Zápisky k přednášce HARMONICKÁ ANALÝZA
April 22, 2003

1 Distribuce

Definition 1 $\mathcal{D} = \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ ... *Testovací funkce. Řekneme, že* $\varphi_n \to \varphi$, *pokud existuje omezená množina* K, *taková, že Supp* $\varphi \subset K$ *a* $\forall\alpha$
$D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$.

Řekneme, že T *je distribuce (tj.* $T \in \mathcal{D}'$*), pokud* T *je spojitý lineární funkcionál na* $\mathcal{D}$.

Poznámka: Konvergence na $\mathcal{D}'$

$$T_n \to T \Leftrightarrow T_n(\varphi) \to T(\varphi)$$

Example 1 $f \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$ ... ...$T_f(\varphi) = \int_{R^n} f(\alpha)\varphi(\alpha)dx \in \mathbf{R}^n$

$\varphi_n \to \varphi, \quad T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi) = \int_K \mid \varphi_n - \varphi \mid\mid f \mid \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *Odtud*
$T_f(\varphi_n) \to T_f(\varphi)$.
Každá lokálně integrovatelná funkce určuje tedy distribuci.

Definition 2 δ *-funkce;* $\quad\forall a: \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$
Platí: $\nexists f \in L_{1,loc}: \; \delta_a = T_f$.

Poznámka: Množina hladkých funkcí je hustá v množině distribucí, distribuce lze tedy popsat jako zúplnění prostoru hladkých funkcí.

Definition 3 *Řekneme, že posloupnost* $K_n \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$ *je Diracova posloupnost, pokud platí:*

1. $K_n \geq 0$
2. $\int_{R^n} K_n dx = 1$
3. $\forall\varepsilon, \delta \geq 0 \exists N : \forall m \geq N \int_{R^n - U(0\delta)} K_m dx < \varepsilon$

Example 2 **1.**

$$\begin{aligned} K_n(\alpha) &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2; \mid x \mid \leq 1/2 \\ &= 0 \textit{ jinak} \end{aligned}$$

Poznámka: $f_1, f_2 \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$, *pak* $T_{f_1} = T_{f_2} \Leftrightarrow f_1 = f_2$ *s.v.*

2.

$$\begin{aligned} L_n(\alpha) &= c_n \cdot (1 - x^2)^n; \mid x \mid \leq 1 \\ &= 0 \textit{ jinak} \end{aligned}$$

3. $c_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}} \cdot e^{-x^2/2f}$

4. *Na* $\mathbf{R}^n K(x_1, \cdots, x_n) = K(x_1) \cdots K(x_n)$

Poznámka: Je-li f spojitá na $\mathbf{R}^n$, je $K_n * f(x) = \int_{R^n} K_n(x-y)f(y)dy$ má smysl a $K_n * f \xrightarrow{loc} f$.

1.1 Základní vlastnosti distribucí

1. $T \equiv 0$ na $U \in \mathbf{R}^n$ otevřené $\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}, \mathrm{Supp}\varphi \subset U$ platí $T(\varphi) = 0$

Example 3 $T = T_f = \int_U f \cdot \varphi = 0 \quad \Rightarrow f = 0$ *s.v. na* U.

2. $T \in \mathcal{D}', \mathbf{A} = \{U ot.; T = 0 \text{ na U } \}$ $SuppT := \mathbf{R}^n / \bigcup_{U \in \mathbf{A}} U$

3. D' je lineární vektorový prostor.

4. $T = S$ na ot. mn. $U \Leftrightarrow T - S = 0$ na U.

5. T je regulární na U ot. $\Leftrightarrow \exists f \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n), T = T_f$ na U.

Example 4 *δ je regulární na $\mathbf{R}^n - \{0\}$, $Supp\delta = \{0\}$*

1.2 Afinní transformace

$U(x) = Lx + A; \quad A \in Aut(\mathbf{R}^n)$
Obvykle bereme $[n \cdot f](x) = f(n^{-1}x)$.

Example 5 $T = T_f; \quad T(n^{-1}x) = [n \cdot T](x) = \int_{R^n} f(n^{-1}x\varphi(x) =$
$=| n | \int f(y)\varphi(y)dy; y := n^{-1}x$

Definition 4 *Je-li $T \in \mathcal{D}'$, definujeme $n \cdot T = T(n^{-1}x)$, $[n \cdot T]\varphi =$*
$=| n | T(\varphi(nx))$

Označení: $T(\varphi) \equiv (T, \varphi) \equiv \int T(x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x)dx$, je-li $T_f = T$.

Definition 5 *$s \in \mathbf{R}^n; T \in \mathcal{D}'$ je homogenní stupně s, pokud $T(\alpha \cdot x) =$*
$= \alpha^s T(x) \quad \forall \alpha > 0$, tj. $[\alpha^{-1} \cdot T] = \alpha^s T$.

Poznámka:
$U = \alpha^{-1} I$
$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad \alpha^{-n} T(\varphi(\frac{c}{\alpha})) = [\alpha^{-1} \cdot T]\varphi = \alpha^s T(\varphi)$. Tedy $T(\varphi(\frac{c}{\alpha})) = \alpha^{n+s} T(\varphi(x))$

Example 6 **1.** *v* $\mathbf{R}^n$

$$\varphi(0) = \delta(\varphi(\frac{x}{\alpha}))$$

$$\varphi(0) = \delta(\varphi(x))$$

Odtud δ *je homogenní stupně* $-n$.

2. $n(x) = -x$, $T \in \mathcal{D}'$ *je sudá pokud* $(nT) = T$, *tj. pokud* $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$.

3. δ *je sudá funkce.*

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ *nezadává distribuci.*
$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \varphi(0) = 0$ *je* $\int_R f(x)\varphi(x)dx = T_f(\varphi)$
?$\exists T \in \mathcal{D}' : T(\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx$
Např. $a, b, > 0 ... T(\varphi) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{b}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$

Lemma 1 *1.* $f_k \in L_{1,loc} \overset{loc}{\to} f \in L_{1,loc} \Rightarrow T_{f_k} \to T_f$

2. $f_k \in L_{1,loc} \overset{s.v.}{\to} f \in L_{1,loc}, \exists g \in L_{1,loc}, \mid f \mid \leq g \Rightarrow T_{f_k} \to T_f$

3. $f_k \in L_{1,loc} \nearrow f \in L_{1,loc} \Rightarrow T_{f_k} \to T_f$

Example 7 $T_{ln(x+iy)}$
Pro $y > 0, x \neq 0 : ln(x+iy) = 1/2 ln(x^2+y^2) + i \cdot arg(x+iy)$
$ln(x+i0) := \lim_{y \searrow 0} T_{ln(x+iy)}$
$\lim_{y \searrow 0} ln(x^2+y^2) = ln \mid x \mid \in L_{1,loc}$
$x \neq 0 \Rightarrow T_{1/2ln(x^2+y^2)} \to T_{lnx}$
$\lim_{y \searrow 0} i \cdot arg(x+iy) = i\pi\Theta(-x); \mid arg(x+iy) \mid \leq \pi \Rightarrow T_{i \cdot arg(x+iy)} \to T_{i\pi\Theta(-x)}$

$$ln(x+iy) = ln(\mid x \mid) + i\pi\Theta(-x)$$

1.3 Derivace distribucí

Definition 6 $T \in \mathcal{D}'; (\frac{\partial T}{\partial x_i}; \varphi) := (T; -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$

Důsledky:
1. $\forall T \in \mathcal{D}'$ existují derivace všech řádů, i záměnné.
2. $T_n \to T \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} T_n \to \frac{\partial}{\partial x_i} T$.
3. $s = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \Rightarrow s' = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'$.

