F_\lambda^{k+1}(v) = 0$. Tedy $\operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1} = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+2}$ a podobně se postupuje dál indukcí. Toto tvrzení lze také dokázat podobně jako jsme dokazovali lemma **??**.

Protože $\dim \operatorname{Ker} F_\lambda^j + \dim \operatorname{Im} F_\lambda^j = \dim V$, platí také pro druhou řadu inklusí pro $\operatorname{Im} F_\lambda^j$ neostré nerovnosti pro mocniny menší než k a počínaje mocninou k platí rovnosti.

Invariance podprostorů $\operatorname{Ker} F_\lambda^k$ a $\operatorname{Im} F_\lambda^k$ se ukáže pomocí jednoduché rovnosti
$$F(v) - F_\lambda(v) = \lambda v\,.$$

Tedy je-li $v \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$, pak
$$F_\lambda^k(F(v)) = F_\lambda^{k+1}(v) + \lambda F_\lambda^k(v) = 0\,,$$
čili $F(v) \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$. Podobně, je-li $v \in \operatorname{Im} F_\lambda^k$, pak zřejmě
$$F(v) = F_\lambda(v) - \lambda v \in \operatorname{Im} F_\lambda^{k+1} = \operatorname{Im} F_\lambda^k\,.$$
Zbývá ještě dokázat tvrzení o přímém součtu. Z minulého semestru víme, že $\dim \operatorname{Ker} F_\lambda^k + \dim \operatorname{Im} F_\lambda^k = \dim V$. Stačí tedy ukázat, že $\operatorname{Ker} F_\lambda^k \cap \operatorname{Im} F_\lambda^k = \{0\}$.

Předpokládejme proto, že $v \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k \cap \operatorname{Im} F_\lambda^k \neq \{0\}$. Jinými slovy existuje $u \in V$ takové, že $v = F_\lambda^k(u)$ a $v \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$. Pak $F_\lambda^{2k}(u) = 0$, neboli $u \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$, a tedy $v = 0$, což je spor. □

[3] Násobnosti plynoucí z charakteristického polynomu.

Definice 10 Zobecněné vlastní podprostory
Předpokládejme, že $F : V \to V$ *je lineární zobrazení a* λ *je jeho vlastní číslo. Označme* $F_\lambda = F - \lambda \,\mathrm{Id}$.

Podle předchozího lemmatu existuje přirozené číslo k *takové, že* $\mathrm{Ker}\, F_\lambda^k = \mathrm{Ker}\, F_\lambda^{k+1}$. *Tento společný podprostor označíme* V_λ *a nazveme ho zobecněný kořenový podprostor zobrazení* F, *příslušný vlastnímu číslu* λ. *Ekvivalentní definice tohoto podprostoru je*

$$V_\lambda := \{v \in V \,|\, \exists\, j \in \mathbb{N}, F_\lambda^j(v) = 0\}\,.$$

Poznámka: Všimněte si, že zobrazení F_λ zachovává zobecněný kořenový podprostor V_λ (jak jsme dokázali v předchozím lemmatu) a zúžení F_λ na V_λ (tedy zobrazení $F'_\lambda : V_\lambda \to V_\lambda$) je nilpotentní zobrazení (V_λ jsme přímo definovali tak, aby $F_\lambda^k(v) = 0, \forall v \in V$). Jeho strukturu můžeme zjistit postupem popsaným v minulém paragrafu. Všimněte si také, že řetězec pro vlastní číslo λ pro zobrazení F je totéž jako řetězec pro nilpotentní zobrazení F_λ na V_λ.

Definice 11 Řetězce vektorů příslušné vlastnímu číslu, Jordanova buňka
Prostor $\mathrm{Ker}\, F_\lambda \setminus \{0\}$ *je prostor vlastních vektorů pro vlastní číslo* λ. *Řekneme, že posloupnost* $v_k \to v_{k-1} \to \ldots \to v_1$ *je* řetězec pro vlastní číslo λ, *pokud* v_1 *je vlastní vektor pro vlastní číslo* λ *(nebo jinak* $F_\lambda(v_1) = 0$*) a platí*

$$F(v_k) = \lambda v_k + v_{k-1},\ F(v_{k-1}) = \lambda v_{k-1} + v_{k-2},\ \ldots, F(v_2) = \lambda v_2 + v_1\,,$$

nebo jinými slovy

$$F_\lambda(v_k) = v_{k-1},\ \ F_\lambda(v_{k-1}) = v_{k-2}\,, \ldots,\ F_\lambda(v_2) = v_1\,.$$

Čtvercovou matici J_m^λ *typu* $m \times m$

$$J_m^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

nazveme Jordanovou buňkou řádu m pro vlastní číslo λ.

Věta 7 Jordanův kanonický tvar
Předpokládejme, že $F : v \to V$ je lineární zobrazení a $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_j\}$ je jeho spektrum. Pak zobecněné kořenové podprostory $V_{\lambda_j}, j = 1, \ldots, k$ jsou invariantní vůči zobrazení F a platí

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}\,.$$

Pro každé vlastní číslo λ je zobrazení $F_\lambda = F - \lambda\,\mathrm{Id}$ zúžené na V_λ nilpotentní a jeho baze řetězců a Jordanův kanonický tvar se dá určit postupem vysvětleným v větě 6.

Existuje tedy baze prostoru V z řetězců pro jednotlivá vlastní čísla zobrazení F. V této bazi odpovídá zobrazení F blokově diagonální matice, která má na diagonále Jordanovy buňky J_m^λ různých řádů, odpovídající postupně různým vlastním číslům zobrazení F (ke každému vlastnímu číslu jednu nebo více buněk, součet[4] jejich řádů je roven algebraické násobnosti vlastního čísla). Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí jednotlivých Jordanových buněk na diagonále.

Je-li zobrazení F na $\mathbb{R}^n$ určeno maticí A, pak výše uvedená bloková matice je podobná matici A a nazývá se její Jordanův kanonický tvar.

Důkaz: Nechť λ_1 je jedno z vlastních čísel zobrazení F. Víme již, že existuje přirozené číslo k takové, že kořenový podprostor V_{λ_1} pro vlastní číslo λ_1 je roven $\operatorname{Ker} F_{\lambda_1}^k$ a že $V_{\lambda_1} \oplus \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k = V$.

Zúžení zobrazení F na $\operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$ *nemá* vlastní číslo λ_1, ale má pak opět aspoň jedno vlastní číslo, označme ho λ_2. Stejně jako předtím napíšeme $\operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$ jako přímý součet $V_{\lambda_2} \subset \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$ a obrazu F zúženého na $\operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$. Takto indukcí dokážeme tvrzení věty o přímém součtu kořenových podprostorů (na konci dostaneme zobrazení, které nemá žádné vlastní číslo, a musí tudíž zobrazovat jen triviální prostor $\{0\}$).

Zobrazení F zúžené na V_λ má jediné vlastní číslo, a to nulu. Vskutku, pokud by existoval vektor $v \in V_\lambda$, pro který by platilo $F(v) = \lambda' v, \lambda' \neq \lambda$, pak $F_\lambda(v) = (\lambda - \lambda')v$ a $0 = F_\lambda^k(v) = (\lambda - \lambda')^k v$, tedy $v = 0$. Je tedy podle věty 4 nilpotentní. $\square$

S větou 7 za zády budeme moci snadno ukázat, že dimenze vlastních podprostorů (tedy součet řádů Jordanových buněk příslušných jednomu vlastnímu číslu) je rovna násobnosti vlastního čísla.

[4] Dokážeme jako zvláštní větu 8.

Věta 8 O dimenzi vlastních podprostorů
Nechť $p(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ *je charakteristický polynom zobrazení* F. *Pak* $\dim V_{\lambda_i} = n_i$.

Důkaz: Použijeme jednoduché tvrzení, že charakteristické polynomy podobných matic jsou stejné: $\det(A-\lambda E) = \det C(A-\lambda E)C^{-1} = \det(CAC^{-1} - \lambda E)$. Pro libovolnou matici A tedy můžeme spočítat charakteristický polynom na jejím Jordanově kanonickém tvaru J_A. Matice J_A je ale horní trojúhelníková, takže $p(\lambda) = \det(J_A - \lambda E)$ je roven součinu diagonálních elementů $J_A - \lambda E$. V charakteristickém polynomu se tedy $(\lambda - \lambda_i)$ bude vyskytovat tolikrát, kolik je součet řádů Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu λ_i, neboli dimenze V_{λ_i}. $\square$

Věta 9 (Hamilton-Cayley)
Označme $p(\lambda)$ *charakteristický polynom matice* A, *pak* $p(A) = 0$.

Důkaz: Jsou-li $n_i, i = 1, \dots, j$, $n = \sum_i n_i$, násobnosti kořenů λ_i, polynomu $p(\lambda)$, pak
$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_j)^{n_j}.$$
Je zřejmé, že matice $A - \lambda_i \operatorname{Id}, i = 1, \dots, j$ spolu navzájem komutují a že na jejich pořadí ve výrazu
$$p(A) = (-1)^n (A - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1} \dots (A - \lambda_j \operatorname{Id})^{n_j}$$
nezáleží.

Z definice zobecněných kořenových podprostorů V_i plyne, že $\dim V_i = n_i$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ a $(A - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i} v_i = 0$ pro všechny vektory $v_i \in V_i$. Tedy i $p(A)v_i = 0$ pro vektory $v_i \in V_i$ (členy $(A - \lambda_i \operatorname{Id})$ spolu navzájem komutují, takže chceme-li ukázat $p(A)v_i = 0$, prokomutujeme $(A - \lambda_i)^{n_i}$ v $p(A)$ úplně doprava). Ale každý vektor $v \in V$ se dá napsat jako součet $v = v_1 + \dots + v_j$, tedy také $p(A)v = 0$.

Jinými slovy: nechť $A = CJ_AC^{-1}$, pak $p(A) = Cp(J_A)C^{-1}$. Matice $J_A - \lambda_i \operatorname{Id}$ má u buněk příslušných vlastnímu číslu λ_i nuly. Její n_i–tá mocnina bude mít nuly místo celých Jordanových buněk (J_k^2 má jedničky ob jednu řadu nad diagonálou, J_k^k je identicky nulová matice); vidíme dokonce, že by stačilo $(J_A - \lambda_i \operatorname{Id})$ umocnit na délku nejdelšího řetězce příslušného λ_i, což je číslo $\leq n_i$.

Pro každý z Jordanových bloků na diagonále tedy bude v součinu $p(J_A)$ člen, který bude mít místo tohoto bloku nulovou matici. Součin $p(J_A)$ bude tedy nulová matice. $\square$

Poznámka: V důkazu Hamiltonovy–Cayleyovy věty bylo vidět, že někdy lze vytvořit i polynomy q nižších stupňů než $p(\lambda)$, pro něž je $q(A) = 0$. Mezi těmito polynomy existuje jeden takový (m_A), že všechny ostatní polynomy s vlastností $q(A)$ jsou buď násobkem m_A nebo mají vyšší stupeň. Polynom m_A se nazývá *minimální polynom.*

Jak tento polynom vypadá? Všimli jsme si, že pokud n_i–násobnému vlastnímu číslu λ_i neodpovídá zrovna řetězec délky n_i, lze v rozkladu $p(\lambda)$ nahradit člen $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ pouze m_i–tou mocninou, kde m_i je délka nejdelšího řetěce příslušného vlastnímu číslu λ_i. Polynom $m_A(\lambda)$ bude mít tedy tvar $\prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$. Pokud si vlastnost $q(A) = 0$ rozmyslíme pro Jordanův kanonický tvar, zjistíme, že jiné polynomy nižšího či stejného stupně (až na násobek) neexistují.

1.6 Exponenciela matice

Jak jsme již naznačili u vztahu 1, diagonalizaci, případně jordanizaci provádíme kvůli tomu, abychom mohli snadno počítat funkce matic. Začneme s exponenciálou.

Definice 12 Limita posloupnosti matic
Je-li B_n posloupnost matic typu $k \times m$, řekneme, že $\lim B_n = B$, pokud pro každé $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m$ platí $\lim_{n\to\infty} (B_n)_{ij} = B_{ij}$. Podobně se definuje pro matice součet řady předpisem

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} B_k \,,$$

pokud limita existuje.

