Obsah

I. Homotopická teorie

1. Homotopie, homotopická kategorie, slabá ekvivalence
2. Retrakce, deformace, homotopické rozšíření, kofibrace
3. Cylindr zobrazení, H-prostory
4. H-prostory, H-grupy, smyčková grupa
5. H-kogrupa, suspenze, H-kogrupa duální ke smyčkovému prostoru
6. Fundamentální grupoid
7. Fundamentální grupa, příklad $\pi_1(S^1)$
8. Simpliciální komplexy, polyhedry, fundamentální grupy polyheder

II. Homologická teorie

9. Řetězcové komplexy, singulání homologie
10. Řetězcová homotopie, kategorie s modely
11. Homologie simpliciálních komplexů
12. Exaktní posloupnosti – krátké, dlouhé. Svazující homomorfismus, lemma o pěti izomorfismech
13. Mayerova-Vietorisova posloupnost
14. Axiomatická charakterizace homologií

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. Homotopická teorie

Klasifikaci topologických prostorů a spojitých zobrazení až na topologickou ekvivalenci nelze realizovat přímo užitím algebraických funktorů, neboť ty jsou často invariantní vůči spojité deformaci (tzn. charakterizují topologický prostor až na spojitou deformaci). Koncept spojité deformace popíšeme pomocí tzv. homotopie. Objekty homotopické kategorie budou topologické prostory a morfismy budou homotopické třídy zobrazení.

Definice. *Topologický pár* (X, A) je tvořen topologickým prostorem X a jeho podprostorem $A \subset X$. Nerozlišujeme mezi $(X, \emptyset)$ a X. *Podpár* $(X', A') \subset (X, A)$ je charakterizován inkluzemi $X' \subset X$, $A' \subset A$. *Zobrazením topologických párů* $f : (X, A) \to (Y, B)$ rozumíme spojitou funkci $f : X \to Y$ takovou, že $f(A) \subset B$.

Poznámka. Kategorie topologických párů obsahuje jako úplné podkategorie kategorii topologických prostorů ($A \equiv \emptyset$) i kategorii topologických prostorů s význačným bodem (s jednobodovými množinami A).

Pro dvojici (X, A) položme $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$. Buď $X' \subset X$ a předpokládejme, že f_0, $f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ souhlasí na X', tj. $f_0 \restriction X' \equiv f_1 \restriction X'$. Řekneme, že zobrazení f_0, f_1 jsou *homotopická relativně k* X' (zapisujeme $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$), pokud existuje spojité zobrazení $F : (X, A) \times I \to (Y, B)$ s vlastnostmi:

(a) $(\forall x \in X)\ F(x, 0) = f_0(x)$,
(b) $(\forall x \in X)\ F(x, 1) = f_1(x)$,
(c) $(\forall x \in X')\ (\forall t \in I)\ F(x, t) = f_0(x) = f_1(x)$.

V případě $X' = \emptyset$ budeme vynechávat výraz "relativně k X'". Dále

$$(\forall X'' \subset X')\ (f_0 \simeq f_1 \ \operatorname{rel} X' \Rightarrow f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'').$$

Zobrazení se nazývá *triviálně homotopické*, je-li homotopické konstantnímu zobrazení.

Poznámka. Pro $t \in I$ definujme $h_t : (X, A) \to (X, A) \times I$, $h_t(x) = (x, t)$. Pokud $F : f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} X'$, je $F \circ h_0 = f_0$, $F \circ h_1 = f_1$ a $F \circ h_t \restriction X' \equiv f_0 \restriction X'$ $(\forall t \in I)$. Jinak řečeno, $\{F \circ h_t\}_{t \in I}$ je jednoparametrický systém zobrazení $(X, A) \to (Y, B)$ (souhlasících na X') spojitě interpolující $f_0 = F \circ h_0$ a $f_1 = F \circ h_1$.

Příklad. Buď $X = Y = \mathbb{R}^n$. Definujme $f_0(x) = x$ a $f_1(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^n$ (tj. $f_0 = 1_{\mathbb{R}^n}$, $f_1 = \text{const}$). Pro

$$F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n,$$
$$F(x, t) = (1 - t)x,$$

je $F : f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \emptyset$. $\square$

Příklad. Nechť $X = Y = I$. Definujme $f_0(t) = t$ a $f_1(t) = 0$ pro $t \in I$. Pokud je funkce $F : I \times I \to I$ dána předpisem $F(t, t') = (1 - t')t$, je $F : f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \emptyset$. $\square$

Příklad. Nechť $X = Y = E^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\theta},\ 0 \le r \le 1\}$ na $A = B = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}\}$. Buď $f_0 : (E^2, S^1) \to (E^2, S^1)$ identické zobrazení, $f_1 : (E^2, S^1) \to (E^2, S^1)$ reflexe vzhledem k počátku, tj. $f_1(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$. Definujme homotopii $F : f_0 \to f_1$, $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \emptyset$, předpisem $F(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta + t\pi)}$.

Jinou homotopii $F' : f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \emptyset$ lze definovat $F'(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta - t\pi)}$. $\square$

Věta 1.1. *Homotopie relativně k X' je relací ekvivalence na množině zobrazení z (X,A) do (Y,B).*

Důkaz. Reflexivita. Pro $f:(X,A)\to(Y,B)$ definujme $F:f\simeq f\ \operatorname{rel} X'$ předpisem $F(x,t)=f(x)$.

Symetrie. Pro $F:f_0\simeq f_1\ \operatorname{rel} X'$ definujme $F':f_1\simeq f_0\ \operatorname{rel} X'$ předpisem $F'(x,t)=F(x,1-t)$.

Tranzitivita. Pro $F:f_0\simeq f_1\ \operatorname{rel} X'$ a $G:f_1\simeq f_2\ \operatorname{rel} X'$ definujme $H:f_0\simeq f_2\ \operatorname{rel} X'$ předpisem

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t), & 0\le t\le \frac12,\\ G(x,2t-1), & \frac12\le t\le 1.\end{cases}$$

Zobrazení H je spojité, neboť příslušné restrikce H na uzavřené množiny $X\times\left[0,\frac12\right]$, $X\times\left[\frac12,1\right]$ (tj. zobrazení F a G) jsou spojité. $\square$

Tedy prostor zobrazení $(X,A)\to(Y,B)$ se rozkládá na třídy ekvivalence určené homotopií relativně k X'. Tyto třídy jsou pak nazývány *homotopickými třídami relativně k X'*; budeme je označovat $[(X,A),(Y,B)]_{X'}$.

Věta 1.2. *Složení homotopických zobrazení jsou homotopická.*

Důkaz. Nechť jsou zobrazení $f_0,\ f_1:(X,A)\to(Y,B)$ homotopická relativně k X' a $g_0,\ g_1:(Y,B)\to(Z,C)$ homotopická relativně k Y', kde $f_1(X')\subset Y'$. Ukážeme, že $g_0\circ f_0,\ g_1\circ f_1:(X,A)\to(Z,C)$ jsou homotopická vzhledem k X'. Fixujme $F:f_0\simeq f_1\ \operatorname{rel} X'$ a $G:g_0\simeq g_1\ \operatorname{rel} Y'$. Pak složení

$$(X,A)\times I\xrightarrow{F}(Y,B)\xrightarrow{g_0}(Z,C)$$

je homotopií $\operatorname{rel} X'$ zobrazení $g_0\circ f_0,\ g_0\circ f_1$ a

$$(X,A)\times I\xrightarrow{f_1\times 1_I}(Y,B)\times I\xrightarrow{G}(Z,C)$$

je homotopií $\operatorname{rel} f_1^{-1}(Y')$ zobrazení $g_0\circ f_1$ a $g_1\circ f_1$. Protože $X'\subset f_1^{-1}(Y')$, ukázali jsme, že $g_0\circ f_0\simeq g_0\circ f_1\ \operatorname{rel} X'$ a $g_0\circ f_1\simeq g_1\circ f_1\ \operatorname{rel} X'$. Výsledek plyne z tranzitivity relace homotopie. $\square$

Předchozí výsledek ukazuje existenci *homotopické kategorie párů*, jejímiž objekty jsou homotopické páry a morfismy jsou homotopické třídy zobrazení (rel $\emptyset$). Tato kategorie obsahuje jako úplnou podkategorii homotopickou kategorii topologických prostorů a homotopickou kategorii topologických prostorů s bázovým bodem (kde podprostory A jsou jednobodové).

Pro dvojici (X,A) máme kovariantní funktor $\pi_{(X,A)}$ (resp. kontravariantní funktor $\pi^{(X,A)}$) z homotopické kategorie párů do kategorie množin a funkcí definovaný předpisem

$$\pi_{(X,A)}(Y,B)=[(X,A),(Y,B)]\ \bigl(\text{resp. } \pi^{(X,A)}(Y,B)=[(Y,B),(X,A)]\bigr).$$

Pokud $f:(Y,B)\to(Z,C)$, je $\pi_{(X,A)}([f])=f_\sharp$ (resp. $\pi^{(X,A)}([f])=f^\sharp$), kde $f_\sharp[g]=[f\circ g]$ pro $g:(X,A)\to(Y,B)$ (resp. $f^\sharp[h]=[h\circ f]$ pro $h:(Z,C)\to(X,A)$). Pro každé $\alpha:(X,A)\to(X',A')$ existuje přirozená transformace funktorů

$$\alpha^\sharp:\pi_{(X',A')}\to\pi_{(X,A)}\ \bigl(\text{resp. } \alpha_\sharp:\pi^{(X,A)}\to\pi^{(X',A')}\bigr).$$

Poznámka. *Přirozená transformace* vystihuje "srovnání" dvou funktorů; definuje se následovně. Nechť $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ jsou kategorie, T_1, $T_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariantní funktory. Pak přirozená transformace $\varphi : \mathcal{C} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{D})$ je daná systémem komutativních diagramů

$$\begin{tikzcd} T_1(X) \arrow[r, "T_1(f)"] \arrow[d, "\varphi(X)"'] & T_1(Y) \arrow[d, "\varphi(Y)"] \\ T_2(X) \arrow[r, "T_2(f)"] & T_2(Y) \end{tikzcd}$$

pro každý morfismus $f : X \to Y$.

Definice. Zobrazení $f : (X, A) \to (Y, B)$ se nazývá *homotopická ekvivalence*, pokud $[f]$ je ekvivalencí v homotopické kategorii párů (tj. má-li oboustrannou inverzi). Zobrazení $g : (Y, B) \to (X, A)$ se nazývá *homotopickou inverzí* k f, pokud $[g] = [f]^{-1}$ v homotopické kategorii. Dvojice (X, A) a (Y, B) mají tentýž *homotopický typ*, pokud jsou ekvivalentní v homotopické kategorii.

Nejjednodušší neprázdný prostor je jednobodový; jeho homotopický typ definujeme následovně. Topologický prostor X se nazývá *kontraktibilní*, pokud identické zobrazení $1_X : X \to X$ je homotopické nějakému konstantnímu zobrazení $c_{x_0} : X \to X$, kde $x_0 \in X$, $\mathrm{Im}(c_{x_0}) = \{x_0\}$. Příslušnou homotopii $1_X \to c_{x_0}$ budeme nazývat *kontrakcí*.

Lemma 1.3. *Každá dvě zobrazení topologického prostoru X do kontraktibilního prostoru jsou homotopická.*

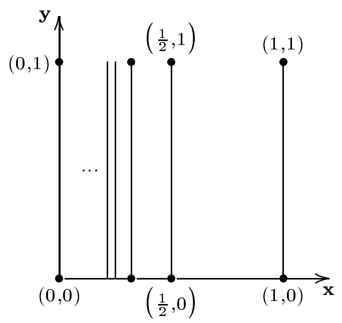
Důkaz. Buď Y kontraktibilní prostor a předpokládejme, že $1_Y \simeq c_{y_0}$, kde $c_{y_0} : Y \to Y$ je konstantní zobrazení na bod $y_0 \in Y$. Mějme libovolná zobrazení f_0, $f_1 : X \to Y$. Podle věty 1.2 platí: $f_0 = 1_Y \circ f_0 \simeq c \circ f_0$ a $f_1 \simeq c \circ f_1$. Protože $c \circ f_0 = c \circ f_1$, je z věty 1.2 $f_0 \simeq f_1$. $\square$

Poznámka. Všimněte si, že předchozí definice a důkaz nezávisely na výběru bodu x_0 (resp. y_0).

Pozorování. Lemma 1.3 nemůže být zobecněno na případ relativní homotopie, tzn. pokud f_0, $f_1 : X \to Y$, kde Y je kontraktibilní a f_0, f_1 souhlasí na $X' \subset X$ (ačkoliv závěr platí např. pro konvexní podmnožiny $\mathbb{R}^n$). Ilustrujme to následujícím příkladem.

Příklad. "Comb" prostor

$$Y := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1 \wedge x \in \{0\} \cup \Big\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}\Big\} \cup \Big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\Big\}.$$



Buď $F : Y \times I \to Y$ definováno předpisem $F((x,y),t) = (x,(1-t)y)$. Zobrazení F je homotopií mezi 1_Y a projekcí na osu x. Protože projekce na osu x je homotopická konstantnímu zobrazení, Y je kontraktibilní. Buď $c_{(0,1)} : Y \to Y$ konstantní zobrazení $Y \to \{(0,1)\}$. Podle lemmatu 1.3 je $1_Y \simeq c_{(0,1)}$; ačkoliv tato zobrazení souhlasí na $(0,1)$, neexistuje homotopie relativně k $(0,1)$ mezi 1_Y a $c_{(0,1)}$. $\square$

Tvrzení 1.4. *Buď $f : S^n \to Y$. Následující je ekvivalentní:*

(1) *Zobrazení f je nulově homotopické (tj. f je homotopické nějakému konstantnímu zobrazení $S^n \to Y$).*
(2) *f lze spojitě rozšířit z $S^n \subset E^{n+1}$ na E^{n+1}.*

Důkaz. Buď $F : f \simeq c_{y_0}$, kde $c_{y_0} : S^n \to \{y_0\} \subset Y$ je konstantní zobrazení. Definujme rozšíření f' funkce f na E^{n+1} předpisem

$$f'(x) = \begin{cases} y_0 & \text{pro } 0 \leq \| x \| \leq \frac{1}{2}, \\ F\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2 \| x \|\right) & \text{pro } \frac{1}{2} \leq \| x \| \leq 1. \end{cases}$$

Pro $\| x \| = 1$, tj. $x \in S^n$, je dle předpokladu $f'(x) = F(x,1) = y_0$, zobrazení je dobře definováno a je spojité, neboť jeho restrikce na každou z uzavřených množin $\{x \in E^{n+1} \mid 0 \leq \| x \| \leq \frac{1}{2}\}$, $\{x \in E^{n+1} \mid \frac{1}{2} \leq \| x \| \leq 1\}$ má tuto vlastnost. Dále $F(x,0) = f(x)$ pro $x \in S^n$, $f' \upharpoonright S^n \equiv f$ a f' je spojité rozšíření f na E^{n+1}. Analogicky se ukáže opačná implikace. $\square$

2. Retrakce, deformace, homotopická rozšíření, kofibrace

Nyní zúžíme předchozí úvahy na zobrazení, která jsou inkluzemi, a budeme vyšetřovat jejich vlastnosti.

Definice. Podprostor $A \subset X$ se nazývá *retraktem* prostoru X, pokud inkluze $i : A \hookrightarrow X$ má levé inverzní zobrazení v kategorii topologických prostorů a spojitých zobrazení, tj. pokud existuje spojité zobrazení $r : X \to A$ tak, že $r \circ i = 1_A$ $\big((\forall x \in A)\ r(x) = x\big)$. Zobrazení r nazýváme *retrakcí* X na A.

Definice. Podprostor $A \subset X$ se nazývá *slabým retraktem* prostoru X, pokud inkluze $i : A \hookrightarrow X$ má levou homotopickou inverzi (tj. levou inverzi v homotopické kategorii). Tedy $A \subset X$ je slabý retrakt prostoru X, právě když existuje spojité zobrazení (tzv. *slabá retrakce*) $r : X \to A$ tak, že $r \circ i \simeq 1_A$.

Je-li A retraktem X, je také jeho slabým retraktem. Následující příklad ukazuje, že opačná inkluze neplatí.

Příklad. Nechť $X = I^2 \subset \mathbb{R}^2$. Buď $A \subset X$ "Comb" prostor. Prostory A i X jsou kontraktibilní, mají tedy stejný homotopický typ a každé zobrazení mezi nimi je homotopickou ekvivalencí. Konkrétně vnoření $A \hookrightarrow X$ je homotopickou ekvivalencí a A je tedy slabým retraktem X. Lze ovšem ukázat, že A není retraktem X. $\square$

Pojmy retraktu a slabého rektaktu splývají pro vhodné typy podprostorů $A \subset X$.

Buď (X, A) topologický pár a Y topologický prostor. Dvojice (X, A) má tzv. *vlastnost homotopického rozšíření* vzhledem k Y, pokud pro jakákoli spojitá zobrazení $g : X \to Y$ a $G : A \times I \to Y$ splňující $g(x) = G(x, 0)$ $(\forall x \in A)$ existuje $F : X \times I \to Y$ tak, že

$$\begin{aligned} F(x,0) &= g(x)\ (\forall x \in X), \\ F \restriction (A \times I) &\equiv G. \end{aligned}$$

Chápeme-li g jako zobrazení $X \times \{0\} \to Y$, je předchozí ekvivalentní existenci zobrazení F v následujícím komutativním diagramu:

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, hook] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, hook] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, hook] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "F"']
\end{tikzcd}$$

Předpokládejme, že (X, A) má vlastnost homotopického rozšíření vzhledem k Y a že f_0, $f_1 : A \to Y$ jsou homotopická zobrazení. Pokud má f_0 vlastnost rozšíření na X, má tuto vlastnost i f_1. Je-li $g : X \to Y$ rozšíření f_0 a $G : A \times I \to Y$ je zadaná homotopie $f_0 \simeq f_1$, vlastnost homotopického rozšíření implikuje existenci zobrazení $F : X \times I \to Y$, které je rozšiřuje G, speciálně tedy $F(x, 1)$ rozšiřuje f_1. Vlastnost rozšíření zobrazení $A \to Y$ závisí pouze na homotopické třídě zobrazení, tedy jde o problém homotopické kategorie.

