Lineární algebra a geometrie
pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 1 - Prostor $\mathbb{R}^n$ a lineární zobrazení

1. Rozhodněte, které z následujících podmnožin $\mathbb{R}^3$ jsou podprostory
   (a) $\{(0,0,0),(1,0,0)\}$
   (b) $\langle(1,2,-1)\rangle \cup \langle(-2,-3,2)\rangle$
   (c) $\langle(1,2,-1)\rangle \cup \langle(-2,-4,2)\rangle$
   (d) $\langle(1,2,-1),(-2,-5,2)\rangle$
   (e) $\{(s+t,s-t,2s+t-1)|s,t \in \mathbb{R}\}$
   (f) $\{(s^2,0,0)|s \in \mathbb{R}\}$
   (g) $\{(s^3,0,0)|s \in \mathbb{R}\}$

   Vždy odůvodněte.

2. Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Rozhodněte, které z předpisů $f_C - f_A \circ f_B$, $f_C \circ f_A + 3f_B$, $f_B \circ f_C \circ f_A$ a $f_A \circ f_C + 3f_B \circ f_A$ definují lineární zobrazení a určete jejich matice. Vše odůvodněte.

3. Určete matici následujících lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$:
   (a) Nulové zobrazení: $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_A(x_1,x_2) = (0,0)$.
   (b) Identické zobrazení: $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_B(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$.
   (c) Násobení číslem $r \in \mathbb{R}$: $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_C(x_1,x_2) = r(x_1,x_2)$.
   (d) Inverzní zobrazení k zobrazení f_D, kde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

   t.j. takové f_E, které splňuje $(f_E \circ f_D)(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$.

4. Najděte dvě lineární zobrazení určená maticí, která jsou obě nenulová, ale jejich složení je nulové zobrazení. (Tj. dvě matice, jejichž součin je nulová matice.)
5. Najděte nenulové lineární zobrazení f_A takové, že $f_A \circ f_A = 0$. (Tj. matici, jejíž druhá mocnina je nulová matice.)
6. Najděte nenulové lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $f_A \circ f_A \circ f_A = 0$, ale $f_A \circ f_A \neq 0$. (Tj. matici, jejíž třetí mocnina je nulová matice, ale druhá mocnina je nenulová.)
7. Najděte lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že f_A není násobek identity, ale $f_A \circ f_A$ je identita.
8. Najděte dvě zobrazení $f_A, f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taková, že $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$. (Tj. matice, které splňují $AB = BA$ (komutují)). Najděte dvě zobrazení, pro která $f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$ (Tj. dvě matice, které nekomutují).
9. Nechť f_A je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Ukažte, že množina všech $x \in \mathbb{R}^n$ splňujících $f_A(x) = 0$ je podprostor $\mathbb{R}^n$.
10. Nechť f_A je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Ukažte, že množina všech $y \in \mathbb{R}^m$, pro něž existuje $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že platí $f_A(x) = y$, je podprostor $\mathbb{R}^m$.
11. Ukažte, že podprostor z předchozího příkladu je lineárním obalem množiny sloupců matice A.