Definice 13 Exponenciála matice
Pro libovolnou čtvercovou matici A definujeme exponencielu $\exp A$ takto:

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/(n!) \,.$$

Lemma 7 *Pro libovolnou čtvercovou matici A exponenciela $\exp A$ existuje.*

Důkaz: Odůvodnění patří do analýzy, a tak ho jen naznačíme. Nechť je matice A typu $k \times k$. Z analýzy víte, že z absolutní konvergence řady plyne její konvergence obyčejná a že řada $\sum_n x^n/(n!)$ konverguje pro každé reálné číslo x absolutně.

Definujme normu $||A||$ matice A takto: $||A|| = \max_{ij}\{|A_{ij}|\}$. Pak platí pro každé i, j že $A_{ij} \leq ||A||$. Indukcí se snadno ukáže, že

$$|(A^n)_{ij}| \leq ||A^n|| \leq k^{n-1}||A||^n.$$

Z toho ihned plyne, že pro každé i, j je řada

$$\sum_n (A^n)_{ij}/(n!)$$

konvergentní, tedy $\exp A$ existuje. □

Věta 10 Vlastnosti exponenciály matice

1. *Pokud* $AB = BA$, *pak* $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.
2. $\exp A \exp(-A) = \mathrm{Id}$.
3. *Pro diagonální matici* $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ *platí* $\exp A = \mathrm{diag}\,(e^{A_1}, \ldots, e^{A_k}))$.
4. *Pokud* $A = C^{-1}BC$, *pak* $\exp A = C^{-1} \exp BC$.

Důkaz:

1. Použijeme binomický vzorec $(A + B)^n = \sum_i \binom{n}{i} A^{n-i}B^i$, který stejně jako pro čísla funguje i pro komutující matice A, B.

$$\exp(A+B) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(A+B)^p = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!(p-n)!}A^nB^{p-n} =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}A^n\frac{1}{(p-n)!} \cdot B^{p-n} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n \cdot \frac{1}{m!}B^m =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}B^m = \exp A \exp B.$$

2. Je to důsledek (1), protože A a $-A$ komutují.

3. Zřejmě $A^n = \operatorname{diag}(A_1^n, \dots, A_k^n)$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n! = \operatorname{diag}(\exp(A_1), \dots, \exp(A_k)$.

4. Stačí si uvědomit, že
$$(C^{-1}BC)^n = C^{-1}B^nC.$$

□

Příklad: Pokud J_k značí Jordanovu $k \times k$ buňku (s nulami na diagonále), pak
$$\exp[t(\lambda \operatorname{Id} + J_k)] = \exp(t\lambda \operatorname{Id}) \exp(tJ_k) = e^{t\lambda} \exp(tJ_k) =$$

$$= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{k-2}/(k-2)! \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\exp(tJ_k)$ tedy má na hlavní diagonále samé jedničky a na další horních vedlejších diagonálách má postupně $t, \dots, t; t^2/2!, \dots, t^2/2!; \dots; t^k/k!$.

Ověřte, že pro libolnou horní trojúhelníkovou matici A, která má na diagonále čísla $a_1, \dots, a_k$ je matice $\exp(A)$ opět horní trojúhelníková a má na diagonále čísla
$$e^{a_1}, \dots, e^{a_k}.$$

Poznámka: Blokově diagonální matice se umocňují — a tedy se na ně i aplikuje exponenciála — po blocích:

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_i}^{\lambda_i} \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(J_{n_1}^{\lambda_1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(J_{n_2}^{\lambda_2}) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(J_{n_i}^{\lambda_i}) \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Před časem jsme si pro diagonalizovatelné matice dokázali pozoruhodný vztah
$$\det \exp A = \exp(\operatorname{Tr} A).$$

S tím, co teď víme je jednoduché ověřit platnost tohoto vztahu pro libovolnou matici!

Vskutku, již dlouho víme, že $\operatorname{Tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{Tr}(A)$. Všimněte si, že bod (4) věty 10 ukazuje, že $\det \exp(C^{-1}AC) = \det \exp(A)$. Výše uvedený vztah stačí tedy ověřit pro matice v Jordanově kanonickém tvaru. To jsou ale horní trojúhelníkové matice, které mají na diagonále vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ s násobnostmi $n_1, \ldots, n_j$. Z toho ihned plyne, že pravá i levá strana vztahu se rovnají $\exp(n_1\lambda_1 + \ldots + n_j\lambda_j)$.

1.6.1 Řešení soustav obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

Zkoumejme řešení soustavy rovnic zapsané jako

$$A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix}, \text{ čili } \dot{y} = Ay\,. \tag{3}$$

Lemma 8 *Označíme-li $Y(t) = e^{At}$, potom platí $\dot{Y}(t) = Ae^{At}$ a sloupce $Y(t)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic (3), tj. jsou lineárně nezávislé.*

Řešení soustavy $Y(t) = e^{At}$, s počátečními podmínkami $y(0) = y_0$ je dáno vztahem

$$Y(t) = e^{At}y_0.$$

Důkaz: Platí

$$[\mathrm{Id} + tA + t^2A^2/2! + \ldots]' = A + tA^2 + (t^2/2!)A^3 + \ldots = A\exp(tA)\,.$$

Nezávislost sloupců $\exp(At)$ dostaneme díky formulce $\det\exp(At) = \exp\mathrm{Tr}(At)$, což musí být vždy kladné číslo. $\square$

Příklad na soustavu diferenciálních rovnic spočítáme na konci následujícího oddílu.

Výše uvedený jednoduchý vzorec pro řešení soustavy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic ještě není definitivní odpověď. Problém je v tom, že exponenciela matice je dána nekonečným součtem (alespoň podle definice) a tak není řešení napsáno v explicitním tvaru. Je tedy třeba umět exponencielu matice v popisu řešení napsat pomocí elementárních funkcí explicitně. Je více možností, jak to udělat.

První z nich používá Jordanova kanonického tvaru matice (v tom je jeho význam a užitečnost). Vskutku, známe-li Jordanův kanonický tvar J matice A, $A = C^{-1}JC$, pak $\exp(tA) = C^{-1}\exp(tJ)C$. Matice J je blokově diagonální a její bloky mají tvar $\lambda\,\mathrm{Id} + J_k$. Matice $\exp(tJ)$ je tedy také blokově diagonální a její jednotlivé bloky mají tvar $e^{\lambda t}\exp(tJ_k)$ popsaný explicitně výše.

Druhý možný postup shrneme v samostatném oddílu.

1.6.2 Výpočet exponenciály pomocí projektorů na vlastní podprostory

Označíme si λ_i vlastní čísla matice A, tj. kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$; dále označme ν_i jejich násobnosti a m jejich počet. Víme již, že zobecněné kořenové podprostory $V_i = \{v \in \mathbb{R}^n, (A - \lambda_i)^{\nu_i} v = 0\}$ vytváří celý prostor $V = \mathbb{R}^n$, tj. $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$, a jejich jediným společným prvkem je nulový prvek, tj. $\forall j \neq k : V_j \bigcap V_k = \{0\}$. Působení $\exp(At)$ na $v_i \in V_i$ má ale poměrně jednoduchý tvar.

Je-li $v_i \in V_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i E)^{\nu_i}$, potom $e^{At} v_i = e^{(\lambda_i + A - \lambda_i)t} v_i = e^{\lambda_i t} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (A - \lambda_i)^j / (j!) v_i$, kde pro $j \geq \nu_i$ (a možná i dříve[5]) je výraz $(A - \lambda_i)^j / (j!) v_i$ v sumě nulový vektor, tj. celý součet je tvořen pouze konečně mnoha nenulovými členy a je tedy zcela explicitní.

Každý vektor $v \in \mathbb{R}^n$ lze jednoznačně rozložit na $v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j$, kde $v_j \in V_j$. K určení e^{At} je tedy zapotřebí najít projektory (tj. zobrazení $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$), která vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ přiřadí odpovídající $v_i \in V_i$. Tyto projektory najdeme trikem.

Charakteristický polynom matice A je $p(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} (-1)^n$ a nechť platí

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}},$$

kde $P_i(\lambda)$ jsou polynomy stupně nejvýše $\nu_i - 1$ (rozklad na parciální zlomky). Pak

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}} p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda)(-1)^n \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}.$$

Jednotlivé sčítance jsou již (po dosazení A místo λ) přímo hledané projektory, které označíme Π_i:

$$\Pi_i = P_i(A) \prod_{i \neq j} (A - \lambda_j \operatorname{Id})^{\nu_j},$$

neboť každý z nich je lineární zobrazení, jehož jádro (nulový prostor) tvoří lineární obal všech V_j pro $j \neq i$ (díky přítomnosti členu $(A - \lambda_j E)^{\nu_j}$), a jejich

[5] Počínaje j rovným délce nejdelšího řetězce příslušného k λ_i.

součet je identické zobrazení (z těchto dvou vlastností už plyne $\Pi_i v_i = v_i$, což není z tvaru Π_i přímo vidět). Zjistili jsme tedy

$$\exp Atv = \exp At(\Pi_1(v) + \ldots + \Pi_m(v)) = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} \frac{1}{j!}(A - \lambda_i)^j \Pi_i v \quad (4)$$

Poznámka: Všimněte si, že charakteristický polynom p můžeme v celém postupu nahradit minimálním polynomem m_A (viz poznámku za větou 9), který může mít menší stupeň než p.
Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1\,, \end{aligned} \quad (5)$$

neboli

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděme nejprve vlastní čísla A:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

Dále budeme rozkládat $p(\lambda)$ na parciální zlomky.

$$\frac{1}{\lambda^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}i}{\lambda + i} - \frac{\frac{1}{2}i}{\lambda - i}\,.$$

Nyní tento rozklad vynásobíme $p(\lambda)$ a dosazením $\lambda = A$ dostaneme projektory

$$\Pi_1(A) = \frac{1}{2i}(A + iE) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2(A) = -\frac{1}{2i}(A - iE) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Jelikož jsou obě vlastní čísla jednonásobná, ze sumy přes j (viz vztah 4) zbudou jen členy $j = 0$.

$$e^{At} = e^{it}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Pi_1(A) + e^{-it}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Pi_2(A)$$

$$e^{At} = e^{it}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + e^{-it}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Konečně po úpravě

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (e^{it}+e^{-it})/2 & (e^{it}-e^{-it})/(2i) \\ (e^{it}-e^{-it})/(-2i) & (e^{it}+e^{-it})/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Povšimněme si, že $e^{At} = 1$ pro $t = 0$.
Poznámka: Povšimněme si, že $A^2 = -1$, a tedy jsme mohli při počítání exponenciály postupovat i rychleji.

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i t^i/(i!) = E + At - \frac{1}{2!}t^2 E - At^3\frac{1}{3!} + \ldots = 1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}/((2k)!) +$$

$$+ A\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k+1}/((2k+1)!) = E\cos t + A\sin t\,.$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1\,, \end{aligned} \tag{6}$$

čili

$$\dot{y} = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

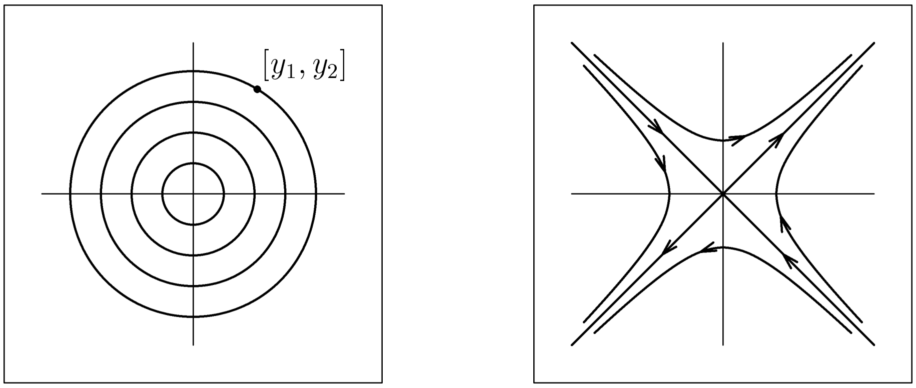
Tentokrát použijeme rychlejší metodu, která ale využívá velmi speciální vlastnosti matice A: povšimneme si, že $A^2 = 1$. Výpočet exponenciály bude tedy možno provést přímo:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i t^i/(i!) = 1\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}/((2k)!) + A\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1}/((2k+1)!) =$$

$$= 1\cosh t + A\sinh t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pro počáteční podmínky udané sloupcovým vektorem $y(0)$ je řešením soustavy $y(t) = e^{At}y(0)$. V prvním příkladu je tedy obecné řešení s počátečními podmínkami $y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$) udáno jako:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1\cos t + y_2\sin t \\ -y_1\sin t + y_2\cos t \end{pmatrix}$$



Obrázek 6: Trajektorie řešení soustavy (5) (vlevo) a soustavy (6) (vpravo) pro různé počáteční podmínky.

