Křivky a plochy, 4. semestr
šk. rok 2004/2005

Vladimír Souček

20. května 2005

1. přednáška

0.1 Úvod

Hlavním tématem této přednášky je klasická diferenciální geometrie křivek a ploch v $\mathbb{R}^3$. Přídavné jméno diferenciální znamená, že geometrické problémy jsou řešeny pomocí metod analýzy, hlavním nástrojem je diferenciální počet funkcí jedné, resp. několika reálných proměnných.

Hlavní zdroje, ze kterých vyrůstala diferenciální geometrie, jsou klasická mechanika (pohyb hmotného bodu, jeho rychlost a zrychlení) a geodézie (zeměměřictví, mapy). Počátky sahají zpět do 17. a 18. století (Huyghens, Leibniz, Newton, Euler, Monge). Klíčové postavy té části diferenciální geometrie, o které budeme mluvit, byli v 19. století Gauss, Riemann, Bolyai, Lobačevskij. Nejde tedy o moderní, současnou matematiku, ale o klasické základy, na kterých moderní matematika staví. Moderní zobecnění této části klasické matematiky se týká analogií a zobecnění do vyšších dimenzí. Nejvýznamnější čeští geometři 20. století byli Eduard Čech (geometr a topolog) a Václav Hlavatý (jeho jméno nese knihovna v Karlíně).

Jednou z hlavních větví moderní diferenciální geometrie je tzv. Riemannova geometrie, která Einsteinovy poskytla model a matematický nástroj pro jeho obecnou teorii relativity. Interakce elementárních částic jsou v současné době popisovány výhradně pomocí teorie kalibračních polí. Kalibrační pole je název, který se používá v teoretické fyzice pro analogii parciálních derivací vektor-hodnotových funkcí, zadaných na plochách. Matematici těmto derivacím říkají kovariantní derivace, nebo také konexe. Většinu těchto matematických teorií lze najít pod názvy diferenciální geometrie, globální analýza nebo analýza na varietách.

Většinu přednášky budeme studovat lokální geometrické vlastnosti křivek a ploch. Bude nás zajímat křivost a torze křivek, různé druhy křivosti ploch, rovnice pro geodetiky na plochách, apod. Mnohem zajímavější (a také podstatně těžší) jsou globální výsledky výsledky v diferenciální geometrii (např. Gauss-Bonnetova věta pro plochy). Tyto výsledky ukazují vztahy mezi lokálními a globálními vlastnostmi křivek, či ploch, vztahy mezi topologií a geometrií.

Jsou to prototypy obecných výsledků ve vyšších dimenzích, které patří mezi jedny z velkých témat matematiky 20. století. Typickým příkladem je slavná Atiyah-Singerova věta o indexu pro eliptické diferenciální operátory (nebo jejich komplexy), které jsou definovány na více-dimenzionálních plochách. K této moderní části diferenciální geometrie a analýzy na varietách se v této přednášce nedostaneme.

Přednáška nemá cvičení, ale základem dobrého pochopení je pro každého propočet mnoha konkrétních příkladů. Pro porozumění velmi pomůže spočítat si příklady, které budou v textu zadány jako cvičení. Nejvíce pomůže, pokud si je čtenář dokáže spočítat sám. Prosemináře z diferenciální geometrie křivek a ploch nabízejí možnost spočítat si řadu příkladů s pomocí cvičícího.

Přednáška je velmi blízká k duchu knihy

A. Pressley: Elementary differential geometry, Springer Undergraduate Math. Series, 2001.

Tato kniha obsahuje řadu konkrétních řešených příkladů Další (řešené) příklady je možné najít ve skriptech

J. Bureš, K. Hrubčík: Diferenciální geometrie křivek a ploch, Karolinum,

Tyto skripta pokrývají téměř stejnou látku, používájí však trochu jiné označení. Další příklady jsou obsaženy ve skriptech

L. Boček: Příklady z diferenciální geometrie.

Kapitola 1

Křivky

Budeme křivky studovat v $\mathbb{R}^3$. Nedá mnoho námahy přenést většinu pojmů a výsledků do $\mathbb{R}^n$. Je ale jednodušší pro zájemce formulovat a rozmyslit si toto zobecnění, než se nutit představovat si obecné pojmy v jejich přirozené geometrické představě v $\mathbb{R}^3$.

Prvním tématem, které budeme probírat, budou vlastnosti křivek v $\mathbb{R}^3$. Je otázka, co se vlastně myslí pod pojmem křivka. Nejběžnější definice je zobrazení $\mathbf{c} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ (tzv. parametrická křivka). Abychom vyloučili patologické případy (např. Peanovu křivku, jejíž obraz vyplní čtverec), budeme požadovat hladkost zobrazení $\mathbf{c}$. Bylo by možné požadovat pouze existenci prvních (ev. druhých či třetích) spojitých derivací místo hladkosti, ale budeme dávat přednost jednoduchosti před takovýmto nepříliš významným zobecněním.

Intuitivně si pod pojmem křivka představujeme spíš obraz zobrazení $\mathbf{c}$, množinu v $\mathbb{R}^3$ (kružnice, přímka, elipsa, hyperbola, parabola, atd.) Příslušná množina bodů je ale obrazem (oborem hodnot) mnoha parametrických křivek. Zavedeme si proto pojem změny parametrizace křivky a budeme studovat vlastnosti, které jsou na volbě parametrizace nezávislé.

1.1 Parametrizované křivky.

Definice 1.1.1 *Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. Parametrizovaná křivka v $\mathbb{R}^3$ je hladké zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$. Hladkost znamená existenci (spojitých) derivací všech řádů.*

Vektor $\mathbf{c}'(t) \equiv \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá tečný vektor k parametrické křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Řekneme, že parametrizovaná křivka $\mathbf{c}$ je regulární v bodě $t_0 \in I$, pokud $\mathbf{c}'(t_0) \neq 0$.

Řekneme, že parametrizovaná křivka $\mathbf{c}$ je regulární, pokud je regulární v každém bodě I.

Množina hodnot $\mathbf{c}(I)$ se nazývá obraz parametrizované křivky.

Poznámka 1.1.2 *Vektor-hodnotové zobrazení jsou určeny svými složkami. Například křivka* $\mathbf{c}$ *je určena třemi reálnými funkcemi:*

$$\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)).$$

Také tečný vektor je určen třemi funkcemi:

$$\mathbf{c}'(t) = (c_1'(t), c_2'(t), c_3'(t))$$

Pro vektory z $\mathbb{R}^3$ *jsou definovány dva druhy součinu - skalární (označený tečkou) a vektorový součin (označený* $\times$*). Skalární součin má své přirozené zobecnění ve vyšších dimenzích, vektorový součin lze definovat jen v dimenzi 3.*

Základní vlastností vektorového součinu (která může být zároveň jeho definicí) je následující vlastnost.

Lema 1.1.3 *Pro každé tři vektory* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *platí*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

V tomto lemmatu se jedná o determinant matice, jejíž řádky (nebo ekvivalentně sloupce) tvoří vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Z vlastností determinantu plyne, že pořadí vektorů v matici lze cyklicky permutovat, aniž se determinant změní. Důkaz tvrzení plyne ihned z definice obou součinů a z rozvoje determinantu podle posledního řádku. Výraz na levé straně se často nazývá smíšený součin tří vektorů.

Je ihned vidět (spočítejte si!), že jsou-li $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ dvě parametrické křivky, pak pro derivaci jejich skalárního, resp. vektorového součinu platí

$$(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)' = \mathbf{c}_1' \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2',$$

$$(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)' = \mathbf{c}_1' \times \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2'.$$

Podobně pro tři křivky $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ platí

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]' = \det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3'].$$

První jednoduché tvrzení pro křivky, které si ukážeme, tvrdí následující intuitivně srozumitelný fakt.

Tvrzení 1.1.4 *Je-li tečný vektor parametrizované křivky konstantní, pak je obraz této parametrizované křivky podmnožina přímky.*

Důkaz.

Je-li $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{a}$, pak $\mathbf{c}(t) = \int \mathbf{c}'(t)dt = \int \mathbf{a}dt = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b}$ je vhodný konstantní vektor.

Pokud je $\mathbf{a} \neq 0$, pak tvrzení zřejmě platí. Pro $\mathbf{a} = 0$ je obraz křivky jen jeden bod. □

1.2 Parametrizace obloukem.

Definice 1.2.1 *Je-li* $\mathbf{c}$ *parametrická křivka na* $I \subset \mathbb{R}$ *a je-li* $\phi : \tilde{I} \to I$ *difeomorfismus, pak se parametrická křivka* $\tilde{\mathbf{c}}(t') := \mathbf{c}(\varphi(t'))$ *na* $\tilde{I}$ *nazývá reparametrizací parametrické křivky* $\mathbf{c}$*. Takovéto dvě křivky mají zřejmě tentýž obraz.*

Reparametrizace tvoří relaci ekvivalence na množině všech parametrických křivek. Křivkou budeme nazývat třídu ekvivalence parametrizovaných křivek vůči této relaci.

Řekneme, že reparametrizace zachovává orientaci parametrické křivky, pokud je derivace reparametrizace ϕ' *stále kladná funkce. Také reparametrizace, které zachovávají orientaci parametrické křivky tvoří relaci ekvivalence. Tyto třídy ekvivalence budeme nazývat orientované křivky.*

Všimněte si, že každá reparametrizace regulární parametrické křivky je zřejmě opět regulární parametrická křivka. Můžeme tedy mluvit o regulárních křivkách, resp. regulárních orientovaných křivkách. V dalším budeme vyšetřovat vlastnosti křivek (resp. orientovaných křivek), tj. ty vlastnosti parametrizovaných křivek, které nezávisí na parametrizaci.

Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná křivka na I a zvolme bod t_0 v intervalu I. Pak definujeme funkci $s(t)$ vztahem

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du.$$

Hodnota $s(t)$ je právě délka křivky $\mathbf{c}$ na intervalu (t_0, t). Pokud změníme počáteční hodnotu parametru t_0, pak se funkce $s(t)$ změní o konstantu.

Je-li $\mathbf{c}$ regulární parametrizovaná křivka, je funkce $s = s(t)$ zřejmě hladká a rostoucí (protože $s'(t) = |\mathbf{c}'(t)| > 0$ v každém bodě) a je to tudíž difeomorfismus definičního intervalu I na jiný interval $\tilde{I}$. Označme $t = t(s)$ odpovídající inverzní funkci.

Pro novou parametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s)), s \in \tilde{I}$ platí

$$\left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)\right| \frac{1}{|\frac{ds}{dt}(t)|} = 1.$$

To vede k následující definici.

Definice 1.2.2 *Nechť* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná křivka na* I*. Řekneme, že* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná obloukem, pokud platí*

$$\left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)\right| = 1$$

pro všechny $t \in I$*.*

Tvrzení 1.2.3
(1) Parametrizace $\mathbf{c}(t), t \in I$ *je regulární právě když ji lze parametrizovat obloukem, tj., pokud existuje její reparametrizace* $\tilde{\mathbf{c}}$ *na* $\tilde{I}$*, pro kterou platí*

$$|\tilde{\mathbf{c}}'(s)| = 1$$

pro všechna $s \in \tilde{I}$*.*
(2) Je-li $\mathbf{c}(s)$ *jedna parametrizace obloukem, pak každá jiná parametrizace obloukem se získá pomocí změny parametrizace tvaru*

$$\tilde{s} = \pm s + c,$$

kde c *je vhodná konstanta.*

Důkaz.
(1) Pokud je $\mathbf{c}$ regulární, pak jsme si již ukázali, že existuje její parametrizace obloukem. Naopak, pokud pro křivku $\mathbf{c}$ na I existuje reparametrizace $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ na $\tilde{I}$, pro kterou $\left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = 1$ pro všechna $s \in \tilde{I}$, pak $|\mathbf{c}'(t)| \neq 0, t \in I$, neboť

$$1 = \left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = |\mathbf{c}'(t(s))| \left|\frac{dt}{ds}\right|.$$

(2) Jsou-li $s = s(t), u = u(t)$ dvě reparametrizace, které obě vedou na parametrizaci obloukem, pak z předchozího bodu plyne

$$\frac{du}{dt} = \pm\left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right| = \pm\frac{ds}{dt}.$$

Z toho požadované tvrzení ihned plyne.

□

Viděli jsme, že pro každou křivku $\mathbf{c}$ na I a každou volbu bodu $t_0 \in I$ dostáváme parametrizaci obloukem $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ s vlastností, že bodu t_0 odpovídá parametr $s = 0$. Zde platí, že parametr s, odpovídající bodu $\mathbf{c}(t)$ je délka křivky (velikost oblouku) mezi bodem $\mathbf{c}(t_0)$ a bodem $\mathbf{c}(t)$. Tyto parametrizace obloukem křivky $\mathbf{c}$ jsou charakterizovány vlastností, že 0 patří do definičního oboru $\tilde{I}$.

I když teoreticky je parametrizace obloukem definovaná pro každou regulární křivku, je zpravidla nemožné ji explicitně spočítat.

Příklad 1.2.4
(1) Najděte parametrickou křivku, jejíž obraz je kružnice o středu v bodě $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *a poloměru* $R > 0$ *a spočítejte parametrizaci obloukem této křivky.*

Jedna z možných odpovědí je

$$\mathbf{c}(t) = (a_1 + R\cos t, a_2 + R\sin t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$\tilde{\mathbf{c}}(s) = \left(a_1 + R\cos\frac{s}{R}, a_2 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

(2) Spočítejte parametrizaci obloukem pro tzv. logaritmickou spirálu

$$\mathbf{c}(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Nakreslete si její graf!

1.3 Křivost křivky.

Teď bychom chtěli vhodným způsobem charakterizovat, jak je křivka v kterém bodě 'křivá'. Tato vlastnost (jako všechny, které zkoumáme), nesmí záviset na volbě parametrizace. Navíc bychom zřejmě chtěli, aby křivost přímky byla nula a aby kružnice s větším poloměrem měly křivost menší než kružnice s menším poloměrem.

Víme již, že křivka je částí přímky, pokud $\ddot{\mathbf{c}}(t) = 0$ pro všechna $t \in I$. Nabízí se tedy definovat křivost křivky v bodě $t \in I$ jako velikost $|\ddot{\mathbf{c}}(t)|$. Bohužel, tato veličina závisí (a to velmi komplikovaným způsobem) na volbě parametrizace. Je možné tuto libovůli při volbě parametrizace odstranit požadavkem, aby křivka byla parametrizovaná obloukem. Pak již víme, že zbyde jen malá možnost reparametrizace, která veličinu $|\ddot{\mathbf{c}}(t)|$ zřejmě nemění:

$$u = \pm s + c, \frac{d\mathbf{c}}{ds} = \frac{d\mathbf{c}}{du}\frac{du}{ds} = \pm\frac{d\mathbf{c}}{du},$$

$$\frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right)\frac{du}{ds} = \pm\frac{d}{du}\left(\pm\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right) = \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2}.$$

To vede k následující definici.

Definice 1.3.1 *Je-li* $\mathbf{c}$ *křivka parametrizovaná obloukem, pak její křivost v bodě* $\mathbf{c}(s)$ *je rovna* $|\mathbf{c}''(s)|$.

Příklad 1.3.2

Spočítejme křivost kružnice o poloměru R, parametrizované obloukem:

$$\mathbf{c}(s) = \left(a_1 + R\cos\frac{s}{R}, a_2 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

Dostaneme

$$\mathbf{c}'(s) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\mathbf{c}''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$|\mathbf{c}''(s)| = \frac{1}{R}.$$

2. přednáška

1.3.1 Skalární a vektorový součin v $\mathbb{R}^3$.

Pro příští použití si rozmyslíme (resp. zopakujeme) základní informace o vlastnostech součinů dvou vektorů.

Tvrzení 1.3.3 *Pro každé tři vektory v* $\mathbb{R}^3$ *platí*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Návod k důkazu:
(1) Tvrzení je ekvivalentní s tvrzením, že pro každé čtyři vektory v $\mathbb{R}^3$ platí

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$$

(2) Tvrzení je ekvivalentní s tvrzením, že pro každé čtyři vektory v $\mathbb{R}^3$ platí

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}),$$

protože smíšený součin se nemění při cyklické záměně.
(3) Předchozí tvrzení se lehko ověří pro případ, že $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ a oba vektory $\mathbf{c}$ a $\mathbf{d}$ jsou kolmé na $\mathbf{a}$.
(4) Je ihned vidět, že levá strana rovnosti (2) se nemění pro transformaci

$$\mathbf{a}' = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{d}, \mathbf{d}' = \gamma_1\mathbf{a} + \delta_1\mathbf{d}; \mathbf{b}' = \alpha_2\mathbf{b} + \beta_2\mathbf{c}, \mathbf{c}' = \gamma_2\mathbf{b} + \delta_2\mathbf{c};$$

kde matice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

patří do $SL(2, \mathbb{R})$.
(5) Přímým a jednoduchým výpočtem se ukáže, že i pravá strana rovnosti (2) se nemění při této transformaci.
(6) Výše uvedenou transformací je možné tvrzení (2) převést na případ (3). (Obě dvojice vektorů zadávají dvě roviny, které se nutně obsahující společnou přímku. V této přímce si zvolím vektor $\mathbf{a}'$ a oba vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{d}$ převedu vhodnou transformací na tento vektor. Zbylou libovůli využiji na to, abych vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ převedl na vektory kolmé k $\mathbf{a}'$.)

Výše uvedená definice křivosti je těžko použitelná pro praktický výpočet křivosti křivky. Jen ve velmi málo případech dokážeme explicitně parametrizaci obloukem spočítat. Je tedy potřeba umět spočítat křivost křivky z jakékoliv její parametrizace. K tomu slouží následující věta.

Věta 1.3.4 *Předpokládejme, že $\mathbf{c}(t)$ je regulární křivka v $\mathbb{R}^3$. Pak pro její křivost κ platí*

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3},$$

kde tečka značí derivaci $\frac{d}{dt}$.

Důkaz.

Základem důkazu je přechod od obecné parametrizace křivky k parametrizaci obloukem. Předpokládejme, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ je křivka v obecné parametrizace (na nějakém intervalu I). Zvolme si nějakou parametrizaci $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ této křivky obloukem (víme, že je to vždy možné) a označme s příslušný parametr. Tedy $s = s(t), t \in I$ a $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(s(t)), t \in I$.

Někdy bývá v matematice zvykem označovat příslušné funkce rozdílnými symboly, tj. označit parametrizaci obloukem např. písmenem $\mathbf{d} = \mathbf{d}(s)$, označit reparametrizaci symbolem $s = f(t)$ a psát $\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(f(t)), s = f(t)$. Je to přesnější, ale málo přehledné. Budeme používat výše uvedené intuitivní označení, čtenář si snadno rozmyslí, v kterém významu se příslušný symbol používá. Pro lepší odlišení ale budeme používat různé symboly pro derivace podle proměnné t, resp. s: derivaci $\frac{d}{dt}$ budeme označovat tečkou, derivaci $\frac{d}{ds}$ budeme označovat čárkou. Platí tedy:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(s(t));\ \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'(s(t))\,\dot{s}(t)$$

a (již bez proměnných):

$$\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}''\,(\dot{s})^2 + \mathbf{c}'\,\ddot{s}.$$

Z definice oblouku dostaneme ihned $\dot{s} = |\dot{\mathbf{c}}|$ a

$$(\dot{s})^2 = \dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}} \ \Rightarrow \dot{s}\ddot{s} = \dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}}.$$

Podle definici křivosti dostaneme

$$\kappa = \left|\mathbf{c}''\right| = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}\frac{1}{\dot{s}}\,\ddot{s}\right|}{(\dot{s})^2} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{s})^2 - \dot{\mathbf{c}}\,\dot{s}\,\ddot{s}\right|}{(\dot{s})^4} = \frac{|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})|}{|\dot{\mathbf{c}}|^4}.$$

Nyní již stačí použít identitu pro trojitý vektorový součin (viz předchozí tvrzení):

$$|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})| = |\dot{\mathbf{c}} \times (\ddot{\mathbf{c}} \times \dot{\mathbf{c}})| = |\dot{\mathbf{c}}|\ |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|\,.$$

□

Příklad 1.3.5
(1) Vypočítejte křivost šroubovice, která je zadaná parametrickým popisem $\mathbf{c}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Výsledek: $\kappa = \frac{|a|}{a^2+b^2}$.

(2) Přesvědčte se, že pro $b = 0$ (kružnice o poloměru a) a $a = 0$ (přímka) vychází očekávané hodnoty křivosti.

1.4 Rovinné křivky.

V této části prozkoumáme vlastnosti křivek, které leží v rovině. Tuto rovinu si zvolíme (pro pohodlí) tak, že to bude $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, zadané rovnicí $x_3 = 0$, tj. $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ $[\equiv (c_2, c_2, 0) \in \mathbb{R}^3]$. Chápu-li rovinnou křivku jako křivku v prostoru, její křivost je vždy kladná a nezáleží na orientaci křivky. Pro rovinné křivky ale mohu rozlišit, jestli (orientovaná) křivka zatáčí vlevo či v pravo. To vede pro rovinné křivky k pojmu znaménková křivost.

Definice 1.4.1 *Nechť $\mathbf{c}$ je parametrizovaná regulární křivka v $\mathbb{R}^2$ a nechť $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$ její jednotkový tečný vektor v bodě $\mathbf{c}(t)$. Pak definujeme Frenetovu bazi $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ v bodě $c(t)$ požadavkem, aby to byla ortonormální, kladně orientovaná baze $\mathbb{R}^2$.*

Uvažujme křivku $\mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem. Protože $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, je $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$, tedy $\mathbf{t}' = \ddot{\mathbf{c}}$ je kolmý k $\mathbf{t}$ a musí být tedy násobkem $\mathbf{n}$. To umožňuje následující definici.

Definice 1.4.2 *Nechť $\mathbf{c}$ je regulární křivka v $\mathbb{R}^2$ parametrizovaná obloukem a nechť $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ je její Frenetova baze. Pak definujeme znaménkovou křivost κ_z křivky $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(s)$vztahem*

$$\mathbf{c}''(s) = -\kappa_z\, \mathbf{n}(s).$$

Zřejmě platí, že $\kappa = |\kappa_z|$.

