

# Lineární algebra pro fyziky

*Zápisky z přednášek*

Dalibor Šmíd

10. února 2010



# Úvod

Do úvodu se obvykle píše různá moudrá ponaučení, vyznání a poděkování. Jistě je sem časem napíšu, ale zatím dám přednost spíše praktickým informacím.

## Cvičení

Za každou kapitolou najdete několik cvičení. Abych vám usnadnil orientaci, roztřídil jsem je do několika kategorií: **(4)**, **(3)**, **(2)**, **(1)**, podle obtížnosti od nejnižší po nejvyšší. Číslování zhruba odpovídá klasifikaci u zkoušky - obtížnost 4 jsou zcela elementární úlohy, obtížnost 3 by měl zvládnout aspirant na trojku, atd. Pro cvičení s obtížností vyšší než by odpovídala první kategorii zavádím označení **(HC)** (znamená to „hors catégorie“, kdo neví, odkud to pochází, jistě snadno vygooglí). Úlohy jsou zatím ve spíše nahodilém pořadí, výsledky jsou uvedeny jen u některých.



# Kapitola 1

## Soustavy lineárních rovnic

**Lineární rovnicí** s neznámými  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rozumíme rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \text{ zkráceně } \sum_{j=1}^n a_jx_j = b,$$

kde **koeficienty**  $a_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  a **pravá strana**  $b$  jsou zadána reálná nebo komplexní čísla a řešení hledáme také v  $\mathbb{R}$ , respektive v  $\mathbb{C}$ . Pokud je rovnic více, řekněme  $m$ , mluvíme o **soustavě lineárních rovnic**

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Každá  $n$ -tice čísel  $(x_1, \dots, x_n)$ , která splňuje všech  $m$  rovnic, je **řešením soustavy rovnic**. Naším úkolem je najít a popsat všechna řešení.

Zapišme si nyní důležitá data úlohy do následující přehledné tabulky:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Každý řádek zde odpovídá jedné rovnici, vlastně jsme jen vynechali symboly, které se ve všech rovnicích opakují: znaménka  $+$ ,  $=$  a neznámé  $x_i$ . Tato tabulka se nazývá **rozšířenou maticí soustavy**, její část nalevo od svislé čáry je **matice soustavy** a část napravo **pravá strana**.

Naše strategie bude nyní jednoduchá. Nejprve ukážeme, že určité úpravy rozšířené matice soustavy zachovávají množinu všech řešení. Poté se naučíme vyřešit soustavy, jejichž rozšířená matice má určitý speciální tvar. Nakonec popíšeme algoritmus, jak úpravami převést rozšířenou matici soustavy na tento speciální tvar.

**Definice 1.** Řekneme, že matice  $A'$  vznikne z matice  $A$  **elementární úpravou**, pokud  $A'$  vznikla z  $A$  buď

1. vynásobením některého řádku nenulovým číslem, nebo
2. tak, že k nějakému řádku  $A$  byl přičten libovolný násobek jiného řádku  $A$ , nebo
3. změnou pořadí řádků, nebo
4. doplněním nebo vynecháním řádku obsahujícího pouze nuly.

Je hned vidět, že pokud  $A'$  vznikne z  $A$  elementární úpravou, pak také  $A$  vznikne z  $A'$  elementární úpravou, jedná se tedy o symetrickou relaci. Je to také relace reflexivní, protože  $A$  vznikne z  $A$  elementární úpravou. Je to relace ekvivalence? A je ekvivalencí relace "vzniknout konečnou posloupností elementárních úprav"? Všimněte si také, že pokud bychom v prvním typu úpravy vynechali slovo "nenulovým" nebo ve druhém typu slovo "jiného", relace by už symetrická nebyla - najděte vhodný příklad!

**Lemma 1.** *Pokud rozšířená matice  $(A'|b')$  vznikne z rozšířené matice  $(A|b)$  elementární úpravou, pak mají příslušné soustavy rovnic stejnou množinu řešení.*

*Důkaz.* Potřebujeme ověřit, že každé řešení soustavy s rozšířenou maticí  $(A|b)$  je zároveň řešením soustavy s rozšířenou maticí  $(A'|b')$ , a naopak, že každé řešení soustavy  $(A'|b')$  je řešením soustavy  $(A|b)$ . Ve skutečnosti nám ale stačí jen jeden směr, protože "vzniknout elementární úpravou" je symetrická relace. Předpokládejme tedy, že  $n$ -tice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  vyhovuje rovnicím

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Pokud  $A'$  vznikne z  $A$  vynásobením  $k$ -tého řádku číslem  $r \neq 0$ , vidíme, že rovnice

$$\sum_{j=1}^n r a_{kj} x_j = r b_k$$

je také splněna a ostatní rovnice se nezměnily, tedy

$$\sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j = b'_i$$

pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Podobně pokud  $A'$  vznikne přičtením  $s$ -násobku  $l$ -tého řádku do  $k$ -tého řádku, pak  $k$ -tá rovnice soustavy  $(A'|b')$

$$\sum_{j=1}^n a'_{kj} x_j = \sum_{j=1}^n (a_{kj} + s a_{lj}) x_j = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + s \sum_{j=1}^n a_{lj} x_j = b_k + s b_l = b'_k$$

je splněna a ostatní rovnice zůstaly opět beze změn.

Změna pořadí rovnic samozřejmě množinu řešení nemění a nulové řádky odpovídají rovnicím splněným pro libovolnou  $n$ -tici  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , které tím pádem můžeme přidávat i ubírat bez omezení.  $\square$

Podívejme se nyní na konkrétní soustavu rovnic (nad  $\mathbb{R}$ ) s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Poslední řádek matice vyjadřuje rovnici  $x_5 - 2x_6 = 4$ . Její řešení je jednoduché: k libovolně zvolené hodnotě neznámé  $x_6$  lze dopočítat hodnotu  $x_5$  (a naopak). Pokud tedy zvolíme  $x_6$  **volnou neznámou**, má poslední rovnice řešení  $x_5 = 4 + 2x_6, x_6 \in \mathbb{R}$  (a samozřejmě  $x_1$  až  $x_4$  mohou být libovolné). Dosadíme toto řešení do předchozí rovnice  $2x_2 + 6x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 0$ , po úpravě získáme

$$x_2 = 2 - 3x_3 + x_4 + 3x_6$$

Vidíme, že můžeme přidat k volným neznámým  $x_3$  a  $x_4$ , dopočítat  $x_2$  a získat tak všechna řešení třetí rovnice, která jsou zároveň řešením rovnice druhé. Nakonec dosadíme do rovnice první a zjistíme, že

$$x_1 = 9 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_6$$

Žádná další možnost volby se neobjevila, hodnoty volných neznámých  $x_3, x_4$  a  $x_6$  určují i hodnotu neznámé  $x_1$ . Množina řešení této soustavy tří rovnic tedy je

$$\{(9 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_6, 2 - 3x_3 + x_4 + 3x_6, x_3, x_4, 4 + 2x_6, x_6) \mid x_3, x_4, x_6 \in \mathbb{R}\}$$

Řešení této soustavy jsme našli tak snadno proto, že ne všechny rovnice obsahovaly všechny neznámé. Nulové koeficienty v levé spodní části matice umožňují postupně dosazovat řešení odspodu matice. Pro matice tohoto typu si zavedeme dva nové pojmy:

**Definice 2.** Řekneme, že matice je v **odstupňovaném tvaru**, pokud první nenulový koeficient zleva v každém řádku má vyšší sloupcový index (je více vpravo) než první nenulový koeficient v předchozím řádku. Tento první nenulový koeficient každého řádku matice v odstupňovaném tvaru se nazývá **pivot** a sloupec, v němž se nachází, **pivotní sloupec**. Řekneme, že matice je v **redukovaném odstupňovaném tvaru**, pokud navíc je první nenulový koeficient v každém řádku roven jedné a zároveň je tento koeficient jediným nenulovým koeficientem ve svém sloupci.

Vidíme, že matice z našeho příkladu je v odstupňovaném tvaru, není ale v redukovaném odstupňovaném tvaru. Lze ovšem provést elementární úpravy, jimiž z ní matice v redukovaném odstupňovaném tvaru vznikne:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \\ \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nejprve jsme přičetli třetí řádek do druhého, pak násobili druhý řádek číslem  $\frac{1}{2}$  a nakonec přičetli  $(-1)$ -násobek druhého řádku k prvnímu. Je zřejmé, že stejně můžeme postupovat v obecném případě: přenásobit každý řádek takovým číslem, aby první nenulový koeficient byl roven jedné, a přičítat vhodné násobky každého řádku k předchozím řádkům, aby ve sloupci prvního nenulového koeficientu vznikaly nuly i nad ním (pod ním už jsou).

Vyřešit soustavu v redukovaném odstupňovaném tvaru je ještě jednodušší: každá rovnice závisí vedle volných neznámých už jen na jedné další neznámé,



kteřou tedy můžeme z rovnice vyjádřit ve volných neznámých. Bývá zvykem psát řešení pomocí parametrů odpovídajících volným neznámým, v našem případě například

$$\begin{aligned}x_6 &= t \\x_5 &= 4 + 2t \\x_4 &= s \\x_3 &= r \\x_2 &= 2 - 3r + s + 3t \\x_1 &= 9 + 2r + 2s + 3t\end{aligned}$$

$$\forall r, s, t \in \mathbb{R}$$

Časem přejdeme k elegantnějšímu zápisu pomocí tzv. báze prostoru řešení. Řešení je samozřejmě totožné s tím, které jsme obdrželi pro matici v neredukovaném tvaru, protože elementární úpravy množinu řešení zachovávají.

Zbývá nám už jen se přesvědčit, že každou matici lze posloupností elementárních úprav převést na odstupňovaný tvar. Algoritmus, kterým toho dosáhneme, se nazývá **Gaussova eliminace** a brzy uvidíme, že je v lineární algebře prakticky všudypřítomný. Můžeme jej shrnout do následující posloupnosti kroků:

1. Najdeme nějaký řádek, jehož první nenulový koeficient nemá větší sloupcový index než první nenulový koeficient v nějakém jiném řádku. Označme si zde tento sloupcový index  $k$ . Pokud takový řádek neexistuje, pak musí být všechny koeficienty nulové a taková matice je v odstupňovaném tvaru.
2. Změňme pořadí řádků posunutím řádku nalezeného v předchozím bodě na první pozici. Pokud označíme vzniklou matici  $A$ , pak  $a_{1k} \neq 0$  a zároveň  $a_{ij} = 0$  pro libovolné  $i$  a pro všechna  $j < k$ . Zvolené  $a_{1k}$  se stane pivotem v budoucím odstupňovaném tvaru, proto se tomuto kroku říká **pivotace**.
3. Pro  $i = \{2, \dots, m\}$  přičteme do  $i$ -tého řádku  $\left(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}}\right)$ -násobek prvního řádku. Po této posloupnosti elementárních úprav vznikne matice, která má na pozicích zmíněných v předchozím bodě stále nuly a navíc jsou nulové i všechny koeficienty v  $k$ -tém sloupci kromě pivotu.

4. Aplikujme celý algoritmus na podmatici vzniklou vynecháním prvního řádku.

Je zřejmé, že tímto rekurzivním postupem převedeme libovolnou matici na matici v odstupňovaném tvaru. Na několika místech algoritmu máme určitou libovůli, na níž může záviset i výsledný odstupňovaný a redukovaný odstupňovaný tvar. I množina řešení proto může být popsána více způsoby, u nichž není na první pohled zřejmé, že jsou ekvivalentní.

*Příklad.* Pro ilustraci zkusme vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

Zapišeme rozšířenou matici soustavy a provedeme pivotaci:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array} \right)$$

Pod pivotem prvního řádku chceme získat nuly, proto přičteme  $(-1)$ -násobek prvního řádku ke druhému. Poté aplikujeme celý algoritmus na druhý a třetí řádek:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Přičítali jsme  $(-\frac{3}{2})$ -násobek druhého řádku ke třetímu. Matice je nyní v odstupňovaném tvaru a lze ji dále převést na redukovaný odstupňovaný tvar:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

První matice vznikla přičtením  $(-2)$ -násobku třetího řádku ke druhému a  $(-6)$ -násobku třetího řádku k prvnímu. Další  $\sim$  shrnuje opět dvě úpravy - násobení druhého řádku číslem  $\frac{1}{2}$  a poté přičtení devítinásobku nového druhého řádku k prvnímu. Nakonec jen násobíme první řádek jednou třetinou a jsme hotovi. Řešení pak má tvar

$$\{(-24 + 2s - 3t, -7 + 2s - 2t, s, t, 4) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Z odstupňovaného tvaru můžeme ihned usoudit na počet řešení, které soustava rovnic má:

**Věta 1.** *Nechť  $(A|b)$  je rozšířená matice soustavy a rozšířená matice  $(A'|b')$  v odstupňovaném tvaru z ní vznikne konečnou posloupností elementárních úprav. Pak soustava s rozšířenou maticí  $(A|b)$  má řešení právě tehdy, když sloupec  $b'$  není pivotní. Pokud soustava s rozšířenou maticí  $(A|b)$  má řešení, pak je toto řešení právě jedno, právě když všechny sloupce matice soustavy  $A'$  jsou pivotní. V opačném případě existuje nekonečně mnoho řešení soustavy.*

*Důkaz.* Pokud je sloupec  $b'$  pivotní, pak v matici  $(A'|b')$  existuje řádek tvaru  $(00\dots 0|b'_p)$ , kde  $b'_p \neq 0$ . Takový řádek ale odpovídá rovnici, kterou nelze splnit pro žádnou  $n$ -tici  $(x_1, \dots, x_n)$ . Pokud naopak sloupec  $b'$  pivotní není, pak všechny řádky v  $(A'|b')$  (a stejně tak i v jejím redukovaném tvaru) mají svůj pivot v matici soustavy  $A'$ . Pokud v  $A'$  zbývají ještě sloupce, které neobsahují pivot, pak lze příslušné neznámé položit za parametry a neznámé odpovídající pivotním sloupcům dopočítat, řešení je pak nekonečně mnoho. Pokud žádné takové sloupce nezůstávají, vyjadřuje každý řádek v redukovaném odstupňovaném tvaru přímo hodnotu některé neznámé a řešení je tedy jednoznačné.  $\square$

*Příklad.* Soustava rovnic s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -8 & -8 & -15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

nemá žádné řešení, protože sloupec pravých stran poslední matice je pivotní. Soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

má jediné řešení  $(x_1, x_2) = (2, -1)$ .

**Cvičení**

1. (4) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 16 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 27 \end{aligned}$$

2. (4) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. (4) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4. (4) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

5. (4) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. (4) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

7. **(3)** Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ix_1 + x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= -4 + 3i \end{aligned}$$

8. **(3)** Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + (2 + 2i)x_2 + 2ix_3 &= 1 \\ (1 - i)x_1 + (1 + 3i)x_2 + (i - 1)x_3 &= 0 \\ (1 + i)x_1 + (1 - i)x_2 + (1 + i)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

9. **(2)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \end{aligned}$$

10. **(2)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + (a^2 + b^2)x_3 &= b \\ bx_1 + ax_2 + (a^2 + b^2)x_3 &= -a \\ x_1 + x_2 + (a + b)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11. **(2)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 - x_4 &= a^2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 &= a \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

## Řešení:

1.  $(3, -1, 2)$ , 2. nemá řešení, 3.  $(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}t, \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t, t), t \in \mathbb{R}$ , 4.  $(2 + s - t, s, 1 + t, t), s, t \in \mathbb{R}$ , 5.  $(1, 1, 1, -1)$ , 6. nemá řešení, 7.  $(1 + i, -i, 3)$ , 8.  $(\frac{1-i}{4} + \frac{1-i}{2}t, \frac{1-i}{4} + \frac{-1+3i}{2}t), t \in \mathbb{C}$ , 9. pro  $a \notin \{1, -2\}$  jediné řešení  $(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2})$ , pro  $a = 1$  nekonečně mnoho řešení tvaru  $(1 - a - b, b, a), a, b \in \mathbb{R}$ , pro  $a = -2$  nemá řešení, 10. pro  $a = b = 0$  nekonečně mnoho řešení tvaru  $(-s, s, t), s, t \in \mathbb{R}$ , pro  $a = b \neq 0$  nemá řešení, jinak jediné řešení  $(-\frac{a+b}{b-a}, 0, \frac{1}{b-a})$ , 11. má řešení pouze pro  $a = \frac{17}{7}$ , všechna řešení mají tvar  $(\frac{60}{7}, -\frac{5}{2} - t, -\frac{1}{14}, t), t \in \mathbb{R}$



# Kapitola 2

## Matice

V minulé přednášce jsme soustavě lineárních rovnic přiřadili tabulku čísel, nazývanou matice, případně rozšířená matice soustavy, pomocí níž bylo možné přehledně formulovat postup vedoucí k vyřešení soustavy. Matice jsou ale objekty zasluhující pozornost samy o sobě, lze na nich definovat algebraické operace s velmi zajímavými a užitečnými vlastnostmi.

Označme  $\mathbb{F}$  číselnou množinu, se kterou budeme pracovat,  $\mathbb{F}$  bude buď  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Nechť  $m, n$  jsou přirozená čísla, pak **maticí typu  $m \times n$  nad  $\mathbb{F}$**  nazveme tabulku čísel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde  $a_{ij} \in \mathbb{F}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ . Množinu všech takových matic označíme  $M_{mn}(\mathbb{F})$ . Jednotlivé  $a_{ij}$  nazveme **elementy matice**, matici jako celek označíme písmenem  $A$ . Elementy, jejichž řádkový a sloupcový index se rovnají, označujeme dohromady za **diagonálu** matice. Pokud  $m = n$ , máme co do činění se **čtvercovou maticí** - diagonála je pak skutečně souhrn elementů ležících na diagonále čtvercové tabulky. **Nulová matice** je taková, jejíž všechny elementy jsou rovny nule, označíme ji  $0$ . **Součtem matic**  $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$  nazveme matici, jejíž element na pozici  $ij$  je roven  $a_{ij} + b_{ij}$  pro všechny indexy  $i$  a  $j$ . Operace sčítání matic splňuje mimo jiné následující vlastnosti:

1.  $\forall A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ,  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (**asociativita**)

2.  $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{F}), A + 0 = 0 + A = A$  (0 je **neutrální prvek**)
3.  $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{F}) \exists (-A) \in M_{mn}(\mathbb{F}), A + (-A) = 0$  (existence **opačného prvku**)
4.  $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{F}), A + B = B + A$  (**komutativita**)

Opačným prvkem  $(-A)$  k matici  $A$  je samozřejmě matice, jejíž elementy mají tvar  $-a_{ij}$ . Množina s operací splňující tato čtyři pravidla se nazývá **komutativní grupa**, o trochu více se o grupách zmíníme v příští přednášce.