Example 8 **1.** $f_n = \frac{\sin(nx)}{n}; f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow T_{f_n} \to T_f \equiv 0$
$f'_n = \cos(nx);\qquad (T_{f_n})' \to (T_f)' \equiv 0$

2. $ln(|x|) = f; (T_f)' \sim \frac{1}{x}$ *není lokálně integrovatelná.*
Definujeme $\frac{1}{x} := (T_f)'$*; pak*
$(\frac{1}{x};\varphi) = -\int_R ln|x|\varphi'(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} -[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}](ln(x)\varphi'(x)dx) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x) +$
$+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x) + \underbrace{[-ln\varepsilon\varphi(\varepsilon) + ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon)]}_{\to 0}$
Lze tedy položit
$(\frac{1}{x};\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{R-U(0,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{x} = v.p.\int_R\frac{\varphi(x)}{x}$

3. $T = ln(x+0i) \in \mathcal{D}'$

$$T' = \varepsilon\frac{1}{x+i0} = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

Toto je tzv. Sochotského formule.

4. $[T_{\Theta(x)}]' = \delta(x)$
$([T_{\Theta(x)}]';\varphi) = -\int_R\Theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty\varphi'(x) = \varphi(0)$

1.4 Distribuce s mocninnými singularitami

Poznámka: $x_+^\lambda; \lambda \in \mathbf{C}$. Označíme

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &= x^\lambda \text{ pokud } x > 0 \\ x_+^\lambda &= 0 \text{ pokud } x < 0 \end{aligned}$$

$x_+^\lambda \in L_{1,loc} \Leftrightarrow Re\lambda > -1.$

Definition 7 *Nechť T_λ je parametrický soubor distribucí pro $\lambda \in \Omega \subset \mathbf{C}$. Řekneme, že T_λ holomorfně závisí na λ, pokud pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}$ je $(T_\lambda;\varphi)$ holomorfní funkce pro $\lambda \in \Omega$.*

Poznámka: Zřejmě $T_\lambda = x_+^\lambda; Re\lambda > -1$ závisí holomorfně na λ.
? Existuje holomorfní prodloužení λ na $\mathbf{C}$?

$Re\lambda > -1;$
$(x_+^\lambda;\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx = \int_0^1 + \int_1^\infty \overset{*}{=} \underbrace{\int_0^1[\varphi(x)-\varphi(0)]dx}_{Re\lambda>-2} + \underbrace{\frac{\varphi(0)}{\lambda+1}}_{\lambda\neq -1} + \underbrace{\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)dx}_{\in\mathbf{C}\forall\lambda}$

Jiný způsob: $Re\lambda \in (-1,\infty);\quad (T_{x^\lambda})' = \lambda x^{\lambda-1};\quad Re(\lambda-1)\in(-2,\infty).$
V případě, že $Re\lambda \in (-2,\infty)$, je v předchozí rovnosti druhý člen roven $-\int_1^\infty\varphi(0)x^\lambda$ a $*$ je tedy rovna $\int_1^\infty x^\lambda(\varphi(x)-\varphi(0))dx$.

Tedy pro $re\lambda > n-1;$
$(x_+^\lambda;\varphi) = \int_0^1 x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)]dx + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)dx +$
$+\sum_{k=1}^n\frac{\varphi^{k-1}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}$
$Re\lambda\in(n-1,-n):\quad (x_+^\lambda;\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)]dx$

Platí: $\frac{d}{dx}(x_+^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1}$

Podobně můžeme definovat

$$\begin{aligned} x_-^\lambda &= 0 \text{ pro } x > 0 \\ x_-^\lambda &= |x^\lambda| \text{ pro } x < 0, \quad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{-1, -3, -5, \dots\} \end{aligned}$$

Nebo

$$\begin{aligned} |x|^\lambda &= x^\lambda; x > 0 \\ &= |x|^\lambda; x < 0 \qquad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{-1, -3, -5, \dots\} \end{aligned}$$

Označíme

$$\begin{aligned} m \in \mathbf{N} : |x|^{-2m} &=: x^{-2m} \\ |x|^\lambda sgn(x) &= x^\lambda \qquad x > 0 \\ &= -|x|^\lambda \qquad x < 0 \qquad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{2, 4, 6, \dots\} \\ m \in \mathbf{N} : |x|^{-2m+1} sgn(x) &=: x^{-2m+1} \end{aligned}$$

Example 9 $(x + i0)^\lambda = \lim_{y \searrow 0}(x + iy)^\lambda$
$(x + i0)^\lambda := x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda$
$(x - i0)^\lambda := x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \qquad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$
$(x \pm i0)^{-n} = x^{-n} \mp \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{n-1}(x)$

$\frac{d}{dx}(x \pm i0)^\lambda = \lambda(x \pm i0)^{\lambda-1}$
$\frac{d}{dx}(ln(x \pm i0)) = \frac{1}{x \pm i0}$

Poznámka:
$m \in \mathbf{N}; \quad (Res_{-m}(x_\pm^\lambda); \varphi) := Res_{-m}(x_\pm^\lambda, \varphi).$

Platí: $\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ holomorfní pro $\forall \lambda \in \mathbf{C}$
$\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \qquad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}, \qquad \frac{|x|^\lambda sgn(x)}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{2})}$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to -n} \frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} &= \delta^{n-1}(x)(\pm 1)^{n-1} \\ \lim_{\lambda \to -2n-1} \frac{|x|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} &= \frac{(-1)^n \delta^{2n}(x) n!}{2n!} \\ \lim_{\lambda \to -2n} \frac{|x|^\lambda sgn(x)}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{2})} &= \frac{(-1)^n \delta^{2n-1}(x)(n-1)!}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

Důkaz:
Vezměme $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$

Víme $\quad (x_+^\lambda;\varphi) = \underbrace{\int_0^1 x_+^\lambda[\dots]}_{Re\lambda>-1-n} + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{k-1}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} + \int_1^\infty \dots$

$\underbrace{(res_{-k}x_+^\lambda}_{\in\mathcal{D}};\varphi) = res_{-k}(x_+^\lambda;\varphi); \qquad res_{-k}x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}\delta^{k-1}}{(k-1)!}$

Nyní vezmeme za testovací funkci e^{-x}. Tato nemá kompaktní nosič a není to tedy testovací funkce v našem slova smyslu.

$(x_+^\lambda; e^{-x}) = \int_0^\infty x^\lambda \cdot e^{-x}dx = \Gamma(\lambda+1)$

Definujeme $\quad f_\lambda := \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \in \mathcal{D}'$

$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}/\lambda = -k = \frac{res_{-k}x_+^\lambda}{res_{-k}\Gamma(\lambda+1)} = \frac{(-1)^k\delta^{k-1}(k-1)!}{(-1)^{k-1}(k-1)!} = \delta^{(k-1)}$

Tedy $\mathcal{D}'$ je holomorfní pro $\forall\lambda\in\mathbf{C}$ $\qquad\blacksquare$.

Poznámka: $\quad \frac{d}{dx}(f_\lambda) = \frac{\lambda\cdot x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = f_{\lambda-1}$

Definition 8 $r\in\mathbf{R}^n, r=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}; \lambda\in\mathbf{C}$
1. $Re\lambda > -n \qquad (r^\lambda;\varphi) = \int_{R^n} r^\lambda\varphi(x)dx$
2. Jinak: $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, označíme $S_\varphi(r) = \frac{1}{\Omega}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\varphi(r\omega)d\omega$ průměr přes sféru o poloměru r z funkce φ.

Theorem 1 *$S_\varphi(r)$ definovanou na $<0,\infty>$ rozšířím na $\mathbf{R}^n$ jako sudou funkci. Pak $S_\varphi(r)\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$.*

Důkaz: 1. $SuppS_\varphi(r)$ je omezený.
2. ? C^∞ : $\qquad \varphi_+^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$ liché , neboť

$$\begin{aligned} S_\varphi(r) &= \frac{1}{\Omega_k}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}(\varphi(0) + \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_i + \sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}x_ix_j + \dots + \text{ zbytek} \\ &= \varphi(0) + 0 + a_2r^2 + 0 + \dots \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Poznámka: $(r_+^\lambda;\varphi) = \Omega_n\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}S_\varphi(r)dr = \Omega_n(r^{\lambda+n-1};S_\varphi)$ má holomorfní prodloužení do $\mathbf{C}\setminus\{-n,-n-1,\dots\}$.