Poznámka.

Zkusme si rozmyslet, co se stane, když změníme orientaci křivky. Po substituci $s \mapsto -s$ přejde $\mathbf{t} \mapsto -\mathbf{t}$, $\mathbf{n} \mapsto -\mathbf{n}$ a $\mathbf{t}' \mapsto \mathbf{t}'$. Z toho plyne, že při změně orientace κ_z změní znaménko.

Znaménko veličiny κ_z určuje směr zatáčení křivky. Zatáčka doprava odpovídá kladnému znaménku κ_z a zatáčka doleva odpovídá zápornému znaménku κ_z. (Nakreslete si obrázky křivky se zatáčkou v pravo, resp. vlevo, a stejné křivky se změněnou orientací, a pak si nakreslete u každé křivky tečný vektor $\mathbf{t}$, vektor $\mathbf{n}$ a spočítejte si znaménko κ_z.)

Použijeme-li vzorec pro κ v $\mathbb{R}^3$, je lehké si rozmyslet, že znaménková křivost κ_z se pro parametrickou křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ vypočítá takto:

$$\kappa_z = \kappa\ sgn \det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}.$$

Z tohoto vzorce plyne, že se znaménková křivost κ_z nemění při změně parametrizace, která zachovává orientaci. Matice přechodu od baze $\{\mathbf{c}', \mathbf{c}''\}$ k bazi $\{\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}\}$ má totiž tvar

$$\begin{pmatrix} \dot{s} & 0 \\ \ddot{s} & (\dot{s})^2 \end{pmatrix}$$

a její determinant je roven $(\dot{s})^3$.

Intuitivní interpretaci znaménkové křivosti ukazuje následující tvrzení. Je z něj dobře vidět, že znaménko κ_z odpovídá tomu, jestli křivka zatáčí doprava, či doleva.

Tvrzení 1.4.3 *Nechť* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná regulární rovinná křivka a* $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/\dot{\mathbf{c}}$ *její jednotkový tečný vektor. Zvolme pevně jednotkový vektor* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ *a označme symbolem* φ *orientovaný úhel (proti směru hodinových ručiček) od* $\mathbf{a}$ *k* $\mathbf{t}$*. Pak*

$$\kappa_z(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Důkaz.

Můžeme vybrat parametrizaci obloukem křivky $\mathbf{c}$ tak, aby se její orientace nezměnila. Doplňme vektor $\mathbf{a}$ na kladně orientovanou ortonormální bazi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Pak $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'' = \kappa_z\, \mathbf{n}$, tedy

$$\mathbf{t} = \mathbf{c}' = \mathbf{a}\cos\varphi + \mathbf{b}\sin\varphi;\ \mathbf{n} = -\mathbf{a}\sin\varphi + \mathbf{b}\cos\varphi.$$

Z toho ihned plyne

$$\mathbf{c}'' = -\mathbf{a}\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \mathbf{b}\cos\varphi\,\dot{\varphi} = \mathbf{n}\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \kappa_z.$$

□

1.4.1 Shodnosti.

Definice 1.4.4 *Shodnost v* $\mathbb{R}^n$ *je zobrazení* $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$*, které zachovává vzdálenost:*

$$|S(x) - S(y)| = |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 1.4.5 *Libovolná shodnost je affiní zobrazení, tj.* $S(x) = A\,x + b$*, kde* A *je* $n \times n$ *reálná matice,* $b \in \mathbb{R}^n$*. Affiní zobrazení je shodností právě když* A *je ortogonální matice. Shodnost se nazývá přímou shodností, pokud je* $\det A > 0$*, v opačném případě se nazývá nepřímou shodností.*

Je snadné si rozmyslet, že je-li S shodnost, pak křivost křivky $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$ je stejná jako křivost křivky $\tilde{\mathbf{c}} = S \circ \mathbf{c}$ v bodě $S(\mathbf{c}(t))$. Je otázka, jestli je pravda, že křivka je určena svou křivostí až na shodnost. Je ihned vidět, že to nemůže být pravda v $\mathbb{R}^3$, nebo ve vyšších dimenzích. Je to ale, jak uvidíme, pravda v rovině (pro rovinné křivky). Další otázkou je, jaké podmínky musí funkce splňovat, aby byla znaménkovou křivostí nějaké orientované parametrické křivky. Na tyto otázky dává odpověď následující věta.

Věta 1.4.6
(1) Je-li $k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ libovolná hladká funkce, pak existuje regulární orientovaná křivka parametrizovaná obloukem, jejíž znaménková křivost je rovna k na (α, β).
(2) Jsou-li $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ dvě regulární orientované křivky na (α, β) parametrizovaná obloukem, jejichž znaménkové křivosti κ_z^1, resp. κ_z^2 se rovnají na (α, β), pak existuje přímá shodnost $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taková, že

$$\mathbf{c}_2 = S \circ \mathbf{c}_1, \ \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz.
(1) Zvolme referenční jednotkový vektor $\mathbf{a}$ takto: $\mathbf{a} = (1, 0)$. Víme, že $\kappa_z = \frac{d\varphi}{ds}$, kde φ je orientovaný úhel od $\mathbf{a}$ k $\mathbf{t}$. Definujme funkci $\varphi(s)$ vztahem $\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du$. Budeme hledat křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$, pro kterou platí

$$\mathbf{c}'(s) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s)), \ s \in (\alpha, \beta).$$

Definujme tedy křivku $\mathbf{c}$ takto:

$$\mathbf{c}(s) := \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\varphi(u))du, \int_{s_0}^{s} \sin(\varphi(u))du), \ s \in (\alpha, \beta \right).$$

Úhel od $\mathbf{a}$ k jednotkovému tečnému vektoru $\mathbf{t}$ této křivky je zřejmě φ. Znaménková křivost κ_z této křivky je tedy rovna $\frac{d\varphi}{ds} = \kappa_z(s)$.
(2) Jsou-li $\varphi_1(s)$, resp. $\varphi_2(s)$, úhly od vektoru $\mathbf{a} = (1, 0)$ k jednotkovým vektorům $\mathbf{c}_1'(s)$, resp. $\mathbf{c}_2'(s)$, pak

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = \kappa_z^1(s) = \kappa_z^2(s) = \frac{d\varphi_2}{ds},$$

tedy existuje $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $\varphi_2(s) = \varphi_1(s) + \varphi_0$ na (α, β). Pak

$$\mathbf{c}_i'(s) = (\cos(\varphi_i(s)), \sin(\varphi_i(s))); \ i = 1, 2$$

$$\mathbf{c}_i(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\varphi_i(u))du, \int_{s_0}^{s} \sin(\varphi_i(u))du \right) + \mathbf{c}_i(s_0); \ i = 1, 2.$$

Protože

$$\cos\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_0) = \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_0 \sin\varphi_1,$$

$$\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_0) = \cos\varphi_0 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_0 \cos\varphi_1,$$

platí pro matici

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

vztah

$$\begin{pmatrix} (c_2)_1 \\ (c_2)_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} (c_1)_1 \\ (c_1)_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2) = \mathbf{c}_2(s_0) - \mathbf{c}_1(s_0).$$

Označíme-li $S(x) = A\,x + b$, pak $\mathbf{c}_2 = S \circ \mathbf{c}_1$. □

Příklad 1.4.7 *(1) Ukažte, že pokud je znaménková křivost orientované křivky konstantní, pak leží obraz křivky ve vhodné kružnici.*
(2) Najděte křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ takovou, že $\kappa_z(s) = s, s \in \mathbb{R}$. Tuto křivku už znal Euler, při jejím popisu se dojde k Fresnelovým integrálům, které nelze explicitně integrovat. Křivka, jejíž křivost je dána velmi jednoduchou funkcí, může tedy být popsány velmi komplikovanými funkcemi.

---

3. přednáška

1.5 Prostorové křivky.

Pro křivky v prostoru již nestačí samotná křivost k charakterizaci křivky. Je např. z předchozích příkladů jasné, že kružnice a šroubovice v prostoru mohou mít stejnou křivost, i když zřejmě není možné převést jednu na druhou pomocí shodnosti v prostoru. Budeme si nyní definovat další geometrickou charakteristiku prostorové křivky - tzv. torzi křivky. K tomu nám pomůže studium vlastností ortogonálních bazí, svázané s každým bodem křivky.

V rovině určoval jednotkový tečný vektor v daném bodě jednoznačně kladně orientovanou ortonormální bazi. Změna této baze podél křivky byla vyjádřena pomocí derivací baze podle parametru křivky. Tyto derivace bylo možné rozložit v každém bodě do této baze. Koeficient v tomto vyjádření byla znaménková křivost křivky. Zkusíme si nyní podobnou proceduru provést i pro prostorové křivky. V každém bodě (netriviální) křivky si určíme význačnou bazi svázanou s chováním křivky, tzv. Frenetovou bazi.

1.5.1 Frenetova baze.

Každá regulární křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ má automaticky v každém bodě jeden význačný směr, tečný směr. Pro regulární křivku je možné v každém bodě definovat jednotkový tečný vektor $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$.

Druhá derivace $\ddot{\mathbf{c}}$ je důležitá informace o křivce. Pokud jsou vektory $\ddot{\mathbf{c}}$ a $\dot{\mathbf{c}}$ nezávislé, pak určují význačnou rovinu (tzv. oskulační rovinu křivky v daném bodě). Vektory $\ddot{\mathbf{c}}$ a $\dot{\mathbf{c}}$ jsou závislé právě když křivost křivky v daném bodě je rovna nule. Pro definici Frenetovy baze tedy budeme muset předpokládat, že křivost křivky je nenulová.

Uvažujme nyní křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem. Tedy $|\mathbf{c}'| = 1$ a $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ je jednotkový tečný vektor. Derivací vztahu $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, dostaneme $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$. Pokud je křivost κ nenulová, je také $\mathbf{t}' \neq 0$. To umožňuje následující definici.

Definice 1.5.1 *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}(s)$ *je regulární křivka parametrizovaná obloukem, která má v bodě* $\mathbf{c}(s_0)$ *nenulovou křivost. Pak v tomto bodě definujeme význačnou ortonormální bazi, tzv. Frenetovu bazi* $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\,\mathbf{b}\}$*, následujícím způsobem.*

$$\mathbf{t} = \mathbf{c}'; \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}; \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

Rovina, generovaná vektory $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ *se nazývá oskulační rovina křivka; rovina generovaná vektory* $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ *se nazývá normálová rovina křivky a rovina generovaná vektory* $\mathbf{b}, \mathbf{t}$ *se nazývá rektifikační rovina křivky.*

V každém bodě regulární parametrické křivky s nenulovou torzí máme definovánu význačnou ortonormální (Frenetovu) bazi. Chování křivky se odráží ve změně této baze. Infinitezimální změna je popsána derivacemi prvků Frenetovy baze v daném bodě. Přirozený způsob, jak zachytit informaci o těchto derivacích je spočítat koeficienty v rozkladu těchto derivací vzhledem k Frenetově bazi v daném bodě. Co víme o těchto derivacích?

Nechť $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak víme, že $\mathbf{t}' = \kappa\,\mathbf{n}$.

Protože $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, dostaneme

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \mathbf{t} \times \mathbf{n}',$$

Tedy $\mathbf{b}'$ je kolmé na $\mathbf{t}$. Navíc, z $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ plyne $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = 0$, tedy $\mathbf{b}'$ je kolmé také na $\mathbf{b}$. Vektory $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{n}$ jsou tedy závislé. To umožňuje následující definici.

Definice 1.5.2 *Je-li* $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ *regulární křivka parametrizovaná obloukem s nenulovou křivostí, pak definujeme torzi* τ *této křivky vztahem*

$$\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}.$$

Znaménko v definici τ je jen konvence. Nyní chybí již jen spočítat $\mathbf{n}'$. Všechny derivace jsou shrnuty v následujícím klíčovém tvrzení.

Věta 1.5.3 (Frenetova věta) *Předpokládejme, že* $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ *je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

Důkaz.

Připomeňme, že $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, a tedy $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ a $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$. Pak

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b} \times \mathbf{t})' = \mathbf{b}' \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \mathbf{t}' = -\tau\,\mathbf{n} \times \mathbf{t} + \kappa\mathbf{b} \times \mathbf{n} = \tau\,\mathbf{b} - \kappa\,\mathbf{t}.$$

□

Zatím ještě nevíme, jestli torze křivky nezávisí na volbě parametrizace, jestli je to geometrická vlastnost křivky. V definici jsme předpokládali paramatrizaci křivky obloukem, ale ta je určena až na změnu parametrizace tvaru $s \mapsto \pm s + c$, kde c je konstanta. Je užitečné si rozmyslet, jak se mění prvky Frenetovy baze a jejich derivace při takovéto změně parametrizace. Dostaneme

$$\mathbf{t} \mapsto \pm\mathbf{t},\ \mathbf{t}' \mapsto \mathbf{t}';\ \ \mathbf{n} \mapsto \mathbf{n},\ \mathbf{n}' \mapsto \pm\mathbf{n}';\ \mathbf{b} \mapsto \pm\mathbf{b},\ \mathbf{b}' \mapsto \mathbf{b}'.$$

Takže křivost ani torze znaménko nemění.

Jako pro případ křivosti, ukážeme si nyní, jak se vypočítá torze křivky z obecné parametrizace křivky. To je podstatná praktická informace, protože explicitní výrazy pro parametrizaci obloukem nejsou obvykle k dispozici. Zároveň znovu dokážeme nezávislost torze na volbě parametrizace.

Věta 1.5.4 *Je-li křivost regulární křivky* $\mathbf{c}$ *nenulová a je-li* $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ *její libovolná parammetrizace, pak pro její torzi platí*

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}})\cdot\ \dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\,\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}\,]}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

Důkaz.
(1) Nejdříve ověříme vzorec pro torzi v parametrizaci obloukem $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$. Pak $|\mathbf{c}'| = 1$, $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'' = \mathbf{t}' = \kappa\,\mathbf{n}$. Z definice torze $\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}$ plyne

$$\tau = -(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}) = -(\mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}'.$$

Do tohoto vzorce nyní stačí dosadit vyjádření jednotlivých vektorů pomocí derivací křivky $\mathbf{c}$. Víme, že $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ a $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{c}''$. Tedy

$$\tau = \left(\mathbf{c}' \times \frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right)\cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) = \left(\mathbf{c}' \times \frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right)\cdot \left[\frac{\mathbf{c}'''}{\kappa} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\mathbf{c}''\right] = \frac{1}{\kappa^2}[(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')\cdot\mathbf{c}'''].$$

Protože vektory $\mathbf{c}'$ a $\mathbf{c}''$ jsou na sebe kolmé, platí $|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|^2 = |\mathbf{c}'|\,|\mathbf{c}''|^2 = \kappa^2$.
(2) Nyní ukážeme, že vzorec pro torzi nezávisí na volbě parametrizace. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(u), \mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ jsou dvě libovolné parametrizace křivky $\mathbf{c}$, které spolu souvisí pomocí reparametrizace $u = u(t)$, tj. $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(u(t))$. Pro stručnost označíme $\frac{d}{dt}$ tečkou a $\frac{d}{du}$ čárkou. Pak dostaneme

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'\,\dot{u};\quad \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}''\,(\dot{u})^2 + \mathbf{c}'\,\ddot{u};\quad \dddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'''\,(\dot{u})^3 + 3\,\mathbf{c}''\dot{u}\ddot{u} + \dddot{u}\,\mathbf{c}'.$$

Z toho ihned plyne

$$\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}] = (\dot{u})^6 \det[\mathbf{c}', \mathbf{c}''\mathbf{c}'''];\ \ |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}| = (\dot{u})^3|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|.$$

□

Příklad 1.5.5 *Ukažte, že torze šroubovice*

$$\mathbf{c} = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$$

je rovna $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Přidejme ještě komentář o tom, jak spočítat tvar Frenetovy baze $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ pomocí obecné parametrizace křivky $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Nejdříve je třeba spočítat derivace do třetího řádu: $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$.

Tečný vektor je dán vztahem $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$. Dvojice $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ a $\{\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}\}$ generují tutéž rovinu a jsou souhlasně orientované. Vektor $\mathbf{n}$ se tedy dostane pomocí obecné Gramm-Schmidtovy ortogonalizace. Výsledek je

$$\mathbf{n} = \ddot{\mathbf{c}} - (\ddot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{c}}|^2}[(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}})\ddot{\mathbf{c}} - (\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}})\dot{\mathbf{c}}].$$

Poslední vektor ortonormální baze, vektor binormály $\mathbf{b}$, je pak vektorový součin $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Tyto poznámky také naznačují, jak vypadá zobecnění Frenetovy baze pro případ křivek ve vyšší dimenzi. Systém je dobře vidět z případu křivek v $\mathbb{R}^4$. Pro konstrukci Frenetovy baze musíme předpokládat, že jsou vektory $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ nezávislé. V tomto případě bychom postupovali následujícím způsobem.

Pro křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ v obecné parametrizaci nejprve spočítáme derivace až do čtvrtého řádu. První vektor $\mathbf{e}_1$ Frenetovy baze má tvar $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$. Pokud jsou vektory $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ nezávislé, pak je vektor $\mathbf{e}_2$ jednoznačně určen požadavkem, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ generují tutéž rovinu a jsou souhlasně orientovány.

Další vektor $\mathbf{e}_3$ je jednoznačně určen požadavkem, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ generují tentýž trojrozměrný podprostor v $\mathbb{R}^4$ jsou souhlasně orientovány. Vektor $\mathbf{e}_4$ je pak určen jednoznačně požadavkem, že $\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_4\}$ je ortonormální baze v $\mathbb{R}^4$.

Frenetova věta pak říká, že

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa_1 & 0 & 0\\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0\\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3\\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix}.$$

Koeficienty $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ se nazývají zobecněné křivosti. První dvě funkce jsou kladné, třetí múže nabývat libovolné znaménko.

Obecně, v libovolné dimenzi, platí, že zobecněné křivosti určují jednoznačně (až na shodnost) danou křivku a že mohou být zvoleny libovolně s tím omezením, že zobecněné křivosti, až na poslední z nich, jsou kladné. Toto tvrzení se nyní dokážeme v $\mathbb{R}^3$.

Věta 1.5.6

(1) Jsou-li $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ a $\mathbf{d} = \mathbf{d}(s)$ dvě křivky v $\mathbb{R}^3$ V parametrizaci obloukem na intervalu (α, β), které mají tutéž křivost a torzi, pak existuje (přímá) shodnost $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taková, že $\mathbf{d}(s) = S(\mathbf{c}(s))$.
(2) Jsou-li $k > 0, t$ dvě dané funkce na (α, β), pak existuje křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ v parametrizaci obloukem, jejíž křivost je k a její torze je rovna t.

Důkaz.
(1) Jsou-li $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, resp. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, Frenetovy baze pro křivky $\mathbf{c}$, resp. $\mathbf{d}$ a zvolíme-li libovolně bod $s_0 \in (\alpha, \beta)$, pak existuje jednoznačně určené otočení $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pro které platí $\mathbf{f}_i(s_0) = R(\mathbf{e}_i(s_0))$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathbf{d}(s_0) = \mathbf{c}(s_0) + \mathbf{b}$. Chceme ukázat, že hledaná shodnost má tvar $S(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$.

Nejdříve ukážeme, že rovnost $\mathbf{f}_i(s) = R(\mathbf{e}_i(s))$ platí ve všech bodech křivky. To dostaneme ihned z Frenetových rovnic. Označme ω_{ij} koeficienty ve Frenetových rovnicích. Podle předpokladu jsou stejné pro $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{f}_i$. Tedy

$$\mathbf{f}_i' = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \mathbf{f}_j; \quad [R(\mathbf{e}_i)]' = R(\mathbf{e}_i') = R\left(\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} R(\mathbf{e}_j).$$

Tvrzení tedy plyne z věty o jednoznačnosti pro řešení soustavy obyčejných lineárních rovnic.

Pro derivace křivek $\mathbf{d}$ a $S(\mathbf{c})$ pak platí

$$\frac{d\mathbf{d}}{ds} = \mathbf{f}_1 = R(\mathbf{e}_1) = R\left(\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(R(\mathbf{c})) = \frac{d}{ds}(S(\mathbf{c})).$$

Spolu s počátečními podmínkami to ukazuje, že se křivky rovnají.
(2) Předpokládejme, že jsou na intervalu (α, β) zadány hladké funkce $\kappa > 0$ a τ. Zvolme $s_0 \in (\alpha, \beta)$ libovolně. Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je libovolná ortonormální baze. Z vět o existenci řešení soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic plyne existence řešení $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ Frenetových rovnic

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

na (α, β) s počátečními podmínkami $\mathbf{e}_i(s_0) = \mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$. Pak stačí definovat $\mathbf{c}(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{e}_1(u)du$.

Výsledná křivka je zřejmě parametrizovaná obloukem, její tečný vektor v každém bodě je $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1$, a $\ddot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{e}_1} = k\,\mathbf{e}_2$. Tedy křivost $\kappa = |\ddot{\mathbf{c}}|$ je rovna k. Navíc, vektor $\mathbf{e}_2$ je vektor normály, takže $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je Frenetova baze křivky $\mathbf{c}$. Z toho plyne, že také torze τ je rovna funkci t. □

---

4. přednáška

Jak jsme již říkali, torze křivky je míra odlišnosti křivky od rovinné křivky. Následující tvrzení je tedy intuitivně zcela srozumitelné.

Věta 1.5.7 *Necht* $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ *je regulární parametrická křivka v* $\mathbb{R}^3$ *s nenulovou křivostí. Pak obraz* $< \mathbf{c} >$ *křivky* $\mathbf{c}$ *leží v rovině právě když* $\tau \equiv 0$.

Důkaz.