Povšimněme si, že platí: $y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = y_1^2 + y_2^2$, tedy trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ tvoří kružnice se středem v počátku, viz obrázek 6 vlevo.

Ve druhém případě je obecné řešení

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cosh t + y_2 \sinh t \\ y_1 \sinh t + y_2 \cosh t \end{pmatrix}$$

a tentokrát platí $y_1(t)^2 - y_2(t)^2 = y_1^2 - y_2^2$, a tedy trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ jsou hyperboly (obrázek 6 vpravo).

Bod $[0, 0]$, ke kterému se řešení blíží a poté se zase vzdalují (v čase, tj. jako funkce t) se nazývá sedlový bod.

2 Duální prostory, duální zobrazení

2.1 Duální prostor

Poznámka: V této kapitole budeme všechna tvrzení formulovat jen pro případ reálných vektorových prostorů a reálných zobrazení mezi nimi. Všechna tvrzení lze ovšem naprosto stejně říct pro případ, kdy bychom uvažovali komplexní vektorové prostory a komplexní lineární zobrazení mezi nimi; příslušnou jednoduchou modifikaci si čtenář (či posluchač) snadno doplní. Všechny prostory ale budou konečné dimenze, leckterá tvrzení nejsou pro lineární vektorové prostory nekonečné dimenze pravdivá!

Důležitá dohoda $\equiv$ označení.

Doposud jsme používali indexy jako dolní indexy ve všech případech, pro vektory base, souřadnice vektorů, koeficienty matic, apod. Je už ale vhodný čas, začít systematicky používat typicky fyzikální označení, kdy se indexy umísťují dolu i nahoru a přitom má příslušná konvence přesný smysl. Zároveň toto označení přispěje k jisté automatické kontrole správnosti vzorců a umožní účinně používat Einsteinovu sumační konvenci.

Dohodněme se tedy, že:

1. Je-li $e_1, \ldots, e_n$ baze vektorového prostoru V, budeme její indexy psát vždy dole.

2. Jsou-li $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ souřadnice vektoru $v \in V$ vůči nějaké bazi, budeme příslušné indexy psát vždy nahoře.

3. Je-li A^i_j matice lineárního zobrazení f, pak budeme její první, řádkový index psát nahoře a druhý, sloupcový index psát dole. V tomto případě pak není třeba striktně hlídat umístění indexů, oba mohou být nad sebou.

Postupně při probírání dalších pojmů budeme tyto konvence doplňovat. Jde o označení typické v tensorovém počtu, který budeme probírat zanedlouho.

Definice 14 Duální prostor
Je-li V lineární vektorový prostor, pak prostor všech lineárních zobrazení V do $\mathbb{R}$ nazveme duálním prostorem *k prostoru V a označíme ho symbolem V^*. Prostor V^* je opět lineární vektorový prostor (v minulé kapitole jsme se již dozvěděli, že prostor $L(V, W)$ všech lineárních zobrazení jednoho vektorového prostoru V do druhého vektorového prostoru W je lineární vektorový prostor, případ V^* je speciální případ této situace).*

Prvkům prostoru V^* se často říká lineární funkcionály. *Ve fyzice se také často používá pro prvky z prostoru V^* název kovektory (na rozdíl od prvků z V, které se tradičně nazývají vektory).*

Poznámka: Chtěli bychom nyní zjistit, jak souvisí dimenze vektorového prostoru V a dimenze jeho duálu V^* a zavést pojem duálních bazí obou prostorů. Řekněme si nejdříve ještě obecnější fakt, tj. jakým způsobem se dá jednoduše zjistit dimenze vektorového prostoru $L(V, W)$ všech lineárních zobrazení jednoho vektorového prostoru V do druhého vektorového prostoru W. (Připomeňme si, že $L(V,W) := \{f : V \to W | f \text{ je lineární}\}$.)

Slovy se to dá popsat takto: Lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na pevně zvolené bazi a tyto hodnoty lze zvolit libovolně.

Lemma 9 *Zvolme pevně bazi $e_1, \ldots, e_n$ lineárního vektorového prostoru V a předpokládejme, že W je vektorový prostor. Pak pro každou n-tici vektorů $w_1, \ldots, w_n \in W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f \in L(V,W)$, splňující podmínky*

$$f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n.$$

Tatko definované přiřazení (zobrazení) je isomorfismus lineárního prostoru n-tic $W \times \ldots \times W$ (n-krát) a prostoru $L(V,W)$.

Důkaz: Předpokládajme, že je tedy dána n-tice vektorů $w_1, \ldots, w_n$. Definujme zobrazení $f : V \to W$ následujícím způsobem.

Je-li $v \in V$ a je-li $V = \sum_{i=1}^n \alpha^i e_i$ jeho rozklad do baze $e_1, \ldots, e_n$, pak definujeme hodnotu $f(v)$ předpisem

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha^i w_i.$$

Je lehké ověřit, že takto definované zobrazení je lineární a je zřejmé, že je jednoznačně určeno vybranými vektory $w_1, \ldots, w_n$.

Takto definované přiřazení (zobrazení) z prostoru $W \times \ldots \times W$ (n-krát) do $L(V,W)$ je zřejmě na (je-li $f \in L(V,W)$, pak stačí zvolit $w_i = f(e_i)$ a použít linearitu f).

Zároveň je toto zobrazení prosté, protože rovnají-li se dvě lineární zobrazení na vektorech e_i, které tvoří bazi, rovnají se díky linearitě všude. □

Definice 15 Duální báze
Předpokládejme, že $e_1, \ldots, e_n$ je baze vektorového prostoru V. Pak definujeme prvky $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ předpisem $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$, kde δ^i_j je Kroneckerovou delta.

Tato n-tice prvků $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ se nazývá duální baze (nebo přesněji baze duální k bazi $e_1, \ldots, e_n$).

Lemma 10 *1. Pro libovolné $v \in V, \varphi \in V^*$ platí*

$$v = \sum_i \varepsilon^i(v) e_i, \; \varphi = \sum_i \varphi(e_i)\varepsilon^i.$$

2. *Výše definované prvky $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ tvoří bazi prostoru V^*. Tedy* $\dim V^* = n$.

3. *Je-li $\varphi = \sum b_i \varepsilon^i \in V^*$ a $v = \sum_j \alpha^i e_i$, pak*
$$\varphi(v) = \sum_i b_i \alpha^i.$$

Důkaz:

1. Každý vektor $\in V$ se dá rozložit do baze $v = \sum_i \alpha^i e_i$, použitím funkcionálu ε^j na obě strany rovnice dostaneme
$$\varepsilon^j(v) = \sum_i \alpha^i \varepsilon^j(e_i) = \sum_i \alpha^i \delta_i^j = \alpha^j.$$
Podobně, je-li $\varphi \in V^*$ a označíme-li $\tilde{\varphi} := \sum_j \varphi(e_j)\varepsilon^j$, pak pro každé $v \in V$ platí
$$\tilde{\varphi}(v) = \sum_j \varphi(e_j)\varepsilon^j(v) = \varphi(\sum_j \varepsilon^j(v) e_j) = \varphi(v).$$

2. Je třeba ověřit, že prvky $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ generují celé V^* a že jsou lineárně nezávislé. První tvrzení je dokázano v předchozím bodě. Pokud platí pro čísla $a_1, \dots, a_n$ rovnost $\sum_i a_i \varepsilon^i = 0$, pak pro každé j dostaneme
$$0 = \sum_i a_i \varepsilon^i(e_j) = \sum_i a_i \delta_j^i = a_j.$$

3. Platí
$$\varphi(v) = \sum b_i \varepsilon^i(\sum_j \alpha^j e_j) = \sum_i \sum_j b_i \alpha^j \varepsilon^i(e_j) = \sum_i \sum_j b_i \alpha^j \delta_j^i = \sum_i b_i \alpha^i.$$
□

Věta 11 O tom, jak se projeví transformace báze na duální bázi
Nechť $e_1, \dots, e_n$, resp. $e'_1, \dots, e'_n$ jsou baze V a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$, resp. $(\varepsilon')^1, \dots, (\varepsilon')^n$ jsou k nim duální baze V^*. Označme symbolem E matici přechodu od baze $e_1, \dots, e_n$ k bazi $e'_1, \dots, e'_n$, tj.
$$e'_i = \sum_j e_j E_i^j.$$

Pak platí:

1. $(\varepsilon')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \varepsilon^j$,

2. Pro souřadnice α^i*, resp.* $(\alpha')^i$ *vektoru* $v \in V$ *a pro souřadnice* a_i*, resp.* a'_i *lineárního funkcionálu* $\varphi \in V^*$ *platí*

$$(\alpha')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \alpha^j,\ a'_i = \sum_j a_j E^j_i.$$

Důkaz:

1. Bazi $(\varepsilon')^1, \ldots, (\varepsilon')^n$ lze vyjádřit pomocí nečárkované baze, koeficienty v rozkladu do baze $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ budou tvořit matici, kterou označíme F :

$$(\varepsilon')^i = \sum_j F^i_j \varepsilon^j, .$$

   Pak dostaneme

$$\delta^i_j = (\varepsilon')^i(e'_j) = \sum_k F^i_k \varepsilon^k (\sum_m e_m E^m_j) =$$

$$= \sum_k \sum_m F^i_k E^m_j \varepsilon^k(e_m) = \sum_k \sum_m F^i_k E^m_j \delta^k_m = \sum_k F^i_k E^k_j.$$

   Tedy součin matic $F \cdot E$ se rovná jednotkové matice a tedy $F = E^{-1}$.

2. Víme již, že souřadnice α^i, resp. $(\alpha')^i$ vektoru $v \in V$ jsou dány vztahy $\alpha^i = \sum_i \varepsilon^i(v)$, resp. $(\alpha')^i = \sum_i (\varepsilon')^i(v)$. Požadovaný vztah je pak důsledkem bodu 1.

   Přesně stejně platí, že souřadnice a_i kovektoru se při změně baze transformují stejně jako prvky e_i baze V, neboť $a_i = \varphi(e_i)$.

$\square$

Poznámka: Pokud si napíšeme všechny čtyři vzorečky pod sebe, vidíme, že
$e'_i = \sum_j e_j E^j_i$
$(\varepsilon')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \varepsilon^j$,
$(\alpha')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \alpha^j$,
$a'_i = \sum_j a_j E^j_i$.

Je zřejmé, že veličiny, které mají index nahoře se transformují pomocí matice E^{-1}, zatímco veličiny s indexy dole se transformují pomocí matice přechodu E. To se pak dobře pamatuje a je to první ukázka transformačních vlastností tenzorů.

2.2 Duální zobrazení

Definice 16 Duální zobrazení
Předpokládejme, že $F : V \to W$ je lineární zobrazení.

Pak definujeme duální zobrazení $F^* : W^* \to V^*$ předpisem

$$[F^*(\varphi)](v) := \varphi(F(v));\ \varphi \in W^*,\ v \in V.$$

Poznámka: Všimněte si, že duální zobrazení působí v opačném směru, zobrazuje W^* do V^*! Je to zcela přirozené, pokud se vezme v úvahu následující interpretace duálního zobrazení F^* : lineární funkcionál $\varphi \in W^*$ je podle definice lineární zobrazení z W do $\mathbb{R}$. Přirozeně definované složené zobrazení $\varphi \circ F$ je pak zřejmě lineární funkcionál na V a tedy je to prvek z V^*. Duální zobrazení F^* je pak prostě přiřazení $F^* : \varphi \to \varphi \circ F$!

2.3 Druhý duál

Věta 12 Souvislost mezi prostory V a $(V^*)^*$
Existuje kanonický (tj. na nezávislý na jakékoliv volbě báze) isomorfismus Φ mezi V a $(V^*)^*$. Tento isomorfismus je určen vztahem

$$\Phi(v)(v^*) = v^*(v),\ v \in V,\ v^* \in V^*.$$

Důkaz: Je zřejmé, že Φ je lineární zobrazení mezi prostory stejné dimenze. Stačí tedy ukázat, že je prosté.