Důležitý případ nastává, pokud (X, A) má vlastnost homotopického rozšíření vzhledem ke každému prostoru Y. Obecně tedy, zobrazení $f : X' \to X$ se nazývá *kofibrací*, pokud pro každý prostor Y platí: jsou-li dána zobrazení $g : X \to Y$ a $G : X' \times I \to Y$ tak, že $(\forall x' \in X')\ g(f(x')) = G(x', 0)$, pak existuje zobrazení $F : X \times I \to Y$ takové, že $(\forall x \in X)\ F(x, 0) = g(x)$ a $(\forall x' \in X')\ (\forall t \in I)$ $F(f(x'), t) = G(x', t)$. Pokud g chápeme jako zobrazení $X \times \{0\} \to Y$, je existence F ekvivalentní existenci čárkované šipky v následujícím komutativním diagramu:

$$\begin{tikzcd}
X' \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "f \times 1_{\{0\}}"'] & & X' \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, "f \times 1_I"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[ur, "g"] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "F"']
\end{tikzcd}$$

Reprodukujme předchozí definici pro dvojici $X' = A$, $X = X$ a inkluzi $i : A \hookrightarrow X$. Zobrazení i je kofibrací, právě když má (X, A) vlastnost homotopického rozšíření.

Slíbená věta, využívající pojmu kofibrace, je následující.

Věta 2.1. *Je-li (X, A) dvojice s vlastností homotopického rozšíření pro všechny prostory Y, pak A je slabým retraktem prosoru X, právě když je jeho retraktem.*

Důkaz. Ukážeme, že splnění axiomu homotopického rozšíření vede ke konstrukci homotopie mezi slabou retrakcí $r : X \to A$ a retrakcí. Pro $i : A \hookrightarrow X$ je $r \circ i \simeq 1_A$. Buď $G : A \times I \to A$ homotopie mezi $r \circ i$ a 1_A; pak $(\forall x \in A)\ G(x, 0) = r(x)$. Protože (X, A) má vlastnost homotopického zdvihu vzhledem k A, existuje zobrazení $F : X \times I \to A$ rozšiřující G tak, že $(\forall x \in X)\ F(x, 0) = r(x)$. Zobrazení $r' : X \to A$ definované předpisem

$$(\forall x \in X)\ r'(x) = F(x, 1)$$

je retrakcí X na A a F je homotopie $r \simeq r'$. $\square$

V předchozím jsme užívali levé inverze k zobrazení, lze však také užít pravé inverze. Tato myšlenka vede k následující definici.

Definice. Buď $X' \subset X$. *Deformace* podprostoru X' v X je homotopie $D : X' \times I \to X$ taková, že $(\forall x' \in X')\ D(x', 0) = x'$. Pokud navíc $D(X' \times 1) \subset A \subset X$, X' se nazývá *deformovatelný do A v X*. Prostor X je *deformovatelný* do podprostoru $A \subset X$, je-li deformovatelný v sobě do prostoru A.

Lemma 2.2. *Prostor X je deformovatelný do podprostoru A tehdy a jen tehdy, má-li zobrazení inkluze $i : A \hookrightarrow X$ pravou homotopickou inverzi.*

Důkaz. $\Leftarrow$: Pokud má $i : A \hookrightarrow X$ pravou homotopickou inverzi $f : X \to A$, je $i \circ f \simeq 1_X$. Buď $F : X \times I \to X$ homotopie mezi 1_X a $i \circ f$; pak $(\forall x \in X)$ $F(x, 0) = x$, tedy F zadává deformaci X (v X) a $F(X \times \{1\}) = i \circ f(X) \subset A$. Jinak řečeno, prostor X je deformovatelný do A.

$\Rightarrow$: Pokud je X deformovatelný do A, buď $D : X \times I \to X$ příslušná deformace s vlastností $D(X \times \{1\}) \subset A$. Definujme $f : X \to A$ předpisem

$$(\forall x \in X)\ i \circ f(x) = D(x, 1).$$

Pak $D : 1_X \simeq i \circ f$, tedy f je pravá inverze. $\square$

Poznámka. Všimněme si, že pravá inverze se uvažuje v homotopické kategorii, nikoli v kategorii topologických prostorů a spojitých zobrazení mezi nimi.

Zabývejme se nyní inkluzemi, které jsou homotopickými ekvivalencemi. Podprostor $A \subset X$ se nazývá *slabým deformačním retraktem* prostoru X, pokud je $i : A \hookrightarrow X$ homotopickou ekvivalencí.

Z lemmatu 2.2 pak dostáváme

Lemma 2.3. *Podprostor A je slabý deformační retrakt prostoru X, právě když je jeho slabým retraktem a X je deformovatelný v sobě na A.*

Podobný koncept jako "slabý retrakt vs. retrakt" je koncept "deformační retrakt vs. silný deformační retrakt".

Definice. Podprostor $A \subset X$ je *silným deformačním retraktem* X, pokud existuje retrakce $r : X \to A$ taková, že pro $i : A \hookrightarrow X$ je $1_X \simeq i \circ r \operatorname{rel} A$. Funkce $F : 1_X \simeq i \circ r \operatorname{rel} A$ se nazývá *silná deformační retrakce X na A*. Jinými slovy, pro silný deformační retrakt F platí $F(X \times \{1\}) \subset A$ a $(\forall x \in A)$ $(\forall t \in I)$ $F(x,t) = x$.

Příklad. S^n je silný deformační retrakt prostoru $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Zobrazení (homotopie)

$$F : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

definované předpisem

$$F(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\| x \|}, \; x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \; t \in I,$$

totiž splňuje $F(x,t) = x$ pro každé x takové, že $\| x \| = 1$. $\square$

Je zřejmá platnost inkluzí:

silný deformační retrakt $\subset$ deformační retrakt $\subset$ slabý deformační retrakt,

přičemž tyto inkluze jsou ostré.

Příklad. Pro pár (X, A), kde X je uzavřený jednotkový čtverec a A je "Comb" prostor, je inkluze $A \hookrightarrow X$ homotopickou ekvivalencí, avšak A není retraktem X. Podprostor A je slabým deformačním retraktem X, který není deformačním retraktem. $\square$

Příklad. Buď X "Comb" prostor, $A = \{(0,1)\}$ jednobodový podprostor X. Protože je X kontraktibilní, existuje homotopie $F : 1_X \simeq c_{(0,1)}$ (kde $c_{(0,1)} : X \to A$). Toto zobrazení je dle definice deformační retrakcí X na A, ale jak jsme již viděli, neexistuje homotopie relativně k A mezi 1_X a $c_{(0,1)}$. Tedy A je deformačním retraktem prostoru X, ale nikoli silným deformačním retraktem. $\square$

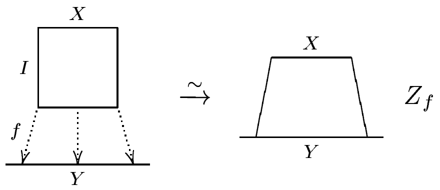
3. Cylindr zobrazení, H-prostory

Uvedeme ještě jednu konstrukci, pomocí níž se dokáže následující tvrzení: v homotopické kategorii je každé zobrazení ekvivalentní inkluzi, která je kofibrací.

Mějme dáno zobrazení $f : X \to Y$ a označme Z_f kvocient získaný faktorizací topologického sjednocení $(X \times I) \cup Y$ podle relace

$$(x, 1) \simeq f(x) \in Y, \text{ kde } (x, 1) \in X \times \{1\} \subset X \times I.$$

Z_f se nazývá *cylindr zobrazení* f.



Nechť $[x, t]$ označuje bod Z_f odpovídající $(x, t) \in X \times I$ při identifikaci a $[y]$ označuje bod Z_f odpovídající $y \in Y$ (tj. $(\forall x \in X)\ [x, 1] = [f(x)]$). Máme vnoření $i : X \hookrightarrow Z_f$, $(\forall x \in X)\ i(x) = [x, 0]$ a vnoření $j : Y \hookrightarrow Z_f$, $(\forall y \in Y)\ j(y) = [y]$. Retrakce $r : Z_f \to Y$ je definována (je umožněna existencí f): $r[x, t] = [f(x)]$ $(\forall x \in X,\ \forall t \in I)$ a $r[y] = [y]$ $(\forall y \in Y)$.

Věta 3.1. *Buď $f : X \to Y$ zobrazení. Pak diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z_f \arrow[dl, "r"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

komutuje, přičemž

(a) $1_{Z_f} \simeq j \circ r \ \mathrm{rel}\, Y$,

(b) *i je kofibrace.*

Důkaz. Dle definice je $f = r \circ i$, tzn. diagram je komutativní.

(a) Definujme homotopii $F : Z_f \times I \to Z_f$:

$$F([x, t], t') = [x, (1 - t')t + t'] \text{ pro } x \in X,\ t, t' \in I,$$
$$F([y], t') = [y] \text{ pro } y \in Y,\ t' \in I.$$

Zřejmě pak $F : 1_{Z_f} \simeq j \circ r \ \mathrm{rel}\, Y$.

(b) Nechť jsou $g : Z_f \to W$ a $G : X \times I \to W$ taková zobrazení, že $g([x, 0]) = G(x, 0)$ $(\forall x \in X \hookrightarrow Z_f)$. Pro $H : Z_f \times I \to W$ definované předpisem

$$H([y], t') = g[y] \text{ pro } y \in Y,\ t' \in I,$$
$$H([x, t], t') = \begin{cases} g\big([x, (2t - t')/(2 - t')]\big) & \text{pro } 0 \le t' \le 2t \le 2,\ x \in X, \\ G\big(x, (t' - 2t)/(1 - t)\big) & \text{pro } 0 \le 2t \le t' \le 1,\ x \in X, \end{cases}$$

platí:

$$(\forall x \in X)\ (\forall t \in I)\ H([x, t], 0) = g[x, t],$$
$$(\forall y \in Y)\ H([y], 0) = g[y],$$
$$(\forall x \in X)\ (\forall t' \in I)\ H([x, 0], t') = G(x, t'). \quad \square$$

Jinak řečeno, $i : X \hookrightarrow Z_f$ je kofibrace ekvivalentní zobrazení $f : X \to Y$ v homotopické kategorii.

Lemma 3.2. *Dva prostory X, Y mají stejný homotopický typ, právě když je lze vnořit jako slabé deformační retrakty do téhož prostoru Z (který bude homotopicky ekvivalentní cylindru zobrazení Z_f).*

Důkaz. $\Leftarrow$: Pokud lze X a Y vnořit jako slabé deformační retrakty do nějakého prostoru Z, pak X, Y jsou téhož homotopického typu jako Z, a tedy X a Y jsou téhož homotopického typu.

$\Rightarrow$: Obráceně, pokud je $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ homotopická ekvivalence, plyne z věty 3.1 pro cylindr zobrazení Z_f, že $X \xrightarrow{i} Z_f \xrightarrow{r} Y$ je homotopická ekvivalence. Protože $r : Z_f \to Y$ je retrakce, je homotopickou ekvivalencí, a tedy také $i : X \hookrightarrow Z_f$ je homotopickou ekvivalencí. Z bodu (a) věty 3.1 plyne, že rovněž $j : Y \hookrightarrow Z_f$ je homotopickou ekvivalencí. Souhrnem dostáváme, že X a Y jsou vnořeny jako slabé deformační retrakty v Z_f. $\square$

H-prostory. V mnoha případech je možné zavést (přirozenou) strukturu grupy na množině homotopických tříd zobrazení z jednoho páru topologických prostorů do jiného páru. Zde budeme uvažovat prostory P takové, že $[X, P]$ má grupovou strukturu pro všechny prostory X. (Třídy homotopických zobrazení, tj. prvky homotopické kategorie, jsme označili symbolem $[\,,\,]$.)Uvidíme, že topologický prostor ponese typ grupové struktury.

Budeme pracovat v homotopické kategorii topologických prostorů s význačným bodem (ačkoliv většina výsledků platí v homotopické kategorii topologických prostorů).

Zkusme nejdříve definovat strukturu grupy na $[X, P]$ za předpokladu, že P je topologická grupa s jednotkou $e \in G$ jako bázovým bodem. Složení dvou zobrazení $g_1, g_2 : X \to P$ je dáno předpisem $(g_1 \circ g_2)(x) = g_1(x)g_2(x)$ s grupovým součinem na pravé straně. Grupové násobení se přenese na grupové násobení na homotopických třídách, tj. $[g_1 g_2] = [g_1][g_2]$. Ihned dostáváme následující větu.

Věta 3.3. *Je-li P topologická grupa, je π^P kontravariantní funktor z homotopické kategorie topologických prostorů s význačným bodem do kategorie grup a homomorfismů.*

Příklad. Kružnice S^1 je topologická Abelova grupa, $[X, S^1]$ je Abelova grupa. Pro $f : X \to Y$ máme

$$f^\sharp : [Y, S^1] \to [X, S^1],$$
$$[\varphi] \mapsto f^\sharp[\varphi] = [f \circ \varphi],\ \varphi : Y \to S^1.$$

$\square$

Grupovou strukturu na $[X, P]$ v homotopické kategorii lze také indukovat z prostoru P' homotopicky ekvivalentního prostoru P, $P \simeq P'$, neboť π^P je v homotopické kategorii přirozeně ekvivalentní $\pi^{P'}$, $\pi^P \simeq \pi^{P'}$. Následující definice je nutná k tomu, aby měl funktor π^P hodnoty v kategorii grup a grupových homomorfismů.

Pro $f : X \to Y$ a $g : X \to Z$ položme

$$(f, g) : X \to Y \times Z,$$
$$(f, g)(x) = (f(x), g(x)),\ x \in X.$$

Definice. *H-prostor* je topologický prostor P s význačným bodem spolu se spojitým násobením $\mu : P \times P \to P$, pro které je (jednoznačně určené) konstantní zobrazení $c : P \to P$ homotopická identita, tj. obě složení

$$P \xrightarrow{(c,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P,$$
$$P \xrightarrow{(1,c)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$$

jsou homotopická 1_P, neboli $\mu \circ (c,1) \simeq 1_P \simeq \mu \circ (1,c)$.

Říkáme, že násobení μ je *homotopicky asociativní*, pokud diagram

$$\begin{tikzcd} P \times P \times P \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & P \times P \arrow[d, "\mu"] \\ P \times P \arrow[r, "\mu"] & P \end{tikzcd}$$

homotopicky komutuje, tj. $\mu \circ (\mu \times 1) \simeq \mu \circ (1 \times \mu)$.

Spojitá funkce $\varphi : P \to P$ se nazývá *homotopickou inverzí pro P a μ*, pokud složená zobrazení $P \xrightarrow{(1,\varphi)} P \times P \xrightarrow{\mu}$ a $P \xrightarrow{(\varphi,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$ jsou homotopická zobrazení c, tj. $\mu \circ (1,\varphi) \simeq c$, $\mu \circ (\varphi, 1) \simeq c$.

Homotopicky asociativní H-prostor s homotopickou inverzí splňuje axiomy grupy v homotopické kategorii. Takový prostor P s význačným bodem nazýváme *H-grupou.* Každá topologická grupa je zřejmě H-grupou.

Násobení v H-grupě nazveme *komutativním,* pokud trojúhelník

$$\begin{tikzcd} P \times P \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & P \times P \arrow[dl, "\mu"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

kde $T(p_1,p_2) = (p_2,p_1)$ pro $(p_1,p_2) \in P \times P$, homotopicky komutuje, tj. $\mu \circ T \simeq \mu$.

Nechť jsou P, P' H-prostory s násobením μ, resp. μ'. Spojité zobrazení $\alpha : P \to P'$ se nazývá *homomorfismus H-grup*, pokud čtverec

$$\begin{tikzcd} P \times P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha\times\alpha"'] & P \arrow[d, "\alpha"] \\ P' \times P' \arrow[r, "\mu'"] & P' \end{tikzcd}$$

homotopicky komutuje, tj. $\alpha \circ \mu \simeq \mu' \circ (\alpha \times \alpha)$.

4. H-prostory. Smyčková grupa jako příklad H-prostoru

Věta 4.1. *Topologický prostor s význačným bodem mající týž homotopický typ jako H-prostor (H-grupa) je sám H-prostorem (H-grupou), přičemž homotopická ekvivalence je homomorfismem příslušných algebraických struktur.*

Poznámka. H-grupa je H-prostor s homotopicky asociativním násobením a s homotopickou inverzí.

Důkaz věty 4.1. Nechť jsou zobrazení $f : P \to P'$ a $g : P' \to P$ navzájem homotopicky inverzní, tj. $f \circ g \simeq 1_{P'}$, $g \circ f \simeq 1_P$, a nechť $\mu : P \times P \to P$ je násobení na P. Definujme $\mu' : P' \times P' \to P'$ předpisem

$$P' \times P' \xrightarrow{g\times g} P \times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P',$$

tedy $\mu' := f \circ \mu \circ (g \times g)$ je spojitá operace na P'.

Složení $P' \xrightarrow{(1,c')} P' \times P' \xrightarrow{\mu'} P'$ je rovno složení $P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(1,c)} P \times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$, neboť diagram

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "{(1,c')}"] \arrow[d, "g"'] & P' \times P' \arrow[d, "g\times g"] \\
P \arrow[r, "{(1,c)}"] & P \times P
\end{tikzcd}$$

komutuje, jak se snadno přesvědčíme dosazením. Díky homotopii $\mu \circ (1,c) \simeq 1_P$ je uvedené složení homotopické zobrazení $f \circ g : P' \to P'$. Protože $f \circ g \simeq 1_{P'}$, je rovněž $\mu' \circ (1,c') \simeq 1_{P'}$. Podobně se nahlédne, že $\mu' \circ (c',1) \simeq 1_{P'}$. Tedy P' je H-prostor.

Platí:

$$\begin{aligned}
P' \times P' \xrightarrow{\mu'} P' \xrightarrow{g} P &\equiv P' \times P' \xrightarrow{g\times g} P \times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P' \xrightarrow{g} P \\
&\simeq P' \times P' \xrightarrow{g\times g} P \times P \xrightarrow{\mu} P,
\end{aligned}$$

a tudíž diagram

$$\begin{tikzcd}
P' \times P' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "g\times g"'] & P' \arrow[d, "g"] \\
P \times P \arrow[r, "\mu"] & P
\end{tikzcd}$$

je homotopicky komutativní a g (tedy i f) je homomorfismus H-prostorů.