Můžeme předpokládat, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ je parametrizovaná obloukem.
(i) Rovnice roviny v prostoru má tvar $R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = d\}$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{a}| = 1$ a $d \in \mathbb{R}$. Pokud leží $< \mathbf{c} >$ v rovině, pak existuje rovina $R = R(\mathbf{a}, d)$, pro kterou $< \mathbf{c} > \subset R$. Pak pro všechny hodnoty parametru s platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}(s) = d \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}' = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}' = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot (\kappa \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

Vektor $\mathbf{a}$ je tedy kolmý i na $\mathbf{t}$, i na $\mathbf{n}$. Je tedy roven $\pm\mathbf{b}$. Ze spojitosti je pak buď $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, nebo $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ pro každé s. V obou případech je $\mathbf{b}' = 0$, tedy i $\tau = 0$.
(ii) Naopak, pokud $\tau = 0$, pak $\mathbf{b}' = 0$ a vektor $\mathbf{b}$ je na celém definičním oboru konstantní. Zvolme parametr s_0 v definičním oboru křivky $\mathbf{c}$ a definujme číslo d předpisem $d = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}(s_0)$. Vzhledem k tomu, že

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}') = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) = 0,$$

je $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ konstantní a $\mathbf{c}$ leží v rovině, odpovídající parametrům $\mathbf{b}$ a d. □

1.5.2 Několik globálních výsledků.

Definice 1.5.8 *Nechť* $a \in \mathbb{R}, a > 0$. *Řekneme, že regulární rovinná křivka* $\mathbf{c}$ *na* $\mathbb{R}$ *je jednoduchá uzavřená křivka, s periodou* a, *pokud platí*

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t') \Leftrightarrow t' - t = ka, k \in \mathbb{Z}.$$

Jednoduchá uzavřená křivka se nazývá kladně orientovanou, pokud jednotková normála $\mathbf{n}$ *ukazuje ve všech bodech do vnitřku* $Int(\mathbf{c})$ *křivky* $\mathbf{c}$ *(viz následující věta).*

Věta 1.5.9 (Jordanova věta.) *Doplňek jednoduché uzavřené křivky* $\mathbf{c}$ *v rovině má dvě komponenty souvislosti. Jedna z nich je omezená, nazývá se vnitřek křivky a značí se* $Int(\mathbf{c})$; *druhá je neomezená, nazývá se vnějšek křivky a značí se* $Ext(\mathbf{c})$.

Jordanova věta je velmi názorné tvrzení z topologie roviny, které je ovšem nečekaně obtížné dokázat. Podstatnou roli hraje v teorii funkcí komplexní proměnné. Důkaz Jordanovy věty nebudeme probírat.

Pomocí Greenovy věty lze odvodit jednoduchý vztah pro velikost $P(Int(\mathbf{c}))$ plochy oblasti $Int(\mathbf{c})$, ohraničené jednoduchou uzavřenou křivkou.

Věta 1.5.10 (Greenova věta.) *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}$ *je jednoduchá uzavřená křivka s periodou* a. *Jsou-li* $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$ *dvě hladké funkce definované v okolí množiny* $< \mathbf{c} > \cup \text{Int}(\mathbf{c})$, *pak*

$$\int\int_{\text{Int}(\mathbf{c})} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\mathbf{c}} f(x, y)dx + g(x, y)dy,$$

kde křivkový integrál napravo je definován vztahem

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_0^a \left[f(x, y)\frac{dx}{dt} + g(x, y)\frac{dy}{dt} \right] dt.$$

Greenova věta je analogie základního Newtonova vzorce pro integrál z derivace funkce. Integrál z vhodných parciálních derivací přes plochu se vyjadřuje pomocí integrálu přes hranici příslušné plochy. Pro plochy, které jsou zezdola a zezhora omezeny grafy funkcí na tomtéž intervalu, se tato věta dá snadno odvodit z Newtonova vzorce. Greenovu větu lze najít prakticky ve všech knihách o kalkulu, které jsou na univerzitách používány a obvykle je součástí základního kurzu analýzy. Greenovu větu dokazovat nebudeme, ve čtvrtém semestru byste ji již měli znát. Existují další zobecnění této věty do vyších dimensí, které lze najít pod názvy Stokesova věta, Gauss-Ostrohradského věta, resp. obecná Stokesova věta.

Lema 1.5.11 *Velikost* $P(\mathit{Int}(\mathbf{c}))$ *plochy oblasti* $\mathit{Int}(\mathbf{c})$, *ohraničené jednoduchou uzavřenou křivkou* $\mathbf{c}$ *je dán vztahem*

$$P(\text{Int}(\mathbf{c})) = \frac{1}{2} \int_0^a (x\dot{y} - \dot{x}\, y)dt.$$

Důkaz.

Plocha $V(\mathit{Int}(\mathbf{c}))$ se podle definice rovná

$$P(\mathit{Int}(\mathbf{c})) = \int\int_{\text{Int}(\mathbf{c})} dx\, dy.$$

Stačí použít Greenovu větu pro $f = -\frac{1}{2}y$, $g = \frac{1}{2}x$. □

1.5.3 Izoperimetrická nerovnost.

V první části jsme se seznámili s hlavními lokálními fakty o rovinných a prostorových křivkách. Nyní si ukážeme alespoň příklad globálního výsledku o křivkách. Takovéto globální výsledky jsou obvykle podstatně zajímavější, ale také těžší, než lokální výsledky. Izoperimetrická úloha je velmi starý problém. Ptá se, jak vypadá křivka, která při dané délce ohraničuje největší plochu.

Je-li $\mathbf{c}$ čtverec o hraně R, pak délka obvodu je $L(\mathbf{c}) = 4\,R$, a jeho obsah je $P(Int(\mathbf{c})) = R^2$. Tedy

$$\frac{P(Int(\mathbf{c}))}{(L(\mathbf{c}))^2} = \frac{1}{16}.$$

Je-li $\mathbf{c}$ kružnice o poloměru R, pak její délka je $L(\mathbf{c}) = 2\pi R$, a $P(Int(\mathbf{c})) = \pi\,R^2$ a

$$\frac{P(Int(\mathbf{c}))}{(L(\mathbf{c}))^2} = \frac{1}{4\pi}.$$

Kružnice tedy ohraničuje (při stejném obvodu) větší plochu než čtverec (jak je možné intuitivně očekávat). Jak říká následující věta, kružnice je řešení izoperimetrické úlohy.

Věta 1.5.12 (Izoperimetrická úloha.) *Nechť* $\mathbf{c}$ *je jednoduchá uzavřená křivka,* L *její délka a* P *plocha jejího vnitřku. Pak*

$$P \leqslant \frac{1}{4\pi} L^2$$

a rovnost platí právě když je $\mathbf{c}$ *kružnice.*

Než si tuto větu dokážeme, připravíme se následující pomocné tvrzení.

Věta 1.5.13 (Wirtingerova nerovnost.) *Je-li* $f : \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$ *hladká funkce s* $f(0) = f(\pi) = 0$*, pak*

$$\int_0^\pi \left(\frac{df}{dt}\right)^2 dt \geqslant \int_0^\pi f^2\,dt$$

a rovnost nastane právě když $f(t) = A\sin t$ *pro* $t \in \langle 0, \pi\rangle$*, kde* A *je reálná konstanta.*

Důkaz.

Wirtingerova nerovnost se dokáže takto. Označme $g(t) = f(t)/\sin t$. Pak

$$\int_0^\pi \dot{f}^2\,dt = \int_0^\pi (\dot{g}\sin t + g\cos t)^2\;dt =$$

$$= \int_0^\pi \dot{g}^2\sin^2 t\,dt + 2\int_0^\pi g\,\dot{g}\sin t\cos t\,dt + \int_0^\pi g^2\cos^2 t\,dt.$$

Integrací per partes dostaneme

$$2\int_0^\pi g\,\dot{g}\sin t\cos t\,dt = \int_0^\pi g^2(\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt.$$

Tedy

$$\int_0^\pi \dot{f}^2\,dt = \int_0^\pi \dot{g}^2\sin^2 t\,dt + \int_0^\pi g^2(\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt + \int_0^\pi g^2\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^\pi (g^2 + \dot{g}^2) \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi f^2 \, dt + \int_0^\pi \dot{g}^2 \sin^2 t \, dt.$$

Z toho ihned plyne Wirtingerova nerovnost. Zároveň je vidět, že rovnost nastává právě když $\dot{g}$ je identicky nula, tj. je-li g konstantní. Pak ale $f(t) = A \sin t$. $\square$

Důkaz.
Důkaz izoperimetrické nerovnosti: Předpokládejme, že je křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovaná obloukem. Převedeme ji jednoduchou reparametrizací na jednoduchou uzavřenou křivku s periodou π :

$$t = \frac{\pi s}{L}.$$

Protože posunutí nemění ani délku křivky, ani velikost plochy, kterou ohraničuje, můžeme předpokládat, že $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(\pi) = 0 \in \mathbb{R}^2$.

Vypočteme nyní L a P pomocí polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Zřejmě platí

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2; \;\; x\,\dot{y} - y\,\dot{x} = r^2 \dot{\varphi}$$

a $\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = L^2/\pi^2$. Plocha P je dána vztahem

$$P = \frac{1}{2} \int_0^\pi (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \dot{\varphi}^2 \, dt.$$

Ale $\frac{L^2}{\pi} = \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) dt$. Tedy

$$\frac{L^2}{4\pi} - P = \int_0^\pi r^2 (\dot{\varphi} - 1)^2 \, dt + \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2) \, dt.$$

Wirtingerova nerovnost říká, že pravá strana je nezáporná a rovnost nastává právě když $\dot{\varphi} = 1$ a $r = A \sin t$ pro vhodnou konstantu A. Tedy $\varphi = t + t_0$ a $r = \sin(\varphi - t_0$. Z toho ihned dostaneme, že křivka $\mathbf{c}$ je kružnice s poloměrem A. $\square$

Jiný globální výsledek (který již nebudeme dokazovat) říká, že počet vrcholů jednoduché uzavřené křivky je větší nebo roven čtyřem. Vrcholem křivky $\mathbf{c}$ je bod, kde má křivost derivaci rovnou nule (např. kde má lokální extrémy).

Kapitola 2

Plochy v $\mathbb{R}^3$.

Nejdříve se musíme dohodnout, co myslíme pod pojmem plocha. Nejjednoduší je užít parametrický popis plochy, tj. (hladké) zobrazení z otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Aby obraz tohoto zobrazení byl opravdu dvojdimenzionální, je třeba předpokládat, že zobrazení je regulární.

2.1 Základní definice.

2.1.1 Regulární parametrická plocha, hladká plocha.

Definice 2.1.1 *Parametrická regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ definovaná na $\mathcal{O}$ je hladké zobrazení $\mathbf{p}$ otevřené množiny $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ takové, že $\mathbf{p}$ je regulární na $\mathcal{O}$, tj. hodnost Jacobiho matice $\mathbf{p}$ je ve všech bodech rovna 2. Ekvivalentně, vektory parciálních derivací*

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \equiv \mathbf{p}_u, \ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \equiv \mathbf{p}_v$$

musí být v každém bodě lineárně nezávislé.

Je-li $\phi : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ difeomeorfismus otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$, pak definujeme $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi$ a ϕ nazýváme reparametrizací.

Regulární parametrickou plochu $\mathbf{p}$ nazveme mapou, pokud je $\mathbf{p}$ navíc homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Množinu $\mathbf{p}(\mathcal{O})$ nazveme obrazem mapy, někdy ji budeme značit $< \mathbf{p} >$.

---

5. přednáška

Věta 2.1.2 *(1) Je-li $\mathbf{p}$ regulární parametrická plocha a ϕ difeomorfismus, pak je také $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi$ regulární parametrická plocha.*
(2) Jsou-li $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}'$ dvě mapy a $< \mathbf{p} > = < \mathbf{p}' >$, pak existuje reparametrizace ϕ taková, že

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi.$$

Důkaz.
(1) Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{p}'$ je součin Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{p}$ a Jacobiho matice zobrazení ϕ. Je-li ϕ difeomorfismus, pak složení ϕ a ϕ^{-1} je identita a součin příslušných Jacobiho matic je jednotková matice. Determinant Jacobiho matice ϕ je tedy nenulový. Z toho plyne, že $\mathbf{p}'$ je regulární právě když je regulární $\mathbf{p}$.
(2) Zobrazení ϕ budeme definovat předpisem $\phi = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{p}'$. Toto zobrazení je podle předpokladu homeomorfismus. Je ale třeba dokázat, že je hladké. Zvolme bod $a' \in \mathcal{O}'$, pak $\phi(a') = a \in \mathcal{O}$. Jeden ze tří minorů řádu 2 zobrazení ϕ v bodě a je nenulový. Můžeme předpokládat, že je to determinant

$$\det \frac{\partial(p_2, p_3)}{\partial(u, v)}.$$

Označme π projekci $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^2$, danou průmětem na poslední dvě souřadnice. Pak má zobrazení $\pi \circ \mathbf{p}$ v bodě a nenulový Jakobián a podle věty o inverzním zobrazení existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^2$ bodu $a$takové, že $\pi \circ \mathbf{p}$ je difeomorfismus U na $\pi \circ \mathbf{p}(U)$.

Zobrazení ϕ můžeme v otevřené množině $\phi^{-1}(U) \subset \mathcal{O}'$ napsat ve tvaru

$$\phi = (\pi \circ \mathbf{p})^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{p}'),$$

je to tedy hladké zobrazení na této množině. $\square$

Pojem regulární parametrické plochy, resp. mapy, stačí pro lokální problémy. Pro globální výsledky je třeba definici plochy zobecnit. Typickým příkladem plochy, která není obrazem regulární parametrické plochy, je sféra. Sféra se nedá pokrýt jednou mapou (homeomorfismus nemůže zobrazit otevřenou množinu na kompaktní množinu). Není pochyb o tom, že sféra je pro nás typickým příkladem plochy a že by naše definice tuto plochu měla zahrnovat. Rozšíříme si tedy pojem plochy následujícím způsobem.

Definice 2.1.3 *Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^3$ je (hladká) plocha, pokud pro každý bod $s \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Soubor map, které pokrývají plochu S se nazývá atlas plochy S.*

Jsou-li $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvě mapy (s neprázdným průnikem svých obrazů) na S, pak budeme zobrazení $\phi = (\mathbf{p}')^{-1} \circ \mathbf{p}$ nazývat (tam kde je definované) přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.

Poznámka. Atlas dané plochy S není určen jednoznačně. Pro popis plochy je vhodné si zvolit atlas, který má konečně mnoho (pokud možno co nejméně) map. Jak uvidíme na příkladech, je takových možností vždy mnoho. Na volbě atlasu nezáleží, ze dvou atlasů můžeme jejich sjednocením vyrobit větši atlas, které oba předchozí atlasy obsahuje. Sjednocení všech atlasů je maximální možný atlas, který má ovšem příliš mnoho map (nekonečně mnoho), s každou mapou tam při nejmenším leží všechny její restrikce na otevřené podmnožiny jejího definičního oboru. z Věty 2.1.2 (2) plyne, že přechodové zobrazení libovolných dvou map je reparametrizací.

Budeme zpravidla definovat plochu pomocí výběru jednoho atlasu. Kdykoliv ale k němu můžeme přidat jakoukoliv další mapu, bude-li třeba.

Příklad 2.1.4

(1) Rovina.

Je-li R rovina v $\mathbb{R}^3$ a zvolíme-li její tři body $A, B, C \in R$ v obecné poloze, pak jeden její parametrický popis má tvar

$$\mathbf{p}(u, v) = A + u(B - A) + v(C - A)$$

Toto zobrazení je mapa (ověřte!) a $< \mathbf{p} >= R$.

Rovina je tedy plocha ve smyslu předchozí definice. Její atlas se skládá z jediné mapy.

(2) Sféra.

Sféra S_2 je dána rovnicí

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Standardní mapa na sféře má tvar

$$\mathbf{p}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi);\ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2),\ \theta \in (0, 2\pi).$$

Najděte další tři mapy natočením této mapy, aby tvořily atlas pro sféru.

Jiný atlas, který má jen dvě mapy, se získá pomocí stereografické projekce ze severního a jižního pólu sféry. Je-li S severní pól a je-li R rovina $x_3 = 0$, pak úsečka $SA, A \in S_2 - \{S\}$ spojující severní pól s bodem A sféry protíná rovinu R v jediném bodě $X(A)$. Zobrazení $A \mapsto X(A)$ je stereografická projekce sféry bez bodu S na rovinu R. Rovina zabalí sféru celou, kromě jediného bodu. Příslušné inverzní zobrazení je pak mapa. Napište vzorce pro tuto mapu, pro mapu odpovídající projekci z jižního pólu a pro příslušné přechodové zobrazení! Ověřte, že jsou to opravdu mapy!

(3) Jako cvičení si napište definici toru (pneumatiky) pomocí jedné rovnice v $\mathbb{R}^3$ a atlas pro torus.

(4) Standarní kužel $K = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ má vrchol v počátku. Je lehké najít mapu, která pokrývá kužel bez jedné přímky:

$$\mathbf{p}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), r \neq 0, \theta \in (0, 2\pi)$$

a druhou (otočenou) mapu, které pak tvoří atlas pro kužel bez vrcholu. Ale neexistuje mapa, která by pokrývala okolí vrcholu. To je vidět z toho, že pro libovolně malé okolí U počátku 0 v $\mathbb{R}^3$ je množina $U \cap K - \{0\}$ nesouvislá, zatímco její vzor v libovolné mapě je nutně množina souvislá. Ty se ovšem

na sebe nemohou žádným homeomorfismem zobrazit. Kužel tedy není plocha ve smyslu naší definice, kužel bez vrcholu plochou je.
(5) Graf hladké funkce je vždy plocha. Přesněji, je-li $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hladká funkce na otevřené množině $\mathcal{O}$ v $\mathbb{R}^2$, pak její graf S je obraz mapy

$$\mathbf{p}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2));\ (x_1, x_2) \in \mathcal{O}.$$

Je zřejmé, že Jacobián tohoto zobrazení má všude hodnost 2 a že je to homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$ (ověřte!).
(6) Klasické příklady ploch jsou tzv. kvadriky, tj. plochy zadané v $\mathbb{R}^3$ kvadratickou rovnicí. Mezi ně patří sféra, kužel, elipsoid, hyperboloidy. Je zajímavé znát klasifikaci kanonických tvarů těchto kvadrik a plochy, které jim odpovídají.

Plochy v $\mathbb{R}^3$ se nejčastěji zadávají jednou rovnicí

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Následující velmi důležitá věta ukazuje podmínku na funkci f, aby tato množina S byla plocha. Podmínka říká, že grad funkce f musí být na ploše S nenulový.

Věta 2.1.5 *Předpokládejme, že f hladká funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a definujme množinu S rovnicí*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Pokud platí podmínka

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \neq 0$$

na celé množině S, pak S je plocha.

Důkaz.
Je-li $\bar{x} \in S$ libovolný bod, pak $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Předpokládejme například, že $\frac{\partial f}{\partial x_3}(\bar{x}) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích pak existuje okolí

$$U = U_1 \times U_2,\ U_1 \subset \mathbb{R}^2, U_2 \subset \mathbb{R}$$

a hladká funkce $f : U_1 \to U_2$ tak, že $S \cap U$ je právě graf funkce f. Zobrazení

$$\mathbf{p}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2));\ (x_1, x_2) \in U_1$$

je pak mapa, obsahující bod $\bar{x}$. $\square$

2.2 Tečné vektory, tečná rovina plochy.

Z předchozí kapitoly víme, co je to tečný vektor ke křivce. Nyní si budeme definovat tečný vektor k ploše v jejím daném bodě. V další části přednášky budeme studovat vlastnosti plochy S, které zavisí jen na S a ne na zvolené mapě. A tak i pro tečný vektor napíšeme nejdříve definici, která nezávisí na volbě mapy a pak ukážeme, jak tečné vektory popisovat pomocí zvolené mapy. Tečný vektor plochy budeme definovat jako tečný vektor křivky, která leží v dané ploše.

Definice 2.2.1 *Řekneme, že vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je tečný vektor k ploše S v bodě $s \in S$, pokud existuje křivka $\mathbf{c}, < \mathbf{c} > \subset S$ taková, že*

$$\mathbf{c}(t_0) = s; \ \dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{v}.$$

Množina všech tečných vektorů v bodě $s \in S$ se nazývá tečný prostor k ploše S v bodě s a značí se T_sS.

Věta 2.2.2 *Nechť $\mathbf{p}$ je mapa na S a $s = \mathbf{p}(u, v)$ je bod v jejím obraze. Pak*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} = \alpha \mathbf{p}_u + \beta \mathbf{p}_v; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

kde $\mathbf{p}_u$, resp. $\mathbf{p}_v$ označuje parciální drivace $\mathbf{p}$ podle u, resp. v v bodě (u, v).

Důkaz.
(1) Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná a $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{p}_u + \beta \mathbf{p}_v$, pak definujeme křivku $\mathbf{c}$ předpisem (pro ε dostatečně malé)

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\alpha t, \beta t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Křivka $\mathbf{c}$ zřejmě leží v ploše S a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(0)$.
(2) Pokud křivka $\mathbf{c}$ leží v ploše S, pak existuje křivka $\mathbf{d}$ v definičním oboru $\mathcal{O}$ mapy $\mathbf{p}$ taková, že

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{d}.$$

(Stačí zvolit $\mathbf{d} = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{c}$.) Označme $\mathbf{d}(t) = (u(t), v(t))$.

Je-li $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(t_0)$, pak

$$\mathbf{v} = \dot{u} \mathbf{p}_u + \dot{v} \mathbf{p}_v,$$

a stačí položit $\alpha = \dot{u}$, $\beta = \dot{v}$. □

Každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ dimenze 2 je určen jednoznačně jednotkovým vektorem, který je na něj kolmý. Takové jednotkové vektory jsou zřejmě dva. Můžeme tedy tečné prostory charakterizovat pomocí těchto kolmých vektorů, které budeme nazývat jednotkové normály k dané ploše v daném bodě. Jsou zřejmě (až na výběr znaménka) určeny jednoznačně danou plochou.