$(res_{-n-k+1}r^\lambda;\varphi) = (res_{-k}r^\lambda;S_\varphi) = \frac{S_\varphi^{k-1}(0)}{(k-1)!}$

Máme tedy holomorfní prodkoužení do $\mathbf{C}\setminus\{-n,-n-2,-n-4,\dots\}$

Příklad: $Res_{-n}r^\lambda = \delta$

Poznámka: $S_\varphi(r) = \Omega_n(\sum_{k=0}^m \frac{\triangle^k\varphi(0)r^{2k}}{2^kk!n(n+2)\dots(n+2k-2)}) +$ zbytek

Formulka (Pice Hi) $\qquad res_{-n-k+1}r^\lambda = \frac{\Omega_n\triangle^k\delta}{2^kk!n(n+2)\dots(n+2k-2)}$

Náznak důkazu: Spočteme $\triangle(r^{\lambda+2}) = (\lambda+2)(\lambda+n)r^\lambda$

Podobně dále $\triangle(r^{\lambda+4}),\dots \qquad \blacksquare$

$(r^\lambda; e^{-r^2}) = \int_0^\infty r^\lambda e^{-r^2}r^{n-1}d\Omega dr = \frac{\Omega_n}{2}\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})$

Definujeme $F^\lambda := \frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}$). Tato je na $\mathbf{C}$ celá; $F^\lambda\in\mathcal{D}'$.

Spočteme:

$$\frac{2}{\Omega_n} \cdot \frac{r^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}/_{\lambda=-k} = \delta$$

$$\frac{2}{\Omega_n} \cdot \frac{r^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}/_{\lambda=-n-2k} = (-1)^k \frac{\triangle^k \delta}{2^k k! n(n+2)\dots(n+2k-2)}$$

1.5 Rozložení distribuce r^λ do rovinných vln

$\omega \in \mathbf{S}^{n-1}$; $\quad f(\omega_1 x_1, \dots, \omega_n x_n)$
Uvažujeme $|\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n|^\lambda$ (Rovinnou vlnu bereme jako distribuci).

Definition 9

$$(G_\lambda(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n); \varphi) := \underbrace{\int_{R^n} \frac{|\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} \varphi(x) dx}_{*} \qquad \textit{pro } Re\lambda > -1$$

Substituujeme ... $y = ux$; $u\omega = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $u \in SO(n)$
Označíme $\psi(y) = \varphi(u^{-1} y)$ Tedy

$$* = \int_R \underbrace{\frac{|y_1|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}}_{\in \mathcal{D}' \forall \lambda \in \mathbf{C}} \underbrace{[\int_{R^{n-1}} \psi(y_1, \dots, y_n) dy_2 \dots dy_n] dy_1}_{\in \mathcal{D}(\mathbf{R})}$$

$H_\lambda = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} G_\lambda(\omega) d\omega \quad \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$
$(H_\lambda; \varphi) := \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \underbrace{(G_\lambda(\omega); \varphi)}_{spoj. v \omega} d\omega$

$$Re\lambda > -1 : \underbrace{\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n|^\lambda d\omega}_{**}$$

1. Je sféricky symetrická
2. Homogenní stupně λ

Tedy existuje konstanta $c(\mu, \lambda)$ tak, že $** = c(\mu, \lambda) r \lambda$

Nyní se pokusíme zjistit $c(\mu, \lambda)$.

$$x = (1, 0, 0, \dots, 0) : \underbrace{\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\omega|^\lambda d\omega}_{\|} = c(\mu, \lambda) = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}$$

$$2\Omega_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \cos^\lambda \theta d\theta$$

Tedy $\frac{2r^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} = \frac{1}{\pi^{n-1/2}\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} \int_\Omega |\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n|^\lambda d\omega$
Víme: $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}/_{\lambda=-n} = \Omega_n \delta(x_1, \dots, x_n)$

V $\mathbf{R}: \frac{|x|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}/_{\lambda=-n} = (-1)\frac{(\frac{n-1}{2})!}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x)$
Po dosazení a vhodných úpravách:

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = konst \cdot \int_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n) d\omega$$

Je-li n liché a $\varphi \in \mathcal{D}$, dostáváme

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0) = konst \cdot \int_\Omega d\omega \int_{\sum \omega_k x_k = 0} \frac{\partial^{n-1}\varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial \omega^{n-1}} d\sigma$$

1.6 Distribuce soustředěné na ploše

$\mathbf{R}^n, P(x_1, \ldots x_n) \in \mathbf{C}^\infty$
$S = \{P = 0\}$; $gradP \neq 0$ na S
Bude nás zajímat $\delta(P)$.

Example 10 $P = x_1; S = \{x_1 = 0\}$ $\quad (\delta(P); \varphi) = \int_S \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n$

Poznámka (Dělení diferenciálních forem)
M orientovaná varieta, $\nu \in C^n(M)$ objemová forma. Vezmeme $P \in C^\infty(M), S = \{P = 0\}$. Pak existuje forma ω v okolí S tak, že $dP \wedge \omega = \nu$ a navíc je ω/S určeno jednoznačně.

Důkaz:
1. Existence: $x \in S$, na $U(x)$ vezmeme souřadnice $x_1, \ldots, x_n$ a zvolíme $x_1 = P$.
$\nu = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$; $\quad dx_1 = dP$, tedy můžeme dělit, $\omega = f \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$
2. Jednoznačnost:
Pomůcka: $dP \wedge \alpha = 0 \Rightarrow \exists \beta : \alpha = dP \wedge \beta$
Dk.

$$\alpha = \alpha' + dP\alpha''$$

$$dP \wedge \alpha = 0 \Rightarrow \alpha' = 0$$

ze zbytku vytkneme dP. $\bullet$
Nechť $\nu = dP \wedge \omega = dP \wedge \omega'$
$\Rightarrow \omega - \omega' = dP \wedge \gamma \Rightarrow \omega - \omega'/S = 0$ neboť $dP = 0$ na S $\blacksquare$

Definition 10 $M = \mathbf{R}^n, P \in C^\infty(M), S = \{P = 0\}$ *je regulární plocha. Plochu* S *orientujeme pomocí gradientu funkce* P. *Definujeme pro každou*
$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(dP; \varphi) := \int_S \varphi \cdot \omega,$$

kde $\omega = \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{dP}$

Example 11

1. $$P(x) = x_1 \Rightarrow (\delta(P); \varphi) = \int_{x_1=0} \varphi(0, dx_2, \dots, dx_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

2. $P(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; \alpha \neq 0, |\alpha| = 1$
Zvolíme $u_1 = \sum \alpha_{1,i} x_i$ *a doplníme souřadnicemi*
$u_2 = \sum \alpha_{2,i} x_i, \dots, u_n = \sum \alpha_{n,i} x_i; \quad \alpha_{k,i} \in SO(n)$.

$$(dP; \varphi) = \int_{u_1=0} \varphi(x(u)) du_2 \wedge \dots \wedge du_n = -\int_{\sum \alpha_i x_i = 0} \varphi(x) d\sigma$$

Poznámka: $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; u_1, \dots, u_n, P = u_j$
$\Rightarrow dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = Jac \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_1 \wedge \dots \wedge du_n$
$\Rightarrow \omega = (-1)^{j-1} du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_j} \wedge \dots \wedge du_n$
Speciálně, pokud jsme v okolí x, j je pevné a $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, vezmeme

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ u_{j-1} &= x_{j-1} \\ u_j &= P \\ u_{j+1} &= x_{j+1} \\ &\vdots \\ u_n &= x_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow Jac \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = (Jac \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix})^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$
Odtud $\omega = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$

Example 12 *1.* $\delta(xy - c)$ *v* $\mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} u_1 &= x \\ u_2 &= xy - c \end{aligned}$$

$Jac \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ x, y \end{pmatrix} = x, \qquad Jac \begin{pmatrix} xy \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{x}$
$\delta((xy - c)\varphi(x, y)) = \int_{x>0} \varphi(x, \frac{c}{x}) \frac{dx}{x} - \int_{x<0} \varphi(x, \frac{c}{x}) \frac{dx}{x}$
2. $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ *v* $\mathbf{R}^n$
Přejdeme ke sférickým souřadnicím:
$dx = r^{n-1} dr \wedge dS, dr = dP \Rightarrow \omega = r^{n-1} dS$
Tedy

$$(\delta(r - c), \varphi(x)) = \int_{\mathbf{S}(c)} \varphi(x) dS$$

$\mathbf{S}(c)$ *je sféra o poloměru* c.