Podobně, pokud je $\varphi : P \to P$ homotopická inverze pro P, je $f \circ \varphi \circ g : P' \to P'$ homotopická inverze pro P'; asociativita se odvodí analogicky. $\square$

Pro daný H-prostor P máme přirozeně definovanou kompozici na $[X, P]$, a sice

$$[g_1][g_2] := [\mu \circ (g_1, g_2)].$$

Je-li P H-grupa, je $[X, P]$ grupa s tímto zákonem násobení; pro $f : X \to Y$ je $f^\sharp : [Y, P] \to [X, P]$ homomorfismus. Dostáváme tedy přímo následující větu.

Věta 4.2. *Je-li P H-grupa, je π^P kontravariantní funktor z homotopické kategorie topologických prostorů s význačným bodem s hodnotami v kategorii grup a homomorfismů.*

Je zajímavé, že platí i obrácená implikace.

Věta 4.3. *Buď P prostor s význačným bodem takový, že π^P má hodnoty v kategorii grup. Pak P je H-grupa (a je abelovská, pokud π^P má hodnoty v abelovské grupě). Pro každý prostor X s význačným bodem je grupová struktura na $\pi^P(X)$ ta, jež byla popsána v předchozí větě.*

Důkaz. Označme $p_1 : P \times P \to P$ a $p_2 : P \times P \to P$ projekce a buď $\mu : P \times P \to P$ zobrazení takové, že $[\mu] = [p_1] * [p_2]$, kde $*$ značí kompozici v $[P \times P, P]$. Pro všechna zobrazení f, $g : X \to P$, $(f, g) : X \to P \times P$, je

$$(f, g)^\sharp : [P \times P, P] \to [X, P]$$

homomorfismus vzhledem k $*$. Platí

$$[\mu \circ (f, g)] = (f, g)^\sharp[\mu] = (f, g)^\sharp([p_1] * [p_2]) = (f, g)^\sharp[p_1] * (f, g)^\sharp[p_2] = [f] * [g],$$

což ukazuje, že násobení na $[X, P]$ je indukováno násobením μ. Buď X jednobodový prostor. Jednoznačné zobrazení $X \to P$ reprezentuje jednotku v grupě $[X, P]$. Protože jednoznačné (konstantní) zobrazení $P \to X$ indukuje homomorfismus $[X, P] \to [P, P]$, složení $P \to X \to P$, které je konstantním zobrazením $c : P \to P$, reprezentuje identický element v $[P, P]$. Po dosazení do předchozího vidíme, že $\mu \circ (1_P, c) \simeq 1_P * 1_P \simeq 1_P$ a podobně $\mu \circ (c, 1_P) \simeq 1_P$. Tedy P je H-prostor.

Dokážeme homotopickou asociativitu: nechť jsou q_1, q_2, $q_3 : P \times P \times P \to P$ projekce. Pak

$$[\mu \circ (1 \times \mu)] = (1 \times \mu)^\sharp[\mu] = (1 \times \mu)^\sharp[p_1] * (1 \times \mu)^\sharp[p_2] = [q_1] * [\mu(q_2, q_3)] = [q_1] * ([q_2] * [q_3])$$

a

$$[\mu \circ (\mu \times 1)] = ([q_1] * [q_2]) * [q_3].$$

Protože $[P \times P \times P, P]$ má asociativní násobení $*$, je $[\mu \circ (\mu \times 1)] = [\mu \circ (1 \times \mu)]$, tj. $\mu \circ (1 \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times 1)$.

Homotopická inverze: nechť $\varphi : P \to P$ splňuje $[1_P] * [\varphi] = [c]$ (existence plyne z definice $*$-grupy, totiž z existence inverzního prvku). Pak

$$[\mu \circ (1_P, \varphi)] = [1_P] * [\varphi] = [c],$$

tj. $\mu(1_P, \varphi) \simeq c$; podobně $[\varphi] * [1_P] = [c]$, odkud $\mu(\varphi, 1_P) \simeq c$. Zobrazení φ je tedy homotopická inverze pro P. $\square$

Užitečným příkladem H-grupy je následující.

Příklad. Nechť $y_0 \in Y$. *Smyčkový prostor (loop space) s bázovým bodem* y_0 $\Omega(Y) = \Omega(Y, y_0)$ je definován jako prostor všech spojitých zobrazení

$$\varphi : (I, \partial I) \to (Y, y_0)$$

topologizovaný kompakt-otevřenou topologií. Chápeme jej jako prostor s význačným bodem, kterým je konstantní zobrazení $\varphi_0 : I \to y_0$. $\square$

Poznámka. *Kompakt-otevřená (CO-) topologie* na prostoru spojitých zobrazení $f : X \to Y$ je generována bazí

$$\big\{\langle K, U\rangle \mid K \subset X \text{ je kompaktní } \wedge U \subset Y \text{ je otevřená}\big\},$$

kde $\langle K, U\rangle = \{f : X \to Y \mid f \text{ je spojitá} \wedge f[K] \subset U\}$.

Definujme $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ předpisem

$$\mu(\varphi, \varphi')(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \varphi'(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Zobrazení μ je spojité: buď $\mathrm{Ev} : \Omega Y \times I \to Y$, $(\varphi, t) \mapsto \varphi(t)$, evaluační zobrazení. Použijeme následující výsledek z obecné topologie:

Věta 4.4 (Věta o exponenciální korespondenci). *Nechť je X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a Y, Z jsou libovolné topologické prostory. Zobrazení $g : Z \to Y^X$, kde Y^X je prostor všech spojitých funkcí $X \to Y$ s kompakt-otevřenou topologií, je spojité, právě když je* $\mathrm{Ev} \circ (g \times 1) : Z \times X \to Y$ *spojité.*

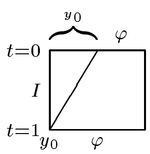
Aplikujeme-li předchozí větu na zobrazení μ, vidíme, že je třeba ukázat spojitost kompozice

$$\Omega Y \times \Omega Y \times I \xrightarrow{\mu \times I} \Omega Y \times I \xrightarrow{\mathrm{Ev}} Y$$

(ve větě 4.4 položme $X = I$, $Y^X = \Omega Y$, $Z = \Omega Y \times \Omega Y$). Explicitní formule definující μ pak říká, že μ je spojité na obou uzavřených množinách $\Omega Y \times \Omega Y \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ a $\Omega Y \times \Omega Y \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(a) Jednotka φ_0. Dokážeme, že zobrazení $\varphi \mapsto \mu(\varphi, \varphi_0)$ je homotopické identickému zobrazení $1_{\Omega Y}$. Definujme $F : \Omega Y \times I \to \Omega Y$ předpisem

$$F(\varphi, t)(t') = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t'}{t+1}\right), & 0 \le t' \le \frac{t+1}{2}, \\ y_0, & \frac{t+1}{2} \le t' \le 1. \end{cases}$$



Pro každé $t \in I$ je $F(\varphi, t)$ smyčka v ΩY. Pro $t = 0$ máme

$$F(\varphi, t)(t') = \begin{cases} \varphi(2t'), & 0 \le t' \le \frac{1}{2}, \\ y_0, & \frac{1}{2} \le t' \le 1, \end{cases}$$

což je $\mu(\varphi, \varphi_0)$; pro $t = 1$ máme $\varphi(t')$, $0 \le t' \le 1$.

Tato formule zároveň ukazuje, že $\mathrm{Ev} \circ (F \times 1) : \Omega \times I \times I \to Y$ je spojité, tedy F je spojité a zadává homotopii $(\varphi \mapsto \mu(\varphi, \varphi_0)) \simeq 1_{\Omega Y}$. Analogicky se ukáže, že $(\varphi \mapsto \mu(\varphi_0, \varphi)) \simeq 1_{\Omega Y}$.

(b) μ je homotopicky asociativní. Definujme $G : \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \times I \to \Omega Y$ předpisem

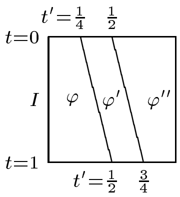
$$\mathrm{Ev} \circ (G \times I)(\varphi, \varphi', \varphi'', t, t') = \begin{cases} \varphi\Big(\frac{4t'}{t+1}\Big), & 0 \le t' \le \frac{t+1}{4}, \\ \varphi'(4t' - t - 1), & \frac{t+1}{4} \le t' \le \frac{t+2}{4}, \\ \varphi''\Big(\frac{4t'-2-1}{2-t}\Big), & \frac{t+2}{4} \le t' \le 1. \end{cases}$$

Pro $t = 0$ dostáváme

$$\mathrm{Ev} \circ (G \times I)(\varphi, \varphi', \varphi'', 0, t') = \begin{cases} \varphi(4t'), & 0 \le t' \le \frac{1}{4}, \\ \varphi'(4t' - 1), & \frac{1}{4} \le t' \le \frac{1}{2}, \\ \varphi''(2t' - 1), & \frac{1}{2} \le t' \le 1; \end{cases}$$

pro $t = 1$

$$\mathrm{Ev} \circ (G \times I)(\varphi, \varphi', \varphi'', 1, t') = \begin{cases} \varphi(2t'), & 0 \le t' \le \frac{1}{2}, \\ \varphi'(4t' - 2), & \frac{1}{2} \le t' \le \frac{3}{4}, \\ \varphi''(4t' - 3), & \frac{3}{4} \le t' \le 1. \end{cases}$$



Odtud $G : \mu \circ (\mu \times 1_{\Omega Y}) \simeq \mu \circ (1_{\Omega Y} \times \mu)$, μ je tedy homotopicky asociativní.

(c) Homotopická inverze. Buď

$$\mathrm{Inv} : \Omega Y \to \Omega Y,$$
$$(\mathrm{Inv}(\varphi))(t) = \varphi(1 - t),$$

a definujme $H : \Omega Y \times I \to \Omega Y$ předpisem

$$\mathrm{Ev} \circ (H \times 1)(\varphi, t, t') = \begin{cases} y_0, & 0 \le t' \le \frac{t}{2}, \\ \varphi(2t' - t), & \frac{t}{2} \le t' \le \frac{1}{2}, \\ \varphi(2 - 2t' - t), & \frac{1}{2} \le t' \le 1 - \frac{t}{2}, \\ y_0, & 1 - \frac{t}{2} \le t' \le 1. \end{cases}$$

Pak H zadává homotopii mezi $\varphi \mapsto \mu(\varphi, \mathrm{Inv}(\varphi))$ a konstantním zobrazením $1_{\Omega Y} : \Omega Y \to \Omega Y$. Podobně pro $\varphi \mapsto \mu(\mathrm{Inv}(\varphi), \varphi)$.

V bodech (a), (b), (c) jsme tedy ukázali, že ΩY je H-grupa.

Navíc, je-li $h : Y \to Y'$ spojité zobrazení zachovávající bázový bod, dostaneme

$$\Omega h : \Omega Y \to \Omega Y',$$
$$\big((\Omega h)(\varphi)\big)(t) = h(\omega(t)).$$

Zobrazení Ωh je homomorfismus, tedy můžeme zformulovat následující větu.

Věta 4.5. *Smyčkový funktor Ω je kovariantní funktor z kategorie topologických prostorů s význačným bodem a spojitých zobrazení do kategorie H-grup a spojitých homomorfismů.*

5. Suspenze

V této kapitole se budeme věnovat konstrukci duální ke konstrukci kontravariantního funktoru π^P: pro topologický prostor Q popíšeme funktor π_Q kovariantní v homotopické kategorii topologických prostorů s význačným bodem do kategorie grup a homomorfismů. Tento koncept vede k tzv. *H-kogrupě* (duální H-grupě). Význačným příkladem je pak *suspenze* jakožto koncept duální k smyčkovému prostoru.

Mějme topologické prostory X, Y s význačným bodem. Jejich sjednocení v kategorii topologických prostorů s význačným bodem budeme značit $X \vee Y$. Jsou-li $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ příslušné bázové body, lze $X \vee Y$ chápat jako podprostor $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$. Pro $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ je $(f,g) : X \vee Y \to Z$ zobrazení definované pomocí charakteristické vlastnosti součtu, tzn. $(f,g) \restriction X \equiv f$ $\big($při identifikaci $X \xrightarrow{\sim} (X \times \{y_0\}) \hookrightarrow (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)\big)$ a $(f,g) \restriction Y \equiv g$.

Definice. *H-kogrupa* je topologický prostor Q spolu se spojitým násobením

$$\nu : Q \to Q \vee Q$$

takovým, že platí:

(1) Existence homotopické identity: pro (jediné!) konstantní zobrazení $c : Q \to Q$ jsou obě složená zobrazení

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(c,1_Q)} Q,$$
$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(1_Q,c)} Q$$

homotopická 1_Q.

(2) Homotopická asociativita: čtverec

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\nu"'] & Q \vee Q \arrow[d, "1 \vee \nu"] \\ Q \vee Q \arrow[r, "\nu \vee 1"] & Q \vee Q \vee Q \end{tikzcd}$$

je homotopicky komutativní.

(3) Homotopická inverze: existuje zobrazení $\psi : Q \to Q$ takové, že obě složená zobrazení

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(\psi,1_Q)} Q,$$
$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(1_Q,\psi)} Q$$

jsou homotopická konstantnímu zobrazení $c : Q \to Q$.

Pro topologický prostor X a H-kogrupu Q lze na $[Q,X]$ přirozeně definovat grupové násobení: $[f_1][f_2] := [(f_1,f_2) \circ \nu]$.

H-korgupa je *abelovská*, pokud trojúhelník

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ Q \vee Q \arrow[rr, "T'"] & & Q \vee Q \end{tikzcd}$$

kde $(\forall x, y \in Q)\ T'(x,y) = (y,x)$, homotopicky komutuje.

Jsou-li Q, Q' kogrupy s konásobením ν, ν', spojité zobrazení $\beta : Q \to Q'$ se nazývá *homomorfismem H-kogrup*, pokud je diagram

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q \vee Q \\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta\vee\beta} \\ Q' & \xrightarrow{\nu'} & Q' \vee Q' \end{array}$$

homotopicky komutativní.

Následující věty jsou duální k příslušným větám v kapitole 4.

Věta 5.1. *Topologický prostor s význačným bodem mající týž homotopický typ jako H-kogrupa je sám H-kogrupou, přičemž homotopická ekvivalence je homomorfismem.*

Věta 5.2. *Pro H-kogrupu Q je π_Q kovariantní funktor z homotopické kategorie prostorů s význačným bodem s hodnotami v kategorii grup a homorfismů mezi nimi. Je-li Q abelovská H-kogrupa, má π_Q hodnoty v abelovských grupách.*

Věta 5.3. *Pokud je Q prostor s význačným bodem a π_Q má hodnoty v kategorii grup, pak Q je H-kogrupa (je abelovská, má-li π_Q hodnoty v kategorii abelovských grup). Navíc je struktura grupy na $\pi_Q(X)$ identická se strukturou indukovanou strukturou H-kogrupy na Q (viz předchozí věta).*

Věta 5.4. *Je-li $\beta : Q \to Q'$ zobrazení dvou H-kogrup, je $\beta^\sharp$ přirozená transformace funktorů $\pi_{Q'}$ a π_Q v kategorii grup, právě když je β homomorfismus H-kogrup.*

Příklad. H-kogrupa smyčkového prostoru. Buď Z topologický prostor s bázovým bodem $z_0 \in Z$. *Suspenze* Z, kterou označíme SZ, je definována jako topologický kvocient

$$Z \times I / \big((Z \times \{0\}) \cup (\{z_0\} \times I) \cup (Z \times \{1\})\big)$$

(tzn. podprostor $(Z \times \{0\}) \cup (\{z_0\} \times I) \cup (Z \times \{1\})$ je stažen do bázového bodu prostoru $Z \times I$). Někdy se této operaci říká *redukovaná suspenze*, přičemž pojem suspenze se vyhrazuje pro kategorii topologických prostorů (bez bázového bodu).

Bod $(z,t) \in Z \times I$ v odpovídající projekci $Z \times I \to SZ$ označíme $[z,t] \in SZ$. Pak $(\forall z, z' \in Z)\ (\forall t \in I)\ [z,0] = [z_0,t] = [z',1]$. Bod $[z_0,0] \in SZ$ označíme z_0; SZ je topologický prostor s bázovým bodem z_0.

Pro $f : Z \to Z'$ buď $Sf : SZ \to SZ'$ definováno $Sf[z,t] = [f(z),t]$. Pak $S : Z \mapsto SZ$ je kovariantní funktor z kategorie topologických prostorů s význačným bodem. Ukážeme, že má hodnoty v kategorii H-kogrup a homomorfismů. Za tím účelem definujeme

$$\nu : SZ \to SZ \vee SZ,$$
$$\nu([z,t]) = \begin{cases} ([z,2t], z_0), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (z_0, [z,2t-1]), & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

čemuž odpovídá obrázek:

Zobrazení ν indukuje na SZ strukturu H-kogrupy tak, že pro $f : Z \to Z'$ je Sf homomorfismus. Toto tvrzení ověříme pomocí duální vlastnosti H-grupy smyčkového prostoru.

Funktory Ω, S definované v kategorii topologických prostorů s význačným bodem a spojitých zobrazení jsou příkladem adjungovaných funktorů: pro každou dvojici Z, Y topologických prostorů s význačným bodem máme ekvivalenci

$$\mathrm{Hom}(SZ, Y) \simeq \mathrm{Hom}(Z, \Omega Y).$$

Důvodem je platnost následujících vztahů.