Pokud by pro nějaké $v \in V$ platilo $\Phi(v) = 0$, pak podle definice pro každé $v^* \in V^*$ platí $v^*(v) = 0$. Z toho ale ihned plyne, že $v = 0$, neboť pro každé $v \in V, v \neq 0$ existuje $v^* \in V^*$ takové, že $v^*(v) = 0$ (rozmyslete se sami, např. lze v vzít jako první element baze a za v^* si vzít první element baze duální). $\square$

Věta 13 O matici duálního zobrazení
Pokud $e_1, \ldots, e_n$ a $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, jsou duální baze V a V^*, resp. $f_1, \ldots, f_n$ a $\psi^1, \ldots, \psi^n$, jsou duální baze W a W^*, a je-li A matice zobrazení F vůči bazím $e_1, \ldots, e_n$, resp. $f_1, \ldots, f_n$ a $\psi^1, \ldots, \psi^n$, pak matice zobrazení F^* vůči bazím $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, resp. $\psi^1, \ldots, \psi^n$, je rovna transponované matici A^t, přesněji pak pro $\phi = \sum_i b_i \psi^i$, $F^*(\phi) = \sum_i a_i \varphi^i$ platí

$$a_i = \sum_j A_i^j b_j.$$

Důkaz: Základní vztah, který charakterizuje duální zobrazení je

$$F^*(\phi)(v) = \phi(F(v)),\ \forall v \in V, \phi \in W^*.$$

Víme, že:

1. jsou-li α_i souřadnice vektoru v a A matice lineárního zobrazení F vůči příslušným bazím, pak $\beta^j = \sum_i A_i^j \alpha^j$ jsou souřadnice obrazu $F(v)$;
2. jsou-li $f_1, \ldots, f_n$ a $\psi^1, \ldots, \psi^n$ duální baze W a W^* a jsou-li b_j souřadnice funkcionálu ϕ, pak

$$\phi(F(v)) = \sum_j b_j \beta^j = \sum_j \sum_i b_j A_i^j \alpha^i$$

a tedy i

$$F^*(\phi)(v) = \sum_j b_j \beta^j = \sum_j \sum_i b_j A_i^j \alpha^i.$$

Ale pokud označíme a_j souřadnice funkcionálu $F^*(\phi)$ vůči bazi $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, pak hodnota na levé straně je rovna

$$F^*(\phi)(v) = \sum_j a_i \alpha^i = \sum_j \sum_i b_j A_i^j \alpha^i.$$

Tedy $\alpha^i = \sum_j \sum_i b_j A_i^j$. □

Poznámka: Pomalu se už dostáváme do oblasti, kdy ilustrace našich pojmů pomocí násobení matic přestává být užitečné. Situace s maticovým zápisem lineárního zobrazení a jeho duálu je typickým příkladem. Definice matice lineárního zobrazení byla volena tak, aby se dané lineární zobrazení $F : V \to W$ převedlo (při zápisu souřadnic jako sloupců) na násobení maticí A. Přesněji, pokud se vektorové prostory V, resp. W ztotožní pomocí zvolených bazí s Eukleidovskými prostory a α, resp. β jsou souřadnice vektoru v, resp. jeho obrazu $F(v)$, pak se zobrazení F převede na zobrazení $\alpha \to \beta = A \cdot \alpha$.

Pokud bychom totéž provedli pro duální prostory V^* a W^* a duální zobrazení F^*, tj. pokud bychom souřadnice b_i lineárního funkcionálu $\varphi \in W^*$ a souřadnice a_i jeho obrazu $F^*(\phi)$ psali také jako sloupce, pak matice zobrazení F^* bude transponovaná matice A^t. Proto se někdy místo duální zobrazení říká také transponované nebo adjungované zobrazení.

Protože je ale mnohem přirozenější zapisovat souřadnice lineárních funkcionálů jako řádkové vektory (aby se pak hodnota lineárního funkcionálu

na daném vektoru pomocí souřadnic napsala jako součin řádkového vektoru, který reprezentuje lineární funkcionál a sloupcového vektoru, který reprezentuje vektor), je duální zobrazení reprezentováno na souřadnicích zapsaných jako řádkové vektory jako násobení zprava maticí A.
Poznámka: Z minulé přednášky víme, že lze kanonicky ztotožnit druhý duál $(V^*)^*$ s původním prostorem V. Pokud bychom tedy uvažovali prostor $W = V^*$ jako základní prostor a $W^* \simeq V$ jako jeho duál, pak se role V a V^* přehodí. Proto se někdy také dualita chápe jako bilineární zobrazení na $V^* \times V$, které prvkům $\phi \in V^*$ a $v \in V$ přiřadí číslo $\phi(v) \in \mathbb{R}$. Pak je role obou prostorů symetrická.

3 Bilineární a kvadratické formy

3.1 Bilineární formy

Definice 17 Bilineární forma
Jsou-li V_1, V_2 vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, pak zobrazení

$$B : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R},$$

se nazývá bilineární forma*, pokud pro každý vektor $v_1 \in V_1$ je zobrazení*

$$v_2 \in V_2 \to B(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$$

lineární funkcionál na V_2 a pokud pro každý vektor $v_2 \in V_2$ je zobrazení

$$v_1 \in V_1 \to B(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$$

lineární funkcionál na V_1.

Definice 18 Základní pojmy týkající se bilineárních forem
Předpokládejme v definici 17 dále, že $V_1 = V_2 = V$. Řekneme, že je bilineární forma na $V \times V$

1. symetrická*, pokud platí $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in V$,*

2. antisymetrická*, pokud platí $B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in V$.*

Jsou-li $e_1, \dots, e_n$ resp. $f_1, \dots, f_m$ baze V_1, resp. V_2, pak nazveme matici

$$A_{ij} = B(e_i, f_m)$$

maticí bilineární formy B vůči zvoleným bazím.

Řekneme, že bilineární forma B na $V \times V$ je nedegenerovaná*, pokud její matice A vůči některé bazi (a tedy vůči všem bazím) V je regulární.*

Poznámka: Symetrické bilineární formy tvoří obecný rámec pro různé druhy skálárních součinů, které se neustále používají na vektorových prostorech. Tento druh bilineárních zobrazení je tedy možno potkat nejčastěji. Na druhou stranu, také antisymetrické bilineární zobrazení hrají zcela podstatnou a zásadní roli v matematikcé formulaci klasické mechaniky a potkáte je tam pod názvem *symplektická struktura* na vektorovém prostoru.
Příklad: Typicky se setkáváme s následujícími bilineárními formami.

1. Jsou-li $\varphi, \psi \in V^*$ dva lineární funkcionály, pak jejich součin

$$v, w \in V \to \varphi(v)\psi(w)$$

   je zřejmě bilineární forma na V.

2. Je-li A_{ij} matice typu $n \times n$, pak

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \to \sum_{ij} A_{ij}\alpha^i\beta^j$$

   je bilineární forma na $V = \mathbb{R}^n$.

3. Je-li V prostor polynomů (funkcí) v jedné proměnné a je-li $A(x, y)$ funkce dvou proměnných, pak

$$f, g \in V \to \int_a^b \int_c^d A(x, y)f(x)g(y)\, dx\, dy$$

   je bilineární forma na V.

Lemma 11 Zápis bilineární formy pomocí matice
Budiž B bilineární forma působící (pro jednoduchost) na $V \times V$.

1. *Je-li $e_1, \dots, e_n$, báze v, je-li $A_{ij} = B(e_i, e_j)$ matice B a pokud $v_1 = \sum_i \alpha^i e_i$ a $v_2 = \sum_j \beta^j e_j$, pak*
$$B(v_1, v_2) = \sum_{ij} A_{ij} \alpha^i \beta^j \,.$$
2. *Pokud je E matice přechodu od baze $\{e_1, \dots, e_n\}$ k bazi $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ prostoru V, pak matice A' bilineárního ozbrazení B vůči čárkovaným bazím má tvar*
$$A'_{ij} = \sum_{kl} A_{kl} E^k_i E^l_j,$$
neboli
$$A' = E^t \cdot A \cdot E.$$

Důkaz:

1. $$B(v_1, v_2) = B(\sum_i \alpha^i e_i, \sum_j \beta^j e_j) = \sum_i \sum_j \alpha^i \beta^j B(e_i, e_j) = \sum_{ij} A_{ij} \alpha^i \beta^j$$
2. Stačí dosadit vyjádření $e'_i = \sum_k e_k E^k_i$ které definuje matici přechodu E, použít bilinearitu zobrazení B.

□

3.2 Kvadratické formy

Definice 19 Kvadratická forma
Řekneme, že zobrazení B z reálného vektorového prostoru V do $\mathbb{R}$ je kvadratické*, pokud existuje bilineární zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$ takové, že*
$$Q(v) = B(v, v), \forall v \in V.$$
Matici $A_{ij} = B(e_i, e_j)$ nazveme maticí kvadratické formy vůči bazi $e_1, \dots, e_n$ prostoru V. Řekneme, že je kvadratická forma nedegenerovaná, pokud je její matice regulární.

Poznámka: Pokud je bilineární zobrazení B antisymetrické, pak je jemu odpovídající kvadratická forma triviální. Je tedy vidět, že dvěma různým bilineárním zobrazením může odpovídat tatáž kvadratická forma. Vztah mezi bilineárními zobrazeními a kvadratickými formami je ale jednoznačný, pokud se omezíme jen na symetrická bilineární zobrazení.

Lemma 12 O souvislosti mezi bilineárními formami a symetrickými kvadratickými formami
Zobrazení, které symetrickému bilineárnímu zobrazení B přiřadí odpovídající kvadratickou formu Q, je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny symetrických lineárních zobrazení a kvadratických forem.

Důkaz: Existuje jednoduchý vztah (*polarizační identita*), který umožňuje zrekonstruovat symetrické bilineární zobrazení B ze znalosti příslušné kvadratické formy Q:

$$B(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2)\}\,. \tag{7}$$

Pro důkaz stačí rozepsat $Q(v_1 + v_2) = B(v_1 + v_2, v_1 + v_2)$ pomocí relací linearity:

$$B(v_1{+}v_2, v_1{+}v_2) = B(v_1{+}v_2, v_1){+}B(v_1{+}v_2, v_2) = B(v_1, v_1){+}2B(v_1, v_2){+}B(v_2, v_2)\,.$$

Využili jsme předpokládanou symetrii B. □

Poznámka: Předchozí tvrzení můžeme říct také tak, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou kvadratických forem na $\mathbb{R}^n$ a množinou tříd, které vzniknou rozložením množiny bilineárních forem $\mathscr{B}$ na $\mathbb{R}^n$ podle ekvivalence $B \sim B' \Leftrightarrow [\exists A \in \mathscr{B},\ A$ antisymetrická, $B - B' = A]$. V každé třídě jsou tedy všechny bilineární formy, které se liší jen o antisymetrickou formu.

Pokud bychom udělali z $\mathscr{B}$ vektorový prostor (což není problém, dvě bilineární formy se sčítají podobně jako lineární formy), je rozklad na třídy (téměř) totéž jako faktorprostor $\mathscr{B}/\mathscr{A}$, kde $\mathscr{A}$ je prostor všech antilineárních forem z $\mathscr{B}$.

Všimněte si ovšem, že z množiny kvadratických forem vektorový prostor jednoduše udělat nelze.

3.3 Hermiteovské kvadratické formy

Poznámka: Pro kvantovou mechaniku je podstatné rozumět dobře vlastnostem komplexních lineárních porstorů se skalárním součinem. Takovýto skalární součin je modelem pro obecné seskvilineární zobrazení, které si nyní budeme definovat.

Definice 20 Bilineární formy na $\mathbb{C}$: seskvilineární, antilineární, hermiteovské
Je-li V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, pak zobrazení

$$B : V \times V \to \mathbb{C},$$

je seskvilineární*, pokud pro každý vektor $v_1 \in V$ je zobrazení $v_2 \in V \to B(v_1, v_2)$* antilineární *zobrazení V na $\mathbb{C}$, tj. pro všechny $v \in V_1, v_2, w_2 \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ platí*

$$B(v_1, v_2 + w_2) = B(v_1, v_2) + B(v_1, w_2),\ B(v_1, \lambda v_2) = \overline{\lambda} B(v_1, v_2).$$

a pokud pro každý vektor $v_2 \in V$ je zobrazení $v_1 \in V \to B(v_1, v_2)$ lineární zobrazení V na $\mathbb{C}$.