Matici  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  můžeme také vynásobit libovolným číslem  $r \in \mathbb{F}$ , výsledná matice  $rA$  má elementy  $ra_{ij}$ . Mnohem zajímavější operací je ale násobení matic mezi sebou:

**Definice 3.** Necht  $m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_{mp}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{pn}(\mathbb{F})$ . Pak definujeme **součin**  $AB \in M_{mn}(\mathbb{F})$  těchto matic jako matici, jejíž element na pozici  $ij$  je roven

$$\sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

pro všechna  $i \in \{1, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Se součinem matic jsme se ve skutečnosti už setkali. Označme  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  matici soustavy  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých, dále  $x$  matici typu  $n \times 1$  složenou z neznámých a  $b$  matici typu  $m \times 1$  složenou z pravých stran:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Pak součin matic  $Ax$  je podle definice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

a soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí  $(A|b)$  tedy vlastně odpovídá hledání matice  $x$ , pro níž je splněna rovnost matic  $Ax = b$ . Tímto způsobem budeme skutečně v budoucnu soustavy rovnic obvykle zapisovat.



Geometrický význam maticového násobení je dobře vidět z následujícího příkladu. Uvažujme bod o souřadnicích  $(x, y)$  v rovině a transformaci, která jej pootočí o úhel  $\alpha$  okolo počátku proti směru hodinových ručiček do nové polohy  $(x', y')$ . Pokud označíme  $r$  vzdálenost (původního i pootočeného) bodu od počátku a  $\phi$  úhel, který svírá spojnice  $(x, y)$  a počátku s osou  $x$ , můžeme vypočítat novou polohu pomocí staré:

$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\alpha + \phi) = r \cos \alpha \cos \phi - r \sin \alpha \sin \phi = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= r \sin(\alpha + \phi) = r \sin \alpha \cos \phi + r \cos \alpha \sin \phi = x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

Vidíme, že  $x'$  a  $y'$  závisí na  $x$  a  $y$  lineárně a tuto závislost lze přepsat pomocí násobení matic:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Označme matici  $2 \times 2$  symbolem  $R(\alpha)$ , zjevně nějak reprezentuje transformaci samotnou v závislosti na  $\alpha$ . Pootočení bodu  $(x', y')$  o úhel  $\beta$  bude pak realizováno násobením maticí  $R(\beta)$ :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= R(\beta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \cos \beta - (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta \\ (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \sin \beta + (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - y(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ x(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) - y(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Po úpravě snadno ověříme, že pravá strana je totožná s aplikací součinu matic  $R(\alpha)$  a  $R(\beta)$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

na bod  $(x, y)$ .

Tedy součin matic odpovídá skládání odpovídajících transformací. Aplikací součtových vzorců zjišťujeme, že  $R(\beta)R(\alpha) = R(\beta + \alpha)$ , což odpovídá prostému faktu, že rotace o  $\alpha$  následovaná rotací o  $\beta$  je vlastně rotace o součet

těchto úhlů. V kapitole o lineárních zobrazeních si skutečně ukážeme, že na první pohled neintuitivní zavedení maticového násobení se stane naprosto přirozeným, jakmile začneme chápat matice jako reprezentanty lineárních zobrazení.

Násobení matic se někdy označuje i jako **násobení řádek-sloupec**, což odpovídá tomu, že  $ij$ -tý element součinu získáme z  $i$ -tého řádku první matice a  $j$ -tého sloupce druhé matice jako součet součinů odpovídajících si prvků. Nelze tedy vynásobit jakékoli dvě matice, musí se rovnat počet sloupců první matice a počet řádků druhé. Součin „zdedí“ po první matici počet řádků a po druhé počet sloupců. Z toho plyne, že

1. pokud je součin  $AB$  definován, pak součin  $BA$  definován být nemusí,
2. pokud je  $BA$  definován také, nemusí být stejného typu jako  $AB$ ,
3. a ani pokud je definován a stejného typu, nemusí se  $BA$  rovnat  $AB$ .

Najděte příklady ilustrující všechny tři situace! Násobení matic tedy není obecně komutativní.

**Lemma 2.** *Nechť  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ,  $B, D \in M_{np}(\mathbb{F})$ ,  $C, F \in M_{pq}(\mathbb{F})$ . Pak platí*

1.  $A(BC) = (AB)C$  (asociativita)
2.  $\forall k \in \mathbb{N} \exists E_k \in M_{kk}(\mathbb{F})$  taková, že  $E_m A = A$  a  $A E_n = A$  (jednotková matice)
3.  $B(C + F) = BC + BF$ ,  $(B + D)C = BC + DC$  (distributivita)

*Důkaz.* 1.  $ij$ -tý element na levé straně je roven

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \left( \sum_{l=1}^p b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

a na stejný výraz se dá upravit i pravá strana.

2. Jednotková matice stupně  $n$  je čtvercová matice mající na diagonále jedničky a mimo diagonálu nuly:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Splnění rovností se pak snadno ověří. Pokud nebude hrozit nedorozumění, index  $v$  označení jednotkové matice vynecháme a budeme ji značit prostě  $E$ .

3. Ověřte sami.

□

*Příklad.* Pokud  $A$  je čtvercová matice, můžeme ji násobit samu se sebou a tedy definovat mocninu  $A^n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Analogicky jako u čísel je přirozené dodefinovat  $A^0 = E$ . Zkusme si pro zajímavost spočítat mocniny matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Už z několika prvních mocnin vidíme systém:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nabízející se hypotézu

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

dokážeme matematickou indukcí.

1. Ověříme, že dokazované tvrzení platí pro  $n = 0$ .
2. Pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  ukážeme, že pokud tvrzení platí pro  $n$ , pak platí i pro  $n + 1$ .

První bod plyne ihned z  $A^0 = E$ . Druhý bod ověříme výpočtem:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Elementární úpravy, které se používají při řešení soustavy rovnic, je možné chápat jako výsledek násobení matic. Pokud  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je libovolná matice a  $U_{k,r} \in M_{mm}(\mathbb{F})$  je matice, lišící se od jednotkové matice jen elementem na pozici  $kk$ , který má hodnotu  $r$ , pak matice  $U_{k,r}A$  vznikne z  $A$  vynásobením  $k$ -tého řádku číslem  $r$ . Podobně matice  $V_{k,l,s} \in M_{mm}(\mathbb{F})$  se liší od jednotkové matice jen elementem na pozici  $kl$ , který je roven  $s \in \mathbb{F}$ , a  $V_{k,l,s}A$  vznikne z  $A$  přičtením  $s$ -násobku  $l$ -tého řádku do  $k$ -tého. Zkuste si sami rozmyslet, jak vypadá matice realizující výměnu  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku.

Další styčný bod mezi násobením matic se soustavami lineárních rovnic nabízí maticová rovnice typu  $AX = B$ , kde  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{mp}(\mathbb{F})$  jsou pevné matice a  $X \in M_{np}(\mathbb{F})$  je neznámá matice. V součinu matic  $AX$  závisí  $j$ -tý sloupec pouze na  $j$ -tém sloupci matice  $X$ . Proto jsou neznámé elementy  $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$  tohoto sloupce řešením soustavy rovnic s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_{mj} \end{array} \right)$$

Úpravy, které budeme při řešení této soustavy rovnic provádět, abychom ji dostali do odstupňovaného tvaru, nezávisí na pravé straně, pouze na matici  $A$ . Můžeme tak stejně dobře psát za svislou čáru všechny pravé strany, pro které nás řešení zajímá, tedy celou matici  $B$ . Existenci řešení a jejich počet pak odečteme po úpravě matice  $(A|B)$  na odstupňovaný tvar. Je zřejmé, že ve výsledné matici  $X$  budou všechny sloupce záviset na stejném počtu parametrů, rovném počtu nepivotních sloupců v odstupňovaném tvaru matice  $A$ .

Zvláštní pozornost zasluhuje situace, kdy  $A$  je čtvercová matice a po úpravě na odstupňovaný tvar jsou všechny sloupce pivotní. Pak upravená rozšířená matice vypadá jako  $(E|B')$ , kde  $B'$  je nějaká matice. Přitom elementárními úpravami, kterými jsme k tomuto tvaru dospěli, odpovídají matice úprav, označme je popořadě  $U_1, U_2, \dots, U_q$ . Takže po první úpravě máme před svislou čarou  $U_1A$ , po druhé úpravě  $U_2U_1A$ , až nakonec  $U_qU_{q-1}\dots U_1A = E$ . Matice  $B'$  je potom rovna  $U_qU_{q-1}\dots U_1B$ . Součin  $U_qU_{q-1}\dots U_1$  matic úprav označme  $A^{-1}$ , protože vztah  $A^{-1}A = E$  je analogií vztahu  $a^{-1}a = 1$  pro čísla.

**Definice 4.** Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ . Pokud existuje matice  $A^{-1} \in M_{nn}(\mathbb{F})$  splňující  $A^{-1}A = E$ , pak říkáme, že matice  $A$  je **regulární** a  $A^{-1}$  je její

**inverzní matice.** Čtvercová matice, která nemá inverzní matici, se nazývá **singulární**.

**Lemma 3.** *Nechť  $A$  je čtvercová matice, kterou lze upravit na jednotkovou matici. Pak  $A$  je regulární, existuje právě jedna matice  $C$  splňující  $AC = E$ , právě jedna matice  $D$  splňující  $DA = E$  a  $D = C = A^{-1}$ .*

*Důkaz.* Uvažujme maticovou rovnici  $AX = E$ , která odpovídá soustavě rovnic s rozšířenou maticí  $(A|E)$ . Podle předpokladu existuje posloupnost elementárních úprav s maticemi  $U_1, \dots, U_q$  takových, že  $U_q \dots U_1 A = E$  a podle definice je  $A$  regulární,  $A^{-1} = U_q \dots U_1$ . Po úpravě má rozšířená matice tvar  $(E|U_q \dots U_1 E)$ , takže soustava rovnic má řešení  $X = A^{-1}$ . Tím jsme dokázali existenční část tvrzení. Pro libovolnou matici  $D$  splňující  $E = DA$  musí platit  $A^{-1} = DAA^{-1} = D$  a podobně pro libovolnou matici  $C$  splňující  $E = AC$  platí  $A^{-1} = A^{-1}AC = C$ , čímž je dokázána i jednoznačnost.  $\square$

Vidíme, že ačkoli násobení matic není obecně komutativní, matice a její inverzní matice komutují vždy,  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ . Metoda důkazu zároveň dává i metodu výpočtu inverzní matice: stačí upravit rozšířenou matici  $(A|E)$  na tvar  $(E|D)$  a matice  $D$  pak musí být  $A^{-1}$ . Zatím ale ještě nevíme, jestli selhání této metody znamená, že je daná matice singulární.

*Příklad.* Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Upravujeme tedy rozšířenou matici odpovídající maticové rovnici  $AX = E$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hledaná inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

jak snadno ověříme vynásobením s  $A$ .

**Lemma 4.** *Nechť  $A, B \in M_{nn}(\mathbb{F})$  jsou regulární matice. Pak  $A^{-1}$  a  $AB$  jsou regulární a  $(A^{-1})^{-1} = A$  a  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .*

*Důkaz.* Platí  $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E$  a zároveň  $AA^{-1} = E$ , tudíž díky jednoznačnosti inverzní matice k  $A^{-1}$  musí být  $(A^{-1})^{-1} = A$ . Podobně  $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E$ , tudíž  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .  $\square$

## Cvičení

1. (3) Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (3) Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3) Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (3) Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **(3)** Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. **(3)** Najděte matici  $X$ , pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

8. **(3)** Najděte matici  $X$ , která splňuje  $AX = XA$  pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

10. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

11. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

12. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

13. (4) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

14. (4) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

15. (4) Najděte nenulovou matici  $A$ , pro kterou  $A^2 = 0$ .
16. (3) Najděte matici  $A$ , pro kterou  $A^2 \neq 0$ , ale  $A^3 = 0$ .
17. (2) Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  najděte matici  $A$ , pro kterou  $A^n \neq 0$ , ale  $A^{n+1} = 0$ .
18. (3) Dokažte, že pro dvě čtvercové matice  $A, B$  platí  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , právě když  $AB = BA$ .
19. (2) Nechť  $A, B$  jsou dvě čtvercové matice,  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažte, že pokud  $AB = BA$ , pak

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

20. (3) Označme jako  $J_n \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je matici, pro niž  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $(J_n)_{i,i+1} = 1$  a všechny ostatní elementy matice  $J_n$  jsou nuly. Určete  $(J_n)^k$  pro všechna  $k \geq 0$ .
21. (3) Zjistěte, pro která  $k \in \mathbb{Z}$  má smysl a spočtěte

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}^k$$

22. (3) Jak se změní součin matic  $AB$ , pokud v matici  $A$  vyměníme  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek? Zdůvodněte.
23. (3) Jak se změní součin matic  $AB$ , pokud v matici  $A$  vynásobíme  $i$ -tý řádek číslem  $c$ ? Zdůvodněte.



24. **(3)** Jak se změní součin matic  $AB$ , pokud v matici  $B$  vyměníme  $i$ -tý a  $j$ -tý sloupec? Zdůvodněte.
25. **(3)** Jak se změní součin matic  $AB$ , pokud v matici  $B$  vynásobíme  $i$ -tý sloupec číslem  $c$ ? Zdůvodněte.
26. **(3)** Jak se změní  $A^{-1}$ , pokud v matici  $A$  vyměníme  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek? Zdůvodněte.
27. **(3)** Jak se změní  $A^{-1}$ , pokud v matici  $A$  vynásobíme  $i$ -tý řádek číslem  $c$ ? Zdůvodněte.
28. **(3)** Jak se změní  $A^{-1}$ , pokud v matici  $A$  vyměníme  $i$ -tý a  $j$ -tý sloupec? Zdůvodněte.
29. **(3)** Jak se změní  $A^{-1}$ , pokud v matici  $A$  vynásobíme  $i$ -tý sloupec číslem  $c$ ? Zdůvodněte.
30. **(3) Stopa**  $\text{Tr } A$  čtvercové matice  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je součet všech elementů na diagonále  $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Dokažte, že pro libovolné dvě matice  $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ .
31. **(2)** Zobecněte předchozí tvrzení na případ stopy součinu více než dvou matic.
32. **(1)** Řekneme, že matice  $A, B$  **komutují**, pokud  $AB = BA$ . Dokažte, že pokud nějaká matice komutuje se všemi maticemi z  $M_{nn}(\mathbb{R})$ , pak musí být násobkem jednotkové matice.
33. **(2)** Dokažte, že čtvercová matice  $A$  komutuje se všemi diagonálními maticemi, právě když je sama diagonální.
34. **(2)** Dokažte, že pokud  $A$  je čtvercová diagonální matice, která má všechny elementy na diagonále navzájem různé, pak každá matice, která s  $A$  komutuje, už musí být diagonální.
35. **(4)** Necht'  $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$  je polynom a

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

matice. Spočtete  $p(A)$ .

36. **(2)** Dokažte, že pro žádné dvě matice není splněna rovnost  $AB - BA = E$ .
37. **(3)** Najděte všechny matice  $A \in M_{22}(\mathbb{F})$ , pro něž  $A^2 = E$ .
38. **(3)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

39. **(3)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

40. **(3)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41. **(2)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

42. (2) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. (1) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1+a & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

44. (1) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

45. (1) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+nh \\ a+nh & a & a+h & \dots & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a+nh & a & \dots & a+(n-2)h \\ \vdots & & & \ddots & a+h \\ a+h & a+2h & \dots & a+nh & a \end{pmatrix}$$

46. (1) Nechť  $\epsilon = \exp\left(i\frac{2\pi}{n+1}\right)$ . Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^n \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \epsilon^{n(n-1)} \\ 1 & \epsilon^n & \dots & \epsilon^{n(n-1)} & \epsilon^{n^2} \end{pmatrix}$$

47. **(3)** Řešte maticovou rovnici

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

48. **(3)** Řešte maticovou rovnici

$$X \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

49. **(3)** Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

50. **(2)** Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

51. **(2)** Necht'  $A \in M_{mk}(\mathbb{F}), B \in M_{ml}(\mathbb{F}), C \in M_{nk}(\mathbb{F}), D \in M_{nl}(\mathbb{F})$ . Zápisu matice z  $M_{m+n, k+l}(\mathbb{F})$

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

říkáme zápis v blokovém tvaru. Ukažte, že pokud máme matici  $Y \in M_{k+l, p+q}(\mathbb{F})$  také zapsanou v blokovém tvaru

$$Y = \begin{pmatrix} F & G \\ H & I \end{pmatrix},$$

kde  $F \in M_{kp}(\mathbb{F}), G \in M_{kq}(\mathbb{F}), H \in M_{lp}(\mathbb{F}), I \in M_{lq}(\mathbb{F})$ , pak

$$XY = \begin{pmatrix} AF + BH & AG + BI \\ CF + DH & CG + DI \end{pmatrix}$$

52. **(2)** Necht'  $U \in M_{mn}(\mathbb{F})$ . Najděte inverzní matici k matici zapsané v blokovém tvaru

$$\begin{pmatrix} E_m & U \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

53. **(1)** Horní (resp. dolní) trojúhelníková matice je taková, jejíž elementy pod (resp. nad) hlavní diagonálou jsou všechny nulové. Dokažte, že libovolnou matici lze napsat jako součin horní trojúhelníkové matice a dolní trojúhelníkové matice.
54. **(2)** Dokažte, že inverzní matice k horní (resp. dolní) trojúhelníkové matici je opět horní (resp. dolní) trojúhelníková.
55. **(2)** Při výpočtech na počítači trvá násobení dvou reálných čísel mnohem déle než sčítání. Proto ze při násobení více matic vyplatí využít asociativity a uzávkovat je tak, aby počet násobení byl co nejmenší. V jakém pořadí je nejlepší provést součin matic  $5, 10 \times 20, 20 \times 5$  a  $5 \times 1$ ?
56. **(HC)** Najděte způsob, jak vynásobit dvě  $2 \times 2$  matice tak, abyste místo osmkrát potřebovali násobit jenom sedmkrát.

## Řešení:

1.  $\begin{pmatrix} r + \frac{2}{3} & s - \frac{5}{3} & t - 1 \\ -2r & 2 - 2s & 1 - 2t \\ r & s & t \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}$ ; 2. nemá řešení; 3.  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;
4.  $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ; 5. nemá řešení; 6.  $\begin{pmatrix} r + \frac{1}{2} & s + \frac{1}{2} & t \\ r & s & t \\ -3r + \frac{1}{2} & -3s + \frac{1}{2} & -3t \\ -3r + 1 & -3s & -3t + 1 \end{pmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}$ ;
7.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ ; 8.  $\begin{pmatrix} s + t & -s \\ s & t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$ ; 9.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ;

$$10. \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 11. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; 12. \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 13. \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$
$$14. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Kapitola 3

## Vektorové prostory

Jednou z nejdůležitějších algebraických struktur je struktura grupy. Jedná se o množinu s jednou binární operací, splňující tři jednoduché axiomy. Axiomy dostatečně silné, aby z nich plynuly zajímavé vlastnosti, ale zase natolik volné, že spektrum objektů, které je splňují, zůstává velmi pestré.