3. $\delta(r^2-c^2)$
$P=r^2-c^2 \Rightarrow dP=2rdr$

$$(\delta(r^2-c^2),\varphi(x))=\int_{\mathbf{S}(c)}\frac{1}{2c}\varphi(x)dS=\frac{1}{2c}\int_{\mathbf{S}(c)}\varphi(x)dS$$

Poznámka: V $\mathbf{R}^n$ existuje funkce $\theta(x)$ taková, že $\theta'=\delta$. Definujeme distribuci $\theta(P)$ vztahem

$$(\theta(P);\varphi)=\int_{\{P\geq 0\}}\varphi(x)dx$$

Platí

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\theta(P)=\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\delta(P)\qquad \forall j=1,\dots,n$$

Důkaz: Búno $\{P\geq 0\}$ je omezená.
1. Nechť $x\in S=\{P=0\}$ a pro pevné $j:\frac{\partial(P)}{\partial x_j}(x)\neq 0$
Vezmeme φ; $supp\ \varphi\subset U(x)$
$L:\ \int\frac{\partial}{\partial x_j}(\theta(P))\varphi=-\int\theta(P)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=$
$=-\int_{P\geq 0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx$
$P:\ \int\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\delta(P)\varphi=\int\delta(P)[\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\varphi]=\int_{P=0}\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\varphi\omega=-\int_{P\geq 0}d[\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\varphi\omega]=$
$=-\int_{P\geq 0}\frac{d\varphi}{\partial x_j}dx$, protože $\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\varphi\omega=(-1)^{j-1}\varphi dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n$
Poznámka: $supp\ \delta(P)\subset S$
Dk. $x\notin S\Rightarrow\exists U(x):U(x)\cap S=0$
$\forall\varphi\in\mathcal{D}, supp\ \varphi=U\Rightarrow(\delta(P),\varphi)=0$ $\bullet$

2. Nechť $x\in S$; $\frac{\partial(P)}{\partial x_j}(x)=0$
$\Rightarrow\exists\xi_1,\dots,\xi_n, x_k=\sum\alpha_{k_j}\xi_j$ tak, že $\frac{\partial(P)}{\partial\xi_l}(x)\neq 0\quad\forall l=1,\dots,n.$
Pak $\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum\underbrace{\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}}_{\beta_{jk}}\frac{\partial}{\partial\xi_k}$
$\frac{\partial}{\partial x_j}(\theta(P))=\sum\beta_{jk}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\theta(P))=\sum\beta_{jk}\frac{\partial(P)}{\partial\xi_k}(\delta(P))=\frac{\partial(P)}{\partial x_j}(\delta(P))$

3. Nechť $x\notin S; supp\ \varphi\subset U(x); U(x)\cap S$
$(\frac{\partial}{\partial x_j}(\theta(P));\varphi)=-\int_{P\geq 0}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}_{=d(\varphi dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n)}=0$ $\blacksquare$

Chceme, aby platil takovýto vztah:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P)=\frac{\partial(P)}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P)$$

Nejdříve ale musíme zjistit, co znamená $\delta^{(k)}(P)$.

Definition 11 *P, φ dáno, $\omega_0(\varphi) := \varphi \cdot \omega$. definujeme formy $\omega_i(\varphi)$:*

$$\begin{aligned} dP \wedge \omega_1(\varphi) &= d\omega_0(\varphi) \\ dP \wedge \omega_2(\varphi) &= d\omega_1(\varphi) \\ &\vdots \\ dP \wedge \omega_{k+1}(\varphi) &= d\omega_k(\varphi) \end{aligned} \qquad (1)$$

Ukážeme, že tyto formy existují:

$$\begin{aligned} \omega &= Jac\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_2 \wedge \cdots \wedge du_n \\ \omega_0(\varphi) &= \varphi Jac\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_2 \wedge \cdots \wedge du_n \\ d(\omega_0(\varphi)) &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\varphi Jac\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \\ \Rightarrow \omega_1(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\varphi Jac\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}) du_2 \wedge \cdots \wedge du_n \\ &\vdots \\ \omega_k(\varphi) &= \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}(\varphi Jac\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}) du_2 \wedge \cdots \wedge du_n \end{aligned}$$

Formy tedy existují, ale nejsou určeny jednoznačně.

Theorem 2 *$\omega_k(\varphi), \tilde{\omega_k}(\varphi)$ jsou dva systémy splňující relace (1). Pak existují α_k, β_k tak, že*

$$(*) \qquad \omega_k(\varphi) - \tilde{\omega_k}(\varphi) = d\alpha + \beta \wedge dP$$

Důkaz: Indukcí ... pro ω_0 platí
Nechť $(*)$ platí pro k

$$d\omega_k(\varphi) - d\tilde{\omega_k}(\varphi) = \beta \wedge dP$$

$$dP \wedge (\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_{k+1} - (-1)d\beta) = 0$$

$$\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_{k+1} = (-1)d\beta + \gamma \wedge dP \qquad \blacksquare$$

Definition 12

$$(\delta^k(P); \varphi) = (-1)^k \int_{\{P=0\}} \omega_k(\varphi)$$

Poznámka: Tato definice nezávisí na výběru ω_k. (Pravé strany by se lišily pouze o integrál z exaktní formy a ten je podle Stokesovy věty nulový.)

Example 13 **1.** $P(x) = x_1, \quad \omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$
$\int \delta^{(k)}(x_1)\varphi = (-1)^k \int_{x_1=0} \frac{\partial^k \varphi(0,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1^k} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$
2. $\delta^{(k)}(r-c), \quad r^2 = \sum x_i^2, \quad u_1 = r-c, \ u_2 = \theta_1, \ \ldots \ u_n = \theta_{n-1}$
$\omega = r^{n-1} d\Omega$, $d\Omega$ *je plošný element na* $\mathbf{S}^1$

$$\int \delta^{(k)}(r-c)\varphi dx = \frac{(-1)^k}{c^{n-1}} \int_{\{r=c\}} \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi \cdot r^{n-1}) dS$$

3. $\delta^{(k)}(r^2-c^2), \quad u_1 = r^2 - c^2, \ u_2 = \theta_1, \ \ldots \ u_n = \theta_{n-1}$

$$\omega = \frac{1}{2} r^{n-2} d\Omega$$

$$\omega_k(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k (\varphi \cdot r^{n-2}) d\omega$$

$$\int \delta^{(k)}(r^2-c^2)\varphi dx = \frac{(-1)^k}{c^{n-1}} \int_{\{r^2=c^2\}} \left(\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k (\varphi \cdot r^{n-2}) dS$$

Theorem 3

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta^{(k)}(P)) = \frac{\partial(P)}{\partial x_j}(\delta^{(k+1)}(P))$$