Řekneme, že je seskvilineární zobrazení na $V \times V$ hermiteovské*, pokud platí*

$$B(v_2, v_1) = \overline{B(v_1, v_2)};\ v_1, v_2 \in V.$$

Definice 21 Hermiteovská kvadratická forma
Je-li B seskvilineární forma na V a je-li $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baze V, pak nazveme matici

$$A_{ij} = B(e_i, e_j)$$

maticí seskvilineárního zobrazení B vůči zvolené bazi.

Řekneme, že zobrazení $Q : V \to \mathbb{R}$ je hermiteovská kvadratická forma *na V, pokud existuje hermiteovská seskvilineární forma B, pro kterou platí*

$$Q(v) = B(v, v),\ v \in V\,.$$

Poznámka: Uvědomte si, že hermitovská kvadratická forma musí mít na celém V reálné hodnoty. Platí totiž $Q(v) = B(v, v) = \overline{B(v, v)}$; ve druhém kroku jsme prohodili argumenty a použili hermitovskost seskvilineární formy.

Lemma 13 *Zobrazení, které hermiteovské kvadratické formě Q přiřadí odpovídající hermiteovskou seskvilineární formu B je vzájemně jednoznačné.*

Důkaz: Toto tvrzení je analogií lemmatu 12 pro komplexní prostory. Pokud použijeme přímo vztah (7), dostaneme s využitím hermiteovskosti B

$$Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2) = 2\Re B(v_1, v_2)\,.$$

Abychom pomocí Q zrekonstruovali i imaginární část B, budeme místo $Q(v_1+v_2)$ zkoumat $Q(v_1+iv_2)$. Když složíme reálnou a imaginární část dostaneme celkem

$$B(v_1,v_2)=\frac{1}{2}\left\{Q(v_1+v_2)-Q(v_1)-Q(v_2)-i[Q(v_1+iv_2)-Q(v_1)-Q(v_2)]\right\}.$$

Poznámka: Vidíme tedy, že v komplexních prostorech přebírají úlohu symetrických a bilineárních forem formy hermiteovské a seskvilineární.

Definice 22 Hermiteovská matice, unitární matice
Nechť A je $n\times n$ matice komplexních čísel.

Řekneme, že matice A je hermiteovská (resp. anti–hermiteovská), pokud platí

$$\overline{A^t}=A,\ \text{ tj. } \overline{A_{ji}}=A_{ij}.$$

resp.

$$\overline{A^t}=-A,\ \text{ tj. } \overline{A_{ji}}=-A_{ij}.$$

Řekneme, že matice A je unitární, pokud platí

$$\overline{A^t}=A^{-1}.$$

Poznámka: Hermiteovské a unitární matice (resp. operátory) hrají podstatnou roli v lineární algebře na komplexních vektorových prostorech. Všimněte si, že zřejmě platí, že exponenciela $\exp A$ anti–hemiteovské matice A je unitární, neboť zřejmě platí

$$\overline{(\exp A)^t)}=\exp(\overline{A^t})=\exp(-A)=(\exp A)^{-1}.$$

Poznámka: Podle definice hermiteovské seskvilineární formy je zřejmě její matice v libovolné bazi hermiteovská.
Příklad: Podobně jako u symetrických forem na reálných prostorech jsou dva nejjednodušší příklady tyto:

1. Je-li A_{ij} hermiteovská matice typu $n\times n$, pak

$$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n\to\sum_{ij}A_{ij}\alpha^i\overline{\beta^j}$$

   je hermiteovská forma na $V=\mathbb{R}^n$.

2. Je-li V prostor polynomů (funkcí) v jedné proměnné s komplexními hodnotami a je-li $A(x,y)$ komplexní funkce dvou (reálných) proměnných, pro kterou platí $A(y,x) = \overline{A(x,y)}$, pak

$$f, g \in V \to \int_a^b \int_c^d A(x,y) f(x) \overline{g(y)}\, dx\, dy$$

je hermiteovská forma na V.

3.4 Diagonalizace kvadratické formy

Kvadratická forma má v různých bazích různou matici. Standardní úloha je najít bazi tak, aby tato matice byla co nejjednodušší. Základní fakt je, že je možné najít bazi tak, aby tato matice byla diagonální.

Věta 14 O diagonalizaci kvadratických forem
Nechť V je reálný (resp. komplexní) vektorový prostor. Předpokládájme, že B je symetrická (resp. hermiteovská) bilineární forma na V.

Pak existuje baze V, pro kterou je matice formy B diagonální. Příslušná kvadratická forma má v této bazi $e_1, \ldots, e_n$ tvar

$$Q(v) = \sum_i \lambda_i |\alpha^i|^2,\ v = \sum \alpha^i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R},$$

a je tedy možné ji normalizací baze převést na případ, kdy $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Důkaz: Označme nejprve $\dim V = n$. Před začátkem důkazu si odvodíme následující jednoduché tvrzení:

Je-li $f \in V^*, f \neq 0$ netriviální lineární funkcionál, pak jeho jádro $\operatorname{Ker} f$ má dimensi rovnou $n-1$.

Vskutku, je-li f netriviální, pak je f zřejmě surjektivní a dimenze obrazu f je tedy rovna jedné. Pak stačí použít větu z minulého semestru o součtu dimenzí jádra a obrazu daného zobrazení.

Bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostoru V sestrojíme postupně, krok za krokem, takto.

Jsou dvě možnosti. Buď je kvadratická forma Q triviální, nebo netriviální. V prvním případě zvolíme za bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ libovolnou bazi prostoru V. V opačném přípdě zvolíme za první vektor e_1 baze libovolný vektor s vlastností $B(e_1, e_1) \neq 0$ a budeme definovat podprostor $W \subset V$ předpisem

$$V_1 := \{v \in V | B(v, e_1) = 0\}.$$

Prostor V_1 je zřejmě jádrem netriviálního lineárního funkcionálu $f_1 \in V^*$, definovaného předpisem $f_1(v) = B(v, e_1)$ a má tedy dimenzi o jednu menší než V.

Nyní vše budeme opakovat pro vektorový prostor V_1 a formu B_1, která vznikne prostým zúžením formy B na V_1. Buď je forma B_1 triviální, a pak si bazi $\{e_2, \ldots, e_n\}$ prostoru V_1 zvolíme libovolně. V opačném případě vybereme opět vektor $e_2 \in V_1$, pro který platí $B(e_2, e_2) \neq 0$ a podprostor V_2 opět definujeme jako množinu všech vektorů $v \in V_1$, pro které platí $B(v, e_2) = 0$.

Po konečném kočtu kroků buď skončíme s triviálním prostorem V_n (po n krocích); nebo dojdeme k podprostoru V_k dimense $n-k$, na kterém je zúžení formy B triviální a již sestrojenou skupinu $\{e_1, \ldots, e_k\}$ doplníme vektory z V_k do n-tice nezávislých vektorů ve V. Výsledná n-tice bude v každém z těchto případů lineárně nezávislá, a tak bude tvořit bazi V. Podle konstrukce bude matice B vůči této bazi diagonální (všimněte si, že v tomto bodě potřebujeme symetričnost, resp. Hermiteovskost formy B).

Poznámka: Právě jsme si rozmysleli, že pro každou kvadratickou formu Q existuje baze, pro kterou je matice A formy Q diagonální a na diagonále má čísla $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$. Tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem říká, že v různých bazích se může pořadí těchto čísel na diágonále měnit, ale že počet čísel $\{-1, 0, 1\}$ je nezávislý na volbě baze.

Věta 15 O setrvačnosti kvadratických forem

Pro každou reálnou, resp. hermiteovskou kvadratickou formu Q existuje baze, ve které má matice A formy Q tvar $A = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1 \ldots, -1, 0 \ldots, 0)$.

Označme n_+, resp. n_-, resp. n_0 počet čísel 1, resp. -1, resp. 0 na diagonále. Pak trojice (n_+, n_-, n_0) nezávisí na výběru baze.

Důkaz: Všimněte si, že pořadí prvků na diagonále můžeme snadno změnit, pokud příslušně změníme pořadí prvků zvolené baze. Můžeme tedy rovnou předpokládat, že máme dvě baze $\{e_i\}$, resp. $\{e'_j\}$ prostoru V takové, že obě odpovídající matice A, resp A' mají výše uvedený diagonální tvar.

Předpokádejme např., že by $n_+ \neq n'_+$. Pro určitost budeme předpokládat, že $n'_+ > n_+$. Pak ale součet dimensí lineárních obalů $L(e'_1, \ldots, e_{n'_+})$ a $L(e_{n_++1}, \ldots, e_n)$ je větší než n. Oba tyto podprostory tedy mají netriviální průnik a existuje tedy nenulový vektor v, který je v obou.

Pak ale zároveň platí:

$$v = \sum_{i=1}^{n'_+} \alpha'^i e'_i; \; B(v, v) = 1 \cdot |al'_1|^2 + \ldots 1 \cdot |\alpha'_{n'_+}|^2 > 0,$$

a

$$v = \sum_{j=n_+ +1}^{n} \alpha^j e_j;\ B(v,v) = \sum_{j=n_+ +1}^{n} d_j |al_j|^2 \leq 0,$$

kde d_j jsou příslušné prvky diagonální matice A, tedy jsou to buď nuly nebo -1.

Tím jsme ale došli ke sporu, tedy $n_+ = n'_+$.

Podobně se dokáže rovnost $n'_0 = n_0$. □

Definice 23 Signatura formy, definitní a indefinitní formy
Nechť Q je reálná, resp. hermiteovská kvadratická forma na reálném, resp. komplexním vektorovém prostoru V. Trojice čísel (n_+, n_-, n_0) z věty o setrvačnosti kvadratických forem se nazývá signaturou formy Q.

Řekneme, že Q je:

1. positivně (semi-)definitní*, pokud* $\forall v \in V, v \neq 0$*, platí* $Q(v) > 0 (\geq 0)$,
2. negativně (semi-)definitní*, pokud* $\forall v \in V, v \neq 0$*, platí* $Q(v) < 0 (\leq 0)$,
3. indefinitní*, pokud existují vektory* $v, w \in V$*, takové, že platí* $Q(v) < 0, Q(w) > 0$.

Poznámka: Zřejmě platí, že forma je positivně definitní právě když má signaturu $(n, 0, 0)$ a positivně semidefinitní právě když má signaturu $(n, 0, k)$. Podobně pro (semi-)negativní formu.

Forma je zřejmě indefinitní právě když obě čísla n_+ a n_- jsou nenulová.

Je také zřejmé, že skalární součin je totéž jako positivně definitní forma. Existuje užitečné kritérium, jak poznat, kdy je reálná kvadratická forma positivně definitní.

Věta 16 Sylvestrova
Je-li A matice reálné kvadratické formy na V, pak je tato forma positivně definitní právě když

$$\det(\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{k}) > 0,\ k = 1, \ldots, n,\ n = \dim V.$$

Důkaz: Tuto větu dokazovat nebudeme.

3.5 Ztotožnění V a V^* pomocí bilineární formy

Existuje tradiční procedura tzv. zvedání a spouštění indexů, která se ve fyzice neustále používá. Význam této procedury si teď vysvětlíme.

Věta 17 O spouštění a zvedání indexů pomocí bilineární, resp. seskvilineární formy
Předpokládejme, že B je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru V. Tato forma pak indukuje lineární zobrazení $G : V \to V^*$ předpisem

$$G(v)(w) = B(w, v).$$

Pokud je B nedegenerovaná, je $G : V \to V^*$ isomorfismus.

Jsou-li $e_1, \dots, e_n$ a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ duální baze V, resp. V^* a je-li A matice formy B vůči zvoleným bazím, pak platí pro $v = \sum \alpha^i e_i \in V$ a $B(v) = \sum a_j \varepsilon^j \in V^*$

$$\alpha^k = \sum (A^{-1})^{kj} a_j,\ a_j = \sum A_{jk} \alpha^k.$$

Důkaz: Linearita (resp. antilinearita) B je zřejmá z definice. Z definice také plyne, že matice bilineární formy a zobrazení G (vůči duálním bazím) je stejná. Forma B je ale nedegenerovaná, pokud její matice je regulární. Podobně, G je isomorfismus, právě když je příslušná matice regulární. Z toho ihned plyne požadované tvrzení.