**Definice 5.** Dvojice  $(G, \odot)$ , kde  $G$  je množina a  $\odot$  binární operace na ní, se nazývá **grupou**, pokud:

1.  $\forall a, b, c \in G, a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$  (asociativita)
2.  $\exists e \in G, \forall a \in G, e \odot a = a \odot e = a$  (neutrální prvek)
3.  $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = e$  (inverzní prvky)

Grupou nazveme **komutativní** (nebo též **abelovskou**), pokud navíc  $\forall a, b \in G, a \odot b = b \odot a$ .

S těmito podmínkami jsme se setkali už v minulé přednášce, splňovalo je sčítání matic. Další příklady grup zahrnují

1.  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ , neutrální prvek je vždy 0 a inverzní prvek k  $x$  je vždy  $-x$ .  $(\mathbb{N}, +)$  grupa není, chybí inverzní prvky. Množina všech lichých čísel se sčítáním grupa není.
2.  $(\mathbb{R}^n, +)$ , kde  $\mathbb{R}^n$  je množina uspořádaných  $n$ -tic a  $+$  je sčítání po složkách. Totéž s  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$  místo  $\mathbb{R}$ . Množina všech matic typu  $m \times n$  nad  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$  je vlastně množina  $mn$ -tic uspořádaných do tabulky.

3.  $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ , neutrální prvek je 1, inverzní prvek k  $x$  je  $\frac{1}{x}$ . Všimněte si, že musíme vždy vyjmout nulu, protože by k ní neexistoval inverzní prvek vzhledem k násobení.
4. Množina  $\{\pm 1\}$  s operací násobení.
5. Množina všech regulárních matic stupně  $n$  s operací maticového násobení. V minulé přednášce jsme ověřili, že násobení matic je asociativní, že jednotková matice je regulární a že splňuje  $EA = AE = A$  pro každou čtvercovou matici  $A$ . Dále že každá regulární matice má inverzní  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , která je také regulární, a nakonec, že součin dvou regulárních matic je také regulární. Komutativní axiom ale obecně neplatí (najděte příklad!). Různé grupy matic poskytují bohatý zdroj příkladů nekomutativních grup.

6. Množina matic

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

s operací maticového násobení. Opět můžeme ověřit splnění všech axiomů a uzavřenosti množiny na operaci. V minulé přednášce jsme si tyto matice označili  $R(\alpha)$  a ukázali, že  $R(\beta)R(\alpha) = R(\beta + \alpha)$ , množina je tedy na operaci skutečně uzavřená. Asociativita je jasná, protože násobení matic je asociativní pro libovolné matice, jednotkovým prvkem je  $E \equiv R(0)$  a inverzním prvkem k  $R(\alpha)$  je zjevně  $R(-\alpha)$ . Tato grupa matic s operací násobení tedy geometricky odpovídá grupě rotací v rovině s operací skládání.

7. Geometrická verze předchozího příkladu je speciálním případem grup transformací s operací skládání. Příkladem může být grupa rotací v prostoru, grupa všech shodností (tedy translací, rotací a zrcadlení) nebo grupy symetrií, čili grupy shodností zachovávajících nějaký geometrický útvar. Například osmiúhelník v rovině bude zachován každou rotací o 45 stupňů a každým zrcadlením podle přímky jdoucí počátkem a vrcholem nebo středem strany. Krychle v prostoru je zachovávána 24 různými rotacemi. Stejněho druhu jsou grupy symetrie dláždění roviny, jejichž proslulé vyobrazení je zachyceno ve výzdobě maurské Alhambry, nebo grupy krystalografické.
8. V částicové fyzice hrají velkou roli grupy symetrií v neprostorových stupních volnosti, například v prostoru všech možných hodnot spinu.



Studium grup je matematickým oborem samo o sobě, či spíše několika obory. Pro nás zde je definice grupy jen stavebním blokem pro strukturu, která nás v této přednášce zajímá především:

**Definice 6.** Nechť  $\mathbb{F}$  je číselná množina ( $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ ). Komutativní grupu  $(V, +)$ , na níž je navíc definována operace násobení prvků z  $V$  prvky z  $\mathbb{F}$ , nazveme **vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$** , pokud splňuje následující axiomy. Pro všechna  $r, s \in \mathbb{F}$  a pro všechny  $u, v \in V$

1.  $(r + s).v = r.v + s.v$
2.  $r.(u + v) = r.u + r.v$
3.  $(r.s).v = r.(s.v)$
4.  $1.v = v$

Prvky z  $V$  nazýváme **vektory**, prvky z  $\mathbb{F}$  **skaláry**. Neutrální prvek v grupě  $V$  nazýváme **nulový vektor** a značíme  $0$ . Všimněte si, že všechny čtyři axiomy udávají vztah mezi operacemi na číselné množině a operacemi ve vektorovém prostoru. Například ve třetím axiomu znamená první tečka násobení čísel, zatímco zbývající tři operaci násobení vektoru skalárem. Z těchto axiomů můžeme dokázat další jednoduché vlastnosti:

**Lemma 5.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $v \in V$ ,  $r \in \mathbb{F}$ . Pak platí*

1.  $0.v = 0$
2.  $(-1).v = -v$
3.  $r.0 = 0$

*Důkaz.* Tvrzení vypadají na první pohled triviálně, ale u každého je potřeba si uvědomit, že stejné symboly nemusejí znamenat stejné objekty: například symbol  $0$  označuje jak nulový vektor, tak nulu v číselné množině. První tvrzení se dokáže následovně:

$$0 = (-v) + v = (-v) + (1 + 0).v = (-v) + v + (0.v) = 0 + 0.v = 0.v$$

Nejprve jsme využili axiom existence opačného prvku v grupě, poté čtvrtý axiom vektorového prostoru, pak první axiom, dále opět opačný prvek v grupě a nakonec vlastnost neutrálního prvku v grupě. Zbývá dvě tvrzení zkuste dokázat sami, je to zábavné a užitečné cvičení.  $\square$

*Poznámka.* Vektorový prostor si s ohledem na naše potřeby definujeme pouze reálný nebo komplexní a využíváme toho, že algebraické vlastnosti těchto číselných množin nepotřebují dalšího komentáře. Obecně se ale vektorové prostory definují nad strukturou **tělesa**, která je definována svou vlastní sadou axiomů. Zobecněním vektorového prostoru je pojem **modulu**, u kterého stačí, aby číselná množina byla **okruhem**. Například množina  $\mathbb{Z}$  je okruh, který není tělesem, protože  $\mathbb{Z}$  neobsahuje inverzní prvky k násobení.

Základními příklady vektorových prostorů jsou komutativní grupy  $(\mathbb{F}^n, +)$ , kde násobení číslem z  $\mathbb{F}$  je definováno po složkách. Někdy mluvíme o **aritmickém vektorovém prostoru** a značíme jej prostě  $\mathbb{F}^n$ . S těmito vektorovými prostory a s jejich objekty, uspořádanými  $n$ -ticemi čísel, budeme pracovat nejčastěji. Sloupce a řádky matic, sloupec pravých stran soustavy rovnic nebo  $n$ -tice neznámých budou všechno objekty nějakých aritmetických vektorových prostorů. Důležité jsou ale i další příklady:

1. Množina  $M_{mn}(\mathbb{F})$  s operací sčítání matic a násobení matice číslem je speciální případ aritmetického vektorového prostoru.
2. Komutativní grupa  $(\mathbb{C}^n, +)$  s násobením pouze čísly z  $\mathbb{R}$  je vektorový prostor, ale jiný než aritmetický vektorový prostor  $\mathbb{C}^n$ . Vidíme tedy, že na jedné množině může existovat více různých struktur vektorového prostoru.
3. Na množině  $(\mathbb{R}^2, +)$  lze zavést násobení komplexním číslem  $r + is \in \mathbb{C}$  takto:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (r + is).(x, y) := (rx - sy, sx + ry)$$

Definice je ušitá tak, aby se  $x$  a  $y$  vlastně chovaly jako reálná a imaginární část komplexního čísla. Podobně můžeme definovat strukturu komplexního vektorového prostoru na  $(\mathbb{R}^{2n}, +)$  pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ . Znovu vidíme dvě struktury vektorového prostoru na jedné komutativní grupě  $(\mathbb{R}^{2n}, +)$ .

4. Množina všech nekonečných posloupostí z  $\mathbb{F}$  je přímé zobecnění aritmetického vektorového prostoru - i zde se sčítá a násobí po jednotlivých členech. K důkazu stačí ověřit jednotlivé axiomy.
5. Pokud  $M$  je libovolná množina, pak množina  $F(M, \mathbb{F})$  všech funkcí z  $M$  do  $\mathbb{F}$ , na níž jsou  $\forall f, g \in F(M, \mathbb{F}), \forall r \in \mathbb{F}, \forall x \in M$  definovány

operace předpisem

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (rf)(x) &:= r \cdot f(x),\end{aligned}$$

je vektorový prostor. Jaký je vlastně význam tohoto předpisu? První řádka definuje funkci  $f + g$  její hodnotou v bodě  $x$ , a to tak, že pro libovolné  $x \in M$  je tato hodnota součtem hodnot funkcí  $f$  a  $g$  v  $x$ . Druhá obdobně definuje násobek funkce. Volba  $M = \{1, \dots, n\}$  pokrývá případ aritmetického vektorového prostoru, pro

$$M = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$$

máme prostor matic, pro  $M = \mathbb{N}$  zase máme prostor všech nekonečných posloupností. Množina  $M$  žádnou algebraickou strukturu mít nemusí, axiomy plynou z vlastností operací na  $\mathbb{F}$ .

6. Komutativní grupa  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ , na níž je zavedena operace „násobení“  $\times$  prvku  $a \in \mathbb{R}^+$  reálným číslem  $r$  předpisem  $r \times a := a^r$ , tedy jako mocnění, je vektorový prostor. Je skutečně užitečné zkusit si pro tento případ ověřit platnost všech axiomů. Lze podobně definovat strukturu vektorového prostoru na  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?

**Definice 7.** Necht'  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$  a  $W$  je neprázdna podmnožina  $V$  taková, že  $\forall v, w \in W, \forall r \in \mathbb{F}$  platí  $v + w \in W$  a  $rv \in W$ . Pak nazýváme  $W$  **podprostorem** vektorového prostoru  $V$ , značíme  $W \leq V$ .

**Lemma 6.** Necht'  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$  a  $W$  jeho podprostor. Pak  $W$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$ .

*Důkaz.* Podmínky v definici podprostoru zaručují, že součet i násobení jsou uzavřené na  $W$  a tedy jsou na něm jakožto operace dobře definovány. Postupně ověříme axiomy:

1.  $\forall u, v, w \in W$  platí  $u + (v + w) = (u + v) + w$ , neboť  $u, v, w \in V$  a tam to platí. Podobně komutativita.
2. Pro libovolný  $v \in W$  díky uzavřenosti na násobení  $0 \cdot v = 0 \in W$ .
3. Pro všechna  $v \in W$  patří i opačný prvek  $-v = (-1) \cdot v$  znovu do  $W$  díky uzavřenosti na násobení. Pro  $v$  a  $-v$  platí z axiomů na  $V$  rovnost  $v + (-v) = 0$ , takže opačný prvek ve  $V$  je opačným prvkem i ve  $W$ .

4. Všechny tři distributivní axiomy platí ze stejných důvodů jako asociativita a komutativita. Stejně tak axiom  $v = 1.v$ .

□

Následující lemma nám umožní sloučit dvě podmínky charakterizující podprostor do jedné, což učiní následující důkazy o něco elegantnějšími.

**Lemma 7.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$  a  $W$  jeho podmnožina. Pak  $W \leq V$ , právě když  $\forall u, v \in W$  a  $\forall r, s \in \mathbb{F}$  je  $ru + sv \in W$ .*

*Důkaz.* Tvrzení říká, že nějaké dvě podmínky jsou ekvivalentní („právě když“). Je tedy potřeba ověřit, že podmnožina splňující podmínky v definici podprostoru splňuje i podmínku v tvrzení, a naopak, podmnožina splňující podmínku v tvrzení vyhovuje definici. Pokud  $W$  je podprostor,  $u, v \in W$ ,  $r, s \in \mathbb{F}$ , pak  $rv$  i  $su$  patří do  $W$  z druhé podmínky v definici a  $rv + su \in W$  z první podmínky. Naopak, pokud všechny  $u, v \in W$  splňují  $ru + sv \in W$  pro všechny skaláry  $r, s$ , pak stačí zvolit  $r = 1, s = 1$  a získáváme první podmínku v definici, a volbou  $s = 0$  získáváme druhou. □

*Příklad.* Pojem podprostoru umožňuje zkonstruovat mnoho dalších příkladů vektorových prostorů:

1. Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$  a  $v$  vektor v něm. Pak množina  $\langle v \rangle := \{rv \mid r \in \mathbb{F}\}$  je vektorový podprostor  $V$ , který se nazývá **lineární obal**  $v$ . Ve vektorových prostorech, které mají geometrickou interpretaci (třeba  $\mathbb{R}^n$ ), je to vlastně přímka o směru  $v$  procházející počátkem.
2. Nechť  $a_j \in \mathbb{F}$  pro  $j \in \{1, \dots, n\}$ , pak množina  $W_a$  všech vektorů  $x \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ , které splňují lineární rovnici  $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 0$ , je podprostorem  $\mathbb{F}^n$ . Stačí použít ekvivalentní podmínku z lemmatu, neboť pokud  $x, y \in W_a$  a  $r, s \in \mathbb{F}$ , pak

$$\sum_{j=1}^n a_j (rx_j + sy_j) = r \sum_{j=1}^n a_j x_j + s \sum_{j=1}^n a_j y_j = r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0,$$

tedy  $rx + sy \in W_a$ . Všimněte si, že pokud by v rovnici byla pravá strana nenulová, pak by podmínka splněna nebyla a množina řešení by nebyla vektorovým prostorem. Rovnice s nulou na pravé straně se nazývá **homogenní**, s nenulovou pravou stranou **nehomogenní**.

3. Množina všech matic v odstupňovaném tvaru je podprostor množiny všech matic daného typu (ověřte sami).
4. Množina všech omezených posloupností je podprostor množiny všech posloupností. Stačí si uvědomit, že součet dvou omezených posloupností je omezená a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Podobně i množina všech konvergentních posloupností (při ověření využijete větu o algebře limit z matematické analýzy) nebo množina všech posloupností, jejichž  $k$ -tý člen je nulový.
5. Množina  $P(x, \mathbb{F})$  všech polynomů v proměnné  $x$  s koeficienty v  $\mathbb{F}$  je vektorový prostor. Jednak je možné chápat jej jako podprostor prostoru všech funkcí na  $\mathbb{F}$ . Druhá interpretace vychází z toho, že při sčítání polynomů se sčítají příslušné koeficienty u mocnin  $x$  a při násobení polynomu číslem se také násobí posloupnost koeficientů člen po členu. Polynom je tedy možné chápat jako posloupnost čísel z  $\mathbb{F}$ , která má pouze konečný počet nenulových členů. Množina takových posloupností je podprostorem v množině všech posloupností.
6. Množina  $P_k(x, \mathbb{F})$  všech polynomů stupně nejvýše  $k$ . Pokud bychom vynechali slovo nejvýše, chyběl by například nulový vektor.
7. Množina všech omezených funkcí, množina všech spojitých funkcí na  $\mathbb{R}$ , množina všech násobků funkce  $\cos x, \dots$  Pokud  $p \in M$ , pak množina všech funkcí, pro něž  $f(p) = 0$ , je vektorový prostor, zatímco množina všech funkcí, pro něž  $f(p) = 17$ , není. Množiny funkcí zadané podmínkou na existenci a nulovost limity či derivace v nějakém bodě jsou vektorové prostory, opět z vlastností limity a derivace funkce.
8. Podprostor má strukturu vektorového prostoru vždy nad celou číselnou množinou  $\mathbb{F}$ . Tedy  $\mathbb{C}^n$  nad  $\mathbb{R}$  není podprostorem  $\mathbb{C}^n$  nad  $\mathbb{C}$ , ani naopak.

**Definice 8.** Necht'  $I$  je indexová množina a  $\{W_i | i \in I\}$  je systém podprostorů vektorového prostoru  $V$ . Definujme **spojení**  $\bigvee_{i \in I} W_i$  těchto podprostorů jako množinu všech vektorů tvaru  $\sum_{j \in J} w_j$ , kde  $J \subset I$  je nějaká konečná podmnožina,  $w_j \in W_j$ .

Spojení dvou podprostorů se značí  $W_1 \vee W_2$ . Rozmyslete si na příkladech, jaký je rozdíl mezi spojením a sjednocením. Kdy je sjednocení dvou vektorových podprostorů také vektorový podprostor?

**Věta 2.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor,  $I$  je indexová množina a  $\{W_i, i \in I\}$  je systém podprostorů prostoru  $V$  indexovaných  $I$ . Pak platí:*

1. *Průnik těchto podprostorů  $\bigcap_{i \in I} W_i$  je podprostorem  $V$ . Navíc pro každý podprostor  $U \leq V$ , pro nějž  $\forall i \in I, U \leq W_i$ , platí také  $U \leq \bigcap_{i \in I} W_i$ .*
2. *Spojení těchto podprostorů  $\bigvee_{i \in I} W_i$  je podprostorem  $V$ . Navíc pro každý podprostor  $U \leq V$ , pro nějž  $\forall i \in I, W_i \leq U$ , platí také  $\bigvee_{i \in I} W_i \leq U$ .*

*Důkaz.* Nechť  $r, s \in \mathbb{R}$ .