Buď $g : Z \to \Omega Y$ a definujme $g' : SZ \to Y$ předpisem

$$g'[z,t] := g(z)(t), \ z \in Z, \ t \in I.$$

Pro $h : Y \to Y'$ je $(\Omega h \circ g)' = h \circ g'$ a pro $f : Z' \to Z$ je $(g \circ f)' = g' \circ Sf$. Ekvivalence $g \leftrightarrow g'$ je důsledkem přirozené ekvivalence funktorů $\mathrm{Hom}(S\cdot, \cdot)$ a $\mathrm{Hom}(\cdot, \Omega\cdot)$. Tato ekvivalence se přenáší na morfismy v homotopické kategorii prostorů s význačným bodem. Homotopie $G : Z \times I \to Y$ zobrazuje $\{z_0\} \times I$ na bod y_0, je tedy korektně definováno zobrazení

$$F : (Z \times I)/(\{z_0\} \times I) \to Y.$$

Protože

$$\begin{aligned} S\big((Z \times I)/(\{z_0\} \times I)\big) &\xrightarrow{\sim} (SZ \times I)/(\{z_0\} \times I), \\ [(z,t),t'] &\mapsto ([z,t'],t), \ z \in Z, \ t,t' \in I, \end{aligned}$$

dostáváme bijekci homotopií

$$\begin{gathered} F : (Z \times I)/(\{z_0\} \times I) \to \Omega Y \\ \updownarrow \\ F' : (SZ \times I)/(\{z_0\} \times I) \to Y, \end{gathered}$$

neboli ekvivalenci $[SZ, Y] \approx [Z, \Omega Y]$ takovou, že pokud jsou

$$\begin{aligned} g &: Z \to \Omega Y, \\ g' &: SZ \to Y \end{aligned}$$

ve vztahu $g'[z,t] = g(z)(t)$, pak $[g']$ odpovídá $[g]$. Jinak řečeno, ukázali jsme přirozenou ekvivalenci funktorů $[S\cdot, \cdot]$ a $[\cdot, \Omega\cdot]$. $\square$

Poznámka. Z předchozího plyne, že pro daný prostor Z je funktor π_{SZ} přirozeně ekvivalentní kompozici funktorů $\pi_Z \circ \Omega$ (s hodnotami v kategorii grup a grupových homomorfismů).

V následujícím příkladu ukážeme, že pro $n \geq 1$ je n-sféra S^n homeomorfní suspenzi. Tedy dostaneme zajímavou a důležitou množinu H-kogrup.

Lemma 5.5. *Pro $n \geq 0$ jsou prostory $S(S^n)$ a S^{n+1} homeomorfní.*

Důkaz. Zvolme $p_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ za bázový bod. Uvažujme vnoření

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, \\ (z_1, \ldots, z_{n+1}) &\mapsto (z_1, \ldots, z_{n+1}, 0). \end{aligned}$$

Indukovaná vnoření jsou

$$S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \| z \| = 1 \wedge z_{n+2} = 0\} \subset S^{n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \| z \| = 1\},$$
$$E^{n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \| z \| \leq 1 \wedge z_{n+2} = 0\} \subset E^{n+2}.$$

Označme H_+, H_- uzavřené hemisféry S^{n+1} definované vnořením $S^n \hookrightarrow S^{n+1}$,

$$H_+ = \{z \in S^{n+1} \mid z_{n+2} \geq 0\},$$
$$H_- = \{z \in S^{n+1} \mid z_{n+2} \leq 0\},$$

přičemž
$$H_+ \cup H_- = S^{n+1},\ H_+ \cap H_- = S^n.$$

Projekce $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ indukuje homeomorfismy

$$p_+ : H_+ \to E^{n+1},$$
$$p_- : H_- \to E^{n+1}.$$

Zobrazení $f : S(S^n) \to S^{n+1}$ definujeme předpisem

$$f[z,t] = \begin{cases} p_-^{-1}\big(2tz + (1-2t)p_0\big), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ p_+^{-1}\big((2-2t)z + (2t-1)p_0\big), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

přičemž snadno nahlédneme, že f je homeomorfimem $S(S^n) \approx S^{n+1}$(ověřte sami, že podprostory $I \times \{p_0\}$, $\{0\} \times S^n$, $\{1\} \times S^n$ se zachovávají při homotopii). $\square$

Definice. Pro $n \geq 1$ definujeme *n-tý homotopický funktor* π_n předpisem $\pi_n = \pi_{S^n}$.

6. Fundamentální grupoid

V této části budeme způsobem jiným než v předchozí lekci charakterizovat první homotopickou grupu π_1. Zároveň zobecníme pojem homotopie na jiné než (pouze) uzavřené křivky.

Definice. *Grupoid* $\mathcal{C}$ je malá kategorie, ve které je každý morfismus (kategorickou) ekvivalencí.

Několik faktů, vyplývajících z kategorických vlastností:

(1) Relace $A \sim B$ definovaná pro A, $B \in \mathcal{C}$ předpisem $\mathrm{Hom}(A,B) \neq \emptyset$ je relací ekvivalence. Třídy ekvivalence $\sim$ nazýváme *komponentami grupoidu*. Grupoid je *souvislý*, pokud v něm existuje pouze jedna komponenta.

(2) Pro každý objekt $A \in \mathcal{C}$ je skládání $f \circ g : A \to A$ zobrazení f, $g : A \to A$ grupovou operací v $\mathrm{Hom}(A, A)$.

(3) Existuje kovariantní funktor do kategorie $\mathcal{G}$ grup a grupových homomorfismů:

$$\begin{aligned} h : \mathcal{C} &\to \mathcal{G}, \\ A &\mapsto \mathrm{Hom}(A, A), \\ (f : A \to B) &\mapsto \big(h_f : \mathrm{Hom}(A, A) \to \mathrm{Hom}(B, B)\big), \end{aligned}$$

kde $h_f(g) = f \circ g \circ f^{-1}$ pro $g \in \mathrm{Hom}(A, A)$. Protože je každý $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ekvivalencí, je $h_f : \mathrm{Hom}(A, A) \to \mathrm{Hom}(B, B)$ izomorfismus.

(4) Pokud jsou A, $B \in \mathcal{C}$ v téže třídě ekvivalence grupoidu, je soubor izomorfismů $\{h_f \mid f : A \to B\}$ třídou konjugace izomorfismů $\mathrm{Hom}(A, A) \to \mathrm{Hom}(B, B)$.

(5) Buď $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ kovariantní funktor mezi grupoidy. Pak F zobrazuje každou komponentu $\mathcal{C}$ na nějakou komponentu $\mathcal{C}'$ a existuje přirozená transformace

$$\begin{aligned} F_*(A) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(A)), \\ F_*(A)(f) &= F(f) : F(A) \to F(A), \ \ f : A \to A. \end{aligned}$$

Aplikace (definice fundamentálního grupoidu).

Cesta (path) v topologickém prostoru se definuje jako spojité zobrazení $\omega : I \to X$ (tedy nejen obraz $\omega[I]$!). *Počáteční bod* je $\omega(0)$, *koncový bod* $\omega(1)$. Často mluvíme o *cestě z* $\omega(0)$ *do* $\omega(1)$. *Uzavřená cesta, smyčka v* $x_0 \in X$ je cesta ω splňující $\omega(0) = \omega(1) = x_0$. *Produkt cest* ω a ω' definujeme předpisem

$$(\omega * \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \omega'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Zřejmě je počátečním bodem $\omega * \omega'$ počátek cesty ω a koncovým bodem konec ω'.

Problém. Zformujme kategorii, jejímiž objekty jsou body $x \in X$ a morfismy jsou cesty mezi dvěma body; skládání morfismů je definováno složením cest.

Ihned si uvědomíme, že definiční vlastnosti kategorie lze (obecně) těžko splnit – např. skládání zobrazení nebude asociativní, tzn. $(\omega_1 * \omega_2) * \omega_3 \neq \omega_1 * (\omega_2 * \omega_3)$, jednotkový morfismus nemusí existovat ve všech bodech $x \in X$ atp. Uvidíme však, že pokud budeme studovat homotopické třídy zobrazení, kategorii obdržíme.

Definice. Cesty ω, ω' v X jsou *homotopické*, $\omega \simeq \omega'$, pokud jsou homotopické rel $\dot{I} := \partial I$. Tedy nutná podmínka $\omega \simeq \omega'$ je $\omega(0) = \omega'(0)$ a $\omega(1) = \omega'(1)$.

Pro každé x_0, $x_1 \in X$ je relace $\simeq$ relací ekvivalence na množině cest z x_0 do x_1. Příslušné třídy ekvivalence jsou tzv. *třídy cest* a značí se $[\omega]$.

Lemma 6.1. *Nechť jsou ω, ω' cesty v X takové, že koncový bod ω je počátečním bodem ω'. Pak existuje dobře definovaná třída $[\omega]*[\omega'] := [\omega*\omega']$ taková, že počátek $[\omega]*[\omega']$ je počátkem $[\omega]$ a konec $[\omega]*[\omega']$ je koncem $[\omega']$.*

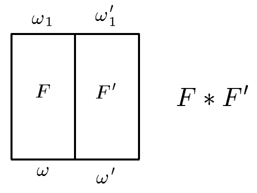
Důkaz. Ukážeme, že

$$(\omega \simeq \omega_1 \wedge \omega' \simeq \omega_1') \Rightarrow \omega * \omega' \simeq \omega_1 * \omega_1'.$$

Buď $F : I \times I \to X$ homotopie $\omega \simeq \omega_1$ relativně k $\dot{I}$ a $F' : I \times I \to X$ homotopie $\omega' \simeq \omega_1'$ relativně k $\dot{I}$. Nyní můžeme definovat $F * F' : I \times I \to X$ formulí (ověřte si, že se jedná o homotopii)

$$(F * F')(t, t') = \begin{cases} F(2t, t'), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ F'(2t-1, t'), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Definici $F * F' : \omega * \omega' \simeq \omega_1 * \omega_1'$ lze ilustrovat diagramem



□

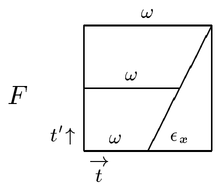
Věta 6.2. *Pro každý topologický prostor X existuje kategorie $\mathcal{C}_X$, jejímiž*

- *objekty jsou body X,*
- *morfismy $x_0 \to x_1$ (x_0, $x_1 \in X$) jsou třídy cest $[\omega]$ takových, že počátek ω je x_0 a konec ω je x_1, a jejich složení jsou třídy složení příslušných cest.*

Důkaz. (a) Existence identického morfismu. Buď $\epsilon_x : I \to X$ konstantní zobrazení; nahlédneme, že $[\epsilon_x] = 1_X$. Ukážeme, že pokud je ω cesta splňující $\omega(1) = x$, je $\omega * \epsilon_x \simeq \omega$. Takovou homotopii lze definovat předpisem

$$F : I \times I \to X,$$
$$F(t, t') = \begin{cases} \omega\left(\frac{2t}{t'+1}\right), & 0 \le t \le \frac{t'+1}{2}, \\ x, & \frac{t'+1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

kde t' je parametr homotopie. Schéma F je

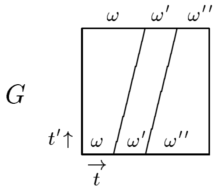


Podobně lze najít homotopii $\epsilon_x * \omega \simeq \omega$, kde $\omega(0) = x$.

(b) Asociativita kompozice morfismů. Nechť jsou ω, ω', ω'' cesty takové, že konec ω je počátek ω' a konec ω' je počátek ω''. Ukážeme, že $(\omega * \omega') * \omega'' \simeq \omega * (\omega' * \omega'')$ – příslušná homotopie je definována formulí

$$G(t,t') = \begin{cases} \omega\left(\frac{4t}{t'+1}\right), & 0 \le t \le \frac{t'+1}{4}, \\ \omega'(4t - t' - 1), & \frac{t'+1}{4} \le t \le \frac{t'+2}{4}, \\ \omega''\left(\frac{4t-2-t'}{2-t'}\right), & \frac{t'+2}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

s diagramatickým schématem



□

Kategorie $\mathcal{C}_X$ se nazývá *fundamentální grupoid prostoru* X, neboť platí

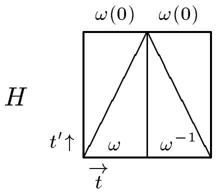
Věta 6.3. *$\mathcal{C}_X$ je grupoid.*

Důkaz. Pro cestu ω v X buď $\omega^{-1} : I \to X$ cesta definovaná $\omega^{-1}(t) := \omega(1-t)$. Abychom ukázali $[\omega^{-1}] = [\omega]^{-1}$ v $\mathcal{C}_X$, je nutné ověřit $\omega * \omega^{-1} \simeq \epsilon_{\omega(0)}$ (a $\omega^{-1} * \omega \simeq \epsilon_{\omega(1)}$). Příslušnou homotopii můžeme definovat formulí

$$H : I \times I \to X,$$

$$H(t,t') = \begin{cases} \omega(0), & 0 \le t \le \frac{t'}{2}, \\ \omega(2t - t'), & \frac{t'}{2} \le t \le \frac{1}{2}, \\ \omega(2 - 2t - t'), & \frac{1}{2} \le t \le 1 - \frac{t'}{2}, \\ \omega(0), & 1 - \frac{t'}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

s diagramatickým schématem



□

Definice. Topologický prostor X je *křivkově souvislý (obloukově souvislý, path connected)*, je-li jeho fundamentální grupoid souvislý.

Lemma 6.4. *Křivkově souvislý topologický prostor je souvislý.*

Důkaz. Je-li ω cesta v X, je $\omega[I]$ jakožto spojitý obraz souvislé množiny souvislý, tedy $\omega(0)$ a $\omega(1)$ patří do téže komponenty souvislosti. Odtud vyplývá, že pokud je X křivkově souvislý, libovolné dva body leží v téže komponentě, a tedy X je souvislý. $\square$

Příklad. Opačná implikace v předchozí větě neplatí, např. $X \subset \mathbb{R}^2$ definovaný

$$X := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y = \sin \frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\right\}$$

je souvislý, ale není křivkově souvislý. $\square$

Poznámka. Pokud bychom v případě cest v topologickém prostoru X pracovali přímo se zobrazeními namísto jejich homotopických tříd, dostali bychom nikoli běžnou kategorii, ale tzv. A_∞-kategorii, jejíž definitorický popis je značně komplikovaný.

7. Fundamentální grupa

Definice. Buď X topologický prostor, $x_0 \in X$. *Fundamentální grupa prostoru* X *s bázovým bodem* x_0, $\pi(X, x_0)$, je grupa tříd cest ω v X, jejichž počátkem i koncem je bod x_0.

Z výsledků kapitoly 6 plyne, že $\pi(X, x_0)$ je grupa, a pokud $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ je homeomorfismus,

$$f_\sharp : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$$

je indukovaný homomorfismus takový, že pro homotopická zobrazení f, $f' : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ jsou

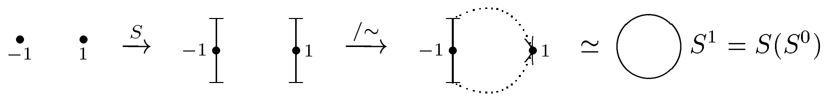
$$f_\sharp \equiv f'_\sharp : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$$

identické homomorfismy. Následující věta shrnuje tyto výsledky.

Věta 7.1. *Existuje kovariantní funktor z homotopické kategorie prostorů s bázovým bodem do kategorie grup přiřazující topologickému prostoru* X *s bázovým bodem* x_0 *fundamentální grupu* $\pi(X, x_0)$ *a zobrazení* f *indukovaný homomorfismus* $f_\sharp$.

Ukážeme, že funktor fundamentální grupy π je přirozeně ekvivalentní funktoru π_1 (definovanému v kapitole 5).

Buď $\lambda : I \to S(S^0)$ zobrazení definované předpisem $\lambda(t) = [-1, t]$, $t \in I$, kde $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{C}$ je dvoubodový prostor a 1 je bázový bod S_0. Schématicky:



Pak λ indukuje bijekci $\lambda^\sharp$ mezi

- homotopickými třídami zobrazení $\big(S(S^0), 1\big) \to (X, x_0)$ a
- třídami uzavřených cest v X s bázovým bodem $x_0 \in X$,

$$\lambda^\sharp[g] = [g \circ \lambda], \ \ g : (S(S^0), 1) \to (X, x_0).$$

Z definice kompozice v $[S(S^0), X]$ a v $\pi(X, x_0)$ je zřejmé, že bijekce je grupový homomorfismus. Navíc $\lambda^\sharp$ komutuje s $f_\sharp$, zobrazením indukovaným $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. To dokazuje tvrzení z počátku odstavce.

Věta 7.2. *Fundamentální grupy obloukově souvislého prostoru v různých bázových bodech jsou izomorfní.*

Důkaz. Přenecháváme čtenáři jako cvičení. $\square$

Prostor X se nazývá *n-souvislým* pro $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, pokud má každé spojité zobrazení $f : S^k \to X$, kde $k \leq n$, spojité rozšíření $\widetilde{f} : D^k \to X$ ($S^k \subset D^k$). 1-souvislý prostor se často nazývá *jednoduše souvislý.* V předchozím jsme dokázali, že X je n-souvislý, pokud je křivkově souvislý a $\pi_k(X, x)$ je triviální pro každé $x \in X$ a každé k, $1 \leq k \leq n$. Reformulací tohoto výsledku dostáváme

Lemma 7.3. *Kontraktibilní (stažitelný) prostor je n-souvislý pro všechna $n \geq 0$.*

8. Simpliciální komplexy. Polyhedry. Fundamentální grupy polyheder

Polyhedron je topologický prostor připouštějící triangulaci simpliciálními komplexy. – Budeme tedy studovat kategorii simpliciálních komplexů. *Simpliciálním komplexem* rozumíme množinu 0-, 1-, 2- ... simplexů a jejich vzájemnou distribuci v topologickém prostoru. Kategorie simpliciálních komplexů bude "aproximací" jisté přirozené podkategorie topologických prostorů. Tento přechod ke kombinatorické topologii pak zaručuje explicitní realizaci algebraických funktorů.

Nejdříve zkonstruujeme funktor z kategorie simpliciálních komplexů do kategorie topologických prostorů.

Definice. *Simpliciální komplex* K se skládá z

- množiny $\mathrm{Vert}(K)$ vrcholů v (vertexů, 0-simplexů, bodů),
- množiny konečných podmnožin s (zvaných *simplexy*) množiny vrcholů

tak, že

- každá množina obsahující jediný vrchol je simplexem,
- každá neprázdná podmnožina simplexu je simplex.

Simplex s obsahující právě $q+1$ vrcholů se nazývá *q-simplex*. Říkáme, že takový simplex má *dimenzi* q, $\dim s = q$. Je-li $s' \subset s$, s' se nazývá *stěnou* s (*vlastní stěnou*, jestliže $s' \neq s$), a pokud s' je p-simplex, je nazýván *p-stěnou* simplexu s. Zřejmě má každý simplex konečně mnoho stěn. Navíc máme na množině všech simplexů částečné uspořádání relací "býti stěnou", tj. $s' \leq s$, pokud s' je stěna s.