Všimněte si, že tečný prostor je podprostor v $\mathbb{R}^3$, tj. vektory jsou umístěny v počátku, ale vektory z tečného prostoru T_sS k ploše si kreslím umístěné do bodu s. Je možné tento rozdíl formalizovat tím, že podprostor T_sS by byl definován jako koncové body tečných vektorů umístěných do bodu s, byl by to afinní podprostor v $\mathbb{R}^3$ (tj. podprostor, posunutý do bodu mimo počátek) a T_sS by bylo jeho zaměření (tj. množina koncových bodů tečných vektorů, umístěných do počátku).

Definice 2.2.3 *Je-li T_sS tečný prostor v bodě s k ploše S, pak existuje jednotkový vektor $\mathbf{N}$ tak, že*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0.\}$$

Vektor $\mathbf{N}$ je určen jednoznačně až na znaménko a nazývá se vektor jednotkové normály k ploše S v bodě s.

Je-li $\mathbf{p}$ mapa na S, pak je normálový vektor $\mathbf{N}$ jednoznačně předpisem

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

Dvě mapy pro tentýž bod mají stejnou jednotkovou normálu právě když determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě je kladný. V tom případě nazýváme tyto mapy souhlasně orientovanými. Pokud je determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě záporný, nazveme mapy opačně orientovanými.

Atlas plochy nazveme orientovaným atlasem, pokud jsou všechny jeho mapy po dvou souhlasně orientované. Orientovaná plocha S je plocha s orientovaným atlasem.

Orientovatelná plocha je plocha, pro kterou existuje orientovaný atlas.

Zkuste si najít příklad plochy, která není orientovatelná. Najděte tečné prostory a vektory jednotkové normály pro příklady ploch, které jsme si uváděli. Ukažte, že jsou všechny orientovatelné.

Zvolím-li si mapu na orientovatelné ploše, pak mohu vzít maximální orientovaný atlas jako sjednocení všech souhlasně orientovaných map s vybraným atlasem. Podobně lze vzít množinu všech opačně orientovaných map, které opět dohromady tvoří orientovaný atlas (ověřte!).

Na orientovatelné ploše tedy existují dva disjunktní orientované atlasy, které na ploše zadávají dvě různé (opačné) orientace. Na neorientovatelné ploše žádný orientovaný atlas neexistuje.

---

6. přednáška

2.3 Délky křivek na ploše, 1. fundamentální forma plochy.

Zkoumání dvourozměrných ploch a jejich zobrazování pomocí map bylo odedávna jednou z nejdůležitějších lidských činností. Snahou bylo zachytit pomocí mapy daný kus zemského povrchu co nejpřesněji. Nejlépe tak, aby se všechny vzdálenosti věrně zachovaly na mapě. Uvidíme časem, že to je úkol příliš těžký. V tuto chvíli se naučíme měřit vzdálenosti na ploše.

Je třeba odlišit vzdálenosti, měřené na ploše od vzdáleností bodů v příslušném prostoru, které jsou dány obvyklým vzorcem z Eukleidovské geometrie. Vzdálenost dvou bodů na ploše je, podle definice, infimum délek všech křivek, které leží na ploše a spjují tyto dva body. První, co se tedy musíme naučit, je počítat délky křivek, které leží na ploše.

Chceme tuto délku spočítat podle údajů na mapě, tj. pomocí údajů, které definují příslušnou parametrizaci plochy a údajů, které charakterizují zvolenou křivku. To lze udělat takto.

Předpokládejme, že je dána mapa $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v), (u, v) \in \mathcal{O}$. Je-li $d(t) = (u(t), v(t)), t \in I$ rovinná křivka, jejíž obraz leží v $\mathcal{O}$, pak $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ d$ je křivka na ploše $< \mathbf{p} >$. Je zřejmé, že každá křivka ležící v obrazu mapy $< \mathbf{c} >= \mathbf{p}(\mathcal{O})$ se takto dá napsat.

Délka l křivky $\mathbf{c}$ je dána vztahem $l = \int_I |\dot{\mathbf{c}}| d\tau$. Integrand vypočítáme takto:

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{u}\mathbf{p}_u + \dot{v}\mathbf{p}_v ; |\dot{\mathbf{c}}|^2 = E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2,$$

kde jsme tři funkce E, F, G proměnných u, v definovali pomocí vztahů

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u;\ F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v;\ G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v.$$

To vede k následující základní definici.

Definice 2.3.1 *Je-li $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ mapa, pak se výraz*

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

tradičně nazývá první fundamentální forma plochy.

Matici

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí první fundamentální formy. Pro libovolný vektor $A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ definujeme hodnotu $I(A)$ první fundamentální formy

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2.$$

První fundamentální forma I je tedy kvadratická forma na $\mathbb{R}^2$. Stejným symbolem I budeme označovat také bilineární symetrickou formu na $\mathbb{R}^2$, odpovídající stejné matici $\mathcal{F}_I$.

Poznámka.

První fundamentální formu I jsme definovali jako kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$. Víme, že zvolená mapa $\mathbf{p}$ na ploše S určuje zároveň souřadnice na tečném prostoru v daném bodě P. Každému vektoru se přiřadí jeho souřadnice v bazi $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$. První fundamentální formu je možné, pomocí tohoto ztotožnění, chápat také jako kvadratickou formu v tečném prostoru. Hodnota $I(v)$ pro $v \in T_P S$ je pak prostě délka tohoto vektoru v $\mathbb{R}^3$! Budeme používat stejný symbol I pro obě kvadratické formy.

Předchozí výpočet ukazuje, že pokud počítáme délku křivky ve zvolených souřadnicích, stačí nám znát první fundamentální formu I, resp. její koeficienty E, F, G. Množina $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ je tedy model pro plochu a první fundamentální forma I umožnuje v tomto modelu počítat délky (resp. úhly nebo plochy).

Příklad 2.3.2 *(1) Pokud je $\mathbf{p} = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ parametrizace roviny, pak $\mathbf{p}_u = \mathbf{b}, \mathbf{p}_v = \mathbf{c}$ a tedy*

$$E = |\mathbf{b}|^2,\ F = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ G = |\mathbf{c}|^2.$$

Pokud $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, pak $F = 0$. Pokud $|\mathbf{b}| = \mathbf{c}| = 1$, pak $E = G = 1$.
(2) Jsou-li θ, φ obvyklé sférické souřadnice na jednotkové sféře, pak $E = 1, F = 0$ a $G = \cos^2\theta$.
(3) Zvolte si parametrizaci válce a spočítejte si tvar první fundamentální formy pro válec.
(4) Parametrický popis standardního kuželu je

$$\mathbf{p}(v, \varphi) = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, v);\ v \in (0,1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Příslušná první fundamentální forma je rovna $2dv^2 + v^2 d\varphi^2$.

2.3.1 Isometrie.

Definice 2.3.3 *Difeomorfismus $f : S_1 \to S_2$ se nazývá isometrie, pokud zachovává délku křivek. Řekneme, že dvě plochy jsou isometrické, pokud existuje isometrie mezi nimi.*

Věta 2.3.4 *Difeomorfismus $f : S_1 \to S_2$ je isometrie, pokud se pro každou mapu $\mathbf{p}$ daného atlasu plochy S_1 první fundamentální formy map $\mathbf{p}$ na S_1 a $f \circ \mathbf{p}$ na S_2 rovnají na svém definičním oboru.*

Důkaz.

Protože můžeme délku křivky počítat tak, že ji rozdělíme na části a jejich délky sečteme, je možné bez újmy na obecnosti předpokládat, že plocha S_1 (a tedy i S_2) je pokryta jedinou mapou.

Předpokládejme nejprve, že se první fundamentální formy map $\mathbf{p}$ na S_1 a $f \circ \mathbf{p}$ na S_2 rovnají. Je-li $\mathbf{c}$ křivka na S_1 a $f \circ \mathbf{c}$ odpovídající křivka na S_2, pak dostáváme pro délku obou křivek tentýž vzoreček. Zobrazení f je tedy isometrie.

Naopak, je-li f isometrie a je-li $\mathbf{p}$ mapa na S_1, pak $f \circ \mathbf{p}$ je mapa na S_2. Označme E_1, F_1, G_1, resp. E_2, F_2, G_2, koeficienty první fundamentální formy v obou mapách. Zvolme bod $P = \mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v})$ a zvolme si soubor křivek v $\mathbb{R}^2$ závisející na parametrech α, β takto:

$$u = \bar{u} + \alpha t;\ v = \bar{v} + \beta t,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

kde ε je dostatečně malé. Pak $\dot{u} = \alpha, \dot{v} = \beta$. Délky jejich obrazů při obou mapách se podle předpokladu rovnají, tedy pro každé dostatečně malé ε a pro všechna α, β platí

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2\right) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2\right) dt.$$

Z toho ihned plyne, že $E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$. □

Zobrazení isometrie mezi dvěma plochami odpovídá názorně tomu, že první plochu ohnu bez deformace a pomačkání tak, abych ji ztotožnil s druhou plochou. Zkušenost ukazuje, že tedy existuje isometrie (části) povrchu válce na pás v rovině (rolování papíru) a isometrie (části) povrchu kužele na kruhovou výseč roviny (balení kornoutu). Právě tak zkušenost ukazuje, že těžko bude existovat isometrie (části) povrchu sféry na část roviny. První dvě tvrzení si teď pomocí předchozí věty ověříme, na ověření posledního tvrzení musíme ještě počkat (až budeme umět to, co kdysi uměl již Gauss).

Příklad 2.3.5
(1) Nechť S_1 je pás v rovině, daný parametrizací $\mathbf{p}_1(u, v) = (u, v, 0), u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$ a nechť S_2 je válec (bez jedné přímky), zadaný parametrizací $\mathbf{p}_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v), u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$. Chceme vědět, jestli je zobrazení $f : S_1 \to S_2$ dané vztahem $f(u, v, 0) = (\cos u, \sin u, v)$ isometrie. První fundamentální forma plochy $\mathbf{p}_1$ má tvar $du^2 + dv^2$, první fundamentální forma plochy $f \circ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ má tentýž tvar $du^2 + dv^2$. Tedy jsou obě plochy isometrické.
(2) Kužel (bez jedné přímky) je isometrický s částí roviny. Parametrický popis standardního kuželu je

$$\mathbf{p}_1(v, \varphi) = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, v);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Příslušná první fundamentální forma je rovna $2dv^2 + v^2 d\varphi^2$.

Zvolme si parametrizaci kruhové výseče v rovině takto:

$$\mathbf{p}_2(v, \varphi) = \left(\sqrt{2}v\cos\frac{\varphi}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}v\sin\frac{\varphi}{\sqrt{2}}, 0\right);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Pak jsou příslušné první fundamentální formy stejné (spočítejte si!).

Příslušná isometrie f je zobrazení plochy S_1 na plochu S_2 dané předpisem $f = \mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1^{-1}$.

2.3.2 Konformní zobrazení.

Nyní si budeme definovat konformní zobrazení mezi dvěma plochami. Je to zobrazení, které nemusí zachovávat vzdálenosti na ploše, ale které zachovává úhly. Připomeňme si středoškolskou informaci, jak se vypočítá úhel, který svírají dvě strany v trojúhelníku. Označíme-li tyto dvě strany vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, pak jejich úhel φ se vypočte ze vztahu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{a}_2|},\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Definice 2.3.6 *Jsou-li $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ dvě křivky na ploše S a $\mathbf{c}_1(t_1) = \mathbf{c}_2(t_2) = s \in S$, pak úhel křivek $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ v bodě s definujeme jako úhel vektorů $\dot{\mathbf{c}}_1(t_1)$ a $\dot{\mathbf{c}}_2(t_2)$.*

Řekneme, že $f : S_1 \to S_2$ je konformní zobrazení, pokud zachovává úhly, tj. pokud pro každý bod $s \in S$ a pro každé dvě křivky $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ pro které $\mathbf{c}_1(t_1) = \mathbf{c}_2(t_2) = s$, platí že úhel křivek $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ v bodě s je stejný jako úhel křivek $f \circ \mathbf{c}_1, f \circ \mathbf{c}_2$ v bodě $f(s) \in S_2$.

Věta 2.3.7 *Zobrazení $f : S_1 \to S_2$ je konformní zobrazení právě když pro každou mapu $\mathbf{p}$ daného atlasu plochy S_1 je první fundamentální forma parametrizace $\mathbf{p}$ (nenulovým) konstantním násobkem první fundamentální formy parametrizace $f \circ \mathbf{p}$ plochy S_2.*

Důkaz.

Budeme opět bez újmy na obecnosti předpokládat, že plocha S_1 (a tedy i S_2) je pokryta jedinou mapou $\mathbf{p}_1$, resp. $\mathbf{p}_2 = f \circ \mathbf{p}_1$. Označme E_i, F_i, G_i, $i = 1, 2$ koeficienty příslušné první fundamentální formy.

Délka vektoru i skalární součin dvou vektorů se vypočítá pomocí první fundamentální formy plochy. Pokud se tato forma vynásobí konstantou, vynásobí se délka vektoru toutéž konstantou a skalární součin se vynásobí kvadrátem této konstanty. Je tedy zřejmé ze vzorce pro úhel dvou vektorů, že se příslušný úhel nezmění. Pokud je tedy vektor (E_1, F_1, G_1) (nenulový) násobek (E_2, F_2, G_2), pak je zobrazení f konformní.

Důkaz opačné implikace je složitější. Předpokládejme, že je zobrazení f konformní a a zvolme systém křivek $\mathbf{c}_1$, které závisí na dvou parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (a na volbě počátečního bodu $(\bar{u}, \bar{v})$) :

$$u = \bar{u} + \alpha t;\ v = \bar{v} + \beta t,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Křivku $\mathbf{c}_2$ volíme takto:

$$u = \bar{u} + t;\ v = \bar{v},\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Pak se pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úhel křivek $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ rovná úhlu jejich obrazů, tj.

$$\frac{E_1\alpha + F_1\beta}{\sqrt{E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2}\sqrt{E_1}} = \frac{E_2\alpha + F_2\beta}{\sqrt{E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2}\sqrt{E_2}}.$$

Rovnost platí tedy i pro kvadráty obou stran, ale

$$\frac{(E_1\alpha + F_1\beta)^2}{(E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2)E_1} = 1 - \frac{(F_1^2 - E_1G_1)\beta^2}{(E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2)E_1}$$

tedy pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí (po vynásobení společným jmenovatelem)

$$E_2(F_1^2 - E_1G_1)(E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2) = E_1(F_2^2 - E_2G_2)(E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2).$$

Hledaný konstantní násobek je tedy roven číslu

$$\frac{E_2(F_1^2 - E_1G_1)}{E_1(F_2^2 - E_2G_2)}.$$

$\square$

Příklad 2.3.8 *Příkladem konformního zobrazení zobrazení (části) jednotkové sféry na rovinu je tzv. stereografická projekce. Označme N severní pól sféry ($N = (0,0,1)$). Pro libovolný jiný bod P sféry protíná přímka NP rovinu $z = 0$ v jediném bodě Q. Zobrazení, které bodu P přiřadí bod Q se nazývá stereografická projekce. Snadno zjistíme, že je popsáno vzorcem*

$$Q = (x, y = z) = \mathbf{p}(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$

Ověřte, že je to konformní zobrazení! Derivace mají tvar

$$\mathbf{p}_u = \left(\frac{2(v^2-u^2+1)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2}\right)$$

$$\mathbf{p}_v = \left(\frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2(u^2-v^2+1)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2}\right)$$

Tedy $E = G = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$, $F = 0$.

---

7. přednáška

2.3.3 Zobrazení, které zachovávají velikost plochy.

Nejdříve se naučíme, jak se počítá velikost povrchu (části) plochy pomocí integrálu. Je-li S plocha v Eukleidovském prostoru a je-li f funkce na S pak integrál funkce f přes plochu S se značí $\int_S f\,dS$ a fyzikové mu obvykle říkají plošný integrál prvního druhu. Definice plošného integrálu prvního a druhého druhu je obsažena v každé slušné učebnici kalkulu (i když asi ne v obecnosti, kterou bychom si přáli). Pokud jste se plošný integrál dosud nenaučili, musíme teď chvíli strávit s jeho definicí. Velikost $P(S)$ plochy S je pak dána vzorcem $P(S) = \int_S 1\,dS$.

Definice 2.3.9 *Je-li f hladká funkce na ploše S a je-li S pokryto jedinou mapou $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$, pak definujeme integrál z f přes plochu S vzorcem*

$$\int_S f\, dS = \int_{\mathcal{O}} f|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| du\, dv = \int_{\mathcal{O}} f\sqrt{EG - F^2} du\, dv.$$

Předpokládejme, že je možné S napsat jako disjunktní sjednocení

$$S =< \mathbf{p}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{p}_j > \cup < \mathbf{c}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{c}_l >,$$

kde $\mathbf{p}_i$ jsou mapy na plochách $S_i =< \mathbf{p}_i >, i = 1, \ldots, k$ a $\mathbf{c}_j, j = 1, \ldots, l$ jsou regulární křivky. Pak definujeme

$$\int_S f\, dS = \sum_1^k \int_{S_i} f\, dS$$

Ve všech standardních případech, kdy potřebujeme integrovat přes plochy, není těžké najít vhodný rozklad plochy na několik otveřených částí, které se dají pokrýt jednou mapou a zbytkem, který se vejde od jedné, nebo více křivek. U sféry lze vynechat jednu polokružnici a severní a jižní pól,zbytek je obraz otevřeného dvourozměrného intervalu při standardních sférických souřadnicích. Podobně je tomu u válce, či toru.

Věta 2.3.10 *Integrál $\int_S f\, dS$ nezávisí ani na rozkladu plochy S, ani na volbě parametrizací $\mathbf{p}_i$.*

Důkaz.

Připomeňme si nejprve, že plocha rovnoběžníka v $\mathbb{R}^3$, jehož hrany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ je rovna

$$|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| = \sqrt{\det(g_{ij})};\ g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j;\ i, j = 1, 2.$$

Rovnost obou výrazů plyne ze vztahu

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

dosazením $\mathbf{c} = \mathbf{a}, \mathbf{d} = \mathbf{b}$. Pro případ $\mathbf{a} = \mathbf{p}_u, \mathbf{b} = \mathbf{p}_v$ dostaneme determinant rovný $EG - F^2$.

Nejdříve si ukážeme, že plošný integrál nezávisí na výběru map. Předpokládejme, že máme dvě parametrizace $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ takové, že $< \mathbf{p}_1 >=< \mathbf{p}_2 >$. Pak víme, že existuje změna parametrizace

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) = \Phi(u, v)$$

taková, že $\mathbf{p}_1(u, v) = \mathbf{p}_2(\Phi(u, v))$. Z toho plyne

$$(\mathbf{p}_1)_u \times (\mathbf{p}_1)_v = (\det J\Phi)(\mathbf{p}_2)_{\tilde{u}} \times (\mathbf{p}_2)_{\tilde{v}},$$

kde $J\Phi$ je Jacobiho matice zobrazení Φ.

Je-li $\mathbf{p}$ definováno na $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ a $\tilde{\mathcal{O}} = \Phi(\mathcal{O})$, pak podle věty o substituci platí

$$\int_{\mathcal{O}} |(\mathbf{p}_1)_u \times (\mathbf{p}_1)_v| du\, dv = \int_{\mathcal{O}} |(\det J\Phi)||(\mathbf{p}_2)_{\tilde{u}} \times (\mathbf{p}_2)_{\tilde{v}}| du\, dv =$$

$$= \int_{\tilde{\mathcal{O}}} |(\mathbf{p}_2)_{\tilde{u}} \times (\mathbf{p}_2)_{\tilde{v}}| d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

Dále si ukážeme, že výsledný integrál nezávisí na rozdělení plochy na otevřené části, které jsou obrazy map. Předpokládejme, že máme dvě taková rozdělení

$$S =< \mathbf{p}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{p}_j > \cup < \mathbf{c}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{c}_l >,$$

$$S =< \mathbf{p}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{p}'_j > \cup < \mathbf{c}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{c}'_l > .$$

Pak si najdeme společné zjemnění, kde za otevřené části vezmeme všechny průniky

$$S_{ii'} := S_i \cap S_{i'},\ i = 1, \ldots, j,\ i' = 1, \ldots, j'$$

a doplníme je do celé plochy vhodnými obrazy křivek (to zřejmě jde). Stačí nyní ukázat, že

$$\sum_{i=1}^{j} \int_{S_i} f dS = \sum_{i=1, i'=1}^{j, j'} \int_{S_{ii'}} f dS.$$

Ale pro to stačí si uvědomit, že plocha S_i, přes kterou integrujeme se rozloží na disjunktní sjednocení průniků $S_i \cap S_{i'}$, $i' = 1, \ldots, j'$ a několika obrazů křivek. Pokud podle definice převedeme integrál přes S_i na integrál přes otevřenou množinu $\mathcal{O}'_i \subset \mathbb{R}^2$ z hladké funkce, pak stačí si uvědomit, že vzor křivek v rozkladu při parametrizaci dané mapou jsou opět obrazy hladkých křivek v $\mathbb{R}^2$ a že mají tedy míru nula. Integrál přes ně je tedy nulový a zbytek plyne z aditivity integrálu. $\square$

Definice 2.3.11 *Hladké zobrazení $f : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami zachovává velikost plochy právě když pro každou mapu $\mathbf{p}$ daného atlasu plochy S_1 platí pro koeficienty E_1, F_1, G_1 první fundamentální formy parametrizace $\mathbf{p}$ a koeficienty E_2, F_2, G_2 první fundamentální formy parametrizace $f \circ \mathbf{p}$ plochy S_2 vztah*

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Důkaz.

Důkaz se provede stejně jako důkaz nutné a postačující podmínky pro isometrii. Je zřejmé, že vztah ve větě zaručuje, že odpovídající integrály (a tedy i odpovídající velikosti ploch) vzoru a obrazu při zobrazení f budou stejné. $\square$

Následující větu objevil slavný řecký matematik Archimedes. V jeho době, kdy neexistoval kalkulus, bylo pozoruhodným výkonem spočítat velikost povrchu sféry, resp. velikost výsečí na sféře, omezených dvěma hlavními kružnicemi na sféře. Archimedes tuto úlohu dokázal vyřešit tím, že ji převedl na výpočet ploch na válci, kde se vše redukuje na znalost velikosti obvodu kružnice, resp. její poměrné části. Legenda říká, že po obléhání Syracus, při kterém Archimedes zahynul, nechal tuto větu vytesat římský generál Marcellus na jeho hrob.