1. Pokud  $u, v \in \bigcap_{i \in I} W_i$ , pak  $\forall i \in I, u, v \in W_i$ . Všechny  $W_i$  jsou podprostory, tedy  $\forall i \in I, ru + sv \in W_i$ , čili  $ru + sv \in \bigcap_{i \in I} W_i$ . Druhá část je zřejmá, protože každý podprostor  $U$  všech  $W_i$  je jejich podmnožinou, tudíž také podmnožinou jejich průniku. Protože je  $U$  uzavřen na operaci, je také podprostorem  $\bigcap_{i \in I} W_i$ .
2. Nechť  $u, v \in \bigvee_{i \in I} W_i$ , tedy existují konečné množiny  $J, K$  a vektory  $u_j \in W_j, j \in J$ , a  $v_k \in W_k, k \in K$  takové, že  $u = \sum_{j \in J} u_j, v = \sum_{k \in K} v_k$ . Dodefinujme  $\forall j \in K \setminus J, u_j := 0$ , a  $\forall k \in J \setminus K, v_k := 0$ . Pak platí  $ru_i + sv_i \in W_i$  pro všechna  $i \in J \cup K$  a tedy  $ru + sv = \sum_{i \in J \cup K} ru_i + sv_i \in \bigvee_{i \in I} W_i$ . Tím je dokázána první část druhého tvrzení. Pokud  $U$  je podprostor  $V$  takový, že  $W_i \leq U$  pro všechna  $i \in I$  a  $w \in \bigvee_{i \in I} W_i$ , pak pro nějakou konečnou množinu  $J \subset I$  a pro všechna  $j \in J$  existují vektory  $w_j \in W_j$  takové, že  $w = \sum_{j \in J} w_j$ . Protože  $\forall j \in J, W_j \leq U$ , je pro tato  $j$  také  $w_j \in U$ . Z uzavřenosti  $U$  na součty vektorů  $w \equiv \sum_{j \in J} w_j \in U$ , což jsme měli dokázat.

□

Druhé části obou tvrzení vlastně říkají, že průnik je největší (vzhledem k inkluzi) podprostor obsažený ve všech podprostorech v systému a spojení je nejmenší (vzhledem k inkluzi) podprostor, který obsahuje všechny podprostory v systému. Je důležité mít na paměti, že v definici spojení figurují pouze konečné součty, protože nekonečné nemáme definovány. Jejich definice by vyžadovala zavést na  $V$  nějaký druh konvergence, čímž bychom se ocitli za hranicemi čisté algebry, na prahu funkcionální analýzy.

Na aritmetických vektorových prostorech nás tyto dvě konstrukce vedou ke dvěma základním příkladům podprostorů, které se budou objevovat v početních úlohách:

1. Definujme  $W_i$  jako prostor všech řešení homogenní rovnice  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{F}$ , přičemž  $i$  běží přes množinu  $I = \{1, \dots, m\}$ . Pak  $\bigcap_{i=1}^m W_i$  je množina řešení soustavy rovnic s maticí  $A$  a nulovou pravou stranou. Takovou soustavu rovnic označujeme jako **homogenní** a množinu řešení budeme značit  $W_A$ . První tvrzení věty tedy říká, že množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří podprostor aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{F}^n$ .
2. Necht'  $v_1, v_2, \dots, v_k$  je konečná posloupnost (budeme krátce říkat **skupina**) vektorů z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{F}$ . Definujme  $W_i := \langle v_i \rangle$ , tedy libovolný prvek z  $W_i$  má tvar  $rv_i$  pro nějaké  $r \in \mathbb{F}$ . Pak libovolný prvek z  $\bigvee_{i=1}^k W_i$  má tvar  $\sum_{i=1}^k r_i v_i$ . Tomuto tvaru říkáme **lineární kombinace vektorů ze skupiny  $v_1, v_2, \dots, v_k$  s koeficienty  $r_i$**  a celé množině  $\bigvee_{i=1}^k W_i$  **lineární obal skupiny vektorů**. Značíme jej  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ . Druhé tvrzení věty říká, že je to nejmenší podprostor obsahující množinu vektorů  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ .

Všimněme si, že věta umožňuje mít homogenní soustavu s jakkoli velkým (i nekonečným) počtem rovnic, podobně lineární obal je definován pro libovolně velkou (i nekonečnou) množinu vektorů z  $V$ , jako spojení lineárních obalů všech jejích prvků.

V dalších dvou přednáškách se soustředíme na otázku souvislosti těchto dvou konstrukcí podprostorů. Budeme se snažit zapsat množinu řešení homogenní soustavy jako lineární obal nějaké skupiny vektorů, a to co nejelegantněji. Nakonec uvidíme, že výsledek bude velmi užitečný i pro řešení soustav nehomogenních.

## Cvičení

1. **(3)** Řekneme, že matice  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je *symetrická* (resp. *antisymetrická*), jestliže platí  $a_{ij} = a_{ji}$  (resp.  $a_{ij} = -a_{ji}$ ), kde  $a_{ij}$  je element matice  $A$  nacházející se v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Ověřte, že množina  $S_n$  všech symetrických matic typu  $n \times n$  tvoří podprostor prostoru všech matic typu  $n \times n$  a stejně tak i množina  $A_n$  všech antisymetrických matic. Dále ověřte, že  $S_n \cap A_n = 0$  a  $S_n \vee A_n = M_{nn}(\mathbb{F})$ .
2. **(3)** Řekneme, že matice  $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$  je *hermitovská* (resp. *antihermitovská*), jestliže platí  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$  (resp.  $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ ). Ověřte, že hermitovské (resp. antihermitovské) matice tvoří podprostory prostoru všech

matic, že tento je jejich spojením a že jejich průnik je nulový podprostor.

3. **(3)** Pro matici  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$  definujeme její *stopu* jako  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Ověřte, že množina všech matic s nulovou stopou tvoří podprostor  $M_{nn}(\mathbb{F})$ .
4. **(3)** Ověřte, že množina všech horních trojúhelníkových matic ( $a_{ij} = 0$  pro  $i > j$ ) v  $M_{mn}(\mathbb{F})$  tvoří podprostor  $M_{mn}(\mathbb{F})$ .
5. **(3)** Ověřte, že množina všech ostře horních trojúhelníkových matic ( $a_{ij} = 0$  pro  $i \geq j$ ) z  $M_{mn}(\mathbb{F})$  tvoří podprostor prostoru všech horních trojúhelníkových matic, a tedy i podprostor  $M_{mn}(\mathbb{F})$ .
6. **(4)** Mějme v  $\mathbb{R}^2$  obvyklou kartézskou soustavu souřadnic. Rozhodněte, zda následující podmnožiny tvoří podprostor:
  - (a) všechny body ležící na dané přímce
  - (b) všechny body ležící v prvním kvadrantu
  - (c) všechny body ležící v prvním nebo třetím kvadrantu
  - (d) všechny body ležící v prvním nebo druhém kvadrantu
7. **(4)** Ověřte, že řešitelnost soustavy rovnic  $Ax = b$  znamená, že vektor  $b$  je lineární kombinací sloupců matice  $A$  a její koeficienty tvoří vektor  $x$ .
8. **(4)** Zjistěte, zda vektor  $v \in \mathbb{R}^4$  je lineární kombinací vektorů  $u_1, u_2, u_3$ . V kladném případě určete čísla  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tak, že  $v = au_1 + bu_2 + cu_3$ :
  - (a)  $v = (2, 0, 3, 1), u_1 = (1, 0, 1, -2), u_2 = (2, -1, 0, 1), u_3 = (1, -1, -2, -2)$
  - (b)  $v = (3, 1, -1, 2), u_1 = (1, 1, 1, 2), u_2 = (1, 0, -1, 0), u_3 = (0, -1, 1, -2)$
  - (c)  $v = (2, 1, 2, -1), u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (1, 2, 1, -2), u_3 = (-1, 1, -1, -1)$
9. **(4)** Zjistěte, zda vektor  $v$  je v lineárním obalu vektorů  $u_i$ :
  - (a)  $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (2, 1, 3), v = (1, 0, 0)$
  - (b)  $u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (2, 1, 1), u_3 = (3, 0, 2), v = (0, 3, -1)$
  - (c)  $u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (2, 1, 1), u_3 = (3, 0, 2), v = (4, 3, 2)$
  - (d)  $u_1 = (1, 0, 1, 2), u_2 = (2, 1, -1, 0), u_3 = (-1, 2, 0, 1), u_4 = (0, 3, -2, -1), v = (1, 5, 0, 4)$



- (e)  $u_1 = (1, 0, 1, 2)$ ,  $u_2 = (2, 1, -1, 0)$ ,  $u_3 = (-1, 2, 0, 1)$ ,  $u_4 = (0, 3, -2, -1)$ ,  
 $v = (2, 1, 3, 1)$
10. **(3)** Popište průnik podprostorů  $\mathbb{R}^5$ :  $V_1 = \langle (1, 2, 1, 0, -1), (2, 1, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 0, 1) \rangle$   
a  $V_2 = \langle (1, 2, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, -2), (0, 1, -5, 5, 2) \rangle$
11. **(3)** Popište průnik podprostorů  $\mathbb{R}^4$ :
- (a)  $V_1 = \langle (1, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 3, 1, -1) \rangle$ ,  $V_2 = \langle (0, 0, 0, 1), (2, 3, -4, -2), (3, 2, -1, 2) \rangle$
- (b)  $V_1: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$ ,  $V_2: x_3 + x_4 = 0$ ,  
 $x_1 + 5x_1 - x_3 - x_4 = 0$
12. **(3)** Popište průnik podprostorů  $\mathbb{R}^3$ :  $V_1: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ ,  $V_2: x_1 + 11x_3 = 0$ .
13. **(3)** Zjistěte, zda vektor  $v$  leží ve spojení prostorů  $V_1$  a  $V_2$ :
- (a)  $V_1 = \langle (1, 0, 1, 2), (2, 1, 3, 1) \rangle$ ,  $V_2 = \langle (1, -1, 0, 1), (0, -1, -1, 1) \rangle$ ,  
 $v = (0, 0, 0, 1)$
- (b)  $V_1 = \langle (1, 0, 1, 2), (2, 1, 3, 1) \rangle$ ,  $V_2 = \langle (1, -1, 0, 1), (0, -1, -1, 1) \rangle$ ,  
 $v = (0, 1, 1, 0)$
- (c)  $V_1 = \langle (1, 1, 2), (2, 1, 1) \rangle$ ,  $V_2 = \langle (0, 1, 3) \rangle$ ,  $v = (1, 1, 1)$
- (d)  $V_1 = \langle (1, 1, 2), (2, 1, 1) \rangle$ ,  $V_2 = \langle (0, 1, 3) \rangle$ ,  $v = (3, 1, 0)$
14. **(3)** Dokažte, že množina  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \right\}$  spolu s operací násobení matic je grupa.
15. **(3)** Dokažte, že množina  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid ad - bc = 1 \right\}$  spolu s operací násobení matic je grupa.
17. **(2)** Dokažte, že množina všech regulárních matic stupně  $n$  s operací násobení je grupa.
18. **(3)** Popište grupu symetrie rovnostranného trojúhelníka - tedy množinu všech shodných zobrazení v rovině, které daný trojúhelník zobrazují na něj samotný. Je tato grupa komutativní?

19. **(3)** Popište grupu symetrie čtverce. Je tato grupa komutativní? A co grupa přímých symetrií čtverce, tedy těch, které lze napsat jako rotaci kolem středu čtverce?
20. **(2)** Popište grupu symetrie čtyřstěnu a najděte počet jejích prvků. Je tato grupa komutativní?
21. **(2)** Popište grupu symetrie krychle a najděte počet jejích prvků. Je tato grupa komutativní? Proč je tato grupa stejná jako grupa symetrie pravidelného osmistěnu?
22. **(1)** Popište grupu symetrie pravidelného dvacetistěnu a najděte počet jejích prvků. Je tato grupa komutativní? Proč je tato grupa stejná jako grupa symetrie pravidelného dvanáctistěnu?
23. **(3)** Dokažte, že množina všech sudých celých čísel s operací sčítání je grupa. Zobecněte na množinu všech celých čísel dělitelných přirozeným číslem  $k$ .
24. **(3)** Zdůvodněte, proč množina  $M_{nn}(\mathbb{R})$  spolu s maticovým násobením není grupa.
25. **(3)** Popište průnik podprostorů  $W_1 = \langle (1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 0) \rangle$  a podprostoru  $W_2 = \{x_1 + x_3 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$
26. **(3)** Dokažte tvrzení 2 a 3 v lemmatu 5.
27. **(4)** Rozhodněte, zda je množina  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$  podprostor  $\mathbb{R}^3$ . Zdůvodněte.
28. **(4)** Rozhodněte, zda je  $\mathbb{R}$  podprostorem  $\mathbb{C}$ . Zdůvodněte.
29. **(3)** Rozhodněte, zda je množina všech posloupností  $(a_i)_1^\infty$ , splňujících  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , podprostor prostoru všech posloupností.
30. **(2)** Rozhodněte, zda je množina všech periodických funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  spolu s nulovou funkcí vektorový prostor. A co množina všech funkcí s racionální periodou?
31. **(3)** Nechť  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ . Rozhodněte, zda je množina  $\{X \in M_{nk}(\mathbb{F}) \mid AX = 0\}$  vektorový prostor.

32. **(3)** Za jakých podmínek je sjednocení  $W_1 \cup W_2$  dvou podprostorů vektorový prostor?
33. **(3)** Dokažte, že pokud  $W_1 \cap W_2 = 0$ , pak lze každý vektor z  $W_1 \vee W_2$  vyjádřit jednoznačně jako součet vektoru z  $W_1$  a vektoru z  $W_2$ .
34. **(4)** Popište průnik a spojení podprostorů  $\langle(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\rangle$  a  $\langle(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\rangle$  v  $\mathbb{R}^4$ .
35. **(2)** Nechť  $V$  je vektorový prostor  $W_1, W_2, W_3$  podprostory v něm. Rozhodněte, zda platí  $(W_1 \vee W_2) \cap W_3 = W_1 \vee (W_2 \cap W_3)$ . Odpověď zdůvodněte.
36. **(3)** Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ . Dokažte, že množina všech matic  $X \in M_{nn}(\mathbb{F})$ , které komutují s  $A$ , je vektorový prostor.
37. **(2)** Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $T$ ,  $v \in V, c \in T$ . Dokažte z axiómů, že pokud  $c \cdot v = 0$ , pak buď  $c = 0$ , nebo  $v = 0$ .
38. **(4)** Rozhodněte, zda jsou následující množiny vektorovými podprostory v prostoru  $V$  všech funkcí z  $\langle a, b \rangle$  do  $\mathbb{R}$ :
- (a)  $\{f \in V \mid f(a) = 1\}$
  - (b)  $\{f \in V \mid f(b) = 0\}$
  - (c)  $\{f \in V \mid f(a) - 2f(b) = 0\}$
39. **(4)** Rozhodněte, zda je vektorovým prostorem množina polynomů, které mají kořen 2.
40. **(3)** Rozhodněte, zda je vektorovým prostorem množina polynomů, které mají nějaký racionální kořen.
41. **(3)** Nechť  $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  je množina vektorů nějakého vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{F}$ . Je množina všech  $m$ -tic  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ ,  $r_i \in \mathbb{F}$  takových, že lineární kombinace  $\sum_1^m r_i v_i$  je nulový vektor, podprostorem  $\mathbb{F}^m$ ? Zdůvodněte.
42. **(4)** Matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

napište jako součet symetrické a antisymetrické matice.

### Řešení:

6. a) ano, pokud přímka prochází počátkem soustavy souřadnic, jinak ne, b) ne, c) ne, d) ne, 8. a)  $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ , b)  $v$  není lineární kombinací  $u_1, u_2, u_3$ , c)  $(a, b, c) = (3t, 1 - t, -1 + 2t), t \in \mathbb{R}$ , 9. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano, e) ne, 10.  $\langle (9, 19, 10, -3, -24) \rangle$ , 11. a)  $\langle (2, 3, -4, -2), (3, 2, -1, 2) \rangle$ , b)  $\langle (5, -1, 3, -3) \rangle$ , 12.  $\langle (-11, 6, 1) \rangle$ , 13. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

# Kapitola 4

## Báze a dimenze

Pojďme si nejprve přesněji zformulovat definici uvedenou na konci minulé přednášky:

**Definice 9.** Nechť  $V$  je vektorový prostor,  $M$  množina vektorů v něm. Řekneme, že  $W \leq V$  je lineárním obalem  $M$ , pakliže  $W$  je nejmenší podprostor ve  $V$  obsahující  $M$ . Říkáme také, že množina  $M$  podprostor  $W$  **generuje** nebo že je to jeho **množina generátorů**. Budeme používat označení  $W = \langle M \rangle$ .

Pokud  $M = \emptyset$ , pak  $\langle M \rangle = 0$ . Pro  $M$  neprázdnou definice znamená, že každý vektor  $w \in W$  lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů z  $M$ ,  $w = \sum_{i=1}^k r_i v_i$ ,  $v_i \in M$ .

Množina generátorů je způsob, jak při popisu podprostoru nevypisovat všechny vektory v něm, ale vystačit si jen s některými. Pokud dále některé z nich jdou vyjádřit pomocí jiných, lze je vynechat a dosáhnout tak popisu efektivnějšího. K tomu slouží pojem lineární závislosti:

**Definice 10.** Lineární kombinace  $\sum_{i=1}^k r_i v_i$  se nazývá **triviální**, pokud všechny koeficienty  $r_i$  jsou nulové, jinak je **netriviální**. Nechť  $M$  je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru  $V$ . Řekneme, že  $M$  je **lineárně závislá**, pokud existuje netriviální lineární kombinace prvků  $M$ , jejímž výsledkem je nulový vektor. V opačném případě je  $M$  **lineárně nezávislá**.

Triviální kombinace samozřejmě dává nulový vektor vždy, jde tedy o to, zda existuje ještě nějaká jiná. Pokud například skupina vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_k$  obsahuje nulový vektor, dejme tomu na pozici  $j$ , pak stačí vzít  $r_j = 1$  a ostatní

$r_i = 0$  a pak máme  $\sum_{i=1}^k r_i v_i = 0$ , tedy množina  $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  je lineárně závislá. Podobně pokud množina obsahuje s vektorem  $v$  také nějaký jeho další násobek  $rv$ , je lineárně závislá, protože stačí brát koeficienty  $-r$  a  $1$  u těchto dvou vektorů a vynulovat koeficienty ostatní. Množina je lineárně závislá právě tehdy, když lze nějaký její vektor vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních: rovnost  $v = \sum_{i=1}^k r_i v_i$  snadno přepíšeme na  $0 = v - \sum_{i=1}^k r_i v_i$  a naopak z netriviální lineární kombinace  $\sum_{i=1}^j s_i u_i$  můžeme vyjádřit kterýkoli vektor  $u_i$  s nenulovým koeficientem  $s_i$  pomocí ostatních.

Pokud je množina  $M$  lineárně závislá, pak je lineárně závislá i každá její nadmnožina: každá netriviální lineární kombinace prvků z  $M$  je totiž zároveň lineární kombinací prvků z nadmnožiny. Ze stejných důvodů platí, že pokud  $M$  generuje vektorový prostor  $V$ , pak jej generuje i každá  $N \subset V$ , která je nadmnožinou  $M$ .