Příklady.

(1) Prázdná množina $\emptyset$ je simpliciální komplex (se stejným označením).
(2) Pro každou množinu A je množina všech jejích konečných podmnožin simpliciálním komplexem.
(3) Je-li s simplex v simpliciálním komplexu K, pak množina všech jeho stěn je simpliciální komplex, značíme ho $\bar{s}$.
(4) Rovněž množina $\dot{s}$ všech vlastních stěn simplexu s je simpliciální komplex.
(5) Buď K simpliciální komplex. Jeho *q-dimenzionální skeleton* K^q je definován jako simpliciální komplex obsahující všechny p-simplexy komplexu K pro $p \leq q$.
(6) Buď X množina a $\mathcal{M}(X)$ množina podmnožin X. *Nerv* $\mathcal{M}(X)$, značený $K(\mathcal{M}(X))$, je simpliciální komplex, jehož simplexy jsou všechny (konečné) neprázdné podmnožiny $\mathcal{M}(X)$ s neprázdným průnikem. Vertexy simpliciálního komplexu $K(\mathcal{M}(X))$ jsou neprázdné množiny z $\mathcal{M}(X)$.

Pro simpliciální komplex K definujeme *dimenzi* $\dim K$:

- $\dim K = -1$, je-li $K = \emptyset$;
- $\dim K = n$, pokud v K existuje simplex s dimenze n a neexistují v něm simplexy dimenze $n+1$;
- $\dim K = \infty$, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})$ K obsahuje n-simplex.

Jinak řečeno, $\dim K = \sup\{\dim s \mid s \in K\}$.
Komplex K je *konečný*, pokud obsahuje konečný počet simplexů.

Definice. *Simpliciální zobrazení* $\varphi : K_1 \to K_2$ je funkce z množiny vrcholů komplexu K_1 do množiny vrcholů K_2 taková, že obrazem každého simplexu $s \in K_1$ je simplex $\varphi(s) \in K_2$. Identické zobrazení $1_K : K \to K$ je rozšířením identity na vrcholech; analogicky se definuje složení simpliciálních zobrazení. Zavedli jsme tedy kategorii simpliciálních komplexů a simpliciálních zobrazení.

Podkomplex $L \subset K$ simpliciálního komplexu K je podmnožina komplexu K (tj. $s \in L \Rightarrow s \in K$), která je simpliciálním komplexem. Tento pojem vede k pojmu kategorie simpliciálních párů (K, L) a simpliciálních zobrazení

$$\varphi : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$$

takových, že $\varphi(L_1) \subset L_2$.

Příklady.

(1) Pro každé $q \leq p$ je K^q podkomplex K^p, $K^q \subset K^p$.
(2) Pro každý simplex $s \in K$ je $\dot{s} \subset \bar{s} \subset K$.

Definujme kovariantní funktor z kategorie simplexů a simpliciálních zobrazení do kategorie topologických prostorů a spojitých zobrazení. Pro neprázdný simpliciální komplex K buď $|K|$ množina funkcí $\{\alpha \mid \alpha : \mathrm{Vert}(K) \to I = [0,1]\}$ s vlastnostmi:

- $(\forall \alpha \in |K|)$ $\{v \in K \mid \alpha(v) \neq 0\}$ je simplex v K (speciálně $\alpha(v) \neq 0$ pouze pro konečný počet vrcholů v),
- $(\forall \alpha \in |K|)$ $\sum_{v \in \mathrm{Vert}(K)} \alpha(v) = 1$.

Pro $K = \emptyset$ definujeme $|K| = \emptyset$. Číslo $\alpha(v) \in \mathbb{R}$ se nazývá *barycentrická souřadnice* $v \in \mathrm{Vert}(K)$. Na $|K|$ máme přirozenou metriku

$$\begin{aligned} d &: |K| \times |K| \to \mathbb{R}, \\ d(\alpha, \beta) &= \Big(\sum_{v \in \mathrm{Vert}(K)} \big(\alpha(v) - \beta(v)\big)^2 \Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

definující tzv. *metrickou topologii*. Prostor $|K|$ s touto topologií značíme $|K|_d$.

Jinou topologii na $|K|$ lze definovat následovně. Pro $s \in K$ je *uzavřený simplex* $|s|$ definován

$$|s| = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in S\}.$$

Pokud je s q-simplex, je $|s|$ bijektivní s množinou $\{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid (\forall i)\ 0 \leq x_i \leq 1 \wedge \sum_i x_i = 1\}$. V topologii indukované na $|s|$ metrickou topologií $|K|_d$ jsou uvedené prostory homeomorfní:

$$|s|_d \xrightarrow{\sim} \big\{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid (\forall i)\ 0 \leq x_i \leq 1 \wedge \sum_i x_i = 1\big\}.$$

Nechť s_1, $s_2 \in K$. Pak buď $s_1 \cap s_2$ je prázdný ($|s_1| \cap |s_2| = \emptyset$), nebo existuje společná stěna s_1 a s_2 ($|s_1 \cap s_2| = |s_1| \cap |s_2|$). V obou případech je $|s_1|_d \cap |s_2|_d$ uzavřená množina v $|s_1|_d$ i v $|s_2|_d$ (v topologii na $|s_1|_d$, resp. $|s_2|_d$, dané příslušnou inkluzí). Takto je definována tzv. *koherentní (slabá) topologie* na $|K|$, koherentní s $\{|s|_d \mid s \in K\}$. Simpliciální komplex K s touto topologií se značí $|K|$. Jinak řečeno, $A \subset |K|$ je uzavřená (otevřená) v koherentní topologii, je-li $A \cap |s|$ uzavřená (otevřená) v $|s|$ pro všechny simplexy $s \in K$.

Věta 8.1. *Funkce $f : |K| \to X$ do topologického prostoru X je spojitá v koherentní topologii, právě když je $(\forall s \in K)$ $f \restriction |s| : |s| \to X$ spojitá.*

Věta 8.2. *Funkce $f : |K| \to X$ je spojitá v koherentní topologii, právě když je $(\forall q \geq 0)$ $f \restriction |K^q| : |K^q| \to X$ spojitá.*

Věta 8.3. *Pro každý simpliciální komplex K je $|K|$ normální Hausdorffův prostor.*

Definovali jsme tedy kovariantní funktory $|\cdot|$, $|\cdot|_d$ z kategorie simpliciálních komplexů do kategorie topologických prostorů. Existuje mezi nimi přirozená transformace.

Definice. *Triangulace* (K, f) topologického prostoru X se skládá ze simpliciálního komplexu K a z homeomorfismu $f : |K| \to X$. Prostor, který má triangulaci, se nazývá *polyhedron.*

Podobně můžeme definovat triangulaci $((K, L), f)$ páru (X, A).

Příklad. Pro každé $n \geq 1$ je (E^{n+1}, S^{n+1}) homeomorfní $(|\bar{s}|, |\dot{s}|)$, kde s je $(n+1)$-simplex. Tedy (E^{n+1}, S^{n+1}) je polyhedrální pár. $\square$

Homologická teorie

9. Řetězcové komplexy (Chain Complexes)

V této kapitole provedeme

- konstrukci kategorie řetězcových komplexů a řetězcových zobrazení a (ko)-homologického funktoru v této kategorii;
- konstrukci funktoru z kategorie topologických (simpliciálních) prostorů do kategorie řetězcových komplexů.

Složení těchto dvou funktorů je (ko)homologický funktor v kategorii (simpliciálních) topologických prostorů.

Definice. *Diferenciální grupa* je abelovská grupa C s endomorfismem $\partial : C \to C$, pro který $\partial \circ \partial = \partial^2 = 0$. Endomorfismus ∂ se nazývá *diferenciál* (*hraniční operátor*).

V dalším budeme pracovat s kategorií, jejímiž objekty jsou diferenciální grupy (C, ∂) a morfismy jsou homomorfismy komutující s diferenciály.

Pro diferenciální grupu (C, ∂) definujeme *podgrupu cyklů* $Z(C) \subset C$ a *podgrupu hranic* $B(C) \subset C$ předpisy

$$\begin{aligned} Z(C) &:= \mathrm{Ker}(\partial), \\ B(C) &:= \mathrm{Im}(\partial). \end{aligned}$$

Protože $\partial^2 = 0$, je $B(C) \subset Z(C)$.

Definice. *Homologická grupa* $H(C)$ je definována předpisem

$$H(C) := Z(C)/B(C) = \mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial).$$

Elementy grupy $H(C)$ se nazývají *homologické třídy.* Třídu prvku $z \in Z(C)$ označíme $\{z\} \in H(C)$.

Buď $\tau : (C, \partial) \to (C', \partial')$ homomorfismus diferenciálních grup, tj. homomorfismus, pro který je diagram

$$\begin{tikzcd} (C,\partial) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\tau"'] & (C,\partial) \arrow[d, "\tau"] \\ (C',\partial') \arrow[r, "\partial'"] & (C',\partial') \end{tikzcd}$$

komutativní. Pak zřejmě $\tau[Z(C)] \subset Z(C')$, $\tau[B(C)] \subset B(C')$. Tedy máme korektně definované indukované zobrazení

$$\begin{aligned} \tau_* : H(C) &\to H(C'), \\ \{z\} &\mapsto \tau_*\{z\} = \{\tau(z)\}. \end{aligned}$$

Navíc $(\tau_1\tau_2)_* = (\tau_1)_*(\tau_2)_*$, tedy

$$\begin{aligned} H : C &\to H(C), \\ \tau &\mapsto \tau_*, \end{aligned}$$

realizuje kovariantní funktor.

Definice. *Gradovaná grupa* $C = \{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ je soubor abelovských grup C_q. *Homomorfismem stupně d* mezi gradovanými grupami C a C' nazveme soubor homomorfismů $\tau = \{\tau_q : C_q \to C'_{q+d}\}_q$; značíme ho $\tau : C \to C'$.

Diferenciální gradovaná grupa (*DG-grupa*) je gradovaná grupa s diferenciálem kompatibilním s gradací (tedy stupně $r \in \mathbb{Z}$). *Řetězcový komplex* je DG-grupa taková, že $\deg(\partial) = |\partial| = -1$. Tzn. $C = \{C_q\}_q$ a $\partial_q := \partial \restriction C_q : C_q \to C_{q-1}$, přičemž pro každé q je složení

$$C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$$

triviální homomorfismus. Prvky C_q se nazývají *q-řetězce komplexu.* Většina řetězcových komplexů bude "ne-negativních", tzn. $(\forall q < 0)\ C_q = 0$. *Volný řetězcový komplex* je takový, v němž jsou C_q volné abelovské grupy $(\forall q)$.

Pro DG-grupu C máme gradované grupy

$$\begin{aligned}&\{Z_q(C) := \mathrm{Ker}(\partial_q)\}_q,\\ &\{B_q(C) := \mathrm{Im}(\partial_{q+1})\}_q,\\ &\{H_q(C) := Z_q(C)/B_q(C)\}_q.\end{aligned}$$

Řetězcové zobrazení je homomorfismus $\tau : C \to C'$ stupně 0 komutující s diferenciály, tj. soubor $\{\tau_q : C_q \to C'_q\}_q$ takový, že diagram

$$\begin{tikzcd} C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\tau_q"'] & C_{q-1} \arrow[d, "\tau_{q-1}"] \\ C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] & C'_{q-1} \end{tikzcd}$$

komutuje pro každé q.

Definice. *Kategorie řetězcových komplexů* má za

- objekty řetězcové komplexy,
- morfismy (prvky $\mathrm{Hom}(C, C')$) řetězcová zobrazení $\tau : C \to C'$.

Z předchozího vyplývá

Věta 9.1. *Existuje kovariantní funktor z kategorie řetězcových komplexů do kategorie gradovaných grup a homomorfismů stupně* 0*:*

$$\begin{aligned}&C \mapsto H(C),\\ &\tau \mapsto \tau_* : \mathrm{Hom}(C, C') \to \mathrm{Hom}\big(H(C), H(C')\big),\end{aligned}$$

kde $(\tau_*)_q\{z\} = \{\tau_q(z)\}$ *pro* $z \in Z_q(C)$.

Podkomplex C' řetězcového komplexu C, $C' \subset C$, je řetězcový komplex $\{C'_q\}_q$, kde $(\forall q)\ C'_q \subset C_q$ a $\partial'_q \equiv \partial_q \restriction C'_q$. Inkluze $i : C' \hookrightarrow C$ je dána po složkách: $\{i_q : C'_q \hookrightarrow C_q\}_q$. *Faktorkomplex* $C/C' = \{C_q/C'_q\}_q$ nese indukovaný diferenciál z C. *Projekce* $C \to C/C'$ je soubor projekcí $\{C_q \to C_q/C'_q\}_q$.

Nyní sestrojíme:

(1) kovariantní funktor z kategorie simpliciálních komplexů do kategorie volných řetězcových komplexů,
(2) (singulární řetězcový) funktor z kategorie topologických prostorů do kategorie řetězcových komplexů.

(1) Buď K simpliciální komplex, $q \in \mathbb{N}$. *Orientovaný q-simplex* je q-simplex v K s některou třídou ekvivalence

$$(v_0, v_1, \ldots, v_q) \sim (v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_q})$$
$$\Leftrightarrow (\exists \sigma \in S_{q+1}) \ \big(\mathrm{sgn}(\sigma) = 1 \wedge \sigma(j) = i_j \ (j = 0, \ldots, q)\big)$$

totálních uspořádání vrcholů. Příslušnou třídu značíme $[v_0, v_1, \ldots, v_q]$. $C_q(K)$ je pak Abelova grupa generovaná orientovanými q-simplexy σ_q, kde $\sigma_q^1 + \sigma_q^2 = 0$, pokud σ_q^1 a σ_q^2 mají opačnou orientaci.

Pak $C_q(K) = 0$ pro $q < 0$ a pro $q \geq 0$ je $C_q(K)$ volná Abelova grupa ranku rovného počtu q-simplexů v K.

Definujme homomorfismus $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ pro $q \geq 1$ na generátorech (a lineárně jej rozšiřme):

$$\partial_q[v_0, \ldots, v_q] = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q].$$

Snadno lze ověřit implikaci

$$\sigma_q^1 + \sigma_q^2 = 0 \text{ v } C_q(K) \Rightarrow \partial_q(\sigma_q^1) + \partial_q(\sigma_q^2) = 0 \text{ v } C_{q-1}(K).$$

Navíc $(\forall q)\ \partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, tedy $C(K) = \{C_q(K), \partial_q\}_q$ je ne-negativní volný řetězcový komplex K, jehož homologickou grupou je gradovaná grupa

$$H(K) = \big\{H(K)_q = H_q(C(K))\big\}_q.$$

Mluvíme o tzv. *orientovaných homologických grupách* simpliciálního komplexu K.

Připomeňme, že *simpliciální zobrazení* $\varphi : K_1 \to K_2$ mezi simpliciálními komplexy K_1, K_2 je funkce, která 0-simplexům v K_1 přiřazuje 0-simplexy v K_2, taková, že pro každý simplex $s \in K_1$ je $\varphi(s)$ simplex v K_2. Simpliciální zobrazení φ indukuje zobrazení řetězcových komplexů

$$C(\varphi) : C(K_1) \to C(K_2),$$
$$C(\varphi)([v_0, v_1, \ldots, v_q]) = [\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_q)],$$

přičemž pravá strana je triviální, pokud $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_q)$ netvoří q-simplex v K_2. Z definice je zřejmé, že $C(\varphi)$ je řetězcové zobrazení. Souhrnem:

Věta 9.2. *Existuje kovariantní funktor C z kategorie simpliciálních komplexů do kategorie řetězcových komplexů, $C : K \mapsto C(K)$.*

Kompozice s homologickým funktorem $H : C(K) \mapsto H(C(K))$ dává orientovaný homologický funktor z kategorie simpliciálních komplexů do kategorie gradovaných grup:

$$H \circ C : K \mapsto H(K) := \big\{H_q(K) = H_q(C(K))\big\}_q,$$

který simpliciálnímu zobrazení $\varphi : K_1 \to K_2$ přiřadí homomorfismus gradovaných grup (stupně 0):

$$\varphi_* : H(K_1) \to H(K_2)$$

indukovaný zobrazením $C(\varphi) : C(K_1) \to C(K_2)$.

(2) Zavedeme singulární řetězcový funktor z kategorie topologických prostorů do kategorie řetězcových komplexů.

Buď $q \in \mathbb{N}$ a Δ^q buď simplex v simpliciálním komplexu daném neprázdnými podmnožinami $\{p_0, p_1, \ldots, p_q\}$. Tj. Δ^q je uzavřený simplex $|p_0, p_1, \ldots, p_q|$. Pro $q \geq 0$ a $0 \leq i \leq q+1$ definujme na 0-simplexech lineární zobrazení

$$e^i_{q+1} : \Delta^q \hookrightarrow \Delta^{q+1},$$
$$e^i_{q+1}(p_j) = \begin{cases} p_j, & j < i, \\ p_{j+1}, & j \geq i, \end{cases}$$

tedy $e^i_{q+1}(\Delta^q) = (p_0, p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_q) \subset \Delta^{q+1}$. Snadno odvodíme

Lemma 9.3. *Pro $0 \leq j < i \leq q+1$ je $e^i_{q+2} e^j_{q+1} = e^j_{q+2} e^{i-1}_{q+1}$.*

Buď X topologický prostor. Pro $q \geq 0$ a singulární q-simplex σ prostoru X je $\sigma : \Delta^q \to X$ homeomorfismus. Pro $q > 0$ a $0 \leq i \leq q$ je *i-tá stěna* $\sigma^{(i)}$ simplexu σ definována kompozicí $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^i_q : \Delta^{q-1} \hookrightarrow \Delta^q \to X$. Lehce ověříme

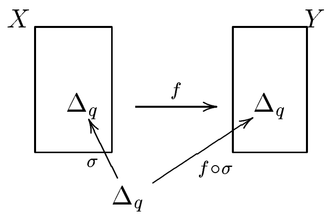
Lemma 9.4. *Pro $q > 1$ a $0 \leq j < i < q$ je $\left(\sigma^{(i)}\right)^{(j)} = \left(\sigma^{(j)}\right)^{(i-1)}$.*

Definice. *Singulární řetězcový komplex* topologického prostoru X, označený $\Delta(X)$, je ne-negativní řetězcový komplex $\Delta(X) = \left\{\Delta_q(X), \partial_q\right\}_q$, kde $\Delta_q(X)$ je volná Abelova grupa generovaná singulárními q-simplexy X pro $q \geq 0$ ($\Delta_q(X) \equiv 0$ pro $q < 0$) a pro $q \geq 1$ je ∂_q definováno předpisem

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

Protože $(\forall q)\ \partial_{q-1} \circ \partial_q \equiv 0$, je $\Delta(X)$ řetězcový komplex.