Důkaz: Nechť $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$
$(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P); \varphi) = (-1)^{k+1} \int_{\{P=0\}} \omega^{k+1}(\varphi \cdot \frac{\partial P}{\partial x_j}) = (\bullet)$
Víme

$$\omega_0(\varphi) = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial u_j^k}\left(\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\varphi\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$\omega(\varphi \frac{\partial P}{\partial x_j}) = \frac{\partial^k}{\partial u_j^k}(\varphi) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Odtud
$(\bullet) = (-1)^{k+1} \int_{\{P=0\}} \underbrace{\frac{\partial^{k+1}}{\partial u_j^{k+1}}(\varphi)}_{(*)} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$
$(\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta^{(k)}(P); \varphi) = (\delta^{(k)}(P); \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) = (-1)^{k+1} \int_{\{P=0\}} \omega_k(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) =$
$= (-1)^{k+1} \int_{\{P=0\}} \underbrace{\frac{\partial^k}{\partial u_j^k}\left(\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)}_{(**)} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$
$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$
Pro $k = 0$ dostáváme $(*) = (**)$. Dalším derivováním dostaneme rovnost pro všechna k. ■

Theorem 4

$$\begin{aligned} 1.P\delta(P) &= 0 \\ 2.P\delta'(P)+\delta(P) &= 0 \\ &\vdots \\ P\delta^{(k)}(P)+k\delta^{(k-1)}(P) &= 0 \end{aligned}$$

Důkaz:
ad 1. Z definice: $(P\delta(P);\varphi)=\int_{\{P=0\}}\omega\varphi P=0$
ad 2. Derivujeme podle x_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_j}+P\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P)+P\cdot\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta'(P) &= 0 \end{aligned}$$

Víme $\frac{\partial P}{\partial x_j}\neq 0$, můžene tedy krátit. A derivujeme dále. ■

Theorem 5 $\mathbf{R}^{n+1}$, (x,t), $x=(x_1,\ldots .x_n)$

$$(\triangle-\frac{\partial^2}{\partial t^2})[\delta^k(r^2-t^2)]=(2n-4k-6)\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)\ v\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta^{(k)}(r^2-t^2)) &= 2x_j\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\delta^{(k)}(r^2-t^2)) &= 2\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)+4x_j^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2) \end{aligned}$$

$\sum_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\delta^{(k)}(r^2-t^2))=2n\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)+\underbrace{4(r^2-t^2)\delta^{(k+2)}(r^2-t^2)}_{-4(k+2)\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)}+$
$+4t^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2)=(2n-4(k+2))\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)+4t^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2)$
$\frac{\partial}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2)=-2\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)+4t^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2)$ ■

Ještě k homogenním distribucím:
$x\in\mathbf{R}^n,\ f\in\mathcal{D}',\ f(x)\in L_{1,loc}$
$\alpha>0\cdots\int f(\alpha,x)\varphi(x)dx=\frac{1}{\alpha^n}\int f(y)\varphi(\frac{y}{x}dy$

Definition 13 $T\in\mathcal{D}'$, *definujeme*

$$T(\alpha,x):=\frac{1}{\alpha^n}(T,\varphi(\frac{x}{\alpha})$$

Poznámka: $f(\alpha,x)=\alpha^\lambda f(x),\ \ \lambda\in\mathbf{C},\ \forall\alpha>0$

Definition 14 *Řeknene, že $T \in \mathcal{D}'$ je homogenní stupně $\lambda \in \mathbf{C}$ na $\mathbf{R}^n$, pokud $\forall \alpha > 0 \;\; T(\alpha, x) = \alpha^\lambda T(x)$, tj. $(T, \varphi(\frac{x}{\lambda})) = \alpha^\lambda (T, \varphi(x))$*

Platí:
1. $T, S, \in \mathcal{D}'$ homogenní stupně $\lambda \;\Rightarrow \forall \alpha, \beta \;\; \alpha T + \beta S$ taktéž.
2. $f \in \mathbf{C}^\infty$ homogenní stupně μ, $T \in \mathcal{D}'$ homogenní stupně $\lambda \;\Rightarrow fT$ je homogenní stupně $\lambda + \mu$
3. $T \in \mathcal{D}'$ homogenní stupně $\lambda \;\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_j}$ je homogenní stupně $\lambda - 1$.
Neboť: $(\frac{\partial T}{\partial x_j}; \varphi(\frac{x}{\alpha})) = -(T; \frac{\partial}{\partial x_j}[\varphi(\frac{x}{\alpha})]) = -\frac{-1}{\alpha}(T; \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\frac{x}{\alpha})) = -\alpha^{\lambda-1}(T; \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)) =$
$= (\frac{\partial T}{\partial x_j}; \varphi)\alpha^{\lambda-1}$ ■
4. $T_\lambda \in \mathcal{D}'$, $\lambda \in O \subset \mathbf{C}$, O otevřená , T_λ je homogenní stupně λ. Nechť existuje analitické pokračování T_λ na $O' \supset O$. Pak toto je rovněž homogenní stupně λ.

Platí: $T \in \mathcal{D}'$ homogenní stupně $-n$, $n \in \mathbf{N}$, pak $T = c_1 x^{-n} + c_2 \delta^{(n-1)}(x)$.

Připomeň: $\delta(x)$ je (-1) homogenní $Supp\ \delta = \{0\}$.

Důsledek: $T \in \mathcal{D}'$ homogenní stupně (-1), $\quad Supp\ T \subset < 0, \infty > \Rightarrow T = \delta$.

Platí: $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $Supp\ T \subset \{0\} \;\Rightarrow T = \sum_{j=1}^m c_j \delta^{(m)}(x)$.

2 Radonova transformace

$\mathbf{R}^n$, $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$
$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ... rychle klesající funkce.
Uvažujme nadroviny v $\mathbf{R}^n$: $V_{(\xi,p)} := \{x; (\xi, x) = p; \xi \in \mathbf{R}^n, p \in \mathbf{R}\}$.

Definition 15 *Radonova transformace:*
$\xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}, p \in \mathbf{R}$

$$\check{f}(\xi, p) = \int f(x)\delta(p - (\xi, x))dx = (\delta(p - (\xi, x)); f(x))$$

Poznámka: Jiný zápis
$\xi \in \mathbf{R}^n - \{0\} \Rightarrow \exists i \;\; \xi_i \neq 0$
Označíme $\omega = \frac{(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n}{\xi_i}$
Pak

$$\check{f}(\xi, p) = \int_{\{(\xi,x)=p\}} f(x)\omega$$

Platí: $\alpha \in \mathbf{R}^n - \{0\}$: $\check{f}(\alpha\xi, \alpha p) = |\alpha|^{-1}\check{f}(\xi, p)$. tj. f je sudá a homogenní stupně (-1).
Dk. $\check{f}(\alpha\xi, \alpha p) = \int f(x)\delta\underbrace{(\alpha p - (\alpha\xi, x))}_{\alpha[p-(\xi,x)]} dx$ a δ je sudá a (-1) homogenní. ■

2.1 Vztah Radonovy a Fourierovy transformace

Fourierova transformace : $\tilde{f}(\xi) = \int f(x)e^{i(\xi,x)}dx \underbrace{=}_{\text{Fubiniova věta}} \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi,p)e^{ip}dp$

Tedy
$\tilde{f}(\alpha\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi,p)e^{i\alpha p}dp; \ \alpha \neq 0$

Naopak
$\check{f}(\xi,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha\xi)e^{-i\alpha p}dp$