**Definice 11.** Lineárně nezávislá množina, která generuje vektorový prostor  $V \neq 0$ , se nazývá **báze**  $V$ . Pokud  $V = 0$ , je jeho bází prázdná množina.

Báze je klíčový pojem lineární algebry, protože nám umožňuje definovat pojem dimenze jakožto počet prvků libovolné báze. V tomto kurzu se soustředíme na prostory, které mají dimenzi konečnou. Báze tak, jak ji budeme definovat, stejně není v prostorech nekonečné dimenze příliš užitečným pojmem - sice vždy existuje (za předpokladu platnosti axiomu výběru), ale v mnoha běžných případech nelze žádnou konkrétní zkonstruovat.

**Definice 12.** Vektorový prostor, ve kterém existuje konečná množina generátorů, nazýváme **konečně generovaný** nebo též **prostor konečné dimenze**.

**Lemma 8.** *Pokud  $V$  je konečně generovaný vektorový prostor, pak z každé jeho množiny generátorů lze vybrat konečnou bázi.*

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že z každé nekonečné množiny generátorů  $M$  prostoru  $V \neq 0$  lze vybrat konečnou podmnožinu, která také generuje  $V$ . Protože  $V$  je konečně generovaný, existuje množina  $N = \{v_1, \dots, v_k\}$ , která generuje  $V$ . Protože  $M$  generuje  $V$ , lze každý vektor z  $N$  zapsat jako lineární kombinaci prvků z  $M$ ,  $v_i = \sum_{j=1}^{k_i} r_{ij} u_{ij}$ . Označme  $M_i = \{u_{i1}, \dots, u_{ik_i}\}$ . Libovolný vektor  $v \in V$  lze zapsat jako lineární kombinaci prvků z  $N$  a tedy

$$v = \sum_{i=1}^k s_i v_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_i} (s_i r_{ij}) u_{ij}$$

také jako lineární kombinaci prvků z  $M' := \bigcup_{i=1}^k M_i$ . Tedy  $M'$  je hledaná konečná podmnožina.

Lze tedy předpokládat, že množina generátorů  $M$  je konečná. Nyní mezi všemi podmnožinami množiny  $M$ , které stále generují  $V$ , vyberme nějakou  $K = \{v_1, \dots, v_n\}$  s nejmenším počtem prvků. Ukážeme sporem, že  $K$  už je lineárně nezávislá, tedy báze  $V$ .

Pokud by existovala netriviální lineární kombinace  $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$ , pak by bylo možné některý z vektorů  $v_j$  vyjádřit pomocí ostatních jako  $v_j = -\frac{1}{r_j} \sum_{i \neq j} r_i v_i$ . Libovolný vektor  $v \in V$  pak lze napsat jako

$$v = \sum_{i=1}^n s_i v_i = \sum_{i \neq j} s_i v_i - \frac{s_j}{r_j} \sum_{i \neq j} r_i v_i = \sum_{i \neq j} \left( s_i - \frac{s_j r_i}{r_j} \right) v_i,$$

tedy jako lineární kombinaci prvků  $K \setminus \{v_j\}$ . To je ale množina s menším počtem prvků než  $K$ , a tudíž podle předpokladu nemůže generovat celé  $V$ . Dospěli jsme ke sporu, a tedy  $K$  je báze.

Případ  $V = 0$  je zřejmý.  $\square$

Následující tvrzení vešlo pod známost pod názvem Steinitzova věta nebo Steinitzovo lemma o výměně. Říká, že v množině generátorů můžeme vyměnit vhodné prvky „kus za kus“ s prvky nějaké lineárně nezávislé množiny tak, abychom po výměně měli stále množinu generátorů. Důsledkem bude mimojiné skutečnost, že všechny báze mají stejný počet prvků, a tedy že dimenze je dobře definována.

**Věta 3.** *Bud'  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  množina generátorů vektorového prostoru  $V$  a  $N = \{v_1, \dots, v_k\}$  lineárně nezávislá množina ve  $V$ . Pak  $k \leq n$  a při vhodném očíslování vektorů  $u_1, \dots, u_n$  množina  $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$  generuje  $V$ .*

*Důkaz.* Budeme postupovat indukcí podle počtu  $k$  lineárně nezávislých vektorů. Pokud  $k = 1$ , pak musí být  $1 \leq n$ , protože v opačném případě  $M = \emptyset$ ,  $\langle M \rangle = 0$  a tedy  $N = \{v_1\} = \{0\}$  není lineárně nezávislá množina. Protože  $M$  generuje  $V$ , existují čísla  $r_i$  taková, že  $v_1 = \sum_{i=1}^n r_i u_i$ , a protože  $v_1 \neq 0$ , musí pro některý index  $j$  být  $r_j \neq 0$ . Pokud  $j \neq 1$ , pak přechýslujeme vektory  $u_i$ , aby tomu tak bylo. Lze tedy psát  $u_1 = \frac{1}{r_1} v_1 - \sum_{i=2}^n \frac{r_i}{r_1} u_i$ . Každý vektor, který je lineární kombinací  $u_1, \dots, u_n$ , je tudíž také lineární kombinací  $v_1, u_2, \dots, u_n$ , čili  $\langle v_1, u_2, \dots, u_n \rangle = V$ .

Předpokládejme proto platnost tvrzení pro  $k - 1$ , ukážeme, že pak musí platit i pro  $k$ . Pokud  $\{v_1, \dots, v_k\}$  jsou lineárně nezávislé, pak  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  jsou lineárně nezávislé a podle indukčního předpokladu množina  $\{v_1, \dots, v_{k-1}, u_k, \dots, u_n\}$  generuje  $V$ . Zároveň musí být  $n \geq k$ , protože jinak by bylo  $v_k$  lineární kombinací vektorů  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , což je ve sporu s lineární nezávislostí množiny  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Tedy  $v_k$  lze vyjádřit jako  $\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + \sum_{i=k}^n r_i u_i$ , kde pro nějaké  $j \geq k$  musí být  $r_j \neq 0$ , jinak bychom opět dostali spor s lineární nezávislostí množiny  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Přečíslujme zbylé vektory  $u_k, \dots, u_n$  tak, aby  $j = k$ , pak je možné podobně jako v případě  $k = 1$  vyjádřit  $u_k$  jako lineární kombinaci množiny  $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ , a tedy i libovolný vektor jako lineární kombinaci z této množiny.  $\square$

Pokud  $M$  je báze  $V$  o  $m$  prvcích a  $N$  je báze  $V$  o  $n$  prvcích, pak ze Steinitzovy věty plyne, že  $m \geq n$  a zároveň  $n \geq m$ , tedy libovolné dvě báze mají stejný počet prvků. Počet prvků libovolné báze  $V$  nazýváme **dimenzí**  $V$ , značíme  $\dim V$ . Někdy budeme ve zkratce psát  $V_n$  pro vektorový prostor dimenze  $n$ . Počet prvků každé lineárně nezávislé množiny ve  $V_n$  je menší nebo roven  $n$ , a pokud je roven, už musí být tato množina bází. K důkazu stačí vzít ve Steinitzově větě za  $M$  libovolnou bázi  $V_n$ . Podobně, počet prvků každé množiny generátorů prostoru  $V_n$  je větší nebo roven  $n$ , a pokud je roven, už musí být tato množina bází. To opět plyne ze Steinitzovy věty, pokud vezmeme libovolnou bázi  $V_n$  za  $N$ . Tedy báze jsou právě největší lineárně nezávislé množiny a právě nejmenší množiny generátorů.

Dalším důsledkem Steinitzovy věty je, že každý podprostor  $W$  konečně generovaného vektorového prostoru  $V_n$  je konečně generovaný. Stačí vzít ve  $V_n$  libovolnou bázi  $\{u_1, \dots, u_n\}$  a ve  $W$  všechny lineárně nezávislé množiny. Ty jsou lineárně nezávislé i jako podmnožiny  $V_n$ , a mohou mít tedy nanejvýš  $n$  prvků. Vyberme z nich nějakou  $\{v_1, \dots, v_k\}$  s maximálním počtem prvků, musí to být již báze  $W$ , protože  $\dim W = k \leq n$ . Navíc lze libovolnou bázi  $W$  doplnit na bázi  $V_n$ , podle Steinitzovy věty totiž (po eventuálním přečíslování) množina  $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$  generuje  $V_n$ , a jelikož je  $n$ -prvková, je to báze  $V_n$ . Tedy libovolnou lineárně nezávislou podmnožinu  $V_n$  lze doplnit na bázi.

Uveďme si nyní několik příkladů bází a dimenzí podprostorů, jimiž jsme se dosud zabývali.

1. Množina vektorů  $\{e_1, \dots, e_n\}$  aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{F}^n$ ,



kde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1), \end{aligned}$$

se nazývá **kanonická báze**. Tedy  $\dim \mathbb{F}^n = n$ .

2. Množina matic  $\{E_{ij}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$ , kde  $E_{ij}$  je matice, jejíž  $ij$ -tý element je 1 a ostatní 0, je báze prostoru  $M_{mn}(\mathbb{F})$  nad  $\mathbb{F}$  dimenze  $mn$ .
3. Množina  $\{1, x, x^2, \dots\}$  je báze prostoru všech polynomů  $P(x, \mathbb{F})$  nad  $\mathbb{F}$ . Není to tedy prostor konečné dimenze.
4. Množina  $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$  je báze prostoru  $\mathbb{C}^2$  nad  $\mathbb{R}$ . Tento prostor má tedy dimenzi 4, zatímco  $\mathbb{C}^2$  nad  $\mathbb{C}$  má dimenzi 2.

Další důležité příklady uvidíme v následující přednášce, v níž se budeme zabývat vztahem dimenze a řešení soustavy lineárních rovnic.

**Věta 4** (o dimenzi spojení a průniku). *Nechť  $V$  je vektorový prostor a  $U, W$  jsou dva jeho podprostory konečné dimenze. Pak*

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U \vee W$$

*Důkaz.* Prostor  $U \cap W$  je podprostorem prostoru  $W$  a je tedy také konečné dimenze. Zvolme v něm libovolnou bázi  $\{v_1, \dots, v_k\}$ , tuto bázi lze doplnit vektory  $u_1, \dots, u_p$  na bázi  $U$  a vektory  $w_1, \dots, w_q$  na bázi  $W$ . Ukážeme, že množina  $M = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_q\}$  je bází  $U \vee W$ .

Je zřejmé, že  $M$  generuje  $U \vee W$ . Každý vektor  $v \in U \vee W$  je součtem nějakého vektoru  $u \in U$  a nějakého vektoru  $w \in W$ . Každý z nich je lineární kombinací prvků  $M$  a tedy i  $v$  je lineární kombinací prvků  $M$ . Předpokládejme nyní, že

$$0 = \sum_{i=1}^p r_i u_i + \sum_{i=1}^k s_i v_i + \sum_{i=1}^q t_i w_i$$

Tedy vektor

$$u = - \sum_{i=1}^p r_i u_i = \sum_{i=1}^k s_i v_i + \sum_{i=1}^q t_i w_i$$

je zároveň prvkem  $U$  a  $W$ , tedy prvkem jejich průniku. Je proto možné jej vyjádřit jako  $u = \sum_{i=1}^k x_i v_i$ . Pak ale

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k x_i v_i + \sum_{i=1}^p r_i u_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^k (s_i - x_i) v_i + \sum_{i=1}^q t_i w_i &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož množiny  $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_k\}$  a  $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_q\}$  jsou lineárně nezávislé, musí být v obou rovnostech všechny koeficienty nulové. To ale znamená, že i množina  $M$  je lineárně nezávislá.

Zkonstruovali jsme tedy z báze prostoru  $U \cap W$  báze prostorů  $U, W$  a  $U \vee W$ . Dokazovaná rovnost plyne prostým dosazením počtů prvků těchto bází:  $(p+k) + (k+q) = k + (p+k+q)$ .  $\square$

Speciální případ věty o dimenzi spojení a průniku nastává, pokud  $U \cap W = 0$ . Pak mluvíme místo o spojení o **direktním součtu**  $U \oplus W$  podprostorů. Pokud  $U$  a  $W$  jsou dva podprostory  $V$  takové, že  $U \oplus W = V$ , říkáme, že  $U$  je **doplňkem**  $W$  ve  $V$ . Stejně jako spojení, i direktní součet má smysl definovat i pro více prostorů:

**Definice 13.** Nechť  $V$  je vektorový prostor,  $I$  indexová množina a  $\{W_i | i \in I\}$  systém podprostorů  $V$  indexovaný touto množinou, přičemž pro každé  $j \in I$  platí  $W_j \cap \left(\bigvee_{i \neq j} W_i\right) = 0$ . Pak nazveme  $\bigvee_{i \in I} W_i$  direktním součtem podprostorů  $W_i$ , značíme  $\bigoplus_{i \in I} W_i$ .

**Věta 5.** Nechť  $V$  je vektorový prostor,  $I$  indexová množina,  $\{W_i | i \in I\}$  systém podprostorů  $V$  a  $\bigoplus_{i \in I} W_i = V$ . Pak pro každý vektor  $v \in V$  existuje konečná množina  $J \subset I$  taková, že  $v$  lze zapsat jednoznačně jako  $\sum_{j \in J} w_j$ , kde  $w_j \in W_j$  jsou nenulové vektory.

*Důkaz.* Existence požadovaného zápisu  $v = \sum_{j \in J} w_j$  plyne z definice  $\bigvee_{i \in I} W_i$ , přičemž jistě můžeme vzít takový zápis, v němž jsou všechny vektory  $w_j$  nenulové. Pokud by existoval druhý takový zápis  $v = \sum_{k \in K} w'_k$ , pak  $0 =$

$\sum_{i \in J \cup K} (w_i - w'_i)$ , kde jsme dodefinovali  $w_i = 0$  pro  $i \in K \setminus J$  a  $w'_i = 0$  pro  $i \in J \setminus K$ . Pro každé  $j \in J \cup K$  je

$$w_j - w'_j = - \sum_{\substack{i \in (J \cup K) \\ i \neq j}} (w_i - w'_i) \in W_j \cap \left( \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} W_i \right),$$

což je podle předpokladu nulový podprostor, tudíž oba zápisy jsou totožné.  $\square$

Věta o dimenzi spojení a průniku se zdá být podobná princip inkluze a exkluze pro konečné množiny. Pokus zobecnit ji pro více než dva podprostory ale selhává (zkuste si sami): zdání někdy klame. Platí alespoň verze pro (konečné) direktní součty:

**Věta 6.** *Nechť  $W_1, \dots, W_k$  jsou podprostory  $V_n$  takové, že  $\bigoplus_{i=1}^k W_i$  existuje. Pak*

$$\sum_{i=1}^k \dim W_i = \dim \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

*Důkaz.* Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro  $k = 2$  tvrzení plyne z věty o dimenzi spojení a průniku. Předpokládejme tedy, že platí pro  $k - 1$ . Uvažujme podprostory  $W_1, \dots, W_k$  takové, že  $\bigoplus_{i=1}^k W_i$  existuje. Pak

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \quad W_j \cap \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k W_i = 0$$

a tím pádem také

$$\forall j \in \{1, \dots, k-1\}, \quad W_j \cap \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} W_i = 0$$

Tedy  $\bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i$  existuje a podle indukčního předpokladu  $\sum_{i=1}^{k-1} \dim W_i = \dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i$ . Protože  $W_k \cap \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i = 0$ , plyne z věty o dimenzi spojení a průniku

$$\dim \bigoplus_{i=1}^k W_i = \dim W_k + \dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i = \sum_{i=1}^k \dim W_i.$$

$\square$

## Cvičení

1. **(4)** Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z  $\mathbb{R}^4$  jsou lineárně závislé či nezávislé:
  - (a)  $(1,1,0,1), (2,1,0,3), (3,0,1,2)$
  - (b)  $(2,1,3,2), (1,4,0,1), (5,3,1,0), (-1,9,7,9)$
  - (c)  $(1,3,0,2), (2,-1,1,0), (3,-5,2,-2)$
  - (d)  $(1,2,0,1), (2,0,1,-2), (-1,1,2,1), (0,1,2,-1)$
2. **(4)** Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z  $\mathbb{R}^3$  jsou lineárně závislé či nezávislé:
  - (a)  $\{(2,1,0), (4,1,2), (0,1,-4)\}$
  - (b)  $\{(2,1,0), (-4,-2,0)\}$
  - (c)  $\{(1,2,1), (2,1,3)\}$
  - (d)  $\{(1,2,1), (2,1,3), (0,0,0)\}$
  - (e)  $\{(1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)\}$
  - (f)  $\{(1,0,1), (2,0,-1), (0,1,3)\}$
3. Nechť  $M \subset \mathbb{C}^n$ . Rozhodněte, zda platí:  $M$  je lineárně nezávislá jako množina vektorů z  $\mathbb{C}^n$  nad  $\mathbb{C}$  právě když je lineárně nezávislá jako množina vektorů z  $\mathbb{C}^n$  nad  $\mathbb{R}$ .
4. **(3)** Najděte nějakou bázi prostoru  $S_n(\mathbb{F})$  všech symetrických matic stupně  $n$  a určete jeho dimenzi.
5. **(3)** Najděte nějakou bázi prostoru  $A_n(\mathbb{F})$  všech antisymetrických matic stupně  $n$  a určete jeho dimenzi.
6. **(3)** Najděte nějakou bázi prostoru  $P(x, \mathbb{F})$  všech polynomů a dokažte, že nemá konečnou dimenzi. Jakou dimenzi má jeho podprostor všech polynomů stupně nejvýše  $n$ ?
7. **(2)** Ukažte, že prostor všech posloupností  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ , splňujících  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , je konečně generovaný a určete jeho bázi.
8. **(3)** Určete bázi a dimenzi prostoru  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

9. **(3)** Mějme množinu  $M$  vektorů v  $\mathbb{F}^n$ , vytvořme z ní množinu  $N$  vektorů v  $\mathbb{F}^{n-m}$  tak, že vynecháme u každého vektoru posledních  $m$  složek. Dokažte, že pokud je  $N$  lineárně nezávislá, pak je  $M$  lineárně nezávislá.
10. **(3)** Mějme množinu  $M$  vektorů v  $\mathbb{F}^n$ , vytvořme z ní množinu  $N$  vektorů v  $\mathbb{F}^{n+m}$  tak, že u každého vektoru zvolíme posledních  $m$  složek libovolně. Dokažte, že pokud je  $M$  lineárně nezávislá, pak je  $N$  lineárně nezávislá.
11. **(3)** Dokažte, že pokud  $V$  je direktním součtem svých podprostorů  $W_1$  a  $W_2$ , pak je možné každý vektor z  $V$  napsat jednoznačně jako součet vektoru z  $W_1$  a  $W_2$ . Ukažte dále, že pokud je  $V$  pouze spojením  $W_1 \vee W_2$ , ale nikoliv direktním součtem, pak každý vektor z  $V$  lze zapsat jako součet vektoru z  $W_1$  a  $W_2$  více způsoby.
12. **(3)** Necht'  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  je báze vektorového prostoru  $V$ , označme  $W_i = \langle u_i \rangle$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dokažte, že pak  $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$ .
13. **(3)** Dokažte, že  $M_{nn}(\mathbb{F}) = S_n(\mathbb{F}) \oplus A_n(\mathbb{F})$ , tedy prostor všech čtvercových matic stupně  $n$  je direktním součtem prostoru všech symetrických a prostoru všech antisymetrických matic. Ověřte platnost věty o dimenzi spojení a průniku.
14. **(3)** Dokažte, že  $M_{nn}(\mathbb{F})$  je spojením prostoru všech horních trojúhelníkových matic a prostoru všech dolních trojúhelníkových matic, ale není jejich direktním součtem. Určete průnik a ověřte platnost věty o dimenzi spojení a průniku.
15. **(1)** Definujme řetězec vektorových prostorů jako posloupnost  $(V_0, V_1, \dots, V_k)$ , kde  $V_0 = 0$  a pro všechna  $i$  je  $V_i$  vlastním podprostorem  $V_{i+1}$ . Délkou řetězce nazveme číslo  $k$ . Dokažte, že vektorový prostor není konečně generovaný právě když v něm existuje řetězec libovolné délky.
16. **(2)** Necht'  $V$  je vektorový prostor všech reálných posloupností  $\{a_i\}_0^\infty$  a  $M \subset V$  je podmnožina všech posloupností vyhovujících pro  $n \geq 3$  rekurentní relaci  $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + Ca_{n-3}$ , kde  $A, B, C$  jsou reálné konstanty. Dokažte, že  $M$  je vektorový podprostor  $V$  dimenze 3.
17. **(2)** Dokažte, že prostor  $P(x, \mathbb{F})$  všech polynomů není konečné dimenze.
18. **(2)** Dokažte, že je-li  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru  $V$  nad  $T$  a  $r_{ij} \in T, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ , pak

vektory  $s_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}) \in T^n$  tvoří lineárně nezávislou množinu  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  právě když je lineárně nezávislá množina  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , kde  $v_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}u_j \in V$ .