Věta 2.3.12 (Archimedes.) *Uvažujme jednotkovou sféru bez dvou bodů*

$$S_1 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \neq \pm 1\}$$

a část válce

$$S_2 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 = 1, \ -1 < z < 1\}.$$

Každému bodu $P \in S_1$ odpovídá bod $Q \in S_2$, který má tutéž souřadnici z a pro který přímka PQ protíná osu z. Zobrazení f, které přiřadí bodu P bod Q je v souřadnicích popsáno vztahem

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

Pak f je difeomorfismus S_1 na S_2, který zachovává velikost ploch.

Důkaz.

Zvolme si mapu

$$\mathbf{p}_1(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta); \ \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \ \varphi \in (-\pi, \pi),$$

která pokrývá celou plochu S_1 až na jednu polokružnici. Mapa $\mathbf{p}_2 = f \circ \mathbf{p}_1$ má pak tvar

$$\mathbf{p}_2(\theta, \varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin\theta); \ \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \ \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Odpovídající koeficienty první fundamentální formy jsou

$$E_1 = 1, F_1 = 0, G_1 = \cos^2\theta; \ E_2 = \cos^2\theta, F_1 = 0, G_1 = 1.$$

Je zřejmé, že požadovaný vztah v předchozí větě platí.

Totéž platí pro druhou mapu na S_1, která je dána zobrazením $\mathbf{p}_1$ s $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Obě mapy tvoří atlas na S_1. Podle předchozí věty tedy f zachovává velikost ploch.

□

Archimedes tuto větu použil k odvození velikosti plochy výseče, omezené na jednotkové sféře dvěma hlavními kružnicemi, které svírají úhel α. Po promítnutí na povrch válce je obrazem část válce nad obloukem kružnice, který odpovídá úhlu α. Velikost plochy tohoto obrazce je zřejmě 2α. Pro povrch celé sféry dostaneme známou hodnotu 4π.

Jako další aplikaci si dokážeme vzorec pro velikost povrchu sférického trojúhelníka ABC.

Věta 2.3.13 *Předpokládejme, že se tři hlavní kružnice na sféře ohraničují sférický trojúhelník ABC. Úhly u vrcholů A, B, C postupně označíme α, β, γ. Pak se velikost $|ABC|$ plochy trojúhelníka ABC vypočte ze vztahu*

$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Všimněte si, že součet úhlů ve sférickém trojúhelníku není π, ale musí být větší než π! To je zřejmé, protože velikost plochy trojúhelníka musí být kladná. Všimněte si také, že velikost plochy sférického trojúhelníka se vypočte jen pomocí úhlů, ve vzorci nejsou žádné délky stran! Velikost plochy je zřejmě menší než 2π, rozmyslete si, že najdeme trojúhelníky s velikostí plochy libovolně blízko u 2π.

Důkaz.

Označme A', B', C' body protilehlé bodům A, B, C (nakreslete si!). Z předchozí Archimedovy věty víme, že

$$2\alpha = |ABC| + |A'BC|;\; 2\beta = |ABC| + |AB'C|;\; 2\gamma = |ABC| + |ABC'|.$$

Trojúhelníky $A'BC'$ a $AB'C$ se na sebe zobrazují při symetrii podle počátku, mají tedy stejný povrch. Velikost povrchu polosféry, ohraničená kružnicí $ACA'C'$, je rovna zřejmě 2π. Tedy

$$2\pi = |ABC|+|ABC'|+|A'BC'|+|A'BC| = |ABC|+|ABC'|+|AB'C|+|A'BC|$$

Pokud odečteme tři předchozí rovnosti od tohoto posledního vztahu, dostaneme tvrzení věty. $\square$

---

8. přednáška

2.4 Druhá fundamentální forma plochy.

Poznámka.

V této části bychom chtěli zavést pro plochy pojem analogický pojmu křivosti křivky. Připomeňme si nejdříve, jak souvisí křivost křivky s Taylorovým rozvojem paramterizace křivky $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ (můžeme předpokládat, že jde o parametrizaci obloukem). Taylorův rozvoj v okolí bodu s_0 má tvar

$$\mathbf{c}(s_0 + \alpha) - \mathbf{c}(s_0) = \mathbf{c}'(s_0)\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{c}''(s_0)\alpha^2 + o(\alpha^2).$$

Normála $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s_0)$ je kolmá na $\mathbf{c}'(s_0)$, tedy po vynásobení obou stran předchozí rovnosti normálou $\mathbf{n}$ dostaneme

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}(s_0 + \alpha) - \mathbf{c}(s_0)) = \frac{1}{2}\kappa\alpha^2 + o(\alpha^2),$$

kde κ je křivost křivky v daném bodě. To dává geometrickou interpretaci křivosti křivky jako velikosti přírůstku křivky ve směru normály do druhého řádu. Jiná možná formulace je fakt, že jde o nejlepší kvadratické přiblížení dané křivky ve zvoleném bodě a že homogenní část stupně dva je určena křivostí dané křivky.

Analogická situace pro plochu je opět Taylorův rozvoj paramaterizace plochy do druhého řádu.

$$\mathbf{p}(u_0 + \alpha, v_0 + \beta) - \mathbf{p}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_u\alpha + \mathbf{p}_v\beta + \mathbf{p}_{uu}\alpha^2 + 2\mathbf{p}_{uv}\alpha\beta + \mathbf{p}_{vv}\beta^2 + \dots$$

kde ... značí hladké zobrazení, jehož Taylorův rozvoj začíná členy třetího řádu. Pokud vynásobíme obě strany rovnosti jednotkovou normálou $\mathbf{N}$, dostaneme vyjádření přírůstku ve směru normály $\mathbf{N}$ ve tvaru

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{p}_{uu}\alpha^2 + 2\mathbf{p}_{uv}\alpha\beta + \mathbf{p}_{vv}\beta^2).$$

To vede k následující definici.

Definice 2.4.1 *Je-li $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ regulární parametrická plocha na $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, pak definujeme funkce L, M, N předpisem*

$$L = \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N};\ M = \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N};\ N = \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N}.$$

Kvadratickou formu II na $\mathbb{R}^2$ (jejíž koeficienty jsou funkce na $\mathcal{O}$)

$$II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

nazveme druhou kvadratickou formou plochy $\mathbf{p}$. Její matici označíme symbolem $\mathcal{F}_{II}$, t.j.

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix};\ II(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Často se druhá fundamentální forma plochy píše v symbolickém tvaru

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Druhá fundamentální forma, podobně jako první fundamentální forma, je ve skutečnosti kvadratická forma na tečném prostoru. Zvolme bod P na ploše S. Parametrizace $\mathbf{p}$ plochy S indukuje souřadnice na tečném prostoru T_PS pomocí obvyklého vztahu

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{p}_u + \beta\mathbf{p}_v \leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Kvadratická forma II se pak pomocí těchto souřadnic přenese na $T_P S$:

$$II(\mathbf{v}) = II(\alpha, \beta).$$

Z lineární algebry víme, že kvadratické formy si jednoznačně odpovídají se symetrickými bilineárními formami. V obou případech je v bazi forma, resp. bilineární zobrazení zadáno odpovídající maticí. Příslušná symetrická bilineární forma se dostane z dané kvadratické formy polarizací (nebo v bazi pomocí příslušné symetrické matice). V našem případě matice $\mathcal{F}_I$, resp. $\mathcal{F}_{II}$, určují symetrické bilineární formy, které budeme také značit symboly I, resp. II. Pro případ I je odpovídající bilineární forma právě skalární součin vektorů, zúžený z $\mathbb{R}^3$ na tečný prostor.

Z předchozích úvah o druhé fundamentální formě jako o aproximaci druhého řádu ve směru normály $\mathbf{N}$ se dá odvodit, že druhá fundamentální forma na tečném prostoru se nemění při změně parametrizace, která zachovává orientaci (a tedy nemění $\mathbf{N}$). Na rozdíl od první fundamentální formy, která na parametrizaci zřejmě nezávisí, mění druhá fundamentální forma znaménko při parametrizaci, která mění orientaci. Druhá fundamentální forma se také nemění, pokud plochu v prostoru posuneme nebo otočíme. Obě tyto tvrzení lze dokázat přímo výpočtem změny formy II při změně orientace nebo při složení parametrizace se shodností (je to užitečné domácí cvičení!). Až si uvedeme geometrickou interpretaci formy II pomocí křivosti normálových řezů plochy, odvodíme tuto nezávislost na parametrizaci jiným způsobem.

Příklad 2.4.2 *(1) Ihned z definice plyne, že rovina má druhou fundamentální formu triviální. Je-li* $\mathbf{p}(u,v) = \mathbf{a}+u\mathbf{p}+v\mathbf{q}$ *její parametrizace, je zřejmě* $\mathbf{p}_{uu} = \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vv} = 0$.
(2) Rotační plocha.

Předpokládejme, že je dána regulární parametrická křivka $x = f(s), z = g(s), s \in I$ *v polorovině* $z > 0$, *t.j. předpokládejme, že* $g(t) > 0$. *Předpokládejme také, že jde o parametrizaci obloukem* $(f'^2 + g'^2 = 1)$.

Rotační plocha je dána mapou

$$\mathbf{p}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u));\ (u,v) \in I \times (0, 2\pi),$$

resp. podobnou mapou pro $v \in (\pi, 3\pi)$. *Pak*

$$\mathbf{p}_u(u,v) = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)),\ \mathbf{p}_v(u,v) = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),$$

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = (-fg'\cos v, -fg'\sin v, ff'),\ \mathbf{N} = (-g'\cos v, -g'\sin v, f');$$

$$\mathbf{p}_{uu}(u,v) = (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)), \mathbf{p}_{uv}(u,v) = (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0),$$

$$\mathbf{p}_{vv}(u,v) = (-f\cos v, -f\sin v, 0).$$

Protože $E = f'^2 + g'^2 = 1$, $F = 0$, $G = f^2$ *má první fundamentální forma tvar* $I(\alpha,\beta) = \alpha^2 + f^2\beta^2$. *Dále,* $L = -f''g' + g''f'$, $M = 0$, $N = fg'$, *tedy*

$$II(\alpha,\beta) = (-f''g' + g''f')\alpha^2 + fg'\beta^2.$$

(3) Mezi speciální případy rotační plochy patří případy sféry:

$$f = \cos u, g = \sin u;\ II(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \cos^2 u \beta^2;$$

a válce

$$f = 1, g = u;\ II(\alpha, \beta) = \beta^2.$$

2.4.1 Normálová křivost, normálové řezy.

Zvolme bod P plochy S a jednotkový tečný vektor $\mathbf{v} \in T_P S$, $|\mathbf{v}| = 1$. Jednotková normála $\mathbf{N}$ určuje spolu s vektorem $\mathbf{v}$ rovinu R, která protíná plochu S v křivce $\mathbf{c}$. Tuto křivku nazveme normálovým řezem ve směru $\mathbf{v}$.

Předpokládejme, že je $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovaná obloukem tak, že $\mathbf{c}(0) = P, \mathbf{t} = \mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$. Frenetovu bazi v bodě P ozmačíme $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Pro křivost κ křivky $\mathbf{c}$ v bodě P platí

$$\mathbf{c}''(0) = \kappa \mathbf{n},\ \kappa = \mathbf{c}''(0) \cdot \mathbf{n}.$$

Protože křivka $\mathbf{c}$ leží v rovině R, je zřejmě $\mathbf{N} = \pm \mathbf{n}$. Zvolme mapu $\mathbf{p}(u, v)$ na S, jejíž obraz obsahuje bod P a pro kterou $\mathbf{N} = \mathbf{n}$.

Protože křivka $\mathbf{c}$ leží na ploše S, existují funkce $u = u(s), v = v(s)$ takové, že $\mathbf{c}(s) = \mathbf{p}(u(s), v(s))$. Pak

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{p}_u\, u' + \mathbf{p}_v\, v';\ \mathbf{c}'' = \mathbf{p}_{uu}(u')^2 + 2\mathbf{p}_{uv} u'v' + \mathbf{p}_{vv}(v')^2;\ \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{N} = II(u', v').$$

To vede k následující definici.

Definice 2.4.3 *Uvažujme regulární parametrickou plochu S, parametrizovanou zobrazením $\mathbf{p}$ a její bod P. Normálovou křivost $\kappa_n(\mathbf{v})$ ve směru $v \in T_P S, |\mathbf{v}| = 1$ definujeme vztahem*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2,$$

kde (α, β) jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}$, tj. $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{p}_u + \beta \mathbf{p}_v$.

Z výpočtu před definicí plyne ihned, že normálová křivost $\kappa_n(\mathbf{v})$ je rovna, až na znaménko, křivosti normálového řezu ve směru $\mathbf{v}$. Rovnost platí pokud $\mathbf{N} = \mathbf{n}$; křivosti jsou opačné, pokud $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$.

Z této geometrické interpretace druhé fundamentální formy plyne nezávislost této formy na změně parametrizace, která zachovává orientaci. Je také vidět, že druhá fundamentální forma mění znaménko, pokud změna parametrizace mění orientaci. Navíc je zřejmé, že posunutí nebo otočení plochy nemění druhou fundamentální formu.

2.4.2 Hlavní křivosti, hlavní směry.

Normálová křivost $\kappa_n(\alpha,\beta) = II(\alpha,\beta), \alpha^2+\beta^2 = 1$ je spojitá funkce na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$. Nabývá tedy svého maxima i minima. Hodnoty těchto extrémů a směry ve kterých se nabývají, jsou důležité geometrické informace o dané ploše.

Definice 2.4.4 *Řekneme, že jednotkový tečný vektor* $\mathbf{v}$ *je hlavní směr plochy* $\mathbf{p}$ *v bodě* P, *pokud je to směr, ve kterém se nabývá extrém normálové křivosti* κ_n. *Odpovídající hodnota normálové křivosti se nazývá hlavní křivost.*

Věta 2.4.5
(1) Číslo λ *je hlavní křivost plochy* $\mathbf{p}$, *pokud*

$$\det\begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{vmatrix} = \det(\mathcal{F}_{II}-\lambda\mathcal{F}_I) = 0.$$

Hlavní směry jsou pak řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (\mathcal{F}_{II}-\lambda\mathcal{F}_I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0.$$

(2) Hlavní směry, resp. hlavní křivosti, jsou vlastní vektory, resp. vlastní čísla tzv. Weingartenovy matice

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}.$$

Důkaz.
(1) Vázané extrémy funkce κ_n najdeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Snadno se zjistí, že

$$\nabla I(\alpha,\beta) = 2\mathcal{F}_I\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix};\ \nabla II(\alpha,\beta) = 2\mathcal{F}_{II}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}.$$

Bod (α,β) je kritický bod κ_n právě když

$$(\mathcal{F}_{II}-\lambda\mathcal{F}_I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0.$$

Rovnice pro hlavní křivosti je pak

$$\det(\mathcal{F}_{II}-\lambda\mathcal{F}_I) = 0.$$

(2) Tvrzení plyne z rovnosti

$$\mathcal{F}_{II}-\lambda\mathcal{F}_I = \mathcal{F}_I\left(\mathcal{W}-\lambda\mathbb{I}\right),$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice. □

Věta 2.4.6
(1) Rovnice $\det(\mathcal{F}_{II} - \lambda\mathcal{F}_I) = 0$ *pro hlavní křivosti je kvadratická rovnice, která má reálné kořeny* κ_1, κ_2.
(2) Pokud je kořen dvojnásobný ($\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$)*, pak* $\mathcal{F}_{II} = \kappa\mathcal{F}_I$ *a každý jednotkový vektor je hlavní vektor. Bod kde toto platí nazveme kruhovým bodem. Pokud navíc* $\kappa = 0$*, pak bod nazveme planárním bodem plochy.*
(3) Je-li $\kappa_1 \neq \kappa_2$*, pak odpovídající hlavní vektory* A_1, A_2 *jsou na sebe kolmé, tj.* $I(A_1, A_2) = 0$.
(4) (Euler) Předpokládejme, že vektory A_1, A_2; $|A_1| = |A_2| = 1$*, jsou hlavní vektory pro hlavní křivosti* κ_1, κ_2*. Předpokládejme, že pro vektor* $A \in \mathbb{R}^2$ *platí* $A = \cos\alpha A_1 + \sin\alpha A_2$*, pak*

$$\kappa_n = \cos^2\alpha\kappa_1 + \sin^2\alpha\kappa_2.$$

Důkaz.
(1) Normálová křivost κ_n má maximum a nimimum na kružnici jednotkových vektorů a tyto minima jsou reálná čísla.
(2) pokud $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$, pak zřejmě $\mathcal{F}_{II}$ je konstantní násobek $\mathcal{F}_I$ a tato konstanta je κ.
(3) Tato část je důsledkem obecné vlastnosti, že vlastní vektory pro různá vlastní čísla jsou na sebe kolmá. Dokážeme to v našem případě přímo.

Jsou-li A_1, resp A_2 hlavní vektory pro hlavní křivosti κ_1, resp κ_2, pak

$$\mathcal{F}_{II}A_1 = \kappa_1\mathcal{F}_I A_1;\ \mathcal{F}_{II}A_2 = \kappa_2\mathcal{F}_I A_2.$$

Dostaneme tedy

$$\kappa_1 A_2^t\mathcal{F}_I A_1 = A_2^t\mathcal{F}_{II}A_1 = \kappa_2 A_2^t\mathcal{F}_I A_1.$$

protože ale $\kappa_1 - \kappa_2 \neq 0$, musí být

$$A_2^t\mathcal{F}_I A_1 = I(A_1, A_2) = 0.$$

Hlavní vektory jsou tedy na sebe kolmé.
(4) Platí

$$\kappa_n(A) = A^t\mathcal{F}_{II}A = (\cos\alpha A_1^t + \sin\alpha A_1^t)\mathcal{F}_{II}(\cos\alpha A_2^t + \sin\alpha A_2^t) =$$
$$= \cos^2\alpha II(A_1, A_1) + 2\cos\alpha\sin\alpha II(A_1, A_2) + \sin^2\alpha II(A_2, A_2) = \cos^2\alpha\kappa_1 + \sin^2\alpha\kappa_2.$$

□

Všimněte si, že Eulerovu větu můžeme převést do tvaru

$$\kappa_n = \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2)\sin^2\alpha.$$

Tato funkce máme velmi jednoduchý graf (nakreslete si!) a pokud není konstantní (tj. pokud nejde o kruhový bod), má právě ostré extrémy, dvě maxima a dvě minima. Podobně jako hlavní křivosti, i normálová křivost je vlastností (orientované) plochy, nemění se při změně parametrizace, která zachovává orientaci. Pokud změníme orientaci, změní normálová křivost znaménko.

2.4.3 Geometrická interpretace hlavních křivostí.

Nyní si chceme rozmyslet, co říkají znaménka hlavních křivostí o geometrickém tvaru příslušné plochy. Uvažme mapu $\mathbf{p}(u,v)$ na ploše S a vyšetřujme ji v okolí zvoleného bodu, např. v okolí bodu $\mathbf{p}(0,0)$. Odpovídající plochu můžeme, beze změny geometrických vlastností posunout a otočit. Posuneme ji tedy tak, aby zvolený bod ležel v počátku, tj. aby $P=\mathbf{p}(0,0)=(0,0,0)$. Otočením také dosáhneme toho, že tečná rovina v počátku je kolmá na osu z, tj. $T_PS=\{(x,y,z)|z=0\}$. Hlavní směry jsou na sebe kolmé a jednotkové, můžeme tedy také otočením plochy dosáhnout toho, že hlavní směry mají tvar $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{v}_2=(0,1,0)$, a tedy

$$\mathbf{N}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=(0,0,1).$$

Pak můžeme napsat Taylorovůj rozvoj pro zobrazení $\mathbf{p}$ v okolí počátku:

$$\mathbf{p}(u,v)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_{uu}u^2+2\mathbf{p}_{uv}uv+\mathbf{p}_{vv}v^2\right).$$

Po vynásobení této rovnosti jednotkovou normálou $\mathbf{N}$ k ploše dostaneme

$$z=\mathbf{N}\cdot\mathbf{p}=\frac{1}{2}\left(Lu^2+2Muv+Nv^2\right).$$

Hlavní vektory je možné vyjádřit v bazi tečného prostoru v počátku, odpovídající koeficienty označíme $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$:

$$\mathbf{v}_1=\alpha_1\mathbf{p}_u+\beta_1\mathbf{p}_v;\ \mathbf{v}_2=\alpha_2\mathbf{p}_u+\beta_2\mathbf{p}_v.$$

Po lineární substituci $u=x\alpha_1+y\beta_1, v=x\alpha_2+y\beta_2$, dostaneme

$$\mathbf{p}_x=\alpha_1\mathbf{p}_u+\beta_1\mathbf{p}_v=\mathbf{v}_1;\ \mathbf{p}_y=\alpha_2\mathbf{p}_u+\beta_2\mathbf{p}_v=\mathbf{v}_2.$$

Pak v nové parametrizaci $\mathbf{p}=\mathbf{p}(x,y)$ dostaneme $E=G=1, F=0$, tedy vlastní vektory mají vůči basi $\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y$ souřadnice $(1,0)$, resp., $(0,1)$. Dostáváme tedy v nových souřadnicích vztah

$$\mathbf{p}(x,y)=\frac{1}{2}\left(\kappa_1\,x^2+\kappa_2\,y^2\right).$$

Nyní mohou nastat čtyři různé případy.

(1) κ_1 a κ_2 jsou obě různá od nuly a mají stejná znaménka; pak graf funkce $\mathbf{p}(x,y)$ je parabolický elipsoid, jeho rovnice má (pro vhodnou volbu konstant) tvar

$$z=\pm\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right).$$

(2) κ_1 a κ_2 jsou obě různá od nuly a mají opačná znaménka; pak graf funkce $\mathbf{p}(x,y)$ je parabolický hyperboloid, jeho rovnice má (pro vhodnou volbu konstant) tvar

$$z=\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}.$$

(3) Jedna z hlavních křivostí je nula, druhá je různá od nuly; pak graf funkce $\mathbf{p}(x, y)$ je parabolický válec, jeho rovnice má (pro vhodnou volbu konstant) tvar
$$z = \pm\frac{x^2}{p^2}.$$
(4) Obě hlavní křivosti jsou nula. Pak jde o planární bode plochy a o tvaru plochy nejde nic říct, tvar závisí na chování Taylorova rozvoje třetího, resp. vyššího, řádu.