2.2 Vlastnosti Radonovy transformace

1. $(\alpha f + \beta g)^{\vee} = \alpha\check{f} + \beta\check{g}$
2. $y = Ax, \ |A| = det\ A \neq 0$, označíme $f_A(x) = f(A^{-1}x)$
Pak $\check{f}_A(\xi,p) = |A|\check{f}(A^t\xi,p)$
Speciálně: $A = \alpha \cdot Id; \quad f_{\alpha Id}(x) = f(\frac{x}{\alpha})$
$\Rightarrow \check{f}_{\alpha Id}(\xi,p) = |\alpha|^n\check{f}(\alpha\xi,p)$
Důkaz: $\check{f}_A(\xi,p) = \int f(A^{-1}x)\delta(p-(\xi,x))dx \ \ldots$ substituce $x = Ay$
$= |A|\int f(y)\delta(p-(\xi,Ay))dy = |A|\int f(y)\delta(p-(A^t\xi,y))dy = |A|f(A^t\xi,p)$ ∎
3. $f_a(x) := f(x+a); \quad a \in \mathbf{R}^n$
Pak $\check{f}_a(\xi,p) = \check{f}(\xi,p+(\xi,a))$

Důkaz: $\check{f}_a(\xi,p) = \int f(x+a)\delta(p-(\xi,x))dx \underbrace{=}_{y=x+a} \int f(y)\delta(p-(\xi,y-a))dy$

4. $a \in \mathbf{R}^n; \ \nabla_a = \sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i} = (a, \frac{\partial}{\partial x})$
$(\nabla_a f)^{\vee}(\xi,p) = (a,\xi)\frac{\partial\check{f}(\xi,p)}{\partial p}$
5. $\frac{\partial}{\partial p}[(a,x) - f(x)]^{\vee}(\xi,p) = (a, \frac{\partial}{\partial\xi})\check{f}(\xi,p)$
Důkaz: $\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\check{f}(\xi,p)) = \frac{\partial}{\partial\xi_i}(\int f(x)\delta(p-(\xi,x))dx = \int f(x)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\delta(p-(\xi,x))dx =$
$= -\int f(x)x_i\delta'(p-(\xi,x))dx = \frac{\partial}{\partial p}[x_if(x)]^{\vee}$ ∎

Následující věta říká, jak rekonstruujeme funkci f z Radonovy transformace $\check{f}$.

Theorem 6 *Označíme* $\omega(x) = \sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}x_kdx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n$
Pak pro všechna $f \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ *a všechna* n *lichá existuje konstanta* $c \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ *tak, že platí*

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}[\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial p^{n-1}}\check{f}](\xi,(\xi,x))\omega(\xi) = cf(x)$$

Důkaz:

1. Nejprve ukážeme, že není nutné integrovat přes $\mathbf{S}^{n-1}$. Můžeme integrovat přes libovolný řez Γ nadploch procházejíícch bodem x. Vezmeme-li projekci
$\mathbf{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1}$, musí Γ splňovat $\Gamma \cap \{t\xi\} = \{bod\}$.

Vezmeme-li vektorové pole

$$E = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

platí, že $E \lrcorner\, \omega = 0$ protože $\omega = E \lrcorner\, dx$.
ω je tedy horizontální forma na $\mathbf{S}^{n-1}$
¿Je ω ekvivariantní?
V nadrovinách, které procházejí bodem x máme dáno pravé násobení

$$\begin{array}{rcl} \Gamma g^{*}\omega & = & \omega \\ x & \to & \alpha x \\ dx & \to & \alpha dx \end{array}$$

Aby toto násobení ω zachovávalo, musela by být 0-homogenní. ω je ale n-homogenní, tedy není ekvivariantní. Víme, že

$$[\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial p^{n-1}}\check{f}](\xi, (\xi, x))$$

je $(-n)$-homogenní, tedy

$$(*) \qquad [\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial p^{n-1}}\check{f}](\xi, (\xi, x))\omega(\xi)$$

je 0-homogenní. $(*)$ je ekvivariantní a horizontální, můžeme proto integrovat přes libovolný řez nadploch procházejících bodem x.

Nyní ukážeme, že pro n liché platí vztah

$$(**) \qquad f(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Gamma} \check{f}_p^{n-1}(\xi, (\xi, x))\omega(\xi)$$

Důkaz:
1. $T \in \mathcal{D}'$, definujeme $(T, f) = \int_{\Gamma} \check{f}_p^{n-1}(\xi, 0)\omega(\xi)$ (Toto je funkční hodnota $(**)$ v 0) a ukážeme, že existuje konstanta c, taková, že $T = c\delta$.
Víme, že $(T, f_A) = \int_{\Gamma} \check{f}_{A,p}^{n-1}(\xi, 0)\omega(\xi) = |det\ A| \int_{\Gamma} \check{f}_p^{n-1}(A^t\xi, 0)\omega(\xi) = \int_{\Gamma} \check{f}_p^{n-1}(\xi', 0)\omega(\xi') = (T, f)$
Poznámka:
1. Můžeme definovat distribuci $\tilde{T}$ na $\mathbf{R}$: $(\tilde{T}, \varphi(x)) = (T, \varphi(r))$, kde $\varphi \in \mathcal{S}_c^{\infty}(\mathbf{R})$, sudá a $r^2 = \sum x_i^2$
2. $(T, f_A) = (T, f) \Rightarrow (T, f) = (T, \tilde{f})$, kde $\tilde{f}(r) = \frac{1}{r^n}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(r\omega)dS = k\int_{SO(n)} f_A(x)dA$

$\tilde{T}$ je (-1)-homogenní, neboť $(T, f_A(x)) = (T, f(x))$; $\ A = \alpha Id$
$\Rightarrow \tilde{T}$ je sudá, (-1)-homogenní distribuce na $\mathbf{R} \Rightarrow \tilde{T} = c\delta$

2. V obecném bodě:

$x \in \mathbf{R}^n$; $f_a(x) = f(x + a)$
Víme, že $f_a(0) = c\int_{\Gamma} (\check{f}_a)_p^{n-1}(\xi, 0)\omega(\xi)$
Ještě víme, že $(\check{f}_a)(\xi, p) = \check{f}(\xi, p + (a, \xi))$
Tedy $c\int_{\Gamma} (\check{f}_a)_p^{n-1}(\xi, 0)\omega(\xi) = c\int_{\Gamma} \check{f}_p^{n-1}(\xi, (\xi, a))\omega(\xi) = f(a)$

3. Spočítáme konstantu c:

Definujeme $f := e^{-\sum x_i^2}$, $\check{f}(\xi,p) = \int e^{-x_1^2-\cdots-x_n^2}\delta(p-\xi_1x_1-\cdots-\xi_nx_n)dx$ $(= \check{f}((|\xi|,0,\ldots,0),p)\ )$

Tedy $\check{f}(\xi,p) = \int e^{-x_1^2-\cdots-x_n^2}\delta(p-|\xi|x_1)dx_1\ldots dx_n = \pi^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{p^2}{\xi^2}}\frac{1}{|\xi|}$

Poznámka: $\delta(p-|\xi|x_1) = \delta(|\xi|(\frac{p}{|\xi|}-x_1)) = \frac{1}{|\xi|}\delta(\frac{p}{|\xi|}-x_1)$.

Spočteme $\check{f}_p^{n-1}(\xi,p)$

Napíšeme si Taylorův rozvoj v p : $e^{-\frac{p^2}{|\xi|^2}} = 1 - \frac{p^2}{|\xi|^2} + \frac{1}{2!}\frac{p^4}{|\xi|^4} - \ldots$

$\check{f}_p^{n-1}(\xi,p) = (n-1)! \cdot (\text{ koeficient u } p^{n-1}) = \pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{|\xi|}(n-1)!\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(\frac{n-1}{2})!}\frac{1}{|\xi|^{n-1}} =$
$= \pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{|\xi|^n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n-1)!}{(\frac{n-1}{2})!}$

Známe hodnotu f v 0, tedy $c = \pi^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n-1)!}{(\frac{n-1}{2})!}\underbrace{\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\frac{\omega(\xi)}{|\xi|^n}}_{\Omega_n}$

Ω_n je plocha jednotkové sféry a platí $\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-1}{2})!}{(n-1)!}$
Tedy

$$c = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \qquad \blacksquare$$

Theorem 7 *Pro n sudé*

$$f(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_\Gamma(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,p)(p-(\xi,x))^{-n}dp)\omega(\xi)$$

Důkaz probíhá podobně, jako pro n liché.