19. **(2)** Necht'  $V$  je vektorový prostor dimenze  $n$ ,  $W \leq V$ ,  $\dim W = n - 1$ ,  $M$  je báze  $W$ ,  $u \in V$ . Dokažte, že  $M \cup \{u\}$  je báze  $V$  právě když  $u$  není prvkem  $W$ .
20. **(3)** Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^3$  rozhodněte, jestli je vektor  $(1, 1, 1)$  prvkem  $\langle (1, 2, 1), (1, 0, -1), (2, 2, 0) \rangle$ .
21. **(3)** Rozhodněte, jestli je funkce  $\cos 3x$  v lineárním obalu množiny funkcí  $\{1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$  (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad  $\mathbb{R}$ )
22. **(3)** Rozhodněte, jestli je funkce  $\cos 2x$  v lineárním obalu množiny funkcí  $\{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$  (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad  $\mathbb{R}$ )
23. **(2)** Necht' pro podprostory  $V_1, V_2$  platí  $\dim(V_1 \vee V_2) = 1 + \dim(V_1 \cap V_2)$ . Pak buď  $V_1 \subset V_2$  nebo  $V_2 \subset V_1$ . Dokažte.

**Řešení:** 1. a) nezávislé, b)závislé, c) závislé, d)nezávislé, 2. a)závislé, b)závislé, c)nezávislé, d)závislé, e)nezávislé, f)nezávislé.

# Kapitola 5

## Hodnost matice

Základní početní situace v lineární algebře je konečná množina vektorů v aritmetickém vektorovém prostoru. Chtěli bychom se naučit zjistit, jestli je taková množina lineárně nezávislá, jestli generuje nějaký vektorový prostor, určovat dimenzi jejího lineárního obalu, případně z ní vybírat bázi či ji na bázi doplňovat. K tomu se nám již potřejí v tomto kurzu budou hodit matice. Připomeňme: nejprve jsme je zavedli při studiu řešitelnosti soustav rovnic, poté jsme jim věnovali druhý pohled jakožto samostatným algebraickým objektům vybaveným nějakými operacemi.

Jako drobnou přípravu si uveďme následující lemma, které říká, co se děje s konečnou skupinou vektorů, pokud na ni aplikujeme „elementární transformaci“.

**Lemma 9.** *Nechť  $M_0 = (v_1, \dots, v_p)$  je skupina vektorů ve vektorovém prostoru  $V$  nad  $\mathbb{F}$ ,  $j, k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $j \neq k$ ,  $r, s \in \mathbb{F}$ ,  $r \neq 0$ . Označme*

$$M_1 = (v_1, \dots, v_{k-1}, rv_k, v_{k+1}, \dots, v_p)$$

$$M_2 = (v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + sv_j, v_{k+1}, \dots, v_p)$$

*Pak platí, že  $\langle M_0 \rangle = \langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$ . Dále platí, že  $M_0$  je lineárně nezávislá, právě když je lineárně nezávislá  $M_1$  a právě když je lineárně nezávislá  $M_2$ .*

*Důkaz.* Dokážeme tvrzení pouze pro  $M_2$ , případ  $M_1$  je zcela analogický a vlastně jednodušší. Pokud  $v \in \langle M_0 \rangle$ , pak existují  $r_i \in \mathbb{F}$ , že  $v = \sum_{i=1}^p r_i v_i$ . Pro pohodlí předpokládejme  $k < j$ . Pak lze  $v$  zapsat také jako

$$v = \sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + r_k (v_k + sv_j) + \sum_{i=k+1}^{j-1} r_i v_i + (r_j - sr_k) v_j + \sum_{i=j+1}^p r_i v_i,$$

tedy  $v \in \langle M_2 \rangle$ . Naopak pokud  $v \in \langle M_2 \rangle$ , pak existují  $s_i \in \mathbb{F}$  taková, že

$$v = \sum_{i=1}^{k-1} s_i v_i + s_k (v_k + s v_j) + \sum_{i=k+1}^p s_i v_i,$$

můžeme přepisem získat

$$v = \sum_{i=1}^{j-1} s_i v_i + (s_k s + s_j) v_j + \sum_{i=j+1}^p s_i v_i,$$

čili  $v \in \langle M_0 \rangle$ . Tím jsme dokázali obě inkluze  $\langle M_0 \rangle \subset \langle M_2 \rangle$  i  $\langle M_2 \rangle \subset \langle M_0 \rangle$  a tím pádem rovnost obou množin.

Podobně ověříme, že se zachovává lineární (ne)závislost. Pokud  $M_2$  je lineárně nezávislá a  $\sum_{i=1}^p r_i v_i = 0$ , pak musí být v lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + r_k (v_k + s v_j) + \sum_{i=k+1}^{j-1} r_i v_i + (r_j - s r_k) v_j + \sum_{i=j+1}^p r_i v_i,$$

prvků  $M_2$  všechny koeficienty nulové. To ale znamená  $r_i = 0$ , pokud  $i$  není  $k$  ani  $j$ , dále  $r_k = 0$ , a díky tomu  $r_j = r_j - s r_k = 0$ . Tedy lineární kombinace  $\sum_{i=1}^p r_i v_i$  musí být triviální, a tedy  $M_0$  je lineárně nezávislá. Stejným způsobem lze ověřit opačnou implikaci.  $\square$

Z lemmatu jednoduše plyne i zachování dalších vlastností, jmenovitě dimenze a vlastnosti „býti bází  $V$ “. Z následující definice hned vidíme, k čemu se nám lemma bude hodit:

**Definice 14.** Necht'  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je matice. Jejím **řádkovým podprostorem**  $R_A$  rozumíme lineární obal skupiny všech  $m$  řádků matice  $A$ , chápaných jako vektory ve vektorovém prostoru  $\mathbb{F}^n$ . **Sloupcový podprostor**  $S_A$  matice  $A$  je lineární obal skupiny všech  $n$  sloupců matice  $A$ , chápaných jako prvky  $\mathbb{F}^m$ . Definujeme **hodnost**  $h(A)$  matice  $A$  jakožto dimenzi prostoru  $R_A$ .

Předchozí lemma tedy říká, že elementárními úpravami matice se zachovává řádkový prostor a tedy i hodnost matice. Tím pádem také víme, jak hodnost matice spočítat. Stačí matici převést do odstupňovaného tvaru, v něm už je skupina všech nenulových řádků lineárně nezávislá (rozmyslete si proč). Hodnost (původní i upravené) matice je potom rovna počtu nenulových řádků v matici v odstupňovaném tvaru.



Můžeme postupovat i opačně: chceme-li zjistit lineární nezávislost, dimenzi lineárního obalu apod. pro skupinu vektorů z aritmetického vektorového prostoru, sestavíme matici, která bude mít tyto vektory jako řádky, a určíme její hodnotu.

*Příklad.* Určíme dimenzi lineárního obalu množiny  $\{(3, -6, 1, -1), (1, -2, 3, 1), (-2, 4, 0, 1), (0, 0, 2, 1)\}$  v  $\mathbb{R}^4$ . Úpravou vhodné matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že dimenze je 2. Při úpravě můžeme vynechat nulové řádky, tím se lineární obal ani dimenze nezmění.

**Definice 15.** Necht'  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je matice. Pak matici  $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$ , jejíž  $ij$ -tý element je definován vztahem  $a_{ij}^T := a_{ji}$ , nazveme **maticí transponovanou** k  $A$ . Pokud  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  a  $\bar{r}$  označuje komplexně sdružené číslo k  $r \in \mathbb{C}$ , pak matice  $A^+ \in M_{nm}(\mathbb{F})$ , kde  $ij$ -tý element je  $a_{ij}^+ := \bar{a}_{ji}$ , nazveme **maticí hermitovsKY sdruženou** k  $A$ .

Matici transponovanou tedy získáme prostým překlopením podle diagonály, takže z  $i$ -tého řádku v  $A$  se stane  $i$ -tý sloupec v  $A^T$ . Hermitovské sdružení je transpozice následovaná komplexním sdružením.

**Věta 7.** Necht'  $A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ , pak  $h(A) = h(A^T)$ ,  $h(B) = h(B^+)$ .

Tvrzení  $h(A) = h(A^T)$  vlastně říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru  $A$  je stejná. To je zajímavé, protože jsou to podprostory ve dvou obecně různých aritmetických vektorových prostorech,  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ ! Větu bychom mohli dokázat ověřením, že ačkoli se při řádkových úpravách matice mění její sloupcový prostor, jeho dimenze se zachovává. Podobným postupem bychom dokázali i  $h(B) = h(B^+)$ . My ale důkaz odložíme až na dobu, kdy budeme mít definovány pojmy lineárního zobrazení a skalárního součinu, které dodají novou interpretaci hodnoty matice a transponované matice. Důkaz využívající tuto interpretaci je přehlednější a jistým způsobem v sobě lépe nese smysl dokazovaného tvrzení.

Kritérium řešitelnosti soustavy rovnic je možné elegantně vyjádřit pomocí hodnoty matice. Výsledné tvrzení vešlo ve známost jako Frobeniova věta.

**Věta 8.** *Nechť  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je matice,  $b \in \mathbb{F}^m$  vektor pravých stran. Soustava rovnic  $Ax = b$  má řešení, právě když  $h(A) = h(A|b)$ .*

*Důkaz.* Přepíšme soustavu rovnic následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Splnit tuto rovnost nějakými hodnotami  $x_1, \dots, x_n$  je totéž jako najít lineární kombinaci sloupců matice  $A$ , která se rovná vektoru  $b \in \mathbb{F}^m$ . To je možné právě tehdy, když vektor  $b$  náleží do sloupcového prostoru matice  $A$ , tedy když jeho přidání ke sloupcům  $A$  nezvýší dimenzi jimi generovaného prostoru. Dimenze sloupcového prostoru je podle předchozí věty rovna dimenzi prostoru řádkového. Jinými slovy, hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy musejí být stejné.  $\square$

Pomocí hodnosti je možné také popsat velikost množiny řešení. Začneme nejprve soustavami homogenními:

**Věta 9.** *Nechť  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je matice. Řešením homogenní soustavy rovnic  $Ax = 0$  s maticí  $A$  je vektorový podprostor v  $\mathbb{F}^n$  dimenze  $n - h(A)$ .*

*Důkaz.* Už jsme zmiňovali, že množina řešení homogenní soustavy rovnic je podprostor  $\mathbb{F}^n$ . Upravme matici  $A$  na redukovaný odstupňovaný tvar, z něž vynecháme všechny nulové řádky. Počet nenulových řádků se rovná  $p = h(A)$ , tedy existuje právě  $q := n - h(A)$  nepivotních sloupců. Pro přehlednost můžeme přeuspořádat neznámé tak, aby pivotními sloupci byly sloupce  $1, \dots, p$ . Upravená matice pak má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix},$$

čímž jsme definovali matici  $C \in M_{pq}(\mathbb{F})$ . Množina vektorů

$$M = \left\{ \begin{aligned} &(-c_{11}, -c_{21}, \dots, -c_{p1}, 1, 0, \dots, 0) \\ &(-c_{12}, -c_{22}, \dots, -c_{p2}, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &(-c_{1q}, -c_{2q}, \dots, -c_{pq}, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \right\}$$

je lineárně nezávislá a každý její vektor je řešením soustavy rovnic. Nechť  $(x_1, \dots, x_n)$  je libovolné řešení soustavy, označme jeho posledních  $q$  složek  $r_1, \dots, r_q$ . Dosazením do všech rovnic soustavy zjistíme, že pro všechna  $i \in \{1, \dots, p\}$  už musí být  $x_i = -\sum_{j=1}^q c_{ij}r_j$ . Vzniklý vektor řešení

$$\left( -\sum_{j=1}^q c_{1j}r_j, -\sum_{j=1}^q c_{2j}r_j, \dots, -\sum_{j=1}^q c_{pj}r_j, r_1, \dots, r_q \right),$$

je lineární kombinací vektorů z  $M$  s koeficienty  $r_1, \dots, r_q$ . Každé řešení soustavy  $Ax = 0$  je tedy v lineárním obalu množiny  $M$ , proto je  $M$  bází prostoru řešení a  $q = n - h(A)$  je dimenze tohoto prostoru.  $\square$

Napříště tedy budeme řešení homogenní soustavy rovnic vyjadřovat pomocí báze prostoru řešení. Ve skutečnosti je to jen drobná modifikace zápisu pomocí parametrů. Když se podíváme na příklad soustavy rovnic z první přednášky a odmyslíme si pravou stranu (pokud je nulová, zůstane nulová i po všech řádkových úpravách), dostaneme matici v redukovaném odstupňovaném tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Musíme se přenést přes drobnou kosmetickou vadu, že pivotní sloupce nejsou na prvních třech místech, přesto ale snadno identifikujeme matici  $C$  z důkazu

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a napíšeme bázové vektory prostoru řešení:

$$\begin{aligned} u &= (2, -3, 1, 0, 0, 0), \\ v &= (2, 1, 0, 1, 0, 0), \\ w &= (3, 3, 0, 0, 2, 1) \end{aligned}$$

Libovolné řešení má tedy tvar lineární kombinace  $ru + sv + tw$ , kde  $r, s, t \in \mathbb{R}$ . Když tuto lineární kombinaci zapíšeme jako jeden vektor závislý na  $r, s, t$ , vidíme, že

$$(2s + 2r + 3t, -3s + r + 3t, r, s, 2t, t)$$

je právě tvar řešení, který bychom dostali původní metodou s parametry.

Zbývá nám popsat řešení soustav nehomogenních:

**Věta 10.** *Nechť  $Ax = b$  je soustava rovnic s maticí  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  a vektorem pravých stran  $b \in \mathbb{F}^m$ . Nechť  $x^P \equiv (x_1^P, \dots, x_n^P)$  je libovolné řešení této soustavy. Pak pro libovolné řešení  $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $Ax = b$  existuje řešení  $x^H \equiv (x_1^H, \dots, x_n^H)$  homogenní soustavy se stejnou maticí  $Ax = 0$  takové, že  $x = x^P + x^H$ .*

*Důkaz.* Pokud  $Ax^P = b$  a  $Ax = b$ , potom  $A(x - x^P) = 0$ , tedy  $x^H := x - x^P$  je řešením homogenní rovnice.  $\square$

Znamená to tedy, že stačí najít jediné libovolné řešení nehomogenní soustavy rovnic (tzv. **partikulární řešení**) a to nám spolu s obecným řešením homogenní soustavy dá všechna řešení soustavy nehomogenní. Výslednou množinu řešení soustavy  $Ax = b$  pak budeme obvykle zapisovat ve tvaru  $x^P + \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ , kde  $\{v_1, \dots, v_q\}$  je báze prostoru řešení  $Ax = 0$ . Partikulární řešení nejpohodlněji najdeme tak, že dosadíme za všechny neznámé na nepivotních sloupcích nuly. Konkrétně pokud soustava rovnic vede na odstupňovaný tvar

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} & b'_p \end{array} \right),$$

pak její partikulární řešení je  $(b'_1, \dots, b'_p, 0, \dots, 0)$ . Pro soustavu z první přednášky to znamená, že obecné řešení je

$$(9, 2, 0, 0, 4, 0) + \langle (2, -3, 1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 1, 0, 0), (3, 3, 0, 0, 2, 1) \rangle,$$

což opět můžeme srovnat se zápisem pomocí parametrů.

**Věta 11.** *Nechť  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{np}(\mathbb{F})$  jsou matice. Pak  $h(AB) \leq \min(h(A), h(B))$ .*

*Důkaz.* Sloupce matice  $AB$  jsou lineární kombinací sloupců matice  $A$ , tedy  $S_{AB} \leq S_A$  a tedy  $h(AB) \leq h(A)$ . Řádky  $AB$  jsou zase lineární kombinací řádků  $B$ , takže i  $h(AB) \leq h(B)$ .  $\square$

**Věta 12.** *Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je čtvercová matice. Pak  $A$  je regulární právě když  $h(A) = n$ .*

*Důkaz.* Množina sloupců jednotkové matice  $E_n$  je bázi  $\mathbb{F}^n$ . Pokud  $A$  je regulární, pak má inverzní matici  $A^{-1}$ ,  $A^{-1}A = E_n$ . Podle předchozí věty tedy  $n = h(E_n) = h(A^{-1}A) \leq \min(h(A), h(A^{-1}))$ . Řádkové prostory matic  $A$  a  $A^{-1}$  jsou podprostory  $\mathbb{F}^n$ , tedy také  $h(A) \leq n$ ,  $h(A^{-1}) \leq n$ . Musí být tedy  $h(A) = h(A^{-1}) = n$ .