Dva příklady ilustrují některé z možností, které mohou nastat. Graf funkce $z = y^4$ a $z = x^3 - 3xy^2$ jsou zcela odlišné.

Pro budoucnost si dokážeme následující, velmi užitečnou větu.

Věta 2.4.7 *Je-li $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ mapa na S a $\mathbf{N}$ jednotková normála k S, pak*

$$\mathbf{N}_u = a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v;\ \mathbf{N}_v = c\mathbf{p}_u + d\mathbf{p}_v,$$

kde
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} =: \mathcal{W}.$$
Matice $\mathcal{W}$ definovaná předchozím vztahem se nazývá Weingartenova matice.

Důkaz.

Jako mnohokrát předtím, derivací vztahu $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 1$ odvodíme, že platí $\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{N} = 0$. Obě derivace $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v$ patří tedy do tečného prostoru v daném bodě a můžeme je tedy napsat jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{p}_u$ a $\mathbf{p}_v$. Existují tedy čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\mathbf{N}_u = a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v;\ \mathbf{N}_v = c\mathbf{p}_u + d\mathbf{p}_v.$$

Tyto vztahy napíšem v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_u & \mathbf{N}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

(Příslušné násobení matic je poněkud netradiční, v jedna matice má jako prvky reálné čísla, druhá má jako prvky vektory. Protože je možné násobit čísla a vektory, má násobení smysl a výsledná matice má za své prvky opět vektory. Později budeme násobit dvě matice, které obě budou mít jako prvky vektory, jako násobení budeme používat skalární součin a výsledkem bude matice, jejíž prvky budou čísla.)

Derivováním vztahu $\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_u = 0$ podle proměnné u, resp. v, dostaneme

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{p}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{uu} = -L;\ \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{p}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{uv} = -M.$$

Stejně odvodíme ze vztahu $\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_u = 0$ vztahy

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{p}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{uv} = -M;\ \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{p}_v = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{vv} = -N.$$

Tyto vztahy můžeme shrnout do jedné relace

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}_u\\ \mathbf{p}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{N}_u & \mathbf{N}_v\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}.$$

Dosazením z prvního součinu dostaneme

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}_u\\ \mathbf{p}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix},$$

neboli

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix},$$

z čehož okamžitě plyne tvrzení věty. □

2.5 Křivosti křivek na ploše.

Předpokládejme, že $\mathbf{c}(s) = \mathbf{p}(u(s), v(s))$ je regulární křivka na ploše S,$S =< \mathbf{p} >$. Pokud je křivka $\mathbf{c}$ parametrizována obloukem, pak $|\mathbf{c}'| = 1$. Vektor $\mathbf{c}'$ je tečný, tedy $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{N} = 0$. Trojice $\mathbf{c}', \mathbf{N}, \mathbf{N} \times \mathbf{c}'$ je kladně orientovaná ortonormální baze.

Derivací vztahu $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$ dostaneme $\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}' = 0$. Z toho je okamžitě vidět, že vektor je lineární kombinací vektorů $\mathbf{N}$ a $\mathbf{N} \times \mathbf{c}'$. (Nakreslete si obrázek!) To vede k následující definici.

Definice 2.5.1 *Je-li $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ křivka parametrizovaná obloukem na ploše S, pak existují reálná čísla κ_n, κ_g taková, že*

$$\mathbf{c}'' = \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g(\mathbf{N} \times \mathbf{c}').$$

Čísla κ_n, resp. κ_g se nazývají normálová křivost (resp. geodetická křivost) křivky $\mathbf{c}$. Zřejmě platí

$$\kappa_n = \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{N};\ \kappa_g = \mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}') = \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{N});\ |\mathbf{c}''|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

Všimněte si, že:
(1) křivost κ křivky $\mathbf{c}$ souvisí s normálovou a geodetickou křivostí pomocí vztahu

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2;$$

(2) Je-li $\mathbf{n}$ normála pro křivku $\mathbf{c}$ (část Frenetovy baze), pak $\mathbf{c}'' = \kappa\mathbf{n}$ a

$$\kappa_n = \kappa\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = \kappa \cos\theta,$$

kde θ je úhel, který svírají normály $\mathbf{n}$ a $\mathbf{N}$.

(3) Při změně parametrizace plochy se κ_n, κ_g nezmění (pokud přejdeme k souhlasně orientované parametrizaci), respp. obě křivosti změní znaménko (pokud přejdeme k opačně orientované parametrizaci).
(4) Pro obecnou regulární křivku definujeme κ_n, κ_g pomocí libovolně zvolené parametrizace obloukem, která je souhlasně orientovaná s původní parametrizací. Normálová křivost nezávisí na volbě parametrizace, geodetická křivost závisí jen na orientaci (při souhlasně orientovaných změnách parametrizace se nemění, při opačně orientovaných změnách parametrizace mění znaménko).
(5) Je-li křivka $\mathbf{c}$ dána normálovým řezem (tj. je-li $\mathbf{c}$ průnik plochy s rovinou kolmou k tečné rovině), pak zřejmě $\kappa_n = \pm\kappa, \kappa_g = 0$. Pokud je křivka dána řezem plochy pomocí jinak nakloněné roviny, je možné její křivost snadno vypočítat.

Věta 2.5.2 (Meusnierova věta.) *Předpokládejme, že* $\mathbf{v}$ *je tečný vektor k ploše* S *v bodě* P. *Předpokládejme dále, že* Π_ψ *je rovina, obsahující vektor* $\mathbf{v}$ *a svírající úhel* ψ *s tečnou rovinou (nakreslete si obrázek!). Rovina* Π_ψ *protíná plochu* S *v křivce, jejíž křivost označíme* κ_ψ. *Pak* $\kappa_\psi \sin\psi$ *nezávisí na úhlu* ψ.

Pokud $\psi = \frac{\pi}{2}$, pak $\kappa_\psi = \kappa_n$, platí tedy

$$\kappa_\psi = \frac{\kappa_n}{\sin\psi}.$$

Pokud se se úhel ψ blíží k nule, roste křivost κ_ψ řezu nade všechny meze, což dobře souhlasí s intuitivní představou o řezu.
Důkaz.

Označme θ úhel, který svírá jednotková normála $\mathbf{N}$ k ploše S s normálou $\mathbf{n}$ ke křivce. Jde o speciální případ obecné křivky na ploše, z předchozího rozboru tedy víme, že platí $\kappa_n = \kappa_\psi \cos\theta$. Zřejmě platí $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Tedy $\cos\psi = \sin\theta$. □

---

8. přednáška

2.6 Gaussova a střední křivost.

Definice 2.6.1 *Jsou-li* κ_1, κ_2 *hlavní křivosti plochy* S, *pak definujeme:*
(1) Gaussovu křivost $K := \kappa_1\kappa_2$.
(2) Střední křivost $H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.

Věta 2.6.2 *Jsou-li* E, F, G, *resp.* L, M, N *koeficienty první, resp. druhé fundamentální formy plochy* $< \mathbf{p} >$, *pak:*
(1)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det \mathcal{F}_{II}}{\det \mathcal{F}_I};$$

(2)

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)};$$

(3)

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Důkaz.

Rovnice pro $\kappa_{1,2}$ má tvar

$$\det \begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{pmatrix} = 0.$$

Tedy

$$\kappa^2(EG - F^2) + \kappa(-EN - LG + 2MF) + (LN - M^2) = 0.$$

Pro řešení $\lambda_{1,2}$ kvadratické rovnice $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ platí

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a},\ \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}.$$

Do těchto vztahů stačí dosadit. □

Všimněte si, že K a H jsou základní symmetrické polynomy v proměnných κ_1, κ_2.

Příklad 2.6.3 *(1) Jednotková sféra má hlavní křivosti $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, tedy $K = H = 1$ všude.*
(2) Válec nad jednotkovou kružnicí má hlavní křivosti $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0$, tedy $K = 0$ a $H = \frac{1}{2}$ všude.
(3) Pro rovinu platí $\kappa_1 = \kappa_2 = 0 = K = H$ všude.
(4) Pro rotační plochu

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u));\ \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1, f > 0$$

platí

$$E = 1, F = 0, G = f^2;\ L = \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g}, M = 0, N = f\dot{g}.$$

Ze vztahu $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ plyne, že $\dot{f}\ddot{f} - \dot{g}\ddot{g} = 0$. Pak

$$K = \frac{(\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})f\dot{g}}{f^2} = \frac{-\ddot{f}f}{f^2} = \frac{-\ddot{f}}{f}.$$

(5) Pseudosféra.

Již víme, jak vypadá plocha s kladnou konstantní Gaussovou křivostí (sféra) a plocha s nulovou Gaussovou křivostí (rovina). Zkusíme si teď rozmyslet, jestli existuje plocha se zápornou konstantní Gaussovou křivostí. Budeme ji hledat ve tvaru rotační plochy.

Chceme, aby

$$\frac{-\ddot{f}}{f} = -1.$$

Řešením rovnice $\ddot{f} - f = 0$ *dostaneme obecné řešení* $f(u) = ae^u + be^{-u}$. *Zvolíme-li* $f(u) = e^u$, *pak díky parametrizaci obloukem platí*

$$g = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du = \sqrt{1 - e^{2u}} - \coth^{-1}\left(e^{-u}\right).$$

Zde $\coth^{-1}$ *značí inversní funkci k* $\coth$. *Funkce*

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \coth^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

je definována jen na intervalu $(0,1)$ *a má záporné hodnoty. Rotací kolem osy* z *dostaneme plochu, kterou budeme nazývat pseudosférou.*

2.6.1 Gaussovo zobrazení.

Předpokládejme, že S je orientovaná plocha a $\mathbf{N}$ je příslušná jednotková normála na ploše S. Myšlenka, kterou si uvědomil již Gauss, je fakt, že k popisu křivosti plochy v okolí daného bodu je možné použít chování normály v okolí tohoto bodu. Čím více mění $\mathbf{N}$ v okolí zvoleného bodu svůj směr, čím více se naklání, tím větší je křivost plochy v tomto bodě. Pro ohodnocení míry změny by bylo možné, jako u křivky, zvolit derivaci $\mathbf{N}$ v daném směru. Na rozdíl od případu křivek je zde však mnoho možných směrů a tyto úvahy vedou brzy k formulaci normálové křivosti plochy. Myšlenka Gausse byla jiná. Navrhnul zavést jako míru křivosti v bodě číslo, určené následujícím způsobem. Uvažujme malá okolí U zvoleného bodu $P \in S$. Normálu $\mathbf{N}$ je možné chápat jako zobrazení z plochy S do jednotkové sféry. Obrazem bodu z plochy S je koncový bod příslušné jednotkové normály (umístěné do počátku). To je zřejmě bod jednotkové sféry. Označme V podmnožinu jednotkové sféry, která je obrazem okolí U při tomto zobrazení. Míru křivosti plochy v bodě S budeme pak definovat jako limitu podílu velikosti povrchů $P(V)$ a $P(U)$ množin V a U. Intuitivně je zřejmé, že čím větší je křivost plochy ve zvoleném bodě, tím větší část sféry pokryje obraz okolí U při zobrazení $\mathbf{N}$.

Následující věta pak ukazuje souvislost této limity s Gaussovou křivostí a dává tak geometrickou interpretaci Gaussovy křivosti.

Věta 2.6.4 *Předpokládejme, že* S *je orientovaná plocha a* $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$ *její kladně orientovaná parametrizace. Nechť* $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{O}$ *a zvolme* $\delta > 0$ *tak, aby kruh* U_δ *o středu* $(\bar{u}, \bar{v})$ *a poloměru* δ *byl částí* $\mathcal{O}$. *Pak*

$$\lim_{\delta' \to 0, \delta' < \delta} \frac{P(\mathbf{N}(\mathbf{p}(U_{\delta'})))}{P(\mathbf{p}(U_{\delta'}))} = |K|,$$

kde K *je Gaussova křivost v bodě* $\mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v})$.

Důkaz.

Podle Věty 2.4.7 víme, že

$$\mathbf{N}_u = a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v;\ \mathbf{N}_v = c\mathbf{p}_u + d\mathbf{p}_v,$$

kde

$$\mathcal{W} = -\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} =: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

je Weingartenova matice.

Pak

$$\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v = (a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v) \times (c\mathbf{p}_u + d\mathbf{p}_v) = (ad - bc)\, \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v =$$

$$= \det(-\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II})\, \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\, \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = K\, \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v.$$

Podle vzorce pro výpočet velikosti povrchu plochy tedy chceme dokázat, že

$$\lim_{\delta' \to 0, \delta' < \delta} \frac{\int_{U_{\delta'}} |K||\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|\, du\, dv}{\int_{U_{\delta'}} |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|\, du\, dv} = |K|.$$

Tento fakt lze přeformulovat takto: Jsou-li f, g spojité a nezáporné funkce v okolí daného bodu $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$, pak

$$\lim_{\delta' \to 0} \frac{\int_{U_{\delta'(a)}} f\, g\, du\, dv}{\int_{U_{\delta'(a)}} g\, du\, dv} = f(\bar{u}, \bar{v}).$$

Ze spojitosti funkce f najdu pro zadané $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby na okolí $U_\delta = U_\delta(\bar{u}, \bar{v})$ platilo $|f(u,v) - f(\bar{u}, \bar{v})| < \varepsilon$. Pak ale

$$\left| \frac{\int_{U_\delta} f\, g\, du\, dv}{\int_{U_{\delta(a)}} g\, du\, dv} - f(\bar{u}, \bar{v}) \right| = \frac{\left| \int_{U_\delta} (f(u,v) - f(\bar{u}, \bar{v}))\, g\, du\, dv \right|}{\int_{U_\delta} g\, du\, dv}$$

$$\leqslant \frac{\int_{U_\delta} \varepsilon\, g\, du\, dv}{\int_{U_\delta} g\, du\, dv} = \varepsilon.$$

□

Mezi velké Gaussovy objevy patří fakt, že Gaussova křivost K má nečekanou a velmi důležitou vlastnost - závisí jen na první fundamentální formě plochy. Není pravda, že by se všechny koeficienty druhé fundamentální formy daly vypočítat pomocí první fundamentální formy. Ani normálová, ani střední křivost nezávisí jen první fundamentální formě. Jen specifická kombinace koeficientu formy II se dá vypočítat pomocí E, F, G a jejich parciálních derivací. Gauss sám si této věty tak cenil, že ji pojmenoval Theorema egregium (tj. pozoruhodná, skvělá věta).

Věta 2.6.5 (Theorema egregium.) *Gaussova křivost K se dá vypočítat pomocí koeficientů první fundamentální formy a jejich derivací.*

Přesný vzorec pro tuto závislost je

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}.$$

Důsledek 2.6.6 *Pokud jsou dvě plochy isometrické, pak mají stejnou Gaussovu křivost.*

V Gaussově větě není podstatný přesný tvar složité závislosti křivosti K na koeficientech E, F, G. Klíčovým faktem je, že je možné vyjádřit křivost K pomocí koeficientů první kvadratické formy a jejich derivací. Z toho pak plyne okamžitě Důsledek 2.6.6. To je velmi důležitá informace.

Od mapy bychom zajisté chtěli, aby věrně zobrazovala zemský povrch. Pokud je povrch zeměkoule část sféry, chci tuto část zobrazit věrně, se zachováním vzdáleností, na část roviny. Pokud se pokusíme zabalit kouli do papíru, papír se pomačká. Je možné tedy odhadnout, že nebude existovat isometrie mezi částí sféry a částí roviny.

Předchozí Důsledek to potvrzuje, sféra má Gaussovu křivost rovnu 1 a rovina má Gaussovu křivost 0. Mezi nimi tedy žádná isometrie existovat nemůže. Je možné tedy zformulovat následující heuristické tvrzení.

Věta 2.6.7 *Každá mapa je špatná. (Přesněji, každá rovinná mapa zkresluje vzdálenosti.)*

Důkaz. (Gaussovy Teoremy Egregium.)

V každém bodě plochy sestrojíme orientovanou bazi $\mathbb{R}^3$ ve tvaru $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{N}\}$, kde N je zvolená jednotková normála a $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ leží v tečné rovině k ploše v daném bodě. (Náš problém je lokální, a tak je možné předpokládat, že kus plochy, který zkoumáme, je orientovatelný.) Tato orientovaná baze je analogií Frenetovy baze, kterou jsme používali pro popis chování křivek.

Derivace vektorů $\mathbf{e}$ a $\mathbf{f}$ můžeme rozložit do zvolené baze, výsledek je (koeficienty $\alpha, \beta, A, B, C, D$ jsou vhodné funkce):

$$\mathbf{e}_u = \alpha\,\mathbf{f} + A\,\mathbf{N};\ \mathbf{e}_v = \beta\,\mathbf{f} + B\,\mathbf{N} \tag{2.6.1}$$

$$\mathbf{f}_u = -\alpha\,\mathbf{e} + C\,\mathbf{N};\ \mathbf{f}_v = -\beta\,\mathbf{e} + D\,\mathbf{N}. \tag{2.6.2}$$

Koeficienty v rozkladu lze vypočítat, pokud vybranou rovnici skalárně vynásobíme jednotkovým vektorem, kterým je vynásoben koeficient, který chceme vypočítat.

V prvním řádku jsou koeficienty u derivací $\mathbf{e}$ nulové, protože $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=1$ a derivace $\mathbf{e}$ jsou tedy kolmé na $\mathbf{e}$. Podobně, derivace $\mathbf{f}$ mají koeficienty u $\mathbf{f}$ nulové. Koeficient u $\mathbf{e}$ v rozkladu $\mathbf{f}_u$ je opačný, než koeficient u $\mathbf{f}$ v rozkladu $\mathbf{e}_u$, protože $\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=0$ a tedy $\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{f}+\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}_u=0$. Připomeňme si, že

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Důkaz rozložíme na několik kroků.
(1) Nejprve si ukážeme, že platí následující tvrzení.

$$\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{f}_v-\mathbf{f}_u\cdot\mathbf{e}_v=AD-BC=\alpha_v-\beta_u=\frac{LN-M^2}{\sqrt{EG-F^2}}=K\sqrt{EG-F^2}.$$

První dokazovaná rovnost plyne ihned, pokud dosadíme do levé strany rovnosti ze vztahů (2.6.1) a (2.6.2). Druhá rovnost plyne ze vztahu

$$\alpha_v-\beta_u=(\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{f})_v-(\mathbf{e}_v\cdot\mathbf{f})_u=\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{f}_v-\mathbf{e}_v\cdot\mathbf{f}_u.$$

Připomeňme si, že

$$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{p}_u\times\mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u\times\mathbf{p}_v|};\ \mathbf{N}\cdot(\mathbf{p}_u\times\mathbf{p}_v)=|\mathbf{p}_u\times\mathbf{p}_v|=\sqrt{EF-G^2}.$$

Pro další rovnost použijeme vztah $\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v=K\,(\mathbf{p}_u\times\mathbf{p}_v)$, dokázaný ve Větě 2.4.7. Po vynásobení této rovnosti jednotkovou normálou $\mathbf{N}$ dostaneme

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v)=K\sqrt{EG-F^2}=\frac{LN-M^2}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Ale $\mathbf{N}=\mathbf{e}\times\mathbf{f}$, tedy

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v)=(\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v)\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f})=-(\mathbf{N}\cdot\mathbf{f}_u)(\mathbf{N}\cdot\mathbf{e}_v)+(\mathbf{N}\cdot\mathbf{e}_u)(\mathbf{N}\cdot\mathbf{f}_v)=-BC+AD.$$

Na konci tohoto kroku je vidět, že Gaussovu křivost $K=EF-G^2$ můžeme vyjádřit pomocí první fundamentální formy, pokud se nám totéž podaří pro koeficienty α a β. O to se pokusíme v dalším kroku.
(2)

Vektory $\mathbf{e}$ a $\mathbf{f}$ byly navzájem kolmé tečné vektory jednotkové délky. To pro ně ponechávalo ještě dost velkou libovůli. Nyní si je zvolíme tak, aby byly dobře přizpůsobeny zvolené parametrizaci naší plochy.

Vektor $\mathbf{e}$ si zvolíme jako kladný násobek vektoru $\mathbf{p}_u$.

$$\mathbf{e}=\epsilon\mathbf{p}_u,\epsilon=\epsilon(u,v)=\frac{1}{|\mathbf{p}_u|}=\sqrt{E}.$$

Vektor $\mathbf{f}$ je již určen podmínkami $\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=0;\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{f}=1$. Pokud napíšeme $\mathbf{f}$ jako $\mathbf{f}=\gamma\mathbf{p}_u+\delta\mathbf{p}_v$, dostaneme

$$\epsilon\gamma E+\epsilon\delta F=0,\gamma^2E+2\gamma\delta F+\delta^2G=1.$$

Z toho plyne

$$\gamma = -\frac{\delta F}{E};\ \delta^2(G - \frac{F^2}{E}) = 1.$$

Celkem tedy

$$\epsilon = \sqrt{E};\ \delta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}};\ \gamma = -\frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}}.$$

Koeficienty ϵ, δ, γ tedy lze vyjádřit pomocí první fundamentální formy plochy.