Pro homeomorfismus $f : X \to Y$ buď $\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$ zobrazení definované předpisem $\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ na singulárních q-simplexech $\sigma : \Delta^q \to X$. Lehce se ověří, že $\Delta(f)$ je řetězcové zobrazení.



Věta 9.5. *Zobrazení Δ je kovariantní funktor z kategorie topologických prostorů do kategorie řetězcových komplexů, $\Delta : X \mapsto \Delta(X)$.*

Kompozice Δ s homologickým funktorem H je tzv. *singulární homologický funktor* z kategorie topologických prostorů do kategorie gradovaných grup,

$$X \mapsto H(X) = \left\{H_q(X) = H_q(\Delta(X))\right\}_q,$$

který homeomorfismu $f : X \to Y$ přiřazuje homomorfismus $f_* : H(X) \to H(Y)$ stupně 0.

$H_q(X) = H_q(\Delta(X))$ je tzv. *q-tá singulární homologická grupa.*

Kategorie řetězcových komplexů má libovolné sumy a produkty. Tedy pro soubor $\{C^j\}_{j\in J}$ řetězcových komplexů existuje $\bigoplus_{j\in J} C^j$ (tzv. *sum chain complex*) a $\prod_{j\in J} C^j$ (*product chain complex*), pro které

$$\begin{aligned}
Z_q\big(\bigoplus C^j\big) &= \bigoplus Z_q(C^j),\\
B_q\big(\bigoplus C^j\big) &= \bigoplus B_q(C^j),\\
H\big(\bigoplus C^j\big) &= \bigoplus H(C^j),\\
Z_q\big(\prod C^j\big) &= \prod Z_q(C^j), \text{ atp.}
\end{aligned}$$

10. Řetězcová homotopie. Kategorie s modely

Koncept homotopie v kategorii řetězcových komplexů. Pro volné řetězcové komplexy ukážeme ekvivalenci mezi trivialitou příslušných homologických grup a kontraktibilitou řetězcového komplexu. Toto přirozeně vede ke konstrukci řetězcových zobrazení a homotopií metodou tzv. *cyklických modelů*, užitím tzv. kategorie s modely.

Mějme řetězcová zobrazení τ, $\tau' : C \to C'$. *Řetězcová homotopie* $D : \tau \simeq \tau'$ je homomorfismus $D = \{D_q\}_q : C \to C'$ takový, že $\deg D = 1 = \deg D_q$ $(\forall q)$ a

$$\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q \equiv \tau_q - \tau'_q : C_q \to C'_q \ (\forall q).$$

Pokud existuje homotopie $D : \tau \simeq \tau'$, řekneme, že τ je *řetězcově homotopické* τ'. Lehce se ověří, že "být řetězcově homotopický" je relace ekvivalence. Příslušná třída ekvivalence se pak označí $[C, C']$, a pro řetězcové zobrazení $\tau : C \to C'$ se jeho třída ekvivalence označí $[\tau]$.

Lemma 10.1. *Složení řetězcových homotopií je řetězcová homotopie.*

Důkaz. Buď $D : \tau \simeq \tau'$, kde τ, $\tau' : C \to C'$, a $\bar{D} : \bar{\tau} \simeq \bar{\tau'}$, kde $\bar{\tau}$, $\bar{\tau'} : C' \to C''$. Pak

$$\bar{\tau} D + \bar{D}\tau' : C \to C' \to C''$$

má vlastnosti

- $\deg(\bar{\tau} D + \bar{D}\tau') = 1$ (neboť $\deg(D) = \deg(\bar{D}) = 1$, $\deg(\bar{\tau}) = \deg(\tau') = 0$),
- $\partial''(\bar{\tau} D + \bar{D}\tau') + (\bar{\tau} D + \bar{D}\tau')\partial \equiv \bar{\tau}\tau - \bar{\tau'}\tau'$.

Protože $\tau \simeq \tau'$, je $\partial' D + D\partial \equiv \tau - \tau'$, podobně $\bar{\tau} \simeq \bar{\tau'}$, odkud $\partial''\bar{D} + \bar{D}\partial' \equiv \bar{\tau} - \bar{\tau'}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \tau\partial &\equiv \partial'\tau, \\ \tau'\partial &\equiv \partial'\tau', \\ \bar{\tau}\partial' &\equiv \partial''\bar{\tau}, \\ \bar{\tau'}\partial' &\equiv \partial''\bar{\tau'}, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \partial''\bar{\tau} D + \partial''\bar{D}\tau' + \bar{\tau} D\partial + \bar{D}\tau'\partial &\equiv \partial''\bar{\tau} D + (\bar{\tau} - \bar{\tau'} - \bar{D}\partial')\tau' + \bar{\tau}(\tau - \tau' - \partial' D) + \bar{D}\tau'\partial \\ &\equiv \bar{\tau}\partial' D + \bar{\tau}\tau' - \bar{\tau'}\tau' - \bar{D}\tau'\partial + \bar{\tau}\tau - \bar{\tau}\tau' - \bar{\tau}\partial' D + \bar{D}\tau'\partial \\ &\equiv \bar{\tau}\tau - \bar{\tau'}\tau', \end{aligned}$$

tedy $\bar{\tau} D + \bar{D}\tau'$ je řetězcová homotopie. $\square$

Předchozí zkoumání říká, že existuje kategorie (tzv. *homotopická kategorie řetězcových komplexů*), jejímiž

- objekty jsou řetězcové komplexy,
- morfismy jsou homotopické třídy řetězcových zobrazení.

Řetězcové zobrazení $\tau : C \to C'$ je tzv. *řetězcová ekvivalence*, je-li $[\tau]$ ekvivalencí v homotopické kategorii řetězcových komplexů.

Věta 10.2. *Jsou-li τ, $\tau' : C \to C'$ řetězcové homotopie, pak $\tau_* \equiv \tau'_* : H(C) \to H(C')$.*

Důkaz. Buď $D : \tau \simeq \tau'$. Pro každý prvek $z \in Z_q(C)$ je

$$\partial'_{q+1} D_q(z) = \tau_q(z) - \tau'_q(z),$$

tj. $\tau_q(z) \sim \tau'_q(z)$, a tedy $\tau_*\{z\} = \tau'_*\{z\}$. $\square$

Řetězcová kontrakce řetězcového komplexu C je homotopie $1_C \simeq 0_C$ $\big(0_C : C \to \{0\} \subset C,\ 1_C : C \to C\big)$. Existuje-li na C řetězcová kontrakce, nazývá se komplex C *řetězcově kontraktibilním.*

Definice. Řetězcový komplex C je *acyklický*, pokud $H(C) = 0$ (tj. $(\forall q)\ H_q(C) = 0$).

Lemma 10.3. *Kontraktibilní řetězcový komplex je acyklický.*

Důkaz. Buď C komplex splňující $1_C \simeq 0_C$. Dle věty 10.2 je $(1_C)_* = (0_C)_*$, tj. $(1_C)_* = 1_{H(C)}$ a $(0_C)_* = 0_{H(C)}$, odtud $1_{H(C)} = 0_{H(C)}$. To nastává, pokud jsou homologické grupy triviální, tedy $H(C) = 0$. $\square$

Příklad. Opačná implikace v lemmatu 10.3 neplatí. Buď C řetězcový komplex:

$$\begin{aligned} &C_0 = \mathbb{Z}_2, \\ &C_1 = C_2 = \mathbb{Z}, \\ &C_q = 0,\ q \neq 0, 1, 2. \end{aligned}$$

s diferenciály

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0,$$
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2,$$

kde $(\forall n)$

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= 2n, \\ \beta(2n) &= 0, \\ \beta(2n+1) &= 1. \end{aligned}$$

Pak C je acyklický (je exaktní), ale není kontraktibilní. Pokud by totiž $D : 1_C \simeq 0_C$ byla řetězcová kontrakce C, pak

$$\begin{aligned} D \restriction C_0 : C_0 &\to C_1, \\ \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

by byla pravá inverze zobrazení $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$. Jenže každý homomorfismus $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ je triviální. $\square$

Pro volné řetězcové komplexy konverze platí.

Věta 10.4. *Volný řetězcový komplex je acyklický, právě když je kontraktibilní.*

Důkaz. Stačí ukázat, že pro volný řetězcový komplex platí implikace: acyklický $\Rightarrow$ kontraktibilní. Buď C volný a acyklický. Všechny diferenciály $\partial_q : C_q \to B_{q-1}(C) = Z_{q-1}(C)$ jsou epimorfismy. Protože grupa C_{q-1} je volná, je také $Z_{q-1}(C)$ volná grupa, a tedy existuje homomorfismus

$$s_{q-1} : Z_{q-1}(C) \to C_q,$$

který je pravou inverzí ∂_q:

$$\partial_q \circ s_{q-1} \equiv 1_{Z_{q-1}(C)} : Z_{q-1}(C) \to Z_{q-1}(C).$$

Pak $1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q : C_q \to Z_q(C)$ a můžeme definovat $\{D_q\}_q$ předpisem

$$D_q := s_q(1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q) : C_q \to C_{q+1}.$$

Dostáváme

$$\partial_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = 1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q + s_{q-1}(1_{C_{q-1}} - s_{q-2}\partial_{q-1})\partial_q = 1_{C_q} - 0_{C_q} = 1_{C_q},$$

tedy $\{D_q\}_q = D$ je řetězcová kontrakce. $\square$

Popišme stručně metodu použitou v předchozím důkazu a nazývanou v obecném kontextu *metoda acyklických modelů*.

Kategorie s modely se skládá z kategorie $\mathcal{C}$ a z množiny $\mathcal{M} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ zvané *modely*. Pro kovariantní funktor $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ (Ab označuje kategorii abelovských grup a jejich homomorfismů) se *bazí* G nazývá soubor $\{g_j \in G(M_j)\}_{j\in J}$, kde modely $M_j \in \mathcal{M}$ jsou takové, že pro každé $X \in \mathcal{C}$ je $\big\{G(f)(g_j) \mid j \in J \wedge f \in \mathrm{Hom}(M_j, X)\big\}$ bazí $G(X)$. Hovoříme o tzv. *volném funktoru na* $\mathcal{C}$ *s modely* $\mathcal{M} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Pokud $h \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, zobrazuje $G(h)$ bázový element $G(X)$ na nějaký bázový element $G(Y)$. Funktor G je tedy složením kovariantního funktoru

$$X \mapsto \big\{G(f)(g_j) \mid j \in J \wedge f \in \mathrm{Hom}(H_j, X)\big\}$$

s kovariantním funktorem Set $\to$ Ab, který množině přiřazuje volnou abelovskou grupu nad ní.

Buď G kovariantní funktor z kategorie $\mathcal{C}$ s modely $\mathcal{M} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ do kategorie řetězcových komplexů. Funktor G je volný, pokud jsou G_q volné funktory do kategorie Abelových grup.

Příklad. Buď K simpliciální komplex, $\mathcal{C}(K)$ kategorie definovaná (částečně) uspořádanými podkomplexy K. Buď $\mathcal{M}(K) = \{\bar{s} \mid s \in K\}$ množina modelů pro $\mathcal{C}(K)$ ($\bar{s}$ značí množinu všech stěn simplexu s). Funktor C přiřazující každému $L \subset K$ orientovaný řetězcový komplex je ne-negativní funktor na $\mathcal{C}(K)$ s modely $\mathcal{M}(K)$ do kategorie řetězcových komplexů. Pro každý model $\bar{s} \in \mathcal{M}(K)$, $\dim(\bar{s}) = q$, fixujme orientovaný q-simplex $\sigma(s)$ generující $C_q(\bar{s})$. Pak indexovaný soubor $\{\sigma(s) \mid \dim(s) = q\}_{s\in K}$ je báze C_q, tj. C_q je volná abelovská grupa s modely $\mathcal{M}(K)$. $\square$

Příklad. Buď $\mathcal{C}$ kategorie topologických prostorů s modely $\mathcal{M} = \{\Delta^q \mid q \geq 0\}$ a buď Δ singulární řetězcový funktor. Pak Δ je volný a ne-negativní na $\mathcal{C}$ s modely $\mathcal{M}$. □

K funktoru G máme také asociované funktory $\{H_q(G)\}_q$:

$$\begin{aligned} H_q(G) : \mathcal{C} &\to \mathrm{Ab}, \\ X &\mapsto H_q(G(X)). \end{aligned}$$

Funktor G z $\mathcal{C}$ do kategorie řetězcových komplexů se nazývá *acyklický v pozitivní dimenzi*, pokud $(\forall q)$ $(\forall M \in \mathcal{M})$ $H_q(G(M)) = 0$. Slibovaný výsledek lze shrnout do následující věty.

Věta 10.5. *Buď $\mathcal{C}$ kategorie s modely $\mathcal{M} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Nechť jsou G, G' kovariantní funktory z $\mathcal{C}$ do kategorie řetězcových komplexů takové, že G je volný a ne-negativní a G' je acyklický v pozitivní dimenzi. Pak*

- *každá přirozená transformace $H_0(G) \to H_0(G')$ je indukovaná přirozeným řetězcovým zobrazením $\tau : G \to G'$;*
- *každá dvě přirozená řetězcová zobrazení τ, $\tau' : G \to G'$ indukující tutéž přirozenou transformaci $H_0(G) \to H_0(G')$ jsou přirozeně řetězcově homotopická, $\tau \simeq \tau'$.*

Důkaz. Je třeba dokázat, že pro každý objekt $X \in \mathcal{C}$ existuje řetězcové zobrazení $\tau(X) : G(X) \to G'(X)$ (tj. řetězcová homotopie $D(X) : \tau(X) \simeq \tau(X'))$ tak, že pokud $h : X \to Y$ je morfismus v $\mathcal{C}$, pak $\tau(Y)G(h) = G'(h)\tau(X)$ (tj. $D(Y)G(h) = G'(h)D(X)$).

Technické podrobnosti najdete v citované práci, str. 165 (kapitola 4, sekce 2, věta 8). □

11. Homologie simpliciálních komplexů

Terminálním objektem v kategorii (neprázdných) simpliciálních komplexů je simpliciální komplex generovaný bodem (0-simplexem, vertexem) P. Pro netriviální simpliciální komplex K má funktoriální zobrazení $K \to P$ pravou inverzi, tedy indukované zobrazení v homologiích $H(K) \to H(P)$ má tutéž vlastnost. Protože

$$H_q(P) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases}$$

máme epimorfismus $H_0(K) \to \mathbb{Z}$. A protože $H_0(K) = C_0(K)/\partial_1(C_1(K))$, dostáváme epimorfismus $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$, $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Podobně lze uvažovat v kategorii topologických prostorů X s jednobodovým terminálním objektem.

Definice. *Augmentace* (nad $\mathbb{Z}$) řetězcového komplexu C je epimorfismus $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ takový, že složení $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1 \to C_0 \to \mathbb{Z}$ je triviální. *Augmentovaný řetězcový komplex* je řetězcový komplex (C, ε) s augmentací.

Orientovaný řetězcový komplex $C(K)$ simpliciálního komplexu K je augmentován homomorfismem $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$, $\varepsilon([v]) = 1$ pro každý 0-simplex v v K. Singulární řetězcový komplex $\Delta(X)$ je augmentovám homomorfismem $\varepsilon : \Delta_0(X) \to \mathbb{Z}$, kde $\varepsilon(\sigma) = 1$ pro každý singulární 0-simplex σ.

Řetězcové zobrazení $\tau : C \to C'$ augmentovaných komplexů zachovává augmentaci, tj. diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & C_0 \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
 & & & \mathbb{Z} \\
\cdots \arrow[r] & C_1' \arrow[r] & C_0' \arrow[ur, "\varepsilon'"'] &
\end{tikzcd}$$

komutuje ($\varepsilon' \circ \tau \restriction C_0 \equiv \varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$). Zobrazení τ zachovává augmentaci, pokud ji zachovává indukované zobrazení τ_*, $\varepsilon'_* \circ \tau_* = \varepsilon_* : H_0(C) \to \mathbb{Z}$.

V dalším budeme chtít separovat funktoriálně netriviální část $H_0(C)$. Za tím účelem definujeme tzv. redukovaný řetězcový komplex $\widetilde{C}$ (augmentovaného komplexu C):

$$\widetilde{C}_q = C_q \text{ pro } q \neq 0,$$
$$\widetilde{C}_0 = \operatorname{Ker}(\varepsilon),$$
$$\widetilde{\partial}_q = \partial_q$$

(je $\partial_1(\widetilde{C}_1) \subset \widetilde{C}_0$, neboť $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$).

Homologické grupy $H(\widetilde{C})$ se nazývají *redukované homologické grupy.* Pro netriviální simpliciální komplex K definujeme $\widetilde{H}(K) := \widetilde{H}(C(K)) = H(\widetilde{C}(K))$. Podobně pro neprázdný topologický prostor X definujeme $\widetilde{H}(X) := \widetilde{H}(\Delta(X))$.

Lemma 11.1. *Pro augmentovaný řetězcový komplex C je*

$$H_q(C) = \begin{cases} \widetilde{H}_q(C) & \textit{pro } q \neq 0, \\ \widetilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z} & \textit{pro } q = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Grupa $\mathbb{Z}$ je volná, tedy $C_0 \simeq \widetilde{C}_0 \oplus \mathbb{Z}$. Pak $Z_q(C) = Z_q(\widetilde{C})$ pro $q \neq 0$, $Z_0(C) \simeq Z_0(\widetilde{C}) \oplus \mathbb{Z}$, $B_q = B_q(\widetilde{C})$ $(\forall q)$. $\square$

Protože $H_0(C) \neq 0$ $\big(H_0(C) \simeq \widetilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z}\big)$, nemůže být augmentovaný komplex acyklický. Jediný kandidát na acykličnost je redukovaný komplex $\widetilde{C}$.

