Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady - Homomorfismy v souřadnicích

1. Uvažujme v prostoru $\mathbb{R}^3$ podmnožiny $M = \{(1,2,1),(2,1,2),(1,2,3)\}$ a $N = \{(1,-1,-1),(-1,1,-1),(1,-1,0)\}$. Ověřte, že obě množiny jsou báze, najděte souřadnice vektoru $(1,1,1)$ vůči oběma bázím a ověřte vztah mezi oběma sadami souřadnic pomocí vhodné matice přechodu.
2. Určete matici homomorfizmu $f : T^3 \to T^4$, $f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_1,x_2,x_3)$ vzhledem ke kanonickým bázím T^3 a T^4 a vzhledem k bázím $M = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ a $M' = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,1)\}$. Určete jádro a obraz f.
3. Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázím $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ a $\{(1,1),(2,0)\}$ matici
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Určete obraz vektoru (x,y,z).
4. Určete matici přechodu od báze $M = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}$ k bázi $N = \{x^2+2, x^2-3x+1, x^2+x+3\}$ prostoru $P^2\langle -1,1\rangle$.
5. Najděte automorfizmus f VP $\mathbb{R}^3$, který je sám k sobě inverzní a pro který $f((2,3,1)) = (1,0,2)$ a $f((0,0,1)) = (0,0,1)$.
6. Je dán homomorfizmus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
$$f\left(a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$
Rozhodněte, jestli je f automorfizmus a pokud ano, najděte matici inverzního automorfizmu vzhledem ke kanonickým bázím.

7. Dokažte, že pro f endomorfizmus T^n jsou následující tvrzení ekvivalentní:
   (a) f je automorfizmus
   (b) f je monomorfizmus
   (c) f je epimorfizmus
8. Nechť $v \in \mathbb{R}^3$. Určete matici homomorfizmu $f_v(x) = v \times x$ daného vektorovým součinem s v vůči kanonické bázi a bázi $\{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1)\}$. Určete jádro a obraz tohoto homomorfizmu.
9. Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ je homomorfizmus určený vztahem

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3 - 2x_4)$$

   Najděte nějakou bázi M jádra zobrazení f a nějakou bázi N obrazu zobrazení f. Dále najděte nějaký doplněk W podprostoru $\operatorname{Ker} f$ v $\mathbb{R}^4$ a takovou jeho bázi P, aby matice zúženého zobrazení $f|W$ vzhledem k bázím P a N byla jednotková matice.
10. Nechť $v \in T^n$ a $p_v : T^n \to T^n$ je zobrazení dané pro libovolný vektor $x \in T^n$ vztahem $(p_v(x))_i = (\sum_{j=1}^n v_j x_j) v_i$.
    (a) Ověřte, že p_v je lineární zobrazení.
    (b) Najděte matici zobrazení p_v vzhledem ke kanonickým bázím.
    (c) Určete jádro, obraz a hodnost zobrazení p_v.
    (d) Najděte bázi $M \subset T^n$ tak, aby matice zobrazení p_v vůči bázi M obsahovala nejmenší možný počet nenulových elementů.
11. Nechť V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně 2 a definujme zobrazení $f : V \to V$ vztahem $f_B(X) = BXB^{-1}$, kde

    $$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

    Určete matici zobrazení f_B vzhledem k bázi

    $$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$