Poznámka: Pro n liché je formulka pro výpočet $f(x)$ lokální, stačí nám znát pouze nadroviny procházející bodem x. Pro n sudé máme globální vzorec.

Nyní budeme zkoumat to, jak vypadá obraz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (rychle klesající funkce) při Radonově transformaci. (Věty typu Paley-Wiener).

$\check{f}(\xi,p)$ jsou sudé a (-1)-homogenní $\Rightarrow$ jsou určeny hodnotami na $\mathbf{S}^{n-1}\times\mathbf{R}$
sudost: $\check{f}(\omega,p) = \check{f}(-\omega,-p)$
Označíme

$$\mathcal{S}(P_n) = \{\ f \in C^\infty\mathbf{S}^{n-1}\times\mathbf{R}, f \text{ sudá }, sup\ |(1+|p|^l)\frac{\partial^k}{\partial p^k}(D_\omega f)(\omega,p)| < \infty\ \}$$

prostor rychle klesajících funkcí v eventuálních obrazech.

Theorem 8 *Pro všechna $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ platí*

$$(H) \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\ je \int_R \check{f}(\omega,p)p^k dp \quad \textit{homogenní polynom stupně } k$$

.

Důkaz:
$\int_R \check{f}(\omega,p)p^k dp = \int_R (p^k \int_{(\omega,x)=p} \check{f}(x)\delta(p-(\omega,x))dx\ )dp \underbrace{=}_{\text{Fub. v.}} \int_{R^n} \check{f}(x)(\omega,x)^k dx$ ■

Definition 16 $\mathcal{S}_H(P_n) := \{\ f \in \mathcal{S}(P_n), f$ *splňuje podmínku (H)* $\}$

Theorem 9 *Radonova transformace zobrazuje prostě* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *na* $\mathcal{S}_H(P_n)$.

Důkaz:
Víme 1. $\check{f}(\omega,p) = \frac{1}{2\pi}\int_R \widetilde{f}(s\omega)e^{-isp}dS$
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \widetilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \widetilde{f}(s_x\omega) = F(s,\omega) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})\forall\omega$ a je hladká. $\widetilde{f}$ je tedy rychle klesající v p a hladká.

Pokryjeme sféru $\mathbf{S}^{n-1}$ souřadnicovými okolími. Vezmeme $|\omega_n| > \omega$, tedy $\omega_n = \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i^2}$

a zaměníme $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{n-1} \\ s \end{bmatrix}$

Příklad: $\frac{\partial}{\partial\omega_i}(\widetilde{f}(s\omega)) = -s\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial u_i} - s\omega_i(1-\sum\omega_i^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial u_n}$
Takže obraz je hladká a rychle klesající funkce.

Nyní přiřadíme funkci $f \quad \check{f}$ na $\mathcal{S}_H(P_n)$
$\varphi(\omega,p) \in \mathcal{S}_H(P_n)$, definujeme $F(s,\omega) := \int_R \varphi(\omega,p)e^{-ips}dp$
Hledáme $G(u) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; $G(s,\omega) = F(s,\omega)$
Pro $u \neq 0$ definujeme $G(u) := F(|u|, \frac{u}{|u|})$
Definujeme $G(0) := F(0,\omega) = \underbrace{\int \varphi(\omega,p)dp}_{\text{homogenní polynom stupně 0, tedy konstanta}}$
G je dobře definovaná, $G \in C^\infty(\mathbf{R}^n - \{0\})$. Problém je ukázat, že G je C^∞ na $\mathbf{R}^n$.

Poznámka: Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega_j}{\partial u_i} &= \frac{1}{s}(\delta_{ij} - \underbrace{(\frac{u_i u_j}{s^2})}_{\omega_i\omega_j}), \text{ pro } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \frac{\partial s}{\partial u_i} &= \omega_i \text{ pro } 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{\partial s}{\partial u_n} &= (1-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Příklad:

$n=3, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \omega_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_j} s\delta_{ij} = s\frac{\partial}{\partial u_i},$
$\frac{\partial u_i}{\partial s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_j}\omega_j$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & s & 0 \\ \omega_2 & 0 & s \\ (1-\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}} & \frac{-\omega_1 s}{(1-\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{-\omega_2 s}{(1-\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

Vyrobíme inverzní matici:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & (1-\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{s}(1-\omega_1^2) & -\frac{\omega_1\omega_2}{s} & -\frac{\omega_1(1-\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}}{s} \\ -\frac{\omega_1\omega_2}{s} & \frac{1}{s}(1-\omega_2^2) & \frac{\omega_2(1-\omega_1^2\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}}{s} \end{bmatrix}$$

Nyní ukážeme, že G je $\mathbf{C}^\infty$ v 0 a dokončíme tak důkaz věty 9.
$F(s,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega,p)dp + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega,p)[e^{-ips}-1]dp$
?: Jsou derivace $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ omezené na některém $U(0)$?
Poznámka:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u_i} &= \frac{1}{s}\frac{\partial h}{\partial \omega_i} - \omega_i(\frac{\partial h}{\partial s} - \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n-1}\omega_j\frac{\partial h}{\partial \omega_i}) \\ \frac{\partial h}{\partial u_n} &= \omega_n(\frac{\partial h}{\partial s} - \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n-1}\omega_j\frac{\partial h}{\partial \omega_i}) \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial s}F = \int_{-\infty}^{\infty} -\varphi(\omega,p)ipe^{-ips}$
$|\frac{1}{s}\frac{\partial F}{\partial \omega_i}(s\omega)| \le k\int \frac{1}{1+p^n}|\frac{e^{-ips}-1}{s}|dp \le k\int \frac{|p|}{1+p^n} \in \mathbf{R}^n$

Lemma 2

$$\frac{\partial^q h}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_q}} = \sum_{i+j\le q, 1\le k_1\dots ki\le n-1} a_{j,k_1\dots k_i}(\omega)s^{j-q}\frac{\partial^{i+j}h}{\partial \omega_{k_1}\dots\partial\omega_{k_i}\partial s^j}$$

$$e_q(z) = e^z\sum_{j=0}^{q-1}\frac{z^j}{j!}$$

$$F(s,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega,p)\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-ips)^k}{k!}dp + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega,p)e_q(-ips)dp$$

$$|s^{j-q}\frac{\partial^j}{\partial s^j}(e_q(-ips)| = |(-ip)^{q-j}e_{q-j}(-ips)| \le |\frac{1}{\vartheta^q}e_q(\vartheta)| \le k_jp^q \qquad \blacksquare$$

Poznámka: $f \to \check{f}(\xi,p) = \int_{p=(\xi,x)} f(x)\delta(p-(\xi,x))$
Označíme: 1. $\delta(t) = \theta'(t)$
2. $M(\xi,p) = \int_{R^n} f(x)\theta(p-(\xi,x))\dots$ hmotnost poloprostoru s hustotou $f(x)$.
Tedy $\check{f}(\xi,p) = \frac{\partial M}{\partial p}(\xi,p)$
$n = 2k+1 \ \dots \ cf(x) = \int_\Gamma \check{f}(\xi,p)\overline{\check{g}_p^{n-1}(\xi,p)}dp\omega(\xi)$

Plancherelova formule

Poznámka: $f(x)=\int f_1(y)f_2(x-y)dy \Rightarrow \check{f}(\xi,p)=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}_1(\xi,p)\check{f}_2(\xi,p-t)dt$

Důkaz:

$\check{f}(\xi,p)=\int f_1(y)f_2(x-y)\delta(p-(\xi,x))dydx \underbrace{=}_{x-y=u}$