Lemma 11.2. *Je-li C augmentovaný řetězcový komplex, je $\widetilde{C}$ řetězcově kontraktibilní, právě když je příslušná augmentace řetězcovou ekvivalencí $C \simeq \mathbb{Z}$.*

Důkaz. Buď $\bar{C}_q := C_{q-1} \oplus \mathbb{Z}_{q,0}$ zobrazující konus řetězcového zobrazení $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}$. Zřejmě $\bar{C}_0 = \mathbb{Z}$, $\bar{C}_q = C_{q-1}$ pro $q > 0$, $\bar{\partial}_q \equiv -\partial_{q-1}$ pro $q > 0$, $\bar{\partial}_1 \equiv \varepsilon$. Z věty 10.4 víme, že ε je řetězcová ekvivalence tehdy a jen tehdy, když je $\bar{C}$ řetězcově kontraktibilní.

Stačí tedy ukázat ekvivalenci:

$$\bar{C} \text{ je řetězcově kontraktibilní} \Leftrightarrow \widetilde{C} \text{ je řetězcově kontraktibilní.}$$

$\Leftarrow$: Buď $\bar{D} : \bar{C} \to \bar{C}$ řetězcová kontrakce $\bar{C}$. Definujme $\widetilde{D} : \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ předpisem $\widetilde{D}_{q-1} \equiv -\bar{D}_q \restriction \widetilde{C}_{q-1}$. $\{\widetilde{D}_q\}_q$ je pak (dle definice) řetězcová kontrakce $\widetilde{C}$.

$\Rightarrow$: Buď $\widetilde{D} : \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ řetězcová kontrakce. Definujme $\bar{D} : \bar{C} \to \bar{C}$ předpisem

- $\bar{D}_0 : \mathbb{Z} \to C_0$ je pravá inverze zobrazení $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$,
- $\bar{D}_1 : C_0 \to C_1$ je 0 na $\bar{D}_0(\mathbb{Z})$ a je rovno $-\widetilde{D}_0$ na $\widetilde{C}_0$,
- $\bar{D}_q : C_{q-1} \to C_q$ je rovno $-\widetilde{D}_{q-1}$ pro $q > 1$.

Tedy $\bar{D} : \bar{C} \to \bar{C}$ je řetězcová kontrakce. $\square$

Buď $\mathcal{C}$ kategorie s modely $\mathcal{M}$. Funktor G' z $\mathcal{C}$ do kategorie augmentovaných řetězcových komplexů se nazývá *acyklický*, pokud je $\widetilde{G}'(M)$ acyklický pro každý model $M \in \mathcal{M}$.

Věta 11.3. *Buď $\mathcal{C}$ kategorie s modely $\mathcal{M}$ a nechť jsou G, G' kovariantní funktory do kategorie augmentovaných řetězcových komplexů takové, že G je volný funktor a G' je acyklický. Pak existuje přirozené řetězcové zobrazení $G \to G'$ zachvávající augmentaci, přičemž každá dvě taková zobrazení jsou řetězcově homotopická.*

Jinak řečeno, existuje – až na homotopii – jednoznačně určené řetězcové zobrazení $H(G) \to H(G')$ komutující s augmentací.

Nyní budeme vyšetřovat několik speciálních vlastností homologických grup simpliciálních komplexů.

Lemma 11.4. *Buď K netriviální souvislý simpliciální komplex. Pak $\widetilde{H}_0(K) = 0$.*

Důkaz. Buď v_0 pevně daný vertex (0-simplex) komplexu K. Pro každý 0-simplex $v \in K$ existuje posloupnost 1-siplexů $e_1, e_2, \ldots, e_r \in K$ taková, že počátek $(e_1 e_2 \ldots e_r)$ je v_0, což je počátek (e_1), a podobně koncový bod $(e_1 e_2 \ldots e_r)$ je konec (e_r) a je roven v. Pak $(e_1 + \cdots + e_r) \in C_1(K) = \Delta_1(K)$ a $\partial \circ c_v \equiv v - v_0$. Protože $\varepsilon\big(\sum_v n_v v\big) = \sum_v n_v$, platí implikace

$$\sum_{v \in \Delta_1(K)} n_v v \in \widetilde{\Delta}_0(K) = \widetilde{C}_0(K) \Rightarrow \sum_v n_v = 0.$$

Odtud

$$\partial_1\Big(\sum_v n_v c_v\Big) = \sum_v n_v v - \sum_v n_v v_0 = \sum_v n_v v,$$

tj. libovolný 0-řetězec $\sum_v n_v v$ je hranicí 1-řetězce $\sum_v n_v c_v$. Proto $\widetilde{H}_0(\Delta(K)) = \widetilde{H}_0(C(K)) = 0$. $\square$

Poznámka. V předchozím jsme použili ekvivalenci

$$\Delta_q(K) \xrightarrow{\simeq} C_q(K)\ (\forall q)$$

mezi simpliciálním komplexem $\Delta_q(K)$ generovaným uspořádanými q-simplexy a simpliciálním komplexem $C_q(K)$ generovaným orientovanými q-simplexy. Příslušnou řetězcovou ekvivalenci lze nalézt v citované literatuře.

Důsledek 11.5. *Pro každý simpliciální komplex K je $H_0(K)$ volná grupa ranku rovného počtu komponent souvislosti komplexu K.*

Pro dvojici simpliciálních komplexů (K, L) definujme

$$H(K,L) = \left\{H_q(K,L) = H_q(C(K)/C(L))\right\}_q.$$

Buď $H(K, L)$ konečně generovaná grupa. Základní věta o struktuře konečně generovaných abelovských grup říká, že

$$H(K,L) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k},$$

$k \in \mathbb{N}$, $n_i | n_{i+1}$ ($\forall i = 1, \ldots, k-1$). Číslo $r = \mathrm{rank}(H(K, L))$ je tzv. *rank abelovské grupy* $H(K, L)$; jinak se mu také říká *Bettiho číslo*. Množina Bettiho čísel $\left\{\mathrm{rank}(H_q(K,L))\right\}_q$ charakterizuje rank příslušné (totální) homologické grupy $H(K, L)$.

Gradovaná grupa C se nazývá *konečně generovanou*, pokud je $(\forall q)$ C_q konečně generovaná a $C_q = 0$ až na konečnou množinu S indexů $q \in \mathbb{N}$. V této situaci je také $H(C)$ konečně generovaná gradovaná Abelova grupa.

Eulerova-Poincarého charakteristika $\chi(C)$ konečně generované gradované Abelovy grupy C je definována vztahem

$$\chi(C) := \sum_{q \in S} (-1)^q \mathrm{rank}(C_q).$$

Lemma 11.6. *Buď C konečně generovaný řetězcový komplex. Pak $\chi(C) = \chi(H(C))$.*

Důkaz. Je $Z_q(C) \subset C_q$, přičemž $C_q/Z_q(C) \simeq B_{q-1}(C)$. Dále $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$. Věta z lineární algebry dává rovnosti

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(C_q) &= \mathrm{rank}(Z_q(C)) + \mathrm{rank}(B_{q-1}(C)), \\ \mathrm{rank}(Z_q(C)) &= \mathrm{rank}(H_q(C)) + \mathrm{rank}(B_q(C)). \end{aligned}$$

Eliminací hodnot $\mathrm{rank}(Z_q(C))$ dostáváme

$$\mathrm{rank}(C_q) = \mathrm{rank}(H_q(C)) + \mathrm{rank}(B_q(C)) + \mathrm{rank}(B_{q-1}(C)).$$

Po vynásobení $(-1)^q$ a sumaci se ranky příslušných hraničních grup odečtou, a dostaneme tvrzení věty. $\square$

12. Exaktní posloupnosti

Budeme zkoumat vztahy mezi homologickými grupami komplexů C', C a C/C', kde C' je podkomplex C.

Definice. Posloupnost

$$G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$$

homomorfismů abelovských grup se nazývá *exaktní v* G, je-li $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$.

Krátkou exaktní posloupností nazýváme posloupnost tvaru

$$0 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 0$$

exaktní v G', G i G''. V takové posloupnosti je tedy α monomorfismus a β epimorfismus (α je izomorfismem mezi G' a $\alpha(G') \subset G$, β indukuje izomorfismus $G/\alpha(G')$ a G''). Grupa G se nazývá *extenzí* grupy G' přes G''.

Homomorfismem γ (stejně indexovaných) *posloupností*

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots$$

a

$$\dots \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \dots$$

nazýváme posloupnost $\{\gamma_n : G_n \to H_n\}_n$ homomorfismů, pro kterou všechny čtverce v diagramu

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"'] & G_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & G_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & H_n \arrow[r, "\beta_n"] & H_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

komutují.

Pojem homomorfismu lze tedy formulovat v kategorii krátkých exaktních posloupností se stejnými indexy.

Definice. Posloupnost abelovských grup a homomorfismů

$$\dots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \dots$$

nazveme *řetězcovým komplexem*, je-li $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(\partial_n)$ pro každé n.

Lze říci, že v řetězcovém komplexu grupy

$$H_n = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

měří exaktnost posloupnosti v C_n.

Definice. *Krátká exaktní posloupnost řetězcových komplexů*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

je posloupnost řetězcových komplexů a řetězcových zobrazení taková, že pro každé q je posloupnost abelovských grup

$$0 \to C'_q \xrightarrow{\alpha_q} C_q \xrightarrow{\beta_q} C''_q \to 0$$

exaktní.

Homomorfismus krátkých exaktních posloupností řetězcových komplexů sestává z řetězcových zobrazení τ', τ, τ'' takových, že diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau'"'] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tau"'] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "\tau''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{C}' \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & \bar{C} \arrow[r, "\bar{\beta}"] & \bar{C}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Příklad. Buď C' podkomplex komplexu C, $i : C' \hookrightarrow C$ inkluze a $j : C \to C/C'$ přirozená projekce. Pak

$$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C/C' \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost řetězcových komplexů.

V tomto případě je $\bar{C}' \subset \bar{C}$, řetězcové zobrazení $\tau : C \to \bar{C}$ splňuje $\tau(C') \subset \bar{C}'$ a $\tau' \equiv \tau \restriction C'$ a τ'' je zobrazení kvocientů indukované zobrazením τ. $\square$

Lemma 12.1. *V kategorii krátkých exaktních posloupností řetězcových komplexů*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

existuje přirozená transformace $\partial_* : H'' \to H'$ *taková, že pro* $\{z''\} \in H(C'')$ *je* $\partial_*\{z''\} = \{\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}z''\} \in H(C')$.

Důkaz. Máme diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial'"] & C_{q+1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"] & C''_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial'"] & C_q \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & C_{q-1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C''_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

v němž je každý řádek krátkou exaktní posloupností grup.

Buď z'' q-cyklus komplexu C''. Volme $c \in C_q$ tak, aby $\beta(c) = z''$. Potom $\beta\partial(c) = \partial''\beta(c) = \partial''(z'') = 0$, tedy existuje (jediný) prvek $c' \in C'_{q-1}$ tak, že $\alpha(c') = \partial(c)$. Je $\alpha\partial'(c') = \partial\alpha(c') = \partial\partial(c) = 0$, a protože je α monomorfismus, je c' $(q-1)$-cyklus komplexu C'.

Buď $c_1 \in C_q$, $\beta(c_1) \sim z''$; fixujme $d'' \in C''_{q+1}$ tak, že $\beta(c_1) = \beta(c) + \partial''(d'')$. Zvolme $d \in C_{q+1}$, pro které $\beta(d) = d''$. Dostáváme

$$\beta(c_1) = \beta(c) + \partial''\beta(d) = \beta(c + \partial d).$$

Tedy existuje $d' \in C'_q$ tak, že $c_1 = c + \partial(d) + \alpha(d')$ a

$$\partial(c_1) = \partial(c) + \partial\alpha(d') = \partial(c) + \alpha\partial'(d') = \alpha(c' + \partial d').$$

Tedy $\alpha^{-1}(\partial(c_1)) = c' + \partial'(d') \sim c'$ a $\{\alpha^{-1}(\partial(c_1))\} = \{\alpha^{-1}(\partial(c))\}$. Ukázali jsme, že

$$\partial_*\{z''\} = \{c'\}$$

je korektně definováno.

Zbývá nahlédnout, že ∂_* je přirozená transformace. Uvažujme diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tau'} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau''} & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{C}' & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{C} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \bar{C}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

s exaktními řádky. Jeho komutativita dává

$$\begin{aligned}
\tau'_*\partial_*\{z''\} &= \tau'_*(\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}(z'')) = \{\tau'\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}(z'')\} = \{\bar{\alpha}^{-1}\tau\partial\beta^{-1}(z'')\} \\
&= \{\bar{\alpha}^{-1}\bar{\partial}\bar{\beta}^{-1}\tau''(z'')\} = \bar{\partial}_*\tau''_*\{z''\}.
\end{aligned}$$

□

Transformace ∂_* je tzv. *svazující homomorfismus.*

Věta 12.2. *Existuje kovariantní funktor z kategorie krátkých exaktních posloupností řetězcových komplexů do kategorie exaktních posloupností abelovských grup, který posloupnosti*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

přiřazuje dlouhou exaktní posloupnost

$$(*) \qquad \dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{\alpha_*} H_q(C) \xrightarrow{\beta_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \xrightarrow{\alpha_*} \dots$$

Důkaz. Zbývá dokázat exaktnost posloupnosti (*). Je třeba ověřit 6 inkluzí – zde dokážeme exaktnost v $H_q(C'')$.

(a) $\mathrm{Im}(\beta_*) \subset \mathrm{Ker}(\partial_*)$. Buď $\{z\} \in H_q(C)$. Pak

$$\partial_*\beta_*\{z\} = \partial_*\{\beta(z)\} = \{\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}\beta(z)\} = \{\alpha^{-1}\partial(z)\} = \{\alpha^{-1}(0)\} = 0.$$

(b) $\mathrm{Ker}(\partial_*) \subset \mathrm{Im}(\beta_*)$. Nechť $\{z''\} \in \mathrm{Ker}(\partial_*)$. Existuje $c \in C_q$ tak, že $\beta(c) = z''$ a $\alpha^{-1}\partial(c) = \partial'(d')$ pro některé $d' \in C'_q$. Rozdíl $c - \alpha(d') \in C_q$ splňuje

$$\partial(c - \alpha(d')) = \partial c - \alpha(\partial'(d')) = 0.$$

Odtud $\{c - \alpha(d')\} \in H_q(C)$ a $\beta_*\{c - \alpha(d')\} = \{\beta(c) - \beta\alpha(d')\} = \{z''\}$. □

Důsledek 12.3. *Pro krátkou exaktní posloupnost řetězcových komplexů*

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$$

platí:

(1) *C' je acyklický $\Leftrightarrow \beta_* : H(C) \xrightarrow{\sim} H(C'')$;*
(2) *C je acyklický $\Leftrightarrow \partial_* : H(C'') \xrightarrow{\sim} H(C')$;*
(3) *C'' je acyklický $\Leftrightarrow \alpha_* : H(C') \xrightarrow{\sim} H(C)$.*

Lemma 12.4. *Buď*

$$\dots \to G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \to \dots$$

exaktní posloupnost abelovských grup a buď

$$\dots \to G'_{n+1} \xrightarrow{\alpha'_{n+1}} G'_n \xrightarrow{\alpha'_n} G'_{n-1} \to \dots$$

její podposloupnost (tj. $G'_n \subset G_n$ a $\alpha'_n = \alpha_n \restriction G'_n$). Tato posloupnost je exaktní, právě když je exaktní indukovaná posloupnost

$$\dots \to G_{n+1}/G'_{n+1} \to G_n/G'_n \to G_{n-1}/G'_{n-1} \to \dots$$

Důkaz. Užitím důsledku 12.3 (2) pro acyklický komplex G dostaneme $\partial_* : H(G'') \xrightarrow{\sim} H(G')$ pro podkomplex $G' \subset G$ a faktorkomplex $G'' = G/G'$, tj. $\partial_* : H_q(G/G') \xrightarrow{\sim} H_{q-1}(G')$. Tudíž G' je exaktní podkomplex (tj. $H(G') = 0$), právě když je G/G' exaktní faktorkomplex (tj. $H(G/G') = 0$). $\square$

Buď K simpliciální komplex a $L_1 \subset L_2 \subset K$. Dle Noetherové věty o izomorfismu existuje krátká exaktní posloupnost řetězcových komplexů:

$$0 \to C(L_2)/C(L_1) \xrightarrow{i} C(K)/C(L_1) \xrightarrow{j} C(K)/C(L) \to 0,$$

a příslušná dlouhá exaktní posloupnost má tvar

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(L_2, L_1) \xrightarrow{i_*} H_q(K, L_1) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L_2, L_1) \xrightarrow{i_*} \dots,$$

kde i_*, j_* jsou indukovány homomorfismy dvojic

$$i : (L_2, L_1) \subset (K, L_1),$$
$$j : (K, L_1) \subset (K, L_2)$$

a ∂_* je svazující homomorfismus. Tato dlouhá exaktní posloupnost se nazývá *homologická posloupnost trojice* (K, L_2, L_1). Je funktoriální na trojicích $(\cdot, \cdot, \cdot)$ a pro $L_1 \equiv \emptyset$ se redukuje na dlouhou exaktní posloupnost pro homologické grupy párů (K, L_2):

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(L_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Z inkluze trojic $(K, L_2, \emptyset) \hookrightarrow (K, L_2, L_1)$ plyne

Věta 12.5. *Svazující homomorfismus $\partial_* : H_q(K, L_2) \to H_{q-1}(L_2, L_1)$ trojice (K, L_2, L_1) je složení*

$$H_q(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L_2) \xrightarrow{k_*} H_{q-1}(L_2, L_1),$$

kde k_* je indukované zobrazení inkluze dvojice $k : (L_2, \emptyset) \hookrightarrow (L_2, L_1)$ a ∂_* je svazující homomorfismus páru (K, L_2).