Dále, pokud (v reálném případě) $v = \sum \alpha^i e_i \in V$, $B(v) = \sum a_j \varepsilon^j \in V^*$ a $w = \sum_j \beta^j e_j$, pak

$$G(v)(w) = \sum_j a_j \beta^j, B(w, v) = \sum_{j,k} A_{jk} \beta^j \alpha^k.$$

Pokud toto má platit pro všechna w, platí zřejmě druhá formule ve větě. První je pak inverzní k druhé. $\square$

4 Tenzory

Tenzory patří mezi běžný matematický aparát ve fyzice. Základním příkladem tenzorů jsou vektory, ale nejjednodušší příklad tenzoru jsou čísla, nebo jak se říká ve fyzice, skaláry. Mezi složitější příklady tenzorů patří lineární funkcionály, lineární zobrazení (nebo např. tzv. Kroneckerovo delta) a kvadratické formy. Všechny tyto matematické veličiny jsou jen speciálními (a to velmi jednoduchými) případy tenzorů. Ve fyzice potkáte také např. tenzor křivosti R_{ijkl}(v obecné teorii relativity),metrický tenzor $g_{\mu\nu}$, tensor $T_{\mu\nu}$ hustoty energie a hybnosti, tenzor setrvačnosti I_{ij}, tenzor napětí a deformace (v klasické mechanice) a mnoho jiných. Dalším matematickým příkladem tenzoru je determinant, který jsme probírali v minulém semestru. Nejprve si vždy řekneme obecnou (bezsouřadnicovou) definici příslušných pojmů a pak si ukážeme, jak příslušnou veličinu popsat v souřadnicích, tj. ve zvolené bazi.

Pro pořádek je vhodné dopředu upozornit, že budeme probírat jen algebraickou část příslušných definic. To je podobné tomu, že jsme od začátku probírali v algebře pojem vektoru, ale nemluvili jsme o vektorových polích, které jste už určitě také potkali. V budoucnu budete podobně potkávat nejen tenzory, ale také tenzorová pole. Právě tak, jako je vektorové pole zobrazení, které každému bodu prostoru (na kterém vše uvažujete) přiřadí vektor v tomto vybraném bodě, je také tenzorové pole zobrazení, které závisí na bodě prostoru, které každému bodu prostoru přiřadí tenzor v daném bodě. Samozřejmou podmínkou je, že musím umět (jako tomu bylo pro vektory) každému bodu prostoru přiřadit příslušný prostor tenzorů. To je nejlépe si představit tak, že každý bod našeho uvažovaného prostoru (či dokonce prostoročasu) má svůj zvláštní tečný prostor, což je vektorový prostor (představte si pro názornost např. dvourozměrnou plochu v prostoru a a její tečný prostor v každém bodě). Tento vektorový prostor je pak základní prostor, ze kterého pak vytvoříme tensorový prostor v tomto daném bodě. Hodnota tenzorového pole v tomto daném bodě pak musí být v tomto tenzorovém prostoru.

Matematická motivace pro zavedení tenzorů je jiná, ale právě tak fundamentální. Už jste si asi dobře zvykli, že prvky vektorového prostoru umím sčítat a násobit číslem. Ale právě tak jsme mnohokrát říkali, že vektory neumím násobit mezi sebou. Umím ovšem např. násobit funkce mezi sebou.

Následující příklad je naprosto typický pro motivaci tzv. tenzorového součinu. Jsou-li $\alpha \in V^*$ a $\beta \in W^*$ dva lineární funkcionály, pak jejich 'součin' mohu zcela přirozeně definovat jako bilineární zobrazení ϕ : z prostoru $V \times W$ do $\mathbb{R}$, dané předpisem $\phi(v,w) = \alpha(v)\beta(w)$, kde $v \in V, w \in W$. Součinem dvou lineárních funkcionálů není tedy opět lineární funkcionál, ale bilineární funkcionál. To vede okamžitě k následující definici.

Definice 24 Tenzorový součin lineárních forem (tenzory typu $(2,0)$) *Nechť V^* a W^* jsou duály ke dvěma vektorovým prostorům. Pak tenzorový součin $V^* \otimes W^*$ je definován jako prostor $L(V,W)$ všech bilineárních zobrazení kartézského součinu $V \times W$ do reálných čísel.*

Jsou-li $\alpha \in V^*$ a $\beta \in W^*$ dva dané lineární funkcionály, pak jejich tenzorový součin $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes W^*$ je definován jako bilineární zobrazení, které každé dvojici vektorů $(v, w) \in V \times W$ přiřadí číslo $[\alpha \otimes \beta](v, w) := \alpha(v)\beta(w)$.

Jako obvykle je na množině $V^* \otimes W^*$ definován přirozeným způsobem součet dvou prvků a násobek prvku reálným číslem. (Prvky tenzorového součinu jsou definovány jako jakési zvláštní, speciální, tj. bilineární, zobrazení na kartézském součinu $V \times W$, a jejich součin se definuje tak, jak se vždy definuje součin funkcí, napište si sami definici jako cvičení!).

Lemma 14 O vlastnostech tenzorového součinu

1. *Prostor $V^* \otimes W^*$ je vektorový prostor.*
2. *Jsou-li $\{\varepsilon^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, resp. $\{\varphi^j\}$, $j = 1, \ldots, m$ baze prostoru V^*, resp. W^*, pak $\varepsilon^i \otimes \varphi^j$, $i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$ je baze prostoru $V^* \otimes W^*$;*
3. *Libovolný prvek $T \in V^* \otimes W$ se dá (jednoznačně) napsat ve tvaru*
$$T = \sum_{ij} T_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j, T_{ij} = T(e_i, f_j),$$
kde $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ resp. $\{f_j\}$, $j = 1, \ldots, m$ jsou duální baze prostoru V, resp. W. Čísla T_{ij} se nazývají souřadnice tenzoru T vzhledem ke zvoleným bazím.
4. $\dim V^* \otimes W^* = \dim V^* \cdot \dim W^*$.

Důkaz:

1. Už jsme toto dokázali v kapitole o bilineárních zobrazeních.
2. Musíme si, jako obvykle, uvědomit, že navrhovaná baze je skupina lineárně nezávislých vektorů a že generují celý prostor.
   (a) Lineární nezávislost: Předpokládejme, že existují reálná čísla a_{ij}, pro která platí $\sum_{ij} a_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j = 0$. Zvolme i, j pevně. Do tohoto (triviálního) bilineárního zobrazení můžeme dosadit dvojici vektorů e_i, f_j a dostaneme
   $$0 = \sum_{kl} a_{kl} [\varepsilon^k \otimes \varphi^l](e_i, f_j) = \sum_{kl} a_{kl} \delta_i^k \delta_j^l = a_{ij}.$$

(b) Generují celý prostor: Je-li T libovolný prvek $V^* \otimes W^*$, pak stačí ověřit tvrzení (3) v lemmatu. Pro to stačí ukázat, že bilineární zobrazení na obou stranách rovnosti mají stejné hodnoty na všech dvojicích vektorů $(v, w) \in V \times W$. Zvolme takovouto dvojici (v, w). Pak víme, že $v = \sum_i \varepsilon^i(v) e_i,\ w = \sum_j \varphi^j(w) f_j$. Pak ale

$$T(v, w) = T(\sum_i \varepsilon^i(v) e_i, \sum_j \varphi^j(w) f_j) = \sum_{ij} \varepsilon^i(v)\varphi^j(w) T(e_i, f_j) = \sum_{ij} T_{ij}[\varepsilon^i \otimes \varphi^j](v, w)$$

4. Zřejmé.

□

Lemma 15 Transformace souřadnic tenzorů (typu $(2, 0)$) při změně báze
Předpokládejme, že $\{e_i\}, \{e'_i\}$, resp. $\{f_j\}, \{f'_j\}$, jsou dvojice bazí prostorů V, resp. W, a E^i_k, resp. F^j_l jsou příslušné matice přechodu mezi těmito bazemi, tj. $e'_i = \sum_k E^k_i e_k,\ f'_j = \sum_l F^k_j e_l$.

Pak pro souřadnice T'_{ij}, T_{ij} platí

$$T'_{ij} = \sum_i \sum_j T_{kl} E^k_i F^l_j.$$

Důkaz: Toto už jsme dokázali dříve, neboť souřadnice tenzoru T jsou totéž, co jsme dříve nazývali prvky matice dané bilineární formy vůči zvoleným bazím. □

Poznámka: Právě jsem se naučili, co znamená tenzorový součin $V^* \otimes W^*$ dvou duálních vektorových prostorů. Je možné definovat také součin $V \otimes W$ pro libovolné vektorové prostory, nebo to bylo možné jen pro duály? Otázka je jednoduchá a odpověď už známe. Každý vektorový prostor je zároveň také duálem, a to duálem svého duálu, neboť $V \simeq (V^*)^*$, tyto prostory se dají kanonicky ztotožnit. Tady je možné definovat $V \otimes W$ jako prostor všech bilineárních zobrazení kartézského součinu $V^* \times W^*$ do $\mathbb{R} : V \otimes W := (V^*)^* \otimes (W^*)^* \simeq L(V^*, W^*)$

Poznámka: Obdobně jako tenzorový součin dvou prostorů lze definovat tenzorový součin konečně mnoha vektorových prostorů. Prostor $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ je definován jako prostor $L(V_1^*, \ldots, V_k^*)$ všech multilineárních zobrazení kartézského součinu $V_1^* \times \ldots \times V_k^*$ do reálných čísel. (Napište si jako cvičení definici multilineárního zobrazení, definujte operace sčítání a násobení reálným číslem a a dokažte, že je to vektorový prostor!)

Přesně stejně jako pro dva činitele lze dokázat, že:

1. Jsou-li
$$\{e^1_{i_1}\},\ i_1 = 1, \dots, n_1;\ \dots; \{e^k_{i_k}\},\ i_k = 1, \dots, n_k;$$
postupně baze prostorů $V_1, \dots, V_k$, pak
$$e^1_{i_1} \otimes \dots \otimes e^k_{i_k};\ i_1 = 1, \dots, n_1; \dots; i_k = 1, \dots, n_k$$
je baze součinu $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ a dimenze součinu je součin dimenzí jednotlivých prostorů.

2. Obecný prvek $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ lze jednoznačně napsat ve tvaru
$$T = \sum_{i_1 \dots i_k} T^{i_1 \dots i_k} e^1_{i_1} \otimes \dots \otimes e^k_{i_k}.$$
Koeficienty $T^{i_1 \dots i_k}$ se nazývají souřadnice prvku T vzhledem ke zvoleným bazím.

3. Pro zjednodušení a přehlednost zápisu budeme používat nadále populární a užitečnou Einsteinovu sumační konvenci, která říká, že kdykoliv se v nějaké formuli vyskytnou dva stejné indexy (standardně jeden nahoře a jeden dole), pak se přes ně automaticky sčítá, aniž by se vypisoval znak $\sum$ pro součet. Předchozí formule se např. zapíše takto:
$$T = T^{i_1 \dots i_k} e^1_{i_1} \otimes \dots \otimes e^k_{i_k}.$$

4. Jsou-li $E_j, j = 1, \dots, k$ matice přechodu od bazí $e^j_{i_j}$ k bazím $e'^j_{i_j}$, tj. pokud
$$e'^j_{i_j} = E^{n_j}_{i_j} e^j_{i_j},\ j = 1, \dots, k$$
pak
$$T'^{i_1 \dots i_k} == T^{n_1 \dots n_k} (E^{-1})^{i_1}_{n_1} \dots (E^{-1})^{i_k}_{n_k},$$
kde již používáme Einsteinovu sumační konvenci.

5. Pro pořádek a připomenutí si zopakujme, že je-li E matice přechodu od baze e_i k bazi e'_i, tj. pokud $e'_i = E^m_i e_m$, pak $F = E^{-1}$ je matice přechodu od duální baze ε^i k duální bazi ε'^j, tj. $\varepsilon'^j = F^j_n \varepsilon^n$ a $\delta^j_i = E^j_k F^k_i$.

4.1 Tenzorová algebra

Definice 25 Tenzor
Nechť V je pevně zvolený vektorový prostor a V^* jeho duál, nechť k, l jsou dvě daná nezáporná celá čísla. Prostor $T_0^0(V)$ definujeme jako prostor $\mathbb{R}$ reálných čísel.