$=\int f_1(y)f_2(u)\delta(p-(\xi,u)-(\xi,y))dydu=\int f_1(y)\check{f}_2(\xi,p-(\xi,y))dy=$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}_1(\xi,t)\check{f}_2(\xi,p-t)dt$ ■

Theorem 10 *(Plancherelova formule)*

1. $n=2k+1,\ f,g\in\mathcal{S}$

$$\int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,p)\overline{\check{g}^{(n-1)}(\xi,p)}dp\Big)\omega(\xi)$$

$\left(=\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}^{(k)}(\xi,p)\overline{\check{g}^{(k)}(\xi,p)}dp\Big)\omega(\xi)\right)$

2. $n=2k,\ f,g\in\mathcal{S}$

$$\int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_\Gamma\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,p_1)\overline{\check{g}(\xi,p_2)}(p_1-p_2)^{-n}dp_1dp_2\Big)\omega(\xi)$$

$\left(=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_\Gamma\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,p_1+p_2)\overline{\check{g}(\xi,p_2)}dp_2\Big)p_1^{-n}dp_1\Big)\omega(\xi)\right)$

Důkaz: Větu dokážeme pro n liché. Označíme $F(x)=\int f(y)\overline{g(y-x)}dy$

$\check{F}(\xi,p)=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,t)\overline{\check{g}(\xi,t-p)}dt$

$F(0)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma \check{F}^{(n-1)}(\xi,0)\omega(\xi)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,t)\overline{\check{g}^{(n-1)}(\xi,t)}dt\Big)\omega(\xi)$ ■

2.3 Radonova transformace pro distribuce

Nechť $n=2k+1$

$\int_{R^n}F(x)f(x)dx=c\underbrace{\int_\Gamma\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\check{F}(\xi,p)\psi(\xi,p)dp\Big)\omega(\xi)}_{c(\check{F},\psi)},$ kde $\psi(\xi,p)=\check{f}_p^{n-1}(\xi,p)$

Budeme definovat funkcionál $\check{F}$ na prostoru $\mathcal{A}=\{\psi=\check{f}^{(n-1)};f\in\mathcal{S}\}$ takový, že $(F,f)=c(\check{F},\psi)$

$\mathcal{A}$ splňuje:

$$\mathcal{S}(\mathbf{S}^{n-1}\times\mathbf{R})\begin{cases}1. & \psi(\alpha\xi,\alpha p)=|\alpha|^{-n}\psi(\xi,p)\\ 2. & \psi(\xi,p) \text{ jsou } C^\infty \text{ v } p \text{ pro } \xi\neq 0\\ 3. & \psi(\xi,p)\in\mathcal{S} \text{ v } p\end{cases}$$

4. $\forall k \geq 0$: $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,p)p^k dp$ je homogenní polynom v ξ stupně $(k-n+1)$, jinak je roven 0

Lemma 3 *Je-li* $g(\xi,p) = a_{k-1}(\xi)p^k$ *taková, že*
1. pro $k < n-1$ *je* $a_{k-1}(\xi)$ *libovolná funkce*
2. pro $k \geq n-1$ *je* $\int_\Gamma a_{-k-1}(\xi)p_{k-n+1}(\xi)\omega(\xi) = 0$ *pro všechna p stupně* $k-n+1$
a platí-li, že $a_{-k-1}(\alpha\xi) = \alpha^{-k}|\alpha|^{-1}a_{-k-1}(\xi)$, *pak* $(g,\psi) = 0$ *pro všechna*
$\psi = \check{f}_p^{(n-1)}$

Důkaz:
$(g,\psi) = \int_\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi,p)\check{f}^{(n-1)}(\xi,p)dp\omega(\xi) = \int_\Gamma a_{k-1}(\xi)\underbrace{(\int_{-\infty}^{\infty} p^k \check{f}^{(n-1)}(\xi,p)dp)}_{\text{pol. st. } n-k+1 \text{ v } \xi}\omega(\xi) =$

$= 0$ ■

Poznámka:
$\mathcal{S}'$ ... kompaktní distribuce
$\mathcal{D}'$ ... distribuce
$\mathcal{E}'$ ... distribuce s kompaktním nosičem

Helgason:

$$\text{Pro } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}) \text{ definujeme } \widehat{\varphi} = c\int_\Gamma S(\xi(\xi,\alpha))\omega(\xi)$$

Lemma 4

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{\varphi}(\alpha)f(x) = \int_\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi,p)\varphi(\xi,p)dp\omega(\xi)$$

Důkaz:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} \check{f}(\xi,p)dp$$

$$c\int_{\mathbf{S}^{n-1}\times\mathbf{R}} f(x)\varphi(\xi,(\xi,\alpha))\omega(\xi)d\alpha = \int_{\mathbf{S}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}}(\check{f}(\xi,p)\varphi(\xi,p))dp \qquad ■$$

Definition 17 $F \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. *Definujeme* $\check{F} \in \mathcal{E}'(\mathbf{S}^{n-1}\times\mathbf{R})$ *tak, že pro* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{S}^{n-1}\times\mathbf{R}^n)$ *je* $(\check{F};\varphi) =$ $(F;\widehat{\varphi})$.

?Má $\check{F}$ kompaktní nosič?
$F = in\mathcal{E}'$, tedy F má kompaktní nosič, *supp* $f \subset B_R(0)$.
Je-li $\varphi(\omega,p) = 0$ pro $|p| \leq R$, je $\widehat{\varphi} = 0$ na $B_R(0)$, tedy $0 = (F,\widehat{\varphi}) =$
$= (\check{F},\varphi) \Rightarrow$ *supp* $\check{F} \subset (-R,R)$ v p.

Příklady:

1. $f = \delta_a(\alpha) \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$
$M(\xi,p) = F(\alpha)\theta(p-(\xi,\alpha)) = \theta(p-(\xi,\alpha))$
$M(\xi,p) = 1 \quad \ldots \quad p > (\xi,a),$
$\qquad = 0 \quad \ldots \quad p < (\xi,a)$
$\frac{\partial M}{\partial p} = \check{F}$
$\frac{\partial M}{\partial p} = \delta(p-(\xi,a))$
$\Rightarrow \check{F} = \delta(p-(\xi,a))$

2. $F = a(x_1)\delta(x_2\ldots x_n);\ a \in \mathcal{D},\ a \in \mathcal{S},\ a \in L_1$

$$M(\xi,p) = \int_{-\infty}^{\frac{p}{\xi_1}} a(x_1)dx_1 \quad \ldots\ \xi_1 > 0$$

$$= \int_{\frac{p}{\xi_1}}^{\infty} a(x_1)dx_1 \quad \ldots\ \xi_1 < 0$$

$$\check{F} = \frac{\partial M}{\partial p}(\xi,p) = \frac{1}{\xi_1}a(\frac{p_1}{\xi_1})$$

3. $F = (x_1)_+^\lambda\delta(x_2-x_1), \quad (x_n)_+^\lambda = \underbrace{(x_1)_+^\lambda\theta(1-x_1)}_{a_1} + \underbrace{(x_1)_+^\lambda\theta(x_1-1)}_{a_2}$

$F_1 = a_1\delta(x_2\ldots x_n), \quad F_2 = a_2\delta(x_2\ldots x_n)$

$$\begin{aligned} \check{F}_1 &= \frac{1}{|\xi_1|}(\frac{p}{\xi_1})_+^\lambda\theta(1-\frac{p}{\xi_1}) \\ \check{F}_2 &= \frac{1}{|\xi_1|}(\frac{p}{\xi_1})_+^\lambda\theta(\frac{p}{\xi_1}-1) \\ \lambda \notin \mathbf{Z}: \quad \check{F} &= \frac{1}{|\xi_1|}(\frac{p}{\xi_1})_+^\lambda \equiv p_+^\lambda(\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_+^\lambda(\xi_1)_-^{-1-\lambda} \end{aligned}$$