Lemma 12.6 (o pěti izomorfismech). *Mějme dán komutativní diagram abelovských grup a jejich homomorfismů:*

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r, "\beta_5"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_1
\end{tikzcd}$$

s exaktními řádky, v němž jsou γ_1, γ_2, γ_4, γ_5 izomorfismy. Pak je γ_3 rovněž izomorfismus.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že γ_3 je monomorfismus. Buď $\gamma_3(g_3) = 0$; nahlédneme, že $g_3 = 0$. Protože $\gamma_2\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$, plyne z exaktnosti v G_3 a z předpokladu, že γ_2 je monomorfismus, existence $g_4 \in G_4$ takového, že $\alpha_4(g_4) = g_3$. Dále $\beta_4\gamma_4(g_4) = 0$, a tedy (z exaktnosti v H_4) existuje $h_5 \in H_5$ tak, že $\beta_5(h_5) = \gamma_4(g_4)$. Buď $g_5 \in \gamma_5$ takové, že $\gamma_5(g_5) = h_5$ (γ_5 je epimorfismus). Dostáváme $\gamma_4\alpha_5(g_5) = \beta_5\gamma_5(g_5) = \gamma_4(g_4)$, odkud $g_4 = \alpha_5(g_5)$. Pak z exaktnosti

$$g_3 = \alpha_4(g_4) = \alpha_4\alpha_5(g_5) = 0.$$

γ_3 je epimorfismus: volme $h_3 \in H_3$. Existuje $g_2 \in G_2$ tak, že $\gamma_2(g_2) = \beta_3(h_3)$. Pak ovšem $\gamma_1\alpha_2(g_2) = \beta_2\beta_3(h_3) = 0$. Odtud $\alpha_2(g_2) = 0$ (γ_1 je monomorfismus) a (z exaktnosti v G_2) existuje $g_3 \in G_3$ tak, že $\alpha_3(g_3) = g_2$. Dále $\beta_3(h_3 - \gamma_3(g_3)) = 0$, a tedy existuje $h_4 \in H_4$ splňující $\beta_4(h_4) = h_3 - \gamma_3(g_3)$; volme $g_4 \in G_4$ tak, že $\gamma_4(g_4) = h_4$. Pak $g_3 + \alpha_4(g_4) \in G_3$,

$$\gamma_3(g_3 + \alpha_4(g_4)) = \gamma_3(g_3) + \beta_4(h_4) = \gamma_3(g_3) + h_3 - \gamma_3(g_3) = h_3.$$

□

13. Mayerovy-Vietorisovy posloupnosti

Cílem této sekce je definice dlouhé exaktní posloupnosti srovnávající homologie množin V_1, V_2, $V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2$ způsobem, který vede k charakterizaci homologických vlastností topologického prostoru pomocí vhodných "stavebních kamenů" (tj. jednodušších topologických prostorů).

Nechť jsou K_1, K_2 podkomplexy simpliciálního komplexu K. Pak $K_1 \cap K_2$ a $K_1 \cup K_2$ jsou podkomplexy K, přičemž pro příslušné řetězcové komplexy platí:

$$\begin{aligned} C(K_1),\ C(K_2) &\subset C(K), \\ C(K_1 \cap K_2) &= C(K_1) \cap C(K_2), \\ C(K_1 \cup K_2) &= C(K_1) + C(K_2). \end{aligned}$$

Uvažujme inkluze:

$$\begin{aligned} i_1 &: K_1 \cap K_2 \hookrightarrow K_1, \\ i_2 &: K_1 \cap K_2 \hookrightarrow K_2, \\ j_1 &: K_1 \hookrightarrow K_1 \cup K_2, \\ j_2 &: K_2 \hookrightarrow K_1 \cup K_2. \end{aligned}$$

Pak krátká exaktní posloupnost řetězcových komplexů

$$0 \to C(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} C(K_1) \oplus C(K_2) \xrightarrow{j} C(K_1 \cup K_2) \to 0,$$

kde $i(c) = (i_1(c), -i_2(c))$, $j(c_1, c_2) = j_1(c_1) + j_2(c_2)$, dává dlouhou exaktní posloupnost homologických grup

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{j_*} H_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \dots,$$

tzv. *Mayerovu-Vietorisovu posloupnost* komplexů K_1, $K_2 \subset K$. Indukované homomorfismy na homologické grupě jsou

$$\begin{aligned} i_*(z) &= (i_{1*}(z), -i_{2*}(z)), \\ j_*(z_1, z_2) &= j_{1*}(z_1) + j_{2*}(z_2) \end{aligned}$$

pro $z \in H(K_1 \cap K_2)$, $z_1 \in H(K_1)$, $z_2 \in H(K_2)$. Jestliže $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, pak komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_0(K_1 \cap K_2) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon"] & C_0(K_1) \oplus C_0(K_2) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varepsilon \oplus \varepsilon"] & C_0(K_1 \cup K_2) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kde $\alpha(n) = (n, -n)$, $\beta(n, m) = n + m$, dává dle lemmatu 12.4 (řádky jsou exaktní a vertikální homomorfismy jsou epimorfismy) exaktní posloupnost *redukovaných grup* (jader ε)

$$0 \to \widetilde{C}_0(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \widetilde{C}_0(K_1) \oplus \widetilde{C}_0(K_2) \xrightarrow{j} \widetilde{C}_0(K_1 \cup K_2) \to 0,$$

tj.

$$0 \to \widetilde{C}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \widetilde{C}(K_1) \oplus \widetilde{C}(K_2) \xrightarrow{j} \widetilde{C}(K_1 \cup K_2) \to 0.$$

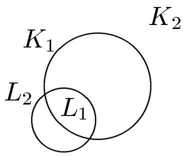
Příslušná posloupnost redukovaných homologických grup se nazývá *redukovaná Mayerova-Vietorisova posloupnost* K_1, $K_2 \subset K$.

Podobně lze ukázat existenci relativní Mayerovy-Vietorisovy posloupnosti dvojic (K_1, L_1), $(K_2, L_2) \subset (K, L)$.

Inkluze $(K_1, L_1) \subset (K_2, L_2)$ se nazývá *zobrazení výřezu* (*excision map*), pokud $K_1 \setminus L_1 = K_2 \setminus L_2$. Exaktnost Mayerovy-Vietorisovy posloupnosti je ekvivalentní vlastnosti výřezu:

Lemma 13.1. *Každé zobrazení výřezu mezi simpliciálními páry indukuje izomorfismus na homologích.*

Důkaz. Pro zobrazení výřezu $(K_1, L_1) \subset (K_2, L_2)$ je $K_2 = K_1 \cup L_2$ (neboť $K_1 \setminus L_1 = K_2 \setminus L_2$, $L_1 \subset L_2$) a $L_1 = K_1 \cap L_2$. Tuto situaci vystihuje obrázek



Dle Noetherové věty o izomorfismu je

$$C(K_1)/C(L_1) = C(K_1)/C(K_1 \cap L_2) \simeq [C(K_1) + C(L_2)]/C(L_2) = C(K_2)/C(L_2).$$

□

Poznámka (Noetherové věta). *Nechť jsou A, B podmoduly modulu C, buď $A+B$ podmodul C generovaný $A \cup B$. Přirozené inkluze $A \hookrightarrow A+B$ a $A \cap B \hookrightarrow B$ indukují zobrazení*

$$A/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} (A+B)/B,$$

které je izomorfismem.

Není pravda, že pro páry topologických prostorů (X_1, A_1), (X_2, A_2) indukuje každé zobrazení excize $(X_1 \setminus A_1 = X_2 \setminus A_2)$ izomorfismus v singulární homologii (tedy např. Mayerova-Vietorisova posloupnost není nutně exaktní).

Příklad. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

a buď

$$X_+ := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge f(x) \vee (x = 0 \wedge |y| \le 1)\big\},$$
$$X_- := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le f(x) \vee (x = 0 \wedge |y| \le 1)\big\}.$$

$X_\pm$ jsou křivkově souvislé topologické podprostory $\mathbb{R}^2$, $X_+ \cup X_- = \mathbb{R}^2$, $X_+ \cap X_-$ má dvě komponenty souvislosti. Neexistuje homomorfismus

$$\widetilde{H}_1(X_+ \cup X_-) \to \widetilde{H}_0(X_+ \cap X_-),$$

pro nějž by byla část Mayerovy-Vietorisovy posloupnosti

$$\widetilde{H}_1(X_+ \cup X_-) \to \widetilde{H}_0(X_+ \cap X_-) \to \widetilde{H}_0(X_+) \oplus \widetilde{H}_0(X_-)$$

exaktní v $\widetilde{H}_0(X_+ \cap X_-)$, neboť

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1(X_+ \cup X_-) &\simeq \widetilde{H}_1(\mathbb{R}^2) = 0, \\ \widetilde{H}_0(X_+) &\simeq \widetilde{H}_0(X_-) = 0, \\ \widetilde{H}_0(X_+ \cap X_-) &\simeq \widetilde{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Následující věta specifikuje podprostory $X_1,\ X_2 \subset X$, které mají šanci být excizivními páry. Dvojice $\{X_1, X_2\}$ se nazývá *výřezovou (excizivní) dvojicí*, pokud inkluze řetězcových komplexů $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$ indukuje izomorfismus na homologiích.

Věta 13.2. *Pokud* $X_1 \cup X_2 = \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_1) \cup \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_2)$, *je* $\{X_1, X_2\}$ *excizivní dvojice.*

Např. dvojice $\{X, A\}$, kde $A \subset X$, je excizivní.

Podobně lze napsat Mayerovu-Vietorisovu posloupnost pro excizivní pár $\{X_1, X_2\}$ topologických prostorů, pro excizivní dvojice $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ apod.

Nyní užijeme Mayerovy-Vietorisovy exaktní posloupnosti k výpočtu singulární homologie sfér.

Věta. *Pro* $n \geq 0$ *je*

$$\widetilde{H}_q(S_n) \simeq \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ \mathbb{Z}, & q = n. \end{cases}$$

Důkaz. Buď $p,\ p' \subset S^n$, $p \neq p'$. Protože $S^n \setminus \{p\}$, $S^n \setminus \{p'\}$ jsou homeomorfní $\mathbb{R}^n$, a tedy kontraktibilní, je $\widetilde{H}\big(S^n \setminus \{p\}\big) = 0$, $\widetilde{H}\big(S^n \setminus \{p'\}\big) = 0$. Snadno se ověří, že $\big\{S^n \setminus \{p\}, S^n \setminus \{p'\}\big\}$ je excizivní pár, tedy relevantní část Mayerovy-Vietorisovy posloupnosti dává izomorfismus

$$\partial_* : \widetilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{q-1}\big(S^n \setminus \{p, p'\}\big).$$

Protože $S^n \setminus \{p, p'\}$ má homotopický typ S^{n-1} (důkaz např. pomocí $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$), je

$$\widetilde{H}_{q-1}\big(S^n \setminus \{p, p'\}\big) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$$

a výsledek dostaneme indukcí pomocí vztahu

$$\widetilde{H}_{q-n}\big(S^0\big) \simeq \begin{cases} \widetilde{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

□

14. Axiomatická charakterizace homologie

Podáme kategoriální definici (pomocí axiomů) pro kompaktní polyhedrální páry. V dalších (tj. nekompaktních) případech je nutné přidávat axiomy.

Topologické prostory jako úplná podkategorie kategorie topologických párů jsou (standardně) dány identifikací $X \mapsto (X, 0)$.

Homologická teorie (H, ∂) se skládá z

- kovariantního funktoru H z kategorie topolgických párů a zobrazení do kategorie gradovaných abelovských grup a homomorfismů stupně 0, tj. $H(X, A) = \{H_q(X, A)\}_q$,
- přirozené transformace ∂ stupně -1 z funktoru $H : (X, A) \mapsto H(X, A)$ na funktor $H : (A, \emptyset) \mapsto H(A)$ (tj. $\partial(X, A) = \{\partial_q(X, A) : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)\}_q$),

přičemž splňuje následující axiomy.

(1) *Homotopický axiom.* Jsou-li f_0, $f_1 : (X, A) \to (Y, B)$, $f_0 \simeq f_1$, pak

$$H(f_0) \equiv H(f_1) : H(X, A) \to H(Y, B).$$

(2) *Axiom exaktnosti.* Pro každý pár (X, A) s inkluzemi $i : A \hookrightarrow X \equiv (X, \emptyset)$, $j : X \hookrightarrow (X, A)$ existuje (dlouhá) exaktní posloupnost

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} \dots$$

(3) *Axiom výřezu.* Pro každý pár (X, A) a pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset X$ splňující $\overline{U} \subset \operatorname{int}(A)$ výřez $j : (X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ indukuje izomorfismus

$$H(j) : H(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\sim} H(X, A).$$

(4) *Axiom dimenze.* V úplné podkategorii jednobodových prostorů je H přirozeně ekvivalentní konstantnímu funktoru, tj. jednobodový prostor P splňuje

$$q \neq 0 \Rightarrow H_q(P) \simeq 0,$$
$$q = 0 \Rightarrow H_q(P) \simeq \mathbb{Z}.$$

Ke konkrétní homologické teorii patří tzv. *redukované homologické teorie.* Pro netriviální topologický prostor X buď $c : X \to P$ konstantní zobrazení do jednobodového prostoru P. *Redukovaná grupa* $\widetilde{H}(X)$ se definuje jako jádro homomorfismu $H(c) : H(X) \to H(P)$, $\widetilde{H}(X) = \operatorname{Ker}(H(c))$. Protože c má pravou inverzi, má ji také $H(c)$. Odtud

$$H(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}(X) \oplus H(P).$$

Buď $B \subset A \subset X$, $k : A \equiv (A, \emptyset) \hookrightarrow (A, B)$ a definujme

$$\partial(X, A, B) : H(X, A) \to H(A, B)$$

jako kompozici

$$\partial(X, A, B) \equiv H(k) \circ \partial(X, A) : H(X, A) \to H(A) \to H(A, B).$$

Věta 14.1. *Pro každou trojici (X, A, B) splňující $B \subset A \subset X$ existuje dlouhá exaktní posloupnost*

$$\cdots \to H_q(A,B) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X,B) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_q(X,A,B)} H_{q-1}(A,B) \to \dots,$$

kde $i : (A,B) \hookrightarrow (X,B)$ a $j : (X,B) \hookrightarrow (X,A)$.

Důkaz. Věta se dokáže užitím axiomu exaktnosti a vlastností diagramů. Ověříme např. exaktnost v $H_q(A,B)$.

(a) $\mathrm{Im}(\partial_{q+1}(X,A,B)) \subset \mathrm{Ker}(H_q(i))$: $H_q(i) \circ \partial_{q+1}(X,A,B)$ je složením

$$\begin{tikzcd}
 & & H_q(A,B) \arrow[dr, "H_q(i)"] & \\
H_{q+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{q+1}(X,A)"] & H_q(A) \arrow[ur, "H_q(k)"] \arrow[dr, "H_q(i')"'] & & H_q(X,B) \\
 & & H_q(X) \arrow[ur, "H_q(i'')"'] &
\end{tikzcd}$$

kde $i' : A \hookrightarrow X$, $i'' : X \equiv (X, \emptyset) \hookrightarrow (X,B)$. Zřejmě

(*)
$$\begin{tikzcd}
 & (A,B) \arrow[dr, hook, "i"] & \\
A \equiv (A,\emptyset) \arrow[ur, hook, "k"] \arrow[dr, hook, "i'"'] & & (X,B) \\
 & (X,\emptyset) \arrow[ur, hook, "i''"'] &
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Dle axiomu výřezu pro dvojici (X,A) je $H_q(i') \circ \partial_{q+1}(X,A) \equiv 0$, tj.

$$H_q(i'') \circ H_q(i') \circ \partial_{q+1}(X,A) \equiv 0,$$

a tedy $H_q(i) \circ \partial_{q+1}(X,A,B) \equiv 0$.

(b) $\mathrm{Ker}(H_q(i)) \subset \mathrm{Im}(\partial_{q+1}(X,A,B))$: Buď $z \in H_q(A,B)$ prvek takový, že $H_q(i)(z) = 0$. Pak $\partial_q(X,B) \circ H_q(i)(z) = 0$, a protože $\partial_q(A,B) \equiv \partial_q(X,B) \circ H_q(i)$, kde $i : (A,B) \hookrightarrow (X,B)$, je $\partial_q(A,B)(z) = 0$. Dle axiomu exaktnosti existuje $z' \in H_q(A)$ tak, že $H_q(k)(z') = z$, kde $k : A \hookrightarrow (A,B)$. Složení

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i')} H_q(X) \xrightarrow{H_q(i'')} H_q(X,B)$$

je rovno $H_q(i) \circ H_q(k)$ (to plyne z komutativity (*)), tedy

$$H_q(i'') \circ H_q(i')(z') = H_q(i) \circ H_q(k)(z') = H_q(i)(z) = 0.$$

Dle axiomu exaktnosti existuje $z'' \in H_q(B)$ tak, že pro $j' : B \hookrightarrow X$ je $H_q(i')(z') = H_q(j')(z'')$. Všimněme si, že pro $j'' : B \hookrightarrow A$ platí $H_q(j') \equiv H_q(i') \circ H_q(j'')$, což odpovídá rovnosti $j' = i' \circ j'' : B \to X$. Dostáváme $H_q(i')(z' - H_q(j'')(z'')) = 0$. Dle axiomu výřezu (pro dvojici (X, A)) dostáváme:

$$(\exists \bar{z} \in H_{q+1}(X, A)) \;\; \partial_{q+1}(X, A)(\bar{z}) = z' - H_q(j'')(z'').$$

Díky platnosti $H_q(k) \circ H_q(j'') \equiv 0$ (odpovídající vztahu $k \circ j''(b) = 0$ $(\forall b \in B)$) je

$$\partial_{q+1}(X, A, B)(\bar{z}) = H_q(k) \circ \partial_{q+1}(X, A)(\bar{z}) = H_q(k)(z') - H_q(k) \circ H_q(j'')(z'') = H_q(k)(z') = z,$$

tj. $z \in \mathrm{Im}(\partial_{q+1}(X, A, B))$.

Podobně se $(\forall q)$ dokáží zbývající inkluze:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(H_q(i)) &\subset \mathrm{Ker}(H_q(j)),\\
\mathrm{Ker}(H_q(j)) &\subset \mathrm{Im}(H_q(i)),\\
\mathrm{Im}(H_q(j)) &\subset \mathrm{Ker}(\partial_q(X, A, B)),\\
\mathrm{Ker}(\partial_q(X, A, B)) &\subset \mathrm{Im}(H_q(j)).
\end{aligned}$$

□

Literatura

E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Series in Higher Math., 1966