Koeficienty α, β nyní vyjdou takto.

$$\alpha = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_u = (\gamma \mathbf{p}_u + \delta \mathbf{p}_v) \cdot (\epsilon_u \mathbf{p}_u + \epsilon \mathbf{p}_{uu}) = \gamma\epsilon \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uu} + \epsilon\delta \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uu};$$

$$\beta = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_v = (\gamma \mathbf{p}_u + \delta \mathbf{p}_v) \cdot (\epsilon_v \mathbf{p}_u + \epsilon \mathbf{p}_{uv}) = \gamma\epsilon \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uv} + \epsilon\delta \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uv}.$$

Nyní jako poslední krok stačí vyjádřit součiny prvních a druhých derivací $\mathbf{p}$ pomocí E, F, G.

$$E_u = (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)_u = 2\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uu}; E_v = 2\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uv};$$

$$G_u = 2\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uv};\ F_u = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uv}$$

Po dosazení dostaneme

$$\gamma\epsilon \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uu} + \epsilon\delta \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uu} = \gamma\epsilon\frac{1}{2}E_u + \epsilon\delta(F_u - \frac{1}{2}E_v);$$

$$\gamma\epsilon \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uv} + \epsilon\delta \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uv} = \gamma\epsilon\frac{1}{2}E_v + \epsilon\delta\frac{1}{2}G_u).$$

Tím je důkaz hotov. Po dosazení všech těchto vztahů vyjde konkrétní formule pro K, uvedená ve větě. Její výpočet je dlouhý a únavný a nebudeme ho dělat. Specielní případy tohoto vzorce pro K, které se často používají, si dokážeme za chvíli. □

Důsledek 2.6.8
(1) Je-li $F = 0$, pak

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right\}.$$

(2) Je-li $F = 0, E = 1$, pak

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

Důkaz.
(1) Je-li $F = 0$, pak
$$\gamma = 0, \delta = \frac{1}{\sqrt{G}}, \ \epsilon = \frac{1}{\sqrt{E}}.$$
Z toho plyne
$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{EG}}E_v, \ \beta = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{EG}}G_u$$
a
$$K = \frac{\alpha_v - \beta_u}{\sqrt{EG}} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right\}.$$
(2) Stačí použít vztah $(G^{1/2})_u = \frac{1}{2}G^{-1/2}G_u$.

---

9. přednáška

2.7 Geodetiky

Definice 2.7.1 *Křivka* $\mathbf{c}$ *na ploše* S *se nazývá geodetika, pokud je ve všech bodech vektor* $\ddot{\mathbf{c}}$ *kolmý k ploše (tj. k její tečné rovině v daném bodě), nebo nulový.*

Jako okamžitý důsledek definice dostaneme vlastnost, že pro libovolnou geodetiku musí platit, že $|\dot{\mathbf{c}}|$ je konstantní. Platí totiž
$$\frac{d}{dt}(|\dot{\mathbf{c}}|^2) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) = 2\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}.$$
Ale $\dot{\mathbf{c}}$ leží v tečné rovině a $\ddot{\mathbf{c}}$ je na ní kolmé.

Pro každou geodetiku je tedy možné změnit parametrizaci tak, aby výsledkem byla geodetika parametrizovaná obloukem. Stačí použít substituci $t = a\tau$ pro vhodnou konstantu a. Vektor $\ddot{\mathbf{c}}$ se při této změně parametrizace jen vynásobí konstantou a zůstane tedy kolmý k ploše. Výsledná křivka po změně parametrizace je tedy opět geodetika.

Věta 2.7.2 *Křivka na ploše je geodetika právě když je její geodetická křivost v každém bodě nulová.*

*Důkaz.*Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná obloukem a že je obsažena celá v jedné mapě. Označme jako obvykle $\mathbf{N}$ jednotkovou normálu k ploše. Pak
$$\kappa_g = \ddot{\mathbf{c}} \cdot (\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{c}}).$$

Je-li $\ddot{\mathbf{c}}$ kolmé na plochu, je kolmé i na $\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{c}}$ a $\kappa_g = 0$.

Je-li naopak $\kappa_g = 0$, je $\ddot{\mathbf{c}}$ kolmé na $\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{c}}$. Ale už víme, že $\ddot{\mathbf{c}}$ je kolmé na $\dot{\mathbf{c}}$. Je tedy nutně $\ddot{\mathbf{c}}$ kolmé na tečnou rovinu, tedy i na plochu. □

Nejjednodušší příklady geodetiky se získají pomocí normálových řezů.

Věta 2.7.3 *(1) Předpokládejme, že je křivka* $\mathbf{c}$ *dána jako průnik roviny* Π *a plochy* S *a že je parametrizovaná obloukem. Pak její geodetická křivost v daném bodě je nula právě když rovina* Π *obsahuje jednotkovou normálu k ploše v daném bodě.*
(2) Libovolná (část) přímky na ploše je geodetika

Důkaz.
(1) Křivka $\mathbf{c}$ je rovinná křivka, její tečný i normálový vektor leží v rovině Π. Její geodetická křivost daném bodě je nula právě když normálvý vektor křivky má stejný směr jako jednotková normála $\mathbf{N}$ k ploše. To nastane právě když rovina Π obsahuje $\mathbf{N}$.
(2) Existuje paramaterizace $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou konstantní vektory. Pak zřejmě $\ddot{\mathbf{c}} = 0$. □

Příklad 2.7.4 *(1) Velké kružnice na sféře (tj. průniky s rovinou, která prochází středem sféry) jsou geodetiky. Rovina, která prochází středem je zřejmě v každém bodě řezu kolmá na plochu (tj. na její tečnou rovinu). Velké kružnice jsou tedy normálové řezy, a tudíž geodetiky.*
(2) Je-li S *rotační plocha, pak jsou všechny poledníky normálové řezy, a tudíž geodetiky. Co se týče rovnoběžek, ty jsou normálové řezy v tom případě, když příslušná rovina řezu obsahuje normálu. To nastane zřejmě tehdy, když jde o kritický bod funkce* $x = f(u)$.

2.7.1 Rovnice pro geodetiky.

Věta 2.7.5 *Křivka* $\mathbf{c}$ *na ploše* S *je geodetika právě když pro každou část křivky* $\mathbf{c} = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ *obsažené v jedné mapě* $\mathbf{p}$ *plochy* S *jsou splněny následující rovnice*

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2),$$

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2),$$

kde E, F, G *jsou koeficienty první fundamentální formy.*
Tato soustava rovnic se nazývá rovnice pro geodetiky.

Důkaz.
Předpokládejme, že křivka $\mathbf{c}$ je křivka na ploše zadané pomocí parametrizace $\mathbf{p}$, tj. $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, kde $(u(t), v(t))$ je odpovídající křivka v prostoru parametrů. Derivace podle promměné t budeme označovat tečkou. Křivka $\mathbf{c}$ je geodetika právě když v každém bodě křivky je vektor $\ddot{\mathbf{c}}$ kolmý na vektory $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$.
Tečný vektor $\dot{\mathbf{c}}$ má ve zvolené mapě souřadnice $(\dot{u}, \dot{v})$, tj. $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v}$.

Dostaneme tedy dvě nutné a postačující podmínky

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_u\dot{u}+\mathbf{p}_v\dot{v})\right)\cdot\mathbf{p}_u=0,$$

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_u\dot{u}+\mathbf{p}_v\dot{v})\right)\cdot\mathbf{p}_v=0.$$

Ukážeme, že tyto dvě rovnice jsou ekvivalentní s dvěma rovnicemi v tvrzení věty. První rovnici upravíme takto.

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_u\dot{u}+\mathbf{p}_v\dot{v})\right)\cdot\mathbf{p}_u=$$

$$=\frac{d}{dt}\left((\mathbf{p}_u\dot{u}+\mathbf{p}_v\dot{v})\cdot\mathbf{p}_u\right)-(\mathbf{p}_u\dot{u}+\mathbf{p}_v\dot{v})\frac{d\mathbf{p}_u}{dt}=$$

$$=\frac{d}{dt}(E\dot{u}+F\dot{v})-(\mathbf{p}_u\dot{u}+\mathbf{p}_v\dot{v})\cdot(\mathbf{p}_{uu}\dot{u}+\mathbf{p}_{uv}\dot{v})=$$

$$=\frac{d}{dt}(E\dot{u}+F\dot{v})-\left(\dot{u}^2(\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_{uu})+\dot{u}\dot{v}(\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_{uv}+\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{p}_{uu})+\dot{v}^2(\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{p}_{uv})\right).$$

Nyní stačí rozepsat

$$E_u=(\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_u)_u=2\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_{uu},$$

$$F_u=(\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_v)_u=\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{p}_{uu}+\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_{uv},$$

$$G_u=(\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{p}_v)_u=2\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{p}_{uv}.$$

Dosazením dostaneme první rovnici pro geodetiku ve znění věty.

Druhá rovnice se odvodí přesně stejně. □

Rovnice pro geodetiky tvoří soustavu dvou obyčejných nelinárních rovnice druhého řádu. Takovéto rovnice se velmi obtížně dají řešit. Existují ale věty o existenci a jednoznačnosti řešení pro takovéto soustavy.

Věta 2.7.6 *Je-li* $\mathbf{v}$ *jednotkový tečný vektor v bodě P plochy S, pak existuje jediná geodetika parametrizovaná obloukem, která prochází bodem P a jejíž tečný vektor v tomto bodě je vektor* $\mathbf{v}$.

Důkaz.

Rovnice pro parametrický popis geodetiky $(u(t),v(t))$ v dané mapě mají tvar

$$\ddot{u}=f(u,v,\dot{u},\dot{v});\;\ddot{v}=g(u,v,\dot{u},\dot{v})$$

kde f,g jsou hladké funkce čtyř proměnných. Základní věty o řešení této soustavy říkají, že pro každou čtveřici čísel a,b,c,d a každou hodnotu t_0 proměnné t existuje $\varepsilon>0$ a řešení $(u(t),v(t))$ soustavy na intervalu $|t-t_0|<\varepsilon$, splňující počáteční podmínky

$$u(t_0)=a,v(t_0)=b,\dot{u}(t_0)=c,\dot{v}(t_0)=d.$$

Navíc, libovolná taková dvě řešení se rovnají v jistém okolí bodu t_0.

Zadání jednotkového tečného vektoru odpovídá zadání počátečních podmínek pro tuto soustavu. $\square$

Jako příklady můžeme pomocí této věty odvodit tvar všech geodetik v rovině či na sféře. V prvním případě jsou to všechny přímky, v druhém všechny hlavní kružnice.

Důsledek 2.7.7 *Libovolná isometrie převádí geodetiky na geodetiky*

Příklad: Ověřte, že geodetiky na válci jsou šroubovice.

Ty vlastnosti plochy, které závisí jen na první fundamentální formě plochy, se nazývají vnitřními vlastnostmi plochy. Jsou to vlastnosti, které se zachovávají při isometrii. Patří mezi ně Gaussova křivost plochy, ale nepatři sem druhá fundamentální forma, hlavní křivosti, jednotková normála, střední křivost. Tyto vlastnosti semohou měnit v závislosti na vnoření plochy do prostoru.

Vnitřní geometrii plochy tedy můžeme velmi dobře studovat i v prostoru parametru, aniž bychom měli plochu někde vnořenou. Stačí mít zadanou první fundamentální formu, tj. funkce E, F, G na prostoru parametrů. Dokonce je možné víc (a to je jeden z důležitých objevů Riemanna pro geometrii). Nemusíme trvat na tom, že budeme studovat jenom vnořené plochy, resp. pracovat s jejich parametrizacemi a příslušnou první fundamentální formou. Je možné přímo vzít libovolnou otevřenou podmnožinu $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, na ní si zvolit první fundamentální formu tak, aby v každém bodě zadávala skalární součin a studovat vlastnosti takovéto geometrie. Specielně, víme co jsou v takovéto geometrii geodetiky. Příkladem může být Poincarého model hyperbolické geometrie.

Uvažujme horní polorovinu $\mathcal{O} = \{(x, y)|y > 0\}$ a definujme první fundamentální formu na $\mathcal{O}$ takto:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{y^2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

Pak geodetiky v této geometrii jsou buď přímky kolmé na osu x, nebo polokružnice, které mají střed na ose x. Pokud v této geometrii prohlásíme geodetiky za přímky, budou platit všechny Eukleidovy axiomy s výjimkou pátého. Jedním bodem je možné vést nekonečně mnoho rovnoběžek s danou přímkou.

Zajímavou vlastností této geometrie je, že ji není možné vnořit do Eukleidovského trojrozměrného prostoru, tj. neexistuje isometrie této geometrie na plochu v $\mathbb{R}^3$. Přitom Gaussova křivost této geometrie je identicky rovna -1. Přesto tuto geometrii nelze isometricky zobrazit na pseudosféru. Je ale možné najít izometrii části této geometrie (poloroviny $y > 1$) na pseudosféru. Pseudosféra je tedy neúplným modelem hyperbolické geometrie.

$\square$

(2) Stačí použít vztah $(G^{1/2})_u = \frac{1}{2}G^{-1/2}G_u$.

10. přednáška

2.7.2 Geodetiky jako nejkratší spojnice bodů.

Název geodetika naznačuje, že se jedná o křivku, která minimizuje vzdálenost mezi svými různými body. Nyní si zkusíme rozmyslet, jestli to tak opravdu je. Úloha hledat nejkratší spojnici dvou bodů na ploše je typická úloha tzv. variačního počtu. Variační počet je velmi stará, klasická matematická disciplina, která zkoumá extrémy funkcionálů, tj. extrémy funkcí na prostorech funkcí, na (otevřených podmnožinách v) nekonečně dimensionálních vektorových prostorech. V našem případě bude zadaným funkcionálem zobrazení, které dané křivce přiřadí její délku. Trochu složitější je říct, na jakém prostoru budeme tento funcionál uvažovat. To rozeberem během důkazu následující věty.

Předpokládejme, že máme dánu plochu S, která je obrazem mapy $\mathbf{p}$ a zvolme na S dva body P, Q. Řekneme, že křivka $\mathbf{c}$ ležící na ploše S spojuje body P a Q, pokud existují čísla a, b; $a < b$ z definičního oboru křivky $\mathbf{c}$ takové, že $\mathbf{c}(a) = P, \mathbf{c}(b) = Q$. Délkou této spojnici definujeme jako integrál

$$\ell(\mathbf{c}) = \int_a^b |\dot{\mathbf{c}}|\, dt.$$

Nejkratší spojnicí bodů P, Q na ploše S je křivka $\mathbf{c}$ na S, která spojuje body P a Q a která má nejmenší délku mezi všemi křivkami, spojujícími tyto dva body.

Věta 2.7.8 *Je-li* $\mathbf{c}$ *nejkratší spojnicí bodů* $P = \mathbf{c}(a)$ *a* $Q = \mathbf{c}(b)$, *pak je* $\mathbf{c}$ *geodetika na intervalu* (a, b).

Důkaz.

Předpokládejme, že je parametrizace $\mathbf{c}$ plochy S definována na oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, funkce E, F, G jsou koeficienty příslušné první fundamentální formy. Místo křivek na ploše budeme uvažovat křivky $\gamma = (u(t), v(t))$ v prostoru parametrů $\mathcal{O}$ na intervalu $< a, b >$. Jejich délku $\ell(\gamma)$ budeme definovat předpisem

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g}dt;\ g = g(t) = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

kde $E = E(u(t), v(t))$ a podobně pro F a G.

Nechť $\mathbf{c}$ je nejkratší spojnicí bodů $P = \mathbf{c}(a)$ a $Q = \mathbf{c}(b)$ na ploše S. Pak $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$. Označme $\bar{\gamma} = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ odpovídající křivku v $\mathcal{O}$.

Uvažujme nekonečně dimensionální vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \{\gamma_0 = (f(t), g(t)) | f, g \in \mathcal{C}^\infty(< a, b >),\ f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0\}$$

a jeho (otevřenou) podmnožinu $\mathcal{U}$ těch prvků, pro které křivka $\gamma = \bar{\gamma} + \gamma_0$ leží celá v $\mathcal{O}$. Pak $\bar{\gamma}$ je minimum funkcionálu $\ell(\gamma)$ pro γ v této otevřené podmnožině $\mathcal{U}$.

Pro libovolné $\gamma_0 = (f, g) \in \mathcal{U}$ a pro dost malé ε je $\gamma = \bar{\gamma} + \tau\gamma_0$ v $\mathcal{U}$ pro libovolné $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Podle našeho předpokladu má funkce

$$\varphi(\tau) = \ell(\bar{\gamma} + \tau\gamma_0)$$

minimum v bodě $\tau = 0$. Tedy $\varphi'(0) = 0$. Derivaci vypočítáme derivací pod integračním znamením.

$$\varphi'(\tau) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\tau}(g^{\frac{1}{2}})dt = \int_a^b \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g}{\partial\tau}dt.$$

Vzhledem k tomu, že $E = E(\bar{u}(t) + \tau f(t), \bar{v}(t) + \tau g(t))$ (a podobně pro F, G), dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial\tau} = (E_u f + E_v g)\dot{\bar{u}}^2 + 2(F_u f + F_v g)\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + (G_u f + G_v g)\dot{\bar{v}}^2 + 2(E\dot{\bar{u}}\dot{f} + F(\dot{\bar{v}}\dot{g} + \dot{\bar{u}}\dot{g}) + G\dot{\bar{u}}\dot{g}) =$$

$$= (E_u\dot{\bar{u}}^2 + 2F_u\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + G_u\dot{\bar{v}}^2)f + (E_v\dot{\bar{u}}^2 + 2F_v\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + G_v\dot{\bar{v}}^2)g + 2(E\dot{\bar{u}} + F\dot{\bar{v}})\dot{f} + 2(F\dot{\bar{u}} + G\dot{\bar{v}})\dot{g}.$$

Použijeme-li per partes, dostaneme

$$\int_a^b \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g}{\partial\tau}dt = \int_a^b [U(t)f(t) + V(t)g(t)]dt,$$

kde

$$U = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}}(E_u\dot{\bar{u}}^2 + 2F_u\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + G_u\dot{\bar{v}}^2) - \frac{d}{dt}\left\{g^{-\frac{1}{2}}(E\dot{\bar{u}} + F\dot{\bar{v}})\right\},$$

$$v = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}}(E_v\dot{\bar{u}}^2 + 2F_v\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + G_v\dot{\bar{v}}^2) - \frac{d}{dt}\left\{g^{-\frac{1}{2}}(F\dot{\bar{u}} + G\dot{\bar{v}})\right\}.$$

Hraniční člen při per partes vypadne díky tomu, že funkce f, g mají v koncových bodech nulové hodnoty.

Nyní použijeme následující drobné tvrzení (jehož důkaz necháme laskavému čtenáři jako drobnou, nepříliš těžkou úlohu z analýzy):
Předpokládejme, že $h(t)$ je hladká funkce na $< a, b >$ a že platí $\int_a^b hf dt = 0$ pro každou hladkou funkci $f(t)$ na $< a, b >$, která je rovna nule v bodech a, b. Pak h je identicky nulová funkce na $< a, b >$.

Z tohoto tvrzení ihned plyne, že výše definované funkce U i V jsou identicky nulové funkce na $< a, b >$. Protože předpokládáme, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná obloukem, platí pro $\gamma = \bar{\gamma}$ vztah $|\dot{\bar{\gamma}}|^2 = g(0, t) \equiv= 1$ na intervalu (a, b). Dostali jsme tedy, že funkce $\bar{u}, \bar{v}$ splňují obě rovnice pro geodetiky. $\square$

2.8 Minimální plochy.

Geodetiky jsou nejkratší spojnice mezi dvěma body. Podobnou úlohu ve vyšší dimenzi je možno zformulovat takto. Předpokládejme, že máme zadánu v prostoru křivku **c**. Tzv. Plateauův problém znamená to, že hledáme plochu v $\mathbb{R}^3$ tak, aby jejím okrajem byla zvolená křivka **c** a aby měla co nejmenší povrch.

Tato úloha se opět dá řešit metodami variačního počtu. Podobně jako pro geodetiky je možné ukázat, že je-li **p** řešení Plateauova problému, pak střední křivost H příslušné plochy je nulová. To vede k následující definici.

Definice 2.8.1 *Řekneme, že plocha* **c** *je minimální plocha, pokud je její střední křivost nulová na jejím definičním oboru.*

Příklad 2.8.2 *(1)*

Nejjednodušší minimální plocha je rovina. Její druhá fundamentální forma je triviální a všechny křivosti jsou nulové.

(2)

Křivka zadaná jako graf funkce $x = x(z)$ tvaru $x = \frac{1}{a}\cosh az$ se nazývá katenoida. (Nakreslete si její graf!). Rotací kolem osy z dostaneme rotační plochu s parametrickým popisem (položíme $a = 1$).

$$\mathbf{p}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u),\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Vypočtěte koeficienty první a druhé fundamentální formy a ukaže, že její střední křivost je nulová ($E = G = \cosh^2 u, F = 0; L = -1, M = 0, N = 1); K = \cosh^{-4} u, H = 0.$)

(3)

Helikoid (točité schodiště) je plocha popsaná parametricky takto:

$$\mathbf{p}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \alpha u);\ v \in (0, \infty), v \in \mathbb{R};\ \alpha > 0.$$

(Nakreslete si obrázek!) Vypočtěte koeficienty první a druhé fundamentální formy

$$(E = \alpha^2 + v^2, F = 0, G = 1; L = N = 0, M = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}}.$$

a ukažte, že střední křivost této plochy je nulová.

2.8.1 Gaussova a Codazzi-Mainardova rovnice.

Pro křivky jsem si ukázali, že křivost a torze jsou nezávislé na parametrizaci (jsou to tedy vlastnosti křivky jako množiny bodů v $\mathbb{R}^3$). Navíc základní věta z teorie křivek říkala, že křivost a torze určují křivku jednoznačně (až na shodnost) Navíc jediné omezující podmínky pro ně jsou, že křivost je kladná funkce. Přesněji řečeno, pro každou kladnou funkci $\kappa > 0$ a libovolnou funkci τ existuje křivka, jejichž křivost, resp. torze se rovnají κ, resp. τ.

Chceme si nyní rozmyslet, jestli je možné podobné tvrzení dokázat také pro plochy. Tady je zřejmé, že vhodnými kandidáty na invarianty popisujícími plochu, jsou první a druhá fundamentální forma. Theorem egregium ale říká, že funkce $E, F, G; L, M, N$ nemohou být zvoleny libovolně, že musí splňovat složitou diferenciální rovnici. Není při tom jasné, jestli je to jediná podmínka, kterou musí splňovat.

Abychom tyto další podmínky mohli napsat, zavedeme si nové, ekonomičtější označení, které navíc může být používáno i v obecnější situaci (ve vyšších dimenzích). Podrobnější výpočty jen naznačíme a nebudeme je provádět podrobně.