Pokud naopak  $h(A) = n$ , pak řádky  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{F}^n$ . Označme tyto řádky po řadě  $a_1, \dots, a_n$ . Pro libovolný řádek  $e_i$  matice  $E_n$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  tedy existují čísla  $b_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , že  $e_i$  je lineární kombinací vektorů  $a_j$  s koeficienty  $b_{ij}$ , čili  $e_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}a_j$ . Pak ale matice  $B$  splňuje vztah  $BA = E$  a podle definice je inverzní maticí regulární matice  $A$ .  $\square$

**Věta 13.** *Nechť  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je libovolná matice,  $B \in M_{mm}(\mathbb{F})$ ,  $C \in M_{nn}(\mathbb{F})$  jsou regulární matice. Pak  $h(BAC) = h(A)$ .*

*Důkaz.* Platí  $h(BAC) \leq \min(h(B), h(A), h(C)) = \min(n, h(A), m) = h(A)$  a také  $h(A) = h(B^{-1}BACC^{-1}) \leq \min(h(B^{-1}), h(BAC), h(C^{-1})) = h(BAC)$ .  $\square$

## Cvičení

- (4) Zjistěte, zda je množina  $\{(1, -1, 1, 2), (1, 8, 7, -7), (1, 2, 3, -1), (1, 5, 5, -4)\}$  lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého  $\mathbb{R}^4$ .
- (4) Zjistěte, zda je množina  $\{(0, -4, 3, 3), (8, 1, 3, -3), (1, 0, 0, 7), (1, 3, 4, 8)\}$  lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého  $\mathbb{R}^4$ .
- Zjistěte, zda je množina  $\{(2, 1, -1, 2, -1), (-4, 3, 2, -1, 1), (3, 5, -2, 1, -2), (2, 2, -1, 3, -1), (-1, 2, 3, 1, 3)\}$  lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého  $\mathbb{R}^5$ .
- (4) Zjistěte, zda je množina  $\{(1+i, 1-i, 1+i), (1-i, 1+3i, i-1), (1, 1+i, i)\}$  lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého  $\mathbb{C}^3$ .

5. **(3)** Pro která  $a \in \mathbb{R}$  je množina  $\{(a, -4, -1), (4, -6, -3), (1, 1, -a)\}$  lineárně nezávislá? Určete dimenzi jejího lineárního obalu v závislosti na  $a$ .
6. **(3)** Pro která  $a \in \mathbb{R}$  je množina  $\{(7, a, -1), (-4, 8, -3), (2a, 1, -4)\}$  lineárně nezávislá? Určete dimenzi jejího lineárního obalu v závislosti na  $a$ .
7. **(3)** Najděte bázi  $\langle(0, 1, -3, 4), (2, 2, 2, 2), (1, -1, 3, 7)\rangle \subset \mathbb{R}^4$ , obsahující vektor  $(1, 4, -4, -1)$ .
8. **(3)** Nechtě  $V_1 = \langle(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2)\rangle$ ,  $V_2 = \langle(-3, 0, 2, 0)\rangle$  jsou podprostory  $\mathbb{R}^4$ . Určete dimenzi  $V_1 \cap V_2$ .
9. **(3)** Najděte dimenze prostorů  $V, W, V \cap W, V \vee W \subset \mathbb{R}^5$  v závislosti na parametru  $\lambda$ , kde  $V = \langle(3, -1, -2, 2, 1), (1, 4, 0, 1, -1), (\lambda, 6, -4, 6, 0)\rangle$ ,  $W = \langle(1, -3, 2, -3, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\rangle$ .
10. **(3)** Z vektorů  $(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2), (-3, 0, 2, 0)$  vyberte lineárně nezávislou množinu a vyjádřete ostatní vektory jako lineární kombinace prvků této lineárně nezávislé množiny.

11. **(3)** Nechtě

$$V_1 = \langle(1, 3, 0, 2), (2, 0, 1, 3), (5, -3, 3, 1)\rangle$$

$$V_2 = \langle(3, -3, 2, -2), (3, 3, 1, 5), (2, 0, 1, 1)\rangle$$

jsou podprostory  $\mathbb{R}^4$ . Určete dimenzi  $V_1 \cap V_2$ .

12. **(3)** Vyberte všechny báze  $\mathbb{R}^3$  z množiny  $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 2, 3), (4, 3, 4), (1, 1, 1)\}$ .
13. **(3)** Najděte dimenzi prostoru  $\langle\{(1, 1, 1, a), (1, 1, a, 1), (1, a, 1, 1), (a, 1, 1, 1)\}\rangle \subset \mathbb{R}^4$  v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$ .
14. **(3)** Dokažte, že množina  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 - 2x_4 = 0\}$  je podprostor  $\mathbb{R}^4$  a určete jeho dimenzi.
15. **(3)** Vyberte z množiny  $\{(1, 0, 1), (3, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 0, -2)\}$  nějakou bázi  $\mathbb{R}^3$  a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.
16. **(3)** Z množiny vektorů  $\{(5, 7, -1, 3), (1, -3, 8, 2), (9, 17, -10, 4), (-2, 6, -16, -4)\}$  v  $\mathbb{R}^4$  vyberte nějakou bázi jejího lineárního obalu.

17. **(3)** Pro která  $a \in \mathbb{R}$  je  $\{(3, 1, 1, 4), (a, 4, 10, 1), (1, 7, 17, 3), (2, 2, 4, 3)\}$  lineárně nezávislá množina?
18. **(3)** Pro která  $a \in \mathbb{R}$  je  $\{(1, a, -1, 2), (2, -1, a, 5), (1, 10, -6, 1)\}$  lineárně nezávislá množina?
19. **(1)** Mějme množinu vektorů  $\{(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in T^n, i = 1, \dots, s \leq n\}$ . Dokažte, že pokud pro všechna  $j$  platí  $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^s |a_{ij}|$ , pak je tato množina lineárně nezávislá.
20. **(2)** Necht'  $A, B$  jsou dvě čtvercové matice řádu  $n$ . Platí  $h(AB) = h(BA)$ ? Zdůvodněte.
21. **(2)** Dokažte, že čtvercová matice  $A$  je singulární, právě když existuje nenulová čtvercová matice  $B$  splňující  $AB = 0$ .
22. **(2)** Necht'  $A$  je čtvercová matice. Rozhodněte, zda platí:  $A$  je singulární  $\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (A^n = 0)$ . Odpověď zdůvodněte.
23. **(2)** O soustavě řekneme, že je řešitelná, pokud má alespoň jedno řešení. Necht'  $A$  je čtvercová matice stupně  $n$ ,  $B$  je regulární matice stupně  $n$ . Rozhodněte, které z následujících výroků platí:
- (a)  $(A|b)$  je řešitelná  $\Rightarrow (BA|b)$  je řešitelná
  - (b)  $(A|b)$  je řešitelná  $\Rightarrow (AB|b)$  je řešitelná
  - (c)  $(AB|b)$  je řešitelná  $\Rightarrow (A|b)$  je řešitelná
  - (d)  $(BA|b)$  je řešitelná  $\Rightarrow (A|b)$  je řešitelná
  - (e) žádný z předchozích výroků neplatí

Odpověď zdůvodněte.

24. **(4)** Určete hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete také hodnotu matice transponované a ověřte, že se rovnají.

25. (4) Určete hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete také hodnotu matice transponované a ověřte, že se rovnají.

26. (3) V závislosti na
- $a \in \mathbb{R}$
- určete hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete také hodnotu matice transponované a ověřte, že se rovnají.

27. (1) Určete hodnotu matice v závislosti na parametrech

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

28. (2) Dokažte, že pro libovolné dvě matice  $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$  platí  $h(A + B) \leq h(A) + h(B)$ .
29. (2) Nechť  $Ax = b$  je soustava lineárních rovnic, mající alespoň jedno řešení. Určete nutnou a postačující podmínku, aby proměnná  $x_k$  měla hodnotu nula v každém řešení této soustavy a dokažte.
30. (2) Nechť  $Ax = b$  je soustava lineárních rovnic, mající alespoň jedno řešení. Určete nutnou a postačující podmínku, aby proměnná  $x_k$  měla stejnou hodnotu v každém řešení této soustavy a dokažte.
31. (1) Určete vektor  $(a, b, c)$  tak, aby byl násobkem nějakého řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= a \\ 2x + 2z &= b \\ -x + y + z &= c \end{aligned}$$



32. **(1)** Dokažte, že pro libovolnou homogenní soustavu rovnic, jejíž koeficienty jsou racionální čísla, lze sestavit bázi prostoru řešení, v níž každá složka každého vektoru je celé číslo.
33. **(2)** Dokončete důkaz lemmatu 9.
34. **(3)** Najděte příklady singulárních matic, pro které platí v tvrzení věty 11 rovnost a naopak ostrá nerovnost.
35. **(3)** Dokažte, že pokud  $B$  je regulární a  $A$  čtvercová matice, pak  $h(AB) = h(BA)$ .
36. **(3)** Dokažte, že pokud je matice singulární, pak nemá inverzní matici.
37. **(2)** Vzhledem k parametrům  $a, b, c$  najděte obecné řešení soustavy

$$ax + y + z = a$$

$$x + by + z = b$$

$$x + y + cz = c$$



# Kapitola 6

## Lineární zobrazení

Objekty, které v matematice studujeme, mívají obvykle podobu množiny s nějakou strukturou. Grupa a vektorový prostor jsou jen dva z mnoha příkladů takových objektů. Dalším krokem je podívat se na zobrazení mezi dvěma množinami, která zadanou strukturu respektují. Takovým zobrazením říkáme **morfizmy** nebo někdy **homomorfizmy**. V případě vektorových prostorů se používá také pojem **lineární zobrazení**. Díváme-li se na vektorový prostor geometricky, například na  $\mathbb{R}^2$  jako na rovinu, pak má řada lineárních zobrazení jednoduchou geometrickou interpretaci a naopak, zobrazení s jednoduchou geometrickou interpretací bývají často lineární zobrazení. Například otočení vektoru v rovině o úhel  $\alpha$ , osová souměrnost podle přímky, kolmá projekce na přímku, středová souměrnost nebo násobení vektoru číslem jsou všechno lineární zobrazení. Na lineárních zobrazeních nás budou zajímat takové otázky, jako například kterým vektorům přiřazují nulu, jak vypadá obecný vektor v obrazu zobrazení, jak se zobrazení skládají, jakým způsobem jsou jednoznačně definována a jak vypadají v souřadnicích.

### 6.1 Základní vlastnosti homomorfizmů

**Definice 16.** Nechtě  $V$  a  $V'$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ . Zobrazení  $f : V \rightarrow V'$  nazveme lineárním zobrazením, nebo též homomorfizmem, pokud  $\forall u, v \in V$  a  $\forall r \in \mathbb{F}$  splňuje podmínky

$$\begin{aligned}f(u + v) &= f(u) + f(v) \\f(ru) &= rf(u)\end{aligned}$$

**Lemma 10.** *Nechť  $V$  a  $V'$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ . Zobrazení  $f : V \rightarrow V'$  je homomorfismus, právě když  $\forall u, v \in V$  a  $\forall r, s \in \mathbb{F}$  platí  $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v)$ .*

*Důkaz.* Podobné sloučení dvou podmínek do jedné jsme viděli už v případě definice podprostoru a důkaz zde je zcela analogický.  $\square$

Základním příkladem homomorfismu je zobrazení  $f_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  určené maticí  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ , které vektoru  $x \in \mathbb{F}^n$ , chápanému jako matice o jediném sloupci, přiřazuje vektor  $Ax \in \mathbb{F}^m$ . Linearita zobrazení snadno plyne z vlastností maticového násobení. Zobrazení  $f_A$  vlastně přiřazuje  $n$ -tici čísel  $x$  lineární kombinaci sloupců matice  $A$  s koeficienty  $x_i$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n.$$

**Definice 17.** Nechť  $V$  a  $V'$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$  a  $f : V \rightarrow V'$  je homomorfismus. **Jádrem**  $f$  se nazývá množina  $\text{Ker } f := \{u \in V \mid f(u) = 0\}$ , **obrazem**  $f$  je množina  $\text{Im } f := \{u' \in V' \mid \exists u \in V, f(u) = u'\}$ .

Jádro homomorfismu  $f$  je podmnožina v prostoru  $V$ , ve skutečnosti je to podprostor. To ověříme snadno: pokud  $u, v \in \text{Ker } f$  a  $r, s \in \mathbb{F}$ , pak  $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v) = r0 + s0 = 0$ , tedy  $ru + sv \in \text{Ker } f$ . Obraz  $\text{Im } f$  je zase podprostorem ve  $V'$ , důkaz je jen o málo složitější: pokud  $u', v' \in \text{Im } f$ , pak existují  $u, v \in V$ , pro něž  $f(u) = u'$  a  $f(v) = v'$ . Potom ale  $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v) = ru' + sv'$ , tedy i  $ru' + sv' \in \text{Im } f$ .

**Definice 18.** Dimenzi  $\text{Im } f \leq V'$  nazýváme **hodností**  $h(f)$  zobrazení  $f$ , dimenzi  $\text{Ker } f \leq V$  budeme říkat **nulita**  $n(f)$  homomorfismu  $f$ .

Obrazem homomorfismu  $f_A$  je právě množina všech lineárních kombinací sloupců matice  $A$ , jinými slovy její sloupcový podprostor  $S_A$ . Hodnost  $f_A$  je potom  $\dim S_A \equiv h(A^T)$ . Protože víme, že  $h(A) = h(A^T)$ , je hodnost zobrazení  $h(f_A)$  rovna hodnosti  $h(A)$  příslušné matice.

Jádro lineárního zobrazení  $f_A$  je množina všech  $x \in \mathbb{F}^n$ , pro něž  $Ax = 0$ , čili množina řešení homogenní soustavy rovnic s maticí  $A$ , kterou jsme

označovali  $W_A$ . Řešíme-li homogenní soustavu rovnic, snažíme se vlastně popsat podprostor  $\text{Ker } f_A$  jako lineární obal nějaké množiny vektorů. Řešíme-li rovnici nehomogenní,  $Ax = b$ , snažíme se vlastně zjistit, zda vektor  $b \in \mathbb{F}^m$  patří do  $\text{Im } f_A$ , a pokud ano, jaká je jeho množina vzorů. Poznatek „řešení nehomogenní soustavy je řešení homogenní plus partikulární řešení nehomogenní“ z konce minulé kapitoly vlastně znamená, že stačí najít jeden vzor a všechny ostatní se od něj liší přičtením nějakého prvku  $\text{Ker } f_A$ . Podle toho, co jsme v minulé kapitole dokázali o řešení soustav rovnic, je  $n(f_A) \equiv \dim \text{Ker } f_A = n - h(A)$  a  $h(f_A) \equiv \dim \text{Im } f_A = h(A)$ , celkově tedy  $n(f_A) + h(f_A) = \dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A = n$ . Toto tvrzení platí obecněji a říká se mu věta o dimenzi jádra a obrazu:

**Věta 14.** *Nechť  $f : V_n \rightarrow V$  je homomorfismus. Pak*

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$$

*Důkaz.* Nechť  $\{u_1, \dots, u_k\}$  je báze  $\text{Ker } f$  (připouštíme i  $k = 0$ , tedy prázdnou množinu), doplníme ji na bázi  $\{u_1, \dots, u_n\}$  celého  $V_n$ . Označme  $W = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$ , pak  $\text{Ker } f \oplus W = V_n$  (přesvědčte se sami!), tedy  $\dim \text{Ker } f + \dim W = n$  podle věty o dimenzi spojení a průniku. Ukážeme, že  $N' = \{f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)\}$  je báze  $\text{Im } f$ . Každý vektor  $u' \in \text{Im } f$  je obrazem nějakého vektoru  $u \in V_n$  v homomorfismu  $f$ , a protože existují čísla  $r_i$  taková, že  $u = \sum_{i=1}^n r_i u_i$ , dostáváme

$$u' = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i f(u_i) = \sum_{i=k+1}^n r_i f(u_i),$$

kde jsme využili toho, že  $f(u_i) = 0$  pro  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Tedy  $N'$  generuje  $\text{Im } f$ .

Pokud pro nějaká čísla  $s_i$ ,  $i \in \{k+1, \dots, n\}$  platí  $\sum_{i=k+1}^n s_i f(u_i) = 0$ , pak vektor  $u = \sum_{i=k+1}^n s_i u_i$  patří do  $\text{Ker } f$ . Patří ale zároveň do  $W$ , a protože  $\text{Ker } f \cap W = 0$ , musí to být nulový vektor. Protože množina  $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$  je lineárně nezávislá, jsou všechny koeficienty  $s_i = 0$ ,  $i \in \{k+1, \dots, n\}$ . To ale znamená, že množina  $N'$  je lineárně nezávislá. Je to tedy báze  $\text{Im } f$ , tedy  $\dim \text{Im } f = \dim W$  a jsme hotovi.  $\square$

**Definice 19.** Homomorfismus, který je prostý, nazýváme **monomorfismem**, pro homomorfismus, který je „na“, budeme užívat pojem **epimorfismus**. Vzájemně jednoznačný homomorfismus, tedy lineární zobrazení, které je zároveň mono- a epimorfismem, se nazývá **izomorfismus**.

Že je zobrazení  $f : V \rightarrow V'$  „na“ (nebo též **surjektivní**) znamená, že  $\text{Im } f = V'$ , což nám dává charakterizaci epimorfizmů pomocí obrazu. Monomorfizmy je zase možné charakterizovat podmínkou na jádro  $\text{Ker } f = 0$ . Pokud totiž  $f$  je prosté, pak nulový vektor z  $V'$  může mít pouze jeden vzor, a tím je nulový vektor z  $V$ , čili  $\text{Ker } f = 0$ . Naopak, pokud  $\text{Ker } f = 0$  a pro dva vektory  $u, v \in V$  platí  $f(u) = f(v)$ , pak  $f(u - v) = 0$  a tedy  $u - v \in \text{Ker } f$ , čili  $u - v = 0$ . Ověřili jsme tedy, že kdykoli  $f(u) = f(v)$ , musí už být  $u = v$ , což není nic jiného, než že  $f$  je prosté.