Pro ostatní případy definujeme prostor $T_l^K \equiv T_l^k(V)$ předpisem

$$T_l^k(V) := v \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*,$$

kde v součinu je k činitelů V a l činitelů V^* (je-li k nebo l rovno nule, příslušné činitele v součinu chybí). Řekneme, že prvky $T \in T_l^k(V)$ jsou tenzory typu (k, l), nebo že jsou to tenzory k-krát kovariantní a l-krát kontravariantní.

Podle definice jsou tedy tenzory $T \in T_l^k(V)$ multilineární zobrazení z kartézského součinu $V^* \times \ldots \times v^* \times V \times \ldots \times V$, ($k$-krát činitel V^* a l-krát činitel V). Pro každou $k+l$-tici

$$(v_1^*, \ldots, v_k^*, v_1, \ldots, v_k) \in V^* \times \ldots \times v^* \times V \times \ldots \times V$$

je tedy $T(v_1^*, \ldots, v_k^*, v_1, \ldots, v_k)$ číslo a toto zobrazení je lineární v každé ze dvých složek.

Lemma 16 Transformace souřadnic tenzorů (obecného typu) při změně báze

1. *Je-li $e_i, i = 1, \ldots, n$ baze prostoru V a $\varepsilon^i, i = 1, \ldots, n$ duální baze prostoru V^*, pak*

   $$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_l} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_k};\ i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots j_k$$

   je baze prostoru $T_l^k(V)$.

2. *Každý prvek $T \in T_l^k(V)$ se tedy (jednoznačně) napíše ve tvaru*

   $$T = T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_l} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_k}.$$

   Sady čísel $T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k}$ se nazývají souřadnice tenzoru T.

3. *Pokud E je matice přechodu od baze e_i k bazi e_i', pak*

   $$T'^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} = T^{m_1 \ldots m_l}_{n_1 \ldots n_k} (E^{-1})^{i_1}_{m_1} \ldots (E^{-1})^{i_l}_{m_l} E^{n_1}_{j_1} \ldots E^{n_k}_{j_k}.$$

Důkaz: (1) a (2) jsou speciální případy toho, co jsme se již naučili v předešlém paragrafu o tenzorových součinech několika různých prostorů.

(3) Plyne z předchozího paragrafu a poslední poznámky, bod (5). $\square$

Poznámka: Původní fyzikální (a geometrická) definice tenzoru vypadala takto:

Tenzor T přiřazení, které každým souřadnicím na vektorovém prostoru V přiřadí sadu čísel $T^{i_1..i_l}_{j_1..j_k}$ a tyto sady se musí při změně souřadnic transformovat podle výše uvedeného lemmatu, bod (3). Tato definice je poměrně složitá a těžkopádná, po provedení každé operaci s tenzory se muselo vždz ověřovat, že výsledek operace nezávisí na volbě souřadnic. V moderní geometrii se vyvinul v tomto století moderní, bezsouřadnicový jazyk, který umožňuje počítat s tenzory bez těchto těžkopádných souřadnicových popisů. Tento jazyk je také použit ve výše uvedených definicích. V každém případě je pak vidět, jaký objekt příslušnému tenzoru odpovídá ve zvolené bazi (jeho "souřadnice") a zároveň je snadné odvodit, že se tyto souřadnice trasnformují požadovaným způsobem při změně baze (a tedy změně souřadnic).

Poznámka: Tenzory bez indexů jsou čísla (skaláry). Tenzory s jedním indexem jsou buď vektory (typ $(0,1)$), nebo kovektory neboli lineární formy (typ $(1,0)$).

Dvakrát kovariantní tenzor je totéž jako bilineární forma (jak jsme právě nedávno viděli). Dvakrát kontravariantní tenzor neodpovídá žádnému z námi dosud probíraných objektů. Zato jednou kovariantní a jednou kontravariantní tenzor je totéž jako lineární zobrazení z prostoru V do sebe. To je vidět z toho, že v souřadnicích jsou to oboje sady čísel s dvěma indexy a stačí se tedy přesvědčit, že se souřadnice tohoto typu tenzorů transformují stejně jako matice linárního zobrazení vůči zvoleným bazím (doporučuji překontrolovat!). Všimněte si, že souřadnice všech těchto tří typů tenzorů vypadají stejně, a to jako matice. Ale jejich transformační vlastnosti se liší.

Pokud byste chtěli toto ztotožnění odůvodnit v moderním bezsouřadnicovém jazyce, je to snadné. Dokonce jde si rozmyslet o něco víc - jsou-li V a W dva vektorové prostory, pak tenzorový součin $W \otimes V^*$ je možné kanonicky ztotožnit s vektorovým prostorem všech lineárních zobrazení z V do W. Ztotožnění je zcela přirozené. Prvek $T \in W \otimes V^*$ je podle definice bilineární zobrazení z $W^* \times V$ do reálných čísel. Odpovídající lineární zobrazení F z V do W definujeme takto: pro $v \in V$ je obraz $F(v) \in W$ charakterizován vztahem $w^*(F(v)) = T(w^*, v)$ pro všechny $W^* \in W^*$. Pokud specielně $T = w \otimes v^*$, $v^* \in V^*, w \in W$, pak definujeme odpovídající lineární zobrazení F ještě jednodušseji vztahem $F(v) = v^*(v) \cdot w \in W$.

Tenzor (pro daný vektorový prostor) je tedy v klasické řeči sada čísel, každá sada odpovídá jedné bazi vektorového prostoru a tyto sady se předepsaným způsobem transformují při změně baze vektorového prostoru.

Je důležité se uvědomit, jak se toto vše změní, budeme-li uvažovat (jak je ve fyzice zcela běžné) ne jen tenzory, ale tenzorová pole. Zde již není základním údajem vektorový prostor, ale jakýsi základní prostor (či často prostoročas), na kterém jsou definovány odpovídající fyzikální veličiny jako funkce, či tenzorová pole. Typickým příkladem je vektorové pole, které je dáno tím, že v každém bodě prostoru je dán vektor, který se bod od bodu ev. mění. Nejčastější případ je ten, že základní prostor je $\mathbb{R}^3$, nebo např. Minkowského prostoročas $\mathbb{R}^{1,3}$. Složitější příklad, důležitý pro pochopení, je např. dvourozměrná plocha $S \subset \mathbb{R}^3$, která je pak náš 'dvourozměrný' prostor. V tomto případě je vektorové pole zobrazení, které každému bodu plochy S přiřadí tečný vektor k této ploše v daném bodě $x \in S$. V každém bodě $x \in S$ je tedy dán tečný vektorový prostor $V = T_x(s)$ všech tečných vektorů v tomto bodě. Pro rovný prostor $S = \mathbb{R}^2$ (a podobně $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ či $\mathbb{R}^n$), se $T_x(S)$ standardně ztotožňuje s prostorem S samotným a rozdíl mezi tečnými prostory v různých bodech se ztrácí.

V každém bodě $x \in S$ uvažujeme pak tenzorovou algebru odpovídající tečnému vektorovému prostoru $V = T_x(S)$ a tenzorové pole je přiřazení, které každému bodu $x \in S$ přiřadí tenzor daného typu pro vektorový prostor $V = T_x(S)$ (který se ale může měnit bod od bodu!).

Vraťme se nyní k jednoduššímu případu, kdy základní prostor je rovný, např. $S = \mathbb{R}^3$. Na tomto protoru mám také souřadnice x_1, x_2, x_3 a tyto souřadnice mohu měnit pomocí obecných souřadnicových transformací (a to už jsme v analýze a ne v algebře) $x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3$.

Každá volba souřadnic x_i zároveň spolu přináší volbu význačné baze v tečných prostorech $T_x(S) \simeq S$ následujícím způsobem: Nakreslete si souřadnicové křivky v daném bodě ve třech daných směrech, kde se mění jen jedna ze souřadnic. Parciální derivace, je derivace 've směru', např. $\partial/\partial x_1$ je derivace ve směru tečném k první souřadnicové křivce. V tomto smyslu je možné považovat parciální derivace za vektory v daném bodě. Tečny k těmto souřadnicovým křivkám, neboli příslušné parciální derivace, zadávají tedy význačnou bazi tečného prostoru. Tato baze tečného prostoru je dána parciálními derivacemi $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3$ v daném bodě. Při změně souřadnic se tato baze zřejmě transformuje do nové baze $\partial/\partial x'_1, \partial/\partial x'_2, \partial/\partial x'_3$ a přislušná matice přechodu je samozřejmě Jacobiho matice parciálních derivací $\partial x'_i/\partial x_j \equiv \partial x'_i/\partial x_j(x)$. Našemu vzorci $e'_i = \sum_j E_i^j e_j$, kde E je matice přechodu mezi dvěma bazemi tedy odpovídá vzorec

$$\partial/\partial x_i' = \sum_j (\partial x_j/\partial x_i')\partial/\partial x_j.$$

Tenzorové pole na S je pak sada funkcí, každá sada odpovídající jedné souřadnicové soustavě, které se patřičně transformují při změně souřadnic. Např. pro tenzor typu $(2,1)$ je to sada funkcí $T_k^{ij}(x)$, která se při změně souřadnic z x_i na x_j' transformuje takto:

$$T_l'^{mn}(x'(x)) = \sum_{ijk} T_k^{ij}(x)(\partial x_k/\partial x_l')(\partial x_m'/\partial x_i)(\partial x_n'/\partial x_j).$$

a souvislost s našimi transformačními vzorci pro tenzory je jednoduchá a je dobře vidět.

4.2 Operace s tenzory

Definice 26 Operace s tenzory
Pro tenzory budeme definovat několik operací:

1. *Sčítání: pokud $T, S \in T_l^k(V)$, pak definujeme součet $S+T$ stejně jako pro všechny funkce:*

$$(S+T)(v_i, v_j^*) = S(v_i, v_j^*) + T(v_i, v_j^*);$$

2. *Násobení reálným číslem: je-li $S \in T_l^k(V), \alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$(\alpha S)(v_i, v_j^*) = \alpha[S(v_i, v_j^*)];$$

3. *Násobení: pro $R \in T_l^k(V), S \in T_n^m(V)$ definujeme jejich součin $R \otimes S \in T_{l+n}^{k+m}(V)$ takto:*

$$[R \otimes S](v_1, \ldots, v_{k+m}, v_1^*, \ldots, v_{l+n}^*) =$$

$$= R(v_1, \ldots, v_k, v_1^*, \ldots, v_l^*)S(v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}, v_{l+1}^*, \ldots, v_{l+n}^*);$$

4. *Úžení tenzoru na i-tém a j-tém místě ($i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l$):*
   pro $T \in T_l^k(V)$ a zvolené i, j definujeme nový tenzor $\tilde{T} \in T_{l-1}^{k-1}(V)$ předpisem:

$$\tilde{T}(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_1^*, \ldots, v_{l-1}^*) =$$

$$= \sum_n T((v_1, \ldots, v_{i-1}, e_n, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_1^*, \ldots, v^*j-1, \varepsilon^n, v^*j+1, \ldots, v_{l-1}^*),$$

kde $\{e_n\}$, *resp.* $\{\varepsilon^n\}$, *jsou (libovolně zvolené) duální baze prostorů* V, *resp.* V^*.

Lemma 17 Operace s tenzory (definice 26) ve složkách
Zvolme duální baze $\{e_n\}$, *resp.* $\{\varepsilon^n\}$, *prostorů* V, *resp.* V^*. *Pak je možné výše definované operace popsat v souřadnicích následujícím způsobem:*

1. $T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} + S^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} = (T+S)^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k}$;
2. $(\alpha T)^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} = \alpha T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k}$;
3. $(R \otimes S)^{i_1 \ldots i_{l+n}}_{j_1 \ldots j_{k+m}} = R^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} S^{i_{l+1} \ldots i_{l+n}}_{j_{k+1} \ldots j_{k+m}}$;
4. $\tilde{T}^{s_1 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_l}_{t_1 \ldots t_{j-1} t_{j+1} \ldots t_k} = \sum_p T^{s_1 \ldots s_{j-1} p s_{j+1} \ldots s_l}_{t_1 \ldots t_{i-1} p t_{i+1} \ldots t_k}$.