Označení.

Proměnné v prostoru parametrů pznačíme (u_1, u_2), odpovídající parciální derivace označíme jen indexem proměnné

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_i};\ \mathbf{p}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u_i \partial u_j};\ \dots$$

Koeficienty první a druhé fundamentální formy označíme

$$g_{ij} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j;\ (g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \mathcal{F}_I,$$

$$h_{ij} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{ij};\ (h_{ij}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{II}.$$

Inverzní matici k matici (g_{ij}) označíme pomocí zvednutí indexů

$$g^{ij} = \left(g^{-1}\right)_{ij}.$$

Derivace koeficientů první a druhé fundamentální formy (a podobně i pro další funkce) označíme (například)

$$(g_{ij})_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}$$

Podobně jako v důkazu Theoremy egregium, rozložíme druhé parciální derivace zobrazení $\mathbf{p}$ do baze $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{N}\}$ v $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{p}_{ik} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ik} \mathbf{p}_l + h_{ik} \mathbf{N}. \tag{2.8.1}$$

Pokud vynásobíme tuto rovnost skalárně jednotkovou normálou $\mathbf{N}$, je vidět, že koeficienty u $\mathbf{N}$ v rozkladu (2.8.1) jsou opravdu koeficienty h_{ij} 2. fundamentální formy. Koeficienty u derivací $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ jsme označili Γ^l_{ik}, tradičně se tyto koeficienty nazývají Christoffelovy symboly. Můžeme je vypočítat pomocí první fundamentální formy skalárním vynásobením vztahu (2.8.1) vektory $\mathbf{p}_1$, resp. $\mathbf{p}_2$.

$$\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_{ik} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ik}\, g_{lj};\ \Gamma^l_{ik} = \sum_j g^{lj}\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_{ik}.$$

Derivací dostaneme

$$(g_{ij})_k = (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j)k = \mathbf{p}_{ik} \cdot \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_{jk} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{jk} g_{li}$$

$$(g_{ij})_k - (g_{ki})_j + (g_{jk})_i = 2\sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ik} g_{lj},$$

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} g^{lj}[(g_{ij})_k - (g_{ki})_j + (g_{jk})_i].$$

Pomocí Christoffelových symbolů budeme definovat tensor křivosti R^m_{ikl}.

Definice 2.8.3 *Riemannův tensor křivosti* R^m_{ikl} *definujeme takto:*

$$R^m_{ikl} = (\Gamma^m_{ik})_l - (\Gamma^m_{il})_k + \sum_{p=1}^{2} \left(\Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{pl} - \Gamma^p_{il}\Gamma^m_{pk}\right)$$

a

$$R_{ijkl} = \sum_{j=1}^{2} g_{jm} R^m_{ikl}.$$

Poznámka.

Tyto definice vypadají stejně i ve vyšších dimenzích (příslušná partie matematiky se nazývá Riemannova geometrii), i v jiné signatuře (v signatuře $(1, n)$, tj. v Minkovského geometrii, jsou odpovídající formule základem Einsteinovy obecné teorie relativity).

V dimenzi dvě je ale situace velmi jednoduchá. Z definice tensoru křivosti R_{ijkl} snadno najdeme jisté symetrie při permutaci indexů tensoru R_{ijkl}. Obecně je struktura tensoru křivosti složitá. Pro plochy v prostoru závisí tensor křivosti jen na jediné funkci - na Gaussově tensoru křivosti K. Zde je totiž jen několik komponent nenulových:

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} = \det(h_{ij}) = LN - M^2,$$

a všechny ostatní komponenty pro jiné permutace indexů jsou nulové. Tedy

$$R_{1212} = \det(g_{ij})\, K = (EG - F^2)K.$$

Hledané podmínky svazující koeficienty první a druhé fundamentální formy je pak možné odvodit ze záměnnosti paricálních derivací jednotlivých složek parametrizace plochy, resp. jednotkové normály.

Věta 2.8.4 (Gauss, Codazzi-Mainardi) *(1) (Gauss)*
Podmínka $\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_{ikj}$ *je ekvivalentní rovnici*

$$R^m_{ijk} = \sum_{l=1}^{2}(h_{ij}h_{kl} - h_{ik}h_{jl})g^{lm}$$

(2) (Codazzi-Mainardi)

$$\sum_{l=1}^{2}(\Gamma^l_{ij}h_{lk} - \Gamma^l_{ik}h_{lj}) + (h_{ij})_k - (h_{ik})_j = 0.$$

Tuto větu už si dokazovat nebudeme, stejné to je i s násladujícím fundamentálním tvrzením, které říká, že další žádné relace pro koeficienty první a druhé fundamentální formy již nejsou.

---

11. přednáška

2.9 Základní věta teorie ploch.

Zde je slíbená fundamentální věta o plochách.

Věta 2.9.1 (Základní věta teorie ploch.) *(1)*
Nechť $\mathbf{p}_1$ *a* $\mathbf{p}_2$ *jsou dvě mapy se stejnými prvními a druhými fundamentální formami na otevřené množině* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$*. Pak existuje shodnost* $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tak, že* $\mathbf{p}_2 = S \circ \mathbf{p}_1$.
(2)
Předpokládejme, že funkce $E, F, G; L, M, N$ *na konvexní množině splňují* $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$, *Gaussovu a Codazzi-Mainardiovu rovnici. Pak existuje parametrická plocha* $\mathbf{p}$ *na* $\mathcal{O}$ *takové, že koeficienty odpovídající první a druhé fundamentální formy jsou zadané funkce.*

Tuto větu dokazovat nebudeme.

2.10 Gauss-Bonnetova věta.

Gauss-Bonnetova věta patří k nejhezčím a nejhlubším výsledkům v teorii ploch. Navíc je to prototyp základních vět ve vyšších dimenzích, které spolu svazují geometrické a topologické vlastnosti ploch.

Nejjednodušší verze této věty se týká jednoduchých uzavřených křivek na plochách.

2.10.1 Základní verze Gauss-Bonnetovy věty.

Definice 2.10.1 *Křivka $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ na parametrické ploše $\mathbf{p}(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{O}$ se nazývá jednoduchá křivka s periodou a pokud její parametrický popis $(u(t), v(t))$ je jednoduchá křivka s periodou a v $\mathbb{R}^2$ a pokud její vnitřek Int $\mathcal{O}$ leží v $\mathcal{O}$.*

Křivka $\mathbf{c}(t), t \in I$ se nazývá kladně orientovaná, pokud je totéž pravda pro křivku $\gamma(t) = (u(t), v(t)), t \in I$ v rovině.

Věta 2.10.2 *Nechť $\mathbf{c}(s)$ je jednoduchá křivka s periodoou a na parametrické ploše $\mathbf{p}(u, v), (u, v) \in \mathcal{O}$, která je kladně orientovaná a parametrizovaná obloukem.*

Pak

$$\int_{\mathrm{Int}\,\mathbf{c}} K\, dS = 2\pi - \int_0^a k_g\, ds,$$

kde k_g je geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ a K je Gaussova křivost plochy $\mathbf{p}$.

Důkaz.

Stejně jako v důkazu Theoremy egregium, zvolme basi $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ tečné roviny v každém bodě plochy tak, že $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{N}\}$ je kladně orientovaná ortonormální baze v $\mathbb{R}^3$.

V důkazu Věty 2.6.5 jsme si ukázali, že

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_v)_u - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_u)_v = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Upravujme postupně

$$I := \int_{\mathrm{Int}\,\mathbf{c}} K\, dS = \int_{\mathrm{Int}\,\mathbf{c}} \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\, dS =$$

$$\int_{\mathrm{Int}\,\gamma} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_{\mathrm{Int}\,\gamma} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_v)_u - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_u)_v\, du\, dv$$

Z Greenovy věty plyne, že

$$I = \int_0^a (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_u) du + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}_v) dv = \int_0^a \mathbf{e} \cdot (\mathbf{f}_u \dot{u} + \mathbf{f}_v \dot{v}) ds = \int_0^a \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{f}} ds.$$

Označme nyní $\theta(s)$ úhel, který svírá jednotkový tečný vektor $\dot{\mathbf{c}}$ ke křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(s)$ s vektorem $\mathbf{e}$ v tomtéž bodě. Přesněji, úhel θ je definován vztahem

$$\dot{\mathbf{c}} = \cos\theta \mathbf{e} + \sin\theta \mathbf{f}. \tag{2.10.1}$$

Pak

$$\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{c}} = -\sin\theta \mathbf{e} + \cos\theta \mathbf{f},$$

$$\ddot{\mathbf{c}} = \cos\theta\dot{\mathbf{e}} + \sin\theta\dot{\mathbf{f}} + \dot{\theta}(-\sin\theta\mathbf{e} + \cos\theta\mathbf{f}).$$

Geodetickou křivost k_g je možno vypočíst pomocí vztahu $k_g = (\mathbf{N}\times\dot{\mathbf{c}})\cdot\ddot{\mathbf{c}}$. Po dosazení dostaneme

$$k_g = \dot{\theta}(-\sin\theta\mathbf{e}+\cos\theta\mathbf{f})(-\sin\theta\mathbf{e}+\cos\theta\mathbf{f})+(\cos\theta\dot{\mathbf{e}}+\sin\theta\dot{\mathbf{f}})(-\sin\theta\mathbf{e}+\cos\theta\mathbf{f}) =$$

$$= \dot{\theta} + \cos^2\theta(\dot{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{f}) - \sin^2\theta(\dot{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{e}) + \sin\theta\cos\theta(\dot{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{f} - \dot{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{e}).$$

Užitím vztahů

$$\mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{f}} = 0, \mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{f}} + \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{e}} = 0$$

dostaneme

$$k_g = \dot{\theta} - \mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{f}},$$

$$I = \int_0^a (\dot{\theta} - k_g), ds.$$

Zbývá tedy dokázat vztah

$$\int_0^a \dot{\theta}\, ds = 2\pi.$$

Tvrzení je mimořádně názorné. Integrál se rovná přírůstku úhlu θ podél křivky mezi počátečním a koncovým bodem. Nakreslíte-li si obrázek jednoduché křivky, je zřejmé že úhel přiroste při oběhu křivky o 2π.

Trochu přesnější odůvodnění lze založit na názorné představě, že křivku $\mathbf{c}$ můžeme hladce deformovat do malé kružnice (tato vlastnost bývá často charakteristická vlastnost tzv. jednoduše souvislých oblastí a bylo by třeba ukázat, že vnitřek jednoduché uzavřené křivky je jednoduše souvislá oblast - to už ale dokazovat nebudeme). Při deformaci se hodnota integrálu z $\dot{\theta}$ nemění, protože výsledná hodnota je celočíselná a přitom se spojitě mění při deformaci. Musí tedy být konstatní. Ale hodnota integrálu pro kružnici je evidentně 2π. □

2.10.2 Gauss-Bonnetova věta pro křivočaré mnohoúhelníky.

Chtěli bychom Gauss-Bonnetovu větu zobecnit na případ, kdy okraj plochy nemusí být hladká křivka, ale může být jen po částech hladká křivka. To pak umožňuje počítat velikosti ploch trojúhelníků a mnohoúhelníků na plochách. Nejdříve si zavedeme potřebné definice.

Definice 2.10.3 *Řekneme, že křivka $\gamma(t) = (u(t), v(t)), t \in \mathbb{R}$ je po částech hladká jednoduchá křivka s periodou a, pokud existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j = a$ intervalu $< 0, a >$ takové, že platí:*
(i) $\gamma(t) = \gamma(t')$ právě když $t' - t$ je celočíselný násobek a;
(ii) γ je hladká a regulární na intervalech $(t_0, t_1), \ldots, (t_{j-1}, t_j)$;
(iii) existují jednostranné derivace $\gamma'_-(t_i)$ a $\gamma'_+(t_i)$ pro všechna $i = 0, \ldots, n$, jsou nenulové a nejsou rovnoběžné.

Křivka γ je Jordanova křivka, a tak můžeme mluvit opět o jejím vnitřku a vnějšku. Definici kladně orientované jednoduché křivky s periodou a lze zřejmě snadno rozšířit i na po částech hladký případ.

Množinu $\mathcal{M} = \gamma \cup \mathrm{Int}(\gamma)$ budeme nazývat křivočarý mnohoúhleník, body $\gamma(t_i)$ se nazývají vrcholy tohoto mnohoúhleníka a křivka γ zúžená na dílčí intervaly dělení se nazývá hranou mnohoúhelníka. Křivka γ se nazývá obvod mnohoúhleníka.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{p}(u,v)$ je regulární parametrická plocha na $\mathcal{O}$ a $\gamma \cup Int(\gamma)$ je křivočarý mnohoúhelník v $\mathcal{O}$. Vnitřek $Int(\mathbf{c})$ křivky $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \gamma$ definujeme jako obraz $\mathbf{p}(Int\,\gamma)$. Křivku $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \gamma$ budeme nazývat obvodem křivočarého mnohoúhelníka na ploše $\mathbf{p}$ a množinu $< \mathbf{c} > \cup\, Int\,\mathbf{c}$ nazveme křivočarým mnohoúhelníkem na $\mathbf{p}$. Jednostranné derivace $\mathbf{c}'_-(t_i)$ a $\mathbf{c}'_+(t_i)$ pak existují a nejsou rovnoběžné. Zvolme si opět ortonormální bazi $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ v tečné rovině v příslušném bodě a definujme úhly $\theta_i^\pm$ pomocí vztahu (2.10.1). Označme dále

$$\delta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-; \alpha_i = \pi - \delta_i.$$

Úhly δ_i, resp. α_i jsou vnější, resp. vnitřní úhly u i-tého vrcholu křivočarého mnohoúhelníka na dané ploše. Tyto úhly jsou definovány modulo celočíselné násobky 2π. Budeme předpokládat, že $\alpha_i \in (0, 2\pi)$ pro všechna i.

Řekneme, že je křivočarý mnohoúhleník na ploše parametrizovaný obloukem, pokud to platí pro všechny křivky na dílčích intervalech dělení, tj. mimo vrcholy mnohoúhelníka.

Věta 2.10.4 (Gauss-Bonnet pro křivočaré mnohoúhelníky.) *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}$ *je obvod křivočarého mnohoúhelníka na ploše* $\mathbf{p}$ *s periodou a a s vnitřními úhly* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *u svých vrcholů. Pak*

$$\int_{Int\,\mathbf{c}} K\,dS = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \int_0^a k_g\,ds,$$

Důkaz.

Důkaz věty je stejný jako pro větu předchozí. Je třeba si jen rozmyslet, čemu se rovná $\int_0^a \dot\theta\,ds$, ukázat, že

$$\int_0^a \dot\theta\,ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

To je snadno vidět pokud si v každém vrcholu křivku 'zaoblíme', tj. nahradíme ji v malém okolí $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$ bodu t_i hladkou křivkou, jejíž tečna bude svírat úhel $\tilde\theta$. Je intuitivně zřejmé (a lehké si rozmyslet přesně), že

$$\int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} \dot{\tilde\theta}\,ds = \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} \dot\theta\,ds + \delta_i.$$

Znamená to, že úhel se nemění postupně a hladce, ale skočí o velikost δ_i v bodě t_i. Také je to možné formulovat tak, že geodetická křivost není hladká funkce, ale má nekonečné příspěvky v bodech t_i, které při integraci přispějí velikostí δ_i. (Toto poslední konstatování zní velmi nepřesně, ale je elegantně a přesně formalizovánou v teorii zobecněných funkcí, neboli distribucí, které možná v budoucnosti ještě potkáte.) □

Důsledek 2.10.5 *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}$ *je křivočarý mnohoúhelník na ploše* $\mathbf{p}$ *s periodou a a s vnitřními úhly* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *u svých vrcholů a že jeho hrany jsou jsou geodetiky. Pak*

$$\int_{Int\, \mathbf{c}} K\, dS = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi.$$

Domácí cvičení.

Rozmyslete si, že:

(1) v rovině je $K = 0$, tedy dostaneme

$$\sum_{i-1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi.$$

(2) Sféra má Gaussovu křivost rovnu 1. Pro křivočaré trojúhelníky ABC na sféře, jejichž hrany jsou geoedetiky, dostaneme tedy

$$V(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

kde α, β a γ jsou úhly při příslušných vrcholech.

(3) Pseudosféra má Gaussovu křivost rovnu -1. Pro křivočaré trojúhelníky ABC na sféře, jejichž hrany jsou geoedetiky, dostaneme tedy

$$V(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

kde α, β a γ jsou úhly při příslušných vrcholech.

2.10.3 Gaussova věta pro kompaktní plochy.

Nejdříve si zavedeme zajímavý invariant, spojený s kompaktní plochou, kterému se říká Eulerova charakteristika. Ten se definuje pomocí triangulace plochy.

Definice 2.10.6 *Nechť* S *je kompaktní plocha. Její triangulace je soubor křivočarých mnohoúhelníků* $\mathcal{M}_i, i = 1, \ldots, k$ *na* S *s následujícími vlastnostmi:*

(1) existuje atlas na S *takový, že každý mnohoúhelník* $\mathcal{M}_i$ *se vejde i se svým obvodem do některé mapy tohoto atlasu;*

(2) $S \subset \cup_{i-1}^{k} \mathcal{M}_i$;

(3) pro $i \neq j$ je $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ buď prázdná množina, nebo společná hrana, nebo společný vrchol;
(4) Každá hrana triangulace je hrana právě dvou mnohoúhelníků.

Eulerova charakteristika plochy S je číslo, určené následujícím způsobem: zvolme trinagulaci S a označme V počet všech vrcholů, H počet všech hran, a S počet všech mnohoůhelníků (stěn). Pak Eulerova charakteristika χ se definuje vztahem

$$\chi = V - H + S.$$

Příklad 2.10.7 *Triangulaci sféry je možné zvolit tím, že si zadáme tři hlavní kružnice - rovník a dvě hlavním kružnice, na sebe kolmé, obě procházejícíma oběma póly. Tyto tři kružnice určují triangulaci sféry. Ta má 6 vrcholů,12 hran a 8 stěn, a příslušná Eulerova charakteristika je rovna dvěma.*

Zvolme si jinou trinagulaci. Například vezměme pravidlený čtyřstěn, a nafoukněme a zaobleme ho na sféru. Tato trinagulace má 4 *vrcholy, šest společných hran a* 4 *vrcholy. Eulerova charakteristika je opět rovna* 2.

Věta 2.10.8 (Gauss-Bonnetova věta.) *Nechť S je kompaktní plocha, pak*

$$\int_S K\,dS = 2\pi\chi,$$

kde K je Gaussova křivost a χ je Eulerova charakteristika S.

Důsledek 2.10.9
(1) Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace.
(2) $\int_S K\,dS$ se neměnní při hladké deformaci kompaktní plochy.

To jsou již snadné důsledky. Integrál z Gaussovy křivosti zřejmě nezávisí na volbě trinagulace, tedy totéž je pravda pro Eulerovu charakteristíku.

Při hladké deformaci plochy se triangulace deformuje, ale její Eulerova charakteristika se zřejmě neměnní. Totéž tedy platí o integrálu z Gaussovy křivosti.

Nyní si Gauss-Bonnetovu větu dokážeme.

Důkaz.

Zvolíme si atlas na S tak, aby jednotlivé mnohoúhelníky byly obsaženy v nějaké mapě. Pro n_j-úhleník $\mathcal{M}_j$, jehož obvod je popsán křivkou $\mathbf{c}_j$ s periodou a_j a jehož vnitřní úhly při jednotlivých vrcholech jsou α_i^j pak platí

$$\int_{\mathrm{Int}\,\mathbf{c}_j} K\,dS = \sum_i \alpha_i^j - (n_j - 2)\pi - \int_0^{a_j} k_g\,ds,$$

Integrál $\int_S K\,dS$ je součtem všech levých stran pro všechny mnohoúhelníky triangulace.

Součet všech prvních sčítanců na pravé straně přeuspořádáme tak, že budeme nejprve sčítat všechny úhly při daném vrcholu Tento součet je 2π. Pak sečteme přes všechny vrcholy triangulace a dostanem $2\pi V$.

Součet všech sčítanců tvaru $-n_i\pi$ je $-2\pi H$, protože se každá hrana triangulace vyskytne právě dvakrát jako hrana některého z mnohoúhelníků.

Součet členů tvaru 2π je zřejmě $2\pi S$.

Konečně součet členů $-\int_0^{a_i} k_g\, ds$ je nula, protože se vyskytne příslušná křivka dvakrát jako hrana mnohoúhelníka, pokaždé s opačnou orientací. Výsledné integrály budou opačné a odečtou se!

Tím je věta dokázána.

□

2.11 Příklady.

(1) Vypočítejte pro šroubovici $\mathbf{c}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ Frenetovu bazi, křivost a torzi.
Výsledek:

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}(-a\sin t, a\cos t, b)};$$
$$e_2(t) = (-\cos t, -\sin t, 0);$$
$$e_3(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}(b\sin t, -b\cos t, a)};$$
$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2+b^2};$$
$$\tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2};$$

(2) Prostorová kubika je křivka $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3)$. Vypočítejte Frenetovu bazi.
Výsledek:

$$e_1(t) = \frac{1}{1+4t^2+9t^4}(1, 2t, 3t^2);$$
$$e_2(t) = \frac{1}{(1+4t^2+9t^4)(1+9t^2+9t^4)}(-9t^3-2t, -9t^4+1, 6t^3+3t);$$
$$e_3(t) = \frac{1}{1+9t^2+9t^4}(3t^2, -3t, 1);$$

(3) Torus je plocha parametrizovaná takto:

$$\mathbf{p}(u,v) = ((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v).$$

Vypočtěte hlavní křivosti.
Výsledek:

$$\lambda_1 = \frac{b\cos v)}{b(a+b\cos v)};\ \lambda_2 = \frac{-1}{b}.$$

(4) Šroubová plocha je dána parametrizací

$$\mathbf{p}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

Vypočítejte hlavní křivosti, Gaussovu křivost a střední křivost.
Výsledek:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{1+v^2};\ H = 0;\ K = -\frac{1}{(1+v^2)^2}.$$