Poznámka: Velmi jednoduchá definice úžení je možná pro tenzory jednoduchého typu, pro tzv. rozložitelné tenzory. Pokud má tenzor T z prostoru $T^k_l(V)$ tvar

$$T = \alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^k \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_l,$$

pak jeho zúžení $\tilde{T}$ je rovno

$$\tilde{T} = \alpha^i(v_j)\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^{i-1} \otimes \alpha^{i+1} \otimes \ldots \otimes \alpha^k \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_{j-1} \otimes v_{j+1} \otimes \ldots \otimes v_l.$$

Jako odůvodnění si stačí rozmaslet případ $k = l = 1$. Pak totiž víme, že $\alpha(v) = \sum_n \alpha(e_n)\varepsilon^n(v)$.
Poznámka: Protože rozložitelné tenzory generují zřejmě celý prostor všech tenzorů (každý tenzor lze zapsat jako lineární kombinaci rozložitelných tenzorů), plyne z předchozího bodu, že definice operace úžení nezávisí na volbě duálních bazí.
Poznámka: Pokud je T tenzor typu $(1,1)$, pak víme, že odpovídá lineárnímu zobrazení V do sebe. Všimněte si, že jeho zúžení není nic jiného než stopa příslušného lineárního zobrazení!
Důkaz: Body 1.,2.,3. plynou ihned z definice (dokažte si sami!).

V bodu 4. budeme pro jednoduchost označení dokazovat případ $k = l = 2, i = 2, j = 1$. Připomeňme, že vektory $v \in V$ ztotžňujeme s prvky $(V^*)*$ a že tedy $v(v^*) = v^*(v)$ pro libovolné $v \in V, v^* \in V^*$. Pak

$$\tilde{T}(v, v^*) = \sum_n T(v, e_n; \varepsilon^n, v^*) = \sum_n T^{s_1,s_2}_{t_1,t_2} \varepsilon^{t_1}(v)\varepsilon^{t_2}(e_n)e_{s_1}(\varepsilon^n)e_{s_2}(v^*) =$$

$$= [\sum_n T^{ns_2}_{t_1 n} \varepsilon^{t_1} \otimes e_{s_2}](v, v^*),$$

a tedy souřadnice $\tilde{T}$ jsou rovny $\sum_n T^{ns_2}_{t_1 n}$. □

4.3 Tenzory na (pseudo)eukleidovských prostorech

Již dříve jsme se naučili, že je za určitých okolností možno ztotožnit vektorový prostor V s jeho duálem V^*. K tomu bylo potřeba, aby na prostoru V byl dána nedegenerovaná symetrická bilineární forma B. Připomeňme si také, že matice takovéto bilinerání formy má ve vhodné bazi tvar součtu kvadrátů souřadnic s jistým počtem kladných a jistým počtem záporných znamének (signatura formy!). Pokud jsou všechna znaménka kladná, jde o skalární součin a příslušný vektorový prostor se nazývá Eukleidovský. Po ostatní signatury se prostor V nazývá pseudo-Eukleidovský, pro signaturu $(1, n-1)$ pak nejčastěji Minkowského prostoročas.

Víme již, že v tomto případě existuje kanonický izomorfimus $G : V \to V^*$. Je-li g_{ij} matice bilineární formy B, (tj. souřadnicový tvar příslušného $(2, 0)$ tenzoru), pak můžeme tento isomorfismus, resp. isomorfimus k němu inverzní, interpretovat v souřadnicích jako spouštění, resp. zvedání indexů:

$$v_j = v^i g_{ij}, v^i = (g^{-1})^{ij} v_j.$$

Totéž je možné i pro obecné tenzory s libovolným počtem horních a dolních indexů. Důsledkem je pak to, že v tomto případě nehraje poloha indexů rozhodující roli, je možné např. všechny tenzory převést na tensory, které mají jen dolní indexy, nebo jen horní indexy.

Definice 27 Zvedání a snižování indexů tenzorů
Nechť je na vektorovém prostoru V zadána nedegenerovaná symetrická bilineární forma B a nechť $G : V \to V^*$ je odpovídající isomorfismus. Předpokládejme, že $k \geq 0, l > 0$ a $i, 1 \leq i \leq k+1; j, 1 \leq j \leq l$ jsou dány pevně.

Pak zobrazení

$$\varphi^i_j : T^k_l(V) \to T^{k+1}_{l-1}(V)$$

definujeme předpisem

$$[\varphi^i_j(T)](v_1, \ldots, v_{k+1}, v^*_1, \ldots, v^*_{l-1}) =$$

$$= T(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{k+1}, v^*_1, \ldots, v^*_{j-1}, G(v_i), v^*_{j+1}, \ldots, v^*_{l-1}).$$

Lemma 18 O zvedání a snižování indexů tenzorů zapsaných ve složkách

1. *Zobrazení φ^i_j je isomorfismus.*
2. *V souřadnicích má tento isomorfismus tvar*

$$[\varphi^i_j(T)]^{s_1 \dots s_{l-1}}_{t_1 \dots t_{k+1}} = \sum_{s_i} T^{s_1 \dots s_i \dots s_l}_{t_1 \dots t_{j-1} t_{j+1} \dots t_{k+1}} g_{s_i t_j}.$$

Důkaz:

1. Stačí napsat pomocí inversního zobrazení $G^{-1} : V^* \to V$ zcela analogicky inversní zobrazení k φ^i_j, což je v souřadnicích zvedání indexů pomocí inverzní matice $(^{-1})^{ij}$.
2. Analogicky jako pro dříve dokázaný případ $k = 0, l = 1$.

$\square$

4.4 Symetrické a antisymetrické tenzory

Definice 28 Symetrizace a antisymetrizace tenzoru
Předpokládejme, že $T \in T^k(V)$ je k-krát kovariantní tenzor. Pak definujeme symetrizaci $S(T)$ a antisymetrizaci $A(T)$ předpisem:

$$[S(T)](v_1, \dots, v_k) = 1/(k!) \sum_{\pi} T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}),$$

$$[A(T)](v_1, \dots, v_k) = 1/(k!) \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}).$$

kde sčítáme přes všechny permutace π.

Analogicky lze definovat symetrizaci, resp. antisymetrizaci pro menší skupinu proměnných nebo pro tenzor, který má kovariantní i kontravariantní složky.

Definice 29 Symetrický a antisymetrický tenzor, symetrický a antisymetrický součin tenzorů
Tenzor T typu $(k, 0)$, resp. $(0, k)$ nazveme symetrický, resp. antisymetrický, pokud $S(T) = T$, resp. $A(T) = T$.

Symetrický součin takovýchto dvou tenzorů T_1, T_2 stejného typu definujeme pak jako $S(T_1 \otimes T_2)$ a značíme $T_1 \odot T_2$.

Podobně antisymetrický součin $T_1 \wedge T_2$ je definován jako $T_1 \wedge T_2 := A(T_1 \otimes T_2)$.

Poznámka: Tenzor T typu $(0,3)$ na $V = \mathbb{R}^n$ je tedy symetrický v prvních dvou proměnných, pokud platí[6] $T(v,w,u) = T(w,v,u), \forall v,w,u \in V$. Tenzor je totálně symetrický (tedy symetrický ve všech proměnných), pokud platí $T(v,w,u) = T(u,v,w) = \ldots, \forall v,w,u \in V$, hodnota T se nezmění při libovolné permutaci argumentů.

Ve složkách tenzoru T se tato vlastnost projeví tak, že platí $T_{ijk} = T_{jik}$ pro $i,j,k = 1,\ldots,n$ (symetrie v prvních dvou proměnných je totéž jako symetrie v prvních dvou indexech). Tato symetrie složek je nezávislá na volbě báze, tedy pokud platí v jedné bázi, platí již ve všech bázích.
Příklad:

1. Nejčastěji používaným příkladem symetrického tenzoru je symetrická bilineární forma B. Pro případ, že tato foma je nedegenrovaná, zadává totiž na příslušné m vektorovém prostoru 'skalární součin', který ovšem nemusí výt nutně positivně definitní. Velmi často se tato volba nazývá volbou metriky na příslušném vektorovém prostoru a pro souřadnicové vyjádření se obvykle používá symbol $g_{\mu\nu}$. Také často můžete najít zadání metriky ve tvaru $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Metrika v tomto případě je obvykle tenzorové pole $g_{\mu\nu}(x)$ a diferenciály dx^ν jsou symboly označující bazi duálu k tečnému prostoru v uvažovaném bodu prostoru.

2. V souřadnicích vypadá operace symetrizace a antisymetrizace jednoduše, např. pro tenzory se dvěma indexy platí zřejmě
$$S(T_{ij}) = 1/2[T_{ij} + T_{ji}], A(T_{ij}) = 1/2[T_{ij} - T_{ji}].$$

3. Je-li zadána metrika, pak se často neuvažují všechny možné baze tečného prostoru (tj. vektorového prostoru V, který je základní prostor pro definici tenzorů), ale jen baze ortonormální. Matice přechodu je pak nutně orthogonální matice a ne obecná matice.

   Zvedání a spouštění indexů je pak zcela běžné. Například tenzor křivosti R_{ijkl} v obecné teorii relativity často najdete v různých formách s různou polohou indexů.

[6] Obě strany rovnosti jsou reálná čísla.

4. Je-li $V = \mathbb{R}^n$, pak existuje velmi užitečný konkrétní model pro prostor $\odot^n(V)$, jehož prvky tvoří symetrické tenzory typu $(n, 0)$. Stačí uvažovat prostor všech polynomů na $\mathbb{R}^n$, které jsou homogenní stupně n. Vskutku, pokud budete považovat koeficienty takového polynomu za souřadnice příslušného tenzoru, je zřejmé, že jde o tenzor symetrický a je lehké se přesvědčit, že při změně baze $\mathbb{R}^n$ se koeficienty transformují předepsaným způsobem (rozmyslete si a spočiteje si to pro polynomy stupně 2!).

   Prostor všech polynomů je pak nekonečně dimenzionální vektorový prostor, který je zároveň algebrou, tj. libovolné dva prvky mohu vynásobit (to je zřejmé) a výsledek je opět prvkem tohoto prostoru. Je to model toho, čemu matematikové říkají symetrická tenzorová algebra $\odot(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \odot^n(V)$ prostoru $V = \mathbb{R}^n$.

5. Typickým a důvěrně známým příkladem antisymetrického tenzoru je determinant (uvažovaný jako multilineární, antisymetrické zobrazení, které např. sloupcům dané matice, tj. n-tici vektorů, přiřadí determinant této $n \times n$ matice).

6. Velmi důležitým případem jsou prostory $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ všech antisymetrických tenzorů typu resp. $(0, k)$. Je ihned vidět. že tento prostor je triviální pro $k > n$ a je snadné si spočítat dimenzi tohoto prostoru pro $k \leq n$, která se rovná kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$. To je vidět z toho, že je-li $\{e_i\}$ baze V, pak je baze prostoru $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ tvořena součiny tvaru $e_J = e_{j-1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$, kde $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ je k-prvková podmnožina množiny $\{1, \ldots, n\}$, uspořádaná podle velikosti od nejmenšího k největšímu indexu.

   Specielně pokud $k = n$, pak příslušná dimenze je jedna a dostanem prostor tenzorů, který ma jen jednu souřadnici. Ale je potřeba si uvědomit, že se při změně baze tato souřadnice mění (na rozdíl od prostoru skalárů $T_0^0(V)$!), násobí se totiž determinantem (odůvodněte) matice přechodu. I pro případ prostoru s metrikou a ortogonální změny baze má pořád ještě determinant matice přechodu dvě možné hodnoty ± 1. Tyto tenzory se standardně nazývají pseudoskaláry. Podobně, případ $k = n - 1$ vede na antisymetrické tenzory, které jsou popsány stejným počtem souřadnic jako vektory, ale transformují se jinak!

Existuje analogie symetrické tenzorové algebry popsané výše pro antisymetrický případ. Je to prostor, kterému se říká standardně vnější, nebo Grassmannova, algebra prostoru $V = \mathbb{R}^n$ a který je tvořen přímým součtem $\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$ všech netriviálních vnějších mocnin $\Lambda^k(V)$. Je to opět algebra, tj. pro libovolné dva prvky je definován jejich součin, který patří do stejného prostoru.

Ve fyzice tuto algebru určitě potkáte v souvislosti s tzv. supersymetriemi a, ještě dříve a podstatněji, ve složitější nekonečně dimenzionální verzi v kvantové teorii pole jako matematický aparát potřebný pro popis fermionů.