Z věty o dimenzi jádra a obrazu pak plynou další skutečnosti, platné v případě zobrazení na prostorech konečné dimenze. Pokud  $f : V_n \rightarrow V'$  je monomorfismus, pak  $n = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$ . Odtud získáme následující vlastnost izomorfizmů:

**Věta 15.** *Nechť  $f : V_n \rightarrow V'$  je izomorfismus. Pak  $\dim V_n = \dim V'$ .*

*Důkaz.* Protože  $f$  je monomorfismus na  $V_n$ , máme  $\dim \text{Im } f = n$ . Je to také epimorfismus, tedy  $\text{Im } f = V'$ . Tedy  $\dim V' = n$ .  $\square$

Pokud mezi dvěma prostory existuje izomorfismus, říkáme, že jsou **izomorfní**. Věta říká, že jsou-li dva prostory, z nichž jeden je konečné dimenze, izomorfní, pak mají stejnou dimenzi. Platí i opačná implikace, k jejímu důkazu ale budeme potřebovat zkonstruovat pro libovolné dva vektorové prostory stejné dimenze izomorfismus mezi nimi. K tomu je nutné zavést pojem souřadnic, což učiníme ještě v této kapitole.

Zobrazení, jehož zdrojový i cílový prostor jsou stejné,  $f : V \rightarrow V$ , se nazývá **endomorfismus**. Pokud je endomorfismus zároveň izomorfismem, říkáme mu **automorfismus**. Všimněte si, že z věty o dimenzi jádra a obrazu plyne, že pokud je  $V$  konečné dimenze, pak stačí, aby byl endomorfismus jedním z dvojice monomorfismus, epimorfismus, a automaticky už musí být i tím druhým z dvojice, a tedy také automorfismem. Prostory nekonečné dimenze tuto vlastnost ale nemají, zkuste najít protipříklad!

Uveďme si několik dalších příkladů homomorfizmů vektorových prostorů:

1. Pro  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  je  $f_A$  monomorfismus, právě když  $A$  má lineárně nezávislé sloupce, tedy  $h(A) = n$ . Je to epimorfismus, právě když sloupce generují celé  $\mathbb{F}^m$ , tedy  $h(A) = m$ . Tedy  $f_A$  je izomorfismem, právě když  $A$  je čtvercová matice hodnosti  $n = m$ , čili regulární matice.
2.  $V = V' = \mathbb{F}^3$ ,  $P : (a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a_1, a_2, 0)$ . Toto zobrazení se vyznačuje vlastností  $P^2 = P$ , což je vlastnost charakterizující **projekce**. Geometricky odpovídají projekce zobrazením  $V$  na podprostor ve  $V$  daným

nějakým geometrickým průmětem. Je to epimorfismus, není to monomorfismus.

3. Inkluze  $\mathbb{F}^n \subset \mathbb{F}^m$ ,  $n < m$  definuje monomorfismus  $i : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ , který není epimorfismem.
4.  $V = \{ \text{množina všech konvergentních posloupností} \}$ ,  $V' = \mathbb{R}$ . Zobrazení limita  $\lim : V \rightarrow \mathbb{R}$  je epimorfismus, který není monomorfismem.
5.  $V = \mathbb{R}$  se standardními operacemi a  $V' = \mathbb{R}^+$  s operacemi  $\oplus$  a  $\odot$ , kde  $u \oplus v = uv$  a  $r \odot u = u^r$  jsou vektorové prostory nad  $\mathbb{R}$ . Pak  $\exp : u \rightarrow e^u$  je jejich izomorfismus.
6.  $V = C(-\infty, \infty)$ ,  $V' = \mathbb{R}$ .  $E_a : f \rightarrow f(a)$  je epimorfismus.
7.  $V = P(x, \mathbb{F}) = V'$ ,  $D^{(n)} : f \rightarrow f^{(n)}$  je endomorfismus, který je epimorfismem, ale není monomorfismem: jeho jádrem je množina polynomů stupně menšího než  $n$ . Vidíme, že na prostorech nekonečné dimenze existují endomorfizmy, které jsou epimorfismem, ale ne monomorfismem.
8.  $V = L(a, b)$  (množina všech funkcí na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , které mají přes tento interval konečný integrál),  $V' = \mathbb{R}$ ,  $I_{(a,b)} : f \rightarrow \int_a^b f(x)dx$  je homomorfismus.

Následující věta říká, že libovolné zobrazení báze vektorového prostoru do jiného prostoru lze jednoznačně rozšířit na lineární, jinými slovy, že homomorfismus je jednoznačně určen svými hodnotami na nějaké bázi.

**Věta 16.** *Nechť  $V$  a  $V'$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ ,  $M$  je báze  $V$  a  $F : M \rightarrow V'$  je zobrazení. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení  $f : V \rightarrow V'$  takové, že  $\forall u \in M$ ,  $f(u) = F(u)$ .*

*Důkaz.* Dokážeme pouze pro  $V$  prostor konečné dimenze, pak lze psát  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  (obecný důkaz vyžaduje jen o trochu komplikovanější zápis). Libovolný vektor  $v \in V$  lze zapsat jako  $v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$ . Definujeme pak  $f(v) = \sum_{i=1}^n r_i F(u_i)$ . Je zřejmé, že takto definované  $f$  je lineární zobrazení. Tím je dokázána existence, zbývá jednoznačnost. Pokud by existovalo lineární

zobrazení  $g$  takové, že  $\forall u \in M$ ,  $g(u) = F(u)$ , pak pro libovolný vektor  $v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$  máme

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^n r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i g(u_i) = \sum_{i=1}^n r_i F(u_i) = f(v),$$

tedy musí být  $g = f$ . □

Jako cvičení si můžete zkusit zjistit a dokázat, co plyne pro homomorfismus  $f$  z toho, že skupina vektorů  $F(M)$  je lineárně nezávislá, případně generuje  $V'$ , případně je bází  $V'$ . Také si rozmyslete, co se stane, když  $M$  bude lineárně nezávislá, ale nebude bází  $V$ , případně když  $M$  bude lineárně závislá. Jako jednoduché cvičení ponecháváme i důkaz následujícího lemmatu:

**Lemma 11.** *Nechť  $V, W$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ ,  $f : V \rightarrow W$  je izomorfismus a  $M$  skupina vektorů ve  $V$ . Pak  $M$  je lineárně nezávislá, právě když  $f(M)$  je lineárně nezávislá, a  $M$  generuje  $V$ , právě když  $f(M)$  generuje  $W$ .*

## 6.2 Operace s homomorfizmy

Nechť  $V, W$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ . Označme  $\text{Hom}(V, W)$  množinu všech homomorfizmů z  $V$  do  $W$  a  $\text{End}(V)$  množinu všech endomorfizmů prostoru  $V$ , tedy  $\text{End}(V) \equiv \text{Hom}(V, V)$ . Na množině  $\text{Hom}(V, W)$  máme definováno sčítání homomorfizmů a násobení homomorfizmu číslem: pro libovolný vektor  $v \in V$  a libovolné  $r \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}(f + g)(v) &:= f(v) + g(v) \\ (rf)(v) &:= rf(v)\end{aligned}$$

Rozmyslete si, co tato definice znamená: na prvním řádku definujeme nové zobrazení  $f + g$  tím, na co zobrazuje libovolný vektor, říkáme, že to má být na součet vektorů  $f(v)$  a  $g(v)$ . Podobně na druhém řádku říkáme, že zobrazení  $rf$  má vektor  $v$  zobrazit na  $r$ -násobek vektoru  $f(v)$ . Sami ověřte, že definice je korektní, tedy že součet dvou homomorfizmů je homomorfismus a násobek homomorfizmu je homomorfismus. Také si rozmyslete, že  $f_A + f_B$  je vlastně  $f_{A+B}$  a  $rf_A = f_{rA}$ .



**Věta 17.** *Nechť  $V, W$  jsou dva vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ . Množina  $\text{Hom}(V, W)$  s operacemi sčítání homomorfizmů a násobení homomorfizmu číslem je vektorový prostor. Pokud  $\dim V = n$  a  $\dim W = m$ , pak  $\dim \text{Hom}(V, W) = mn$ .*

*Důkaz.* Ověření, že  $\text{Hom}(V, W)$  s danými operacemi splňuje axiomy vektorového prostoru, ponecháváme čtenáři za cvičení. Abychom určili dimenzi tohoto prostoru, musíme najít nějakou jeho bázi. Nechť  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  je báze  $V$  a  $N = \{v_1, \dots, v_m\}$  je báze  $W$ . Definujme pro každé  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  zobrazení  $f_{ij} : V \rightarrow W$  takto:

$$f_{ij}(u_k) \begin{cases} = v_i & \text{pro } k = j \\ = 0 & \text{pro } k \neq j \end{cases}$$

Podle věty o určení homomorfizmu hodnotami na bázi tento předpis zadává pro dané indexy  $i, j$  jednoznačně určené lineární zobrazení z  $\text{Hom}(V, W)$ . Těchto zobrazení je právě  $mn$ , potřebujeme tedy ověřit, že množina  $K := \{f_{ij} | i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$  je lineárně nezávislá a že každé zobrazení  $f \in \text{Hom}(V, W)$  lze zapsat jako lineární kombinaci prvků  $K$ .

Obraz bázevého vektoru  $u_j$  v zobrazení  $f$  je prvkem  $W$  a lze ho rozepsat jako lineární kombinaci prvků báze  $N$ . Koefficienty této lineární kombinace jsou jednoznačně určené a označme je  $r_{ij}$  pomocí předpisu  $f(u_j) = \sum_{i=1}^m r_{ij}v_i$ . Pak pro libovolný vektor  $u_k \in M$  platí

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} f_{ij}(u_k) = \sum_{i=1}^m r_{ik} v_i = f(u_k)$$

Jinými slovy se zobrazení  $f$  a  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} f_{ij}$  rovnají na bázi  $M$  a tedy se musejí rovnat na celém  $V$ . Množina  $K$  tedy generuje  $\text{Hom}(V, W)$ .

Zbývá ověřit lineární nezávislost. Pokud  $\sum_{ij} r_{ij} f_{ij}$  je nulové zobrazení, pak je nula i jeho aplikace na libovolný bázevé vektor  $u_k$  a tedy

$$0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} f_{ij}(u_k) = \sum_{i=1}^m r_{ik} v_i$$

Množina  $N$  je lineárně nezávislá, takže  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $r_{ik} = 0$ . To platí pro libovolné  $k$ , čili jsme dokázali  $\sum_{ij} r_{ij} f_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i, j, r_{ij} = 0$ , jinými slovy lineární nezávislost množiny  $K$ .  $\square$

Speciální situace nastává, když  $W = \mathbb{F}$ . Prostor  $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{F})$  má stejnou dimenzi jako prostor  $V$  a říká se mu **duální prostor** k  $V$ . Blíže se duálním prostorem budeme zabývat v letním semestru.

Označme  $1_V \in \text{End}(V)$  identický endomorfismus prostoru  $V$ , definovaný vztahem  $\forall v \in V, 1_V(v) = v$ . Je zřejmé, že je to lineární zobrazení, prosté a na, tedy izomorfismus. Pokud  $V = \mathbb{F}^n$ , pak  $1_V \equiv f_E$ , kde  $E$  je jednotková matice.

**Věta 18.** *Nechť  $V, V', V''$  jsou vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$ ,  $f : V \rightarrow V'$ ,  $g : V' \rightarrow V''$  jsou dva homomorfizmy. Pak*

1. *Složené zobrazení  $gf : V \rightarrow V''$  je homomorfismus.*
2. *Pokud  $g$  a  $f$  jsou monomorfizmy, pak  $gf$  je monomorfismus.*
3. *Pokud  $g$  a  $f$  jsou epimorfizmy, pak  $gf$  je epimorfismus.*
4. *Pokud  $g$  a  $f$  jsou izomorfizmy, pak  $gf$  je izomorfismus.*
5. *Pokud  $gf$  je monomorfismus, pak  $f$  je monomorfismus.*
6. *Pokud  $gf$  je epimorfismus, pak  $g$  je epimorfismus.*
7. *Zobrazení  $f$  je izomorfismus, právě když existuje homomorfismus  $f^{-1} : V' \rightarrow V$ , pro který  $ff^{-1} = 1_{V'}$  a  $f^{-1}f = 1_V$ . Homomorfismus  $f^{-1}$  je těmito podmínkami určen jednoznačně a je to izomorfismus.*

*Důkaz.* Nechť  $r, s \in \mathbb{F}$ ,  $u, v \in V$ .

1.  $gf(ru + sv) = g(rf(u) + sf(v)) = rgf(u) + sgf(v)$
2. Pokud  $g, f$  jsou prostá a  $u \neq v$ , pak  $f(u) \neq f(v)$  a  $g(f(u)) \neq g(f(v))$ , tedy  $gf$  je prosté.
3. Pokud  $g, f$  jsou surjektivní a  $u'' \in V''$ , pak existuje  $u' \in V'$  takové, že  $g(u') = u''$  a  $u \in V$ , že  $f(u) = u'$ . Tedy  $gf(u) = u''$ ,  $gf$  je na.
4. Plyne z předchozích dvou bodů.
5. Pokud  $u \in \text{Ker } f$ , pak  $gf(u) = g(0) = 0$ . Protože  $gf$  je monomorfismus, musí být  $u = 0$ . Tedy  $\text{Ker } f = 0$ , čili  $f$  je monomorfismus.
6. Pokud  $g$  není na, pak ani  $g \circ f$  nemůže být na.

7. Pokud existuje  $f^{-1}$  splňující  $ff^{-1} = 1_{V'}$ , což je epimorfismus, pak podle předchozího bodu musí být  $f$  také epimorfismus. Podobně z  $f^{-1}f = 1_V$  plyne, že  $f$  je monomorfismus, celkově je tedy  $f$  izomorfismus. Naopak, pokud  $f$  je izomorfismus, pak je na, tedy pro každé  $u' \in V'$  existuje  $u \in V$ , že  $f(u) = u'$ , a je prosté, tedy toto  $u$  existuje právě jedno. Definujme  $f^{-1}(u') := u$ . Snadno se ověří, že  $f^{-1}$  je lineární zobrazení, vlastnosti  $ff^{-1} = 1_{V'}$  a  $f^{-1}f = 1_V$  jsou zřejmé. Zbývá ověřit jednoznačnost: pokud by existovalo  $g : V' \rightarrow V$ ,  $fg = 1_{V'}$  a  $gf = 1_V$ , pak  $g = gff^{-1} = f^{-1}$ .

□

Zobrazení  $f^{-1}$  budeme samozřejmě nazývat **inverzní** homomorfismus. Opět si rozmyslete, že  $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ . Z věty jsme se dozvěděli, že všechny prvky množiny všech automorfizmů  $\text{Aut}(V)$  prostoru  $V$  mají inverzní prvek vzhledem k operaci skládání zobrazení. Spolu s asociativitou skládání a faktem, že identita je automorfismus, dostáváme, že množina  $\text{Aut}(V)$  s operací skládání je grupa.

## 6.3 Homomorfizmy v souřadnicích

Zatím jsme vždy ilustrovali všechny pojmy týkající se homomorfizmů pomocí zobrazení typu  $f_A$  pro nějakou matici  $A$ . Nyní si ukážeme, že se všemi zobrazeními mezi prostory konečné dimenze se dá počítat jako se zobrazeními tohoto typu.

**Definice 20.** Nechť  $V_n$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  jeho báze a  $u \in V$ . **Souřadnicemi** vektoru  $u$  vzhledem k bázi  $M$  budeme rozumět sloupcový vektor  $(u)_M := (x_1, \dots, x_n)^T$ , kde  $x_i$  jsou koeficienty lineární kombinace  $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ .

Koeficienty lineární kombinace vzhledem k bázi jsou určeny jednoznačně, definice je tedy korektní a navíc zadává bijekci mezi množinami  $V_n$  a  $\mathbb{F}^n$ . Ověřte sami, že je tato bijekce lineárním zobrazením, tedy izomorfismem. Podle lematu 11 je skupina vektorů  $v_1, \dots, v_k$  lineárně nezávislá, resp. generuje  $V_n$  právě tehdy, když je množina vektorů jejich souřadnic  $(v_1)_M, \dots, (v_k)_M$  lineárně nezávislá, resp. generuje  $T^n$ .

Pomocí souřadnic můžeme dokázat zesílení věty 15 na ekvivalenci:

**Věta 19.** *Nechť  $V$  a  $W$  jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad  $\mathbb{F}$ . Pak  $V$  a  $W$  jsou izomorfní právě když  $\dim V = \dim W$ .*

*Důkaz.* Zbývá sestavit izomorfismus mezi prostory  $V$  a  $W$  stejné dimenze. Zvolme  $M$  bázi  $V$  a  $N$  bázi  $W$ , existují izomorfizmy  $f : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $g : W \rightarrow \mathbb{F}^n$  určené přiřazením vektoru jeho souřadnic vzhledem k dané bázi:  $f(v) := (v)_M$ ,  $g(w) = (w)_N$ . Pak  $g^{-1}f$  je izomorfismus  $V$  a  $W$ .  $\square$

**Definice 21.** Nechť  $V_n$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $M' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$  dvě báze v něm. Matici  $R \in M_{nn}(\mathbb{F})$ , jejíž  $i$ -tý sloupec pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$  je vektorem souřadnic vektoru  $u'_i$  vzhledem k bázi  $M$ , nazýváme **maticí přechodu** od  $M$  k  $M'$ .

Podle definice tedy  $\sum_{i=1}^n r_{ij}u_i = u'_j$  pro všechna  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Označme souřadnice libovolného vektoru  $u \in V$  vzhledem k  $M'$  jako  $(u)_{M'} \equiv x' \equiv (x'_1, \dots, x'_n)^T$ . Pak

$$u = \sum_{j=1}^n x'_j u'_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x'_j r_{ij} u_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} x'_j \right) u_i$$

Když označíme souřadnice  $u$  vzhledem k  $M$  jako  $(u)_M \equiv x \equiv (x_1, \dots, x_n)^T$ , pak  $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$  a protože souřadnice vzhledem k dané bázi jsou určeny jednoznačně, musí být  $x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} x'_j$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tedy matice přechodu umožňuje vypočítat „nečárkované“ souřadnice  $x$  jako součin  $Rx'$  matice přechodu od  $M$  k  $M'$  a „čárkovaných“ souřadnic.

Praktický výpočet matice přechodu se nejlíp provede přímo z definice. Pokud  $M = \{(1, 1), (2, 3)\}$  a  $M' = \{(1, 2), (3, 4)\}$  v  $\mathbb{R}^2$  pak soustava rovnic s maticí

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

právě řeší úlohu vyjádřit vektory z  $M'$  (pravé strany) pomocí vektorů báze  $M$  (sloupce matice soustavy). Tedy po úpravě na jednotkovou matici vlevo přečteme vpravo přímo matici  $R$ .

**Definice 22.** Nechť  $f : V_n \rightarrow V_m$  je homomorfismus vektorových prostorů nad  $\mathbb{F}$ . **Maticí homomorfismu**  $f$  vzhledem k bázím  $M = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V_n$  a  $N = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V_m$  rozumíme matici  $(f)_{NM} \in M_{mn}(\mathbb{F})$ , jejíž  $i$ -tý sloupec je pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$  roven  $(f(u_i))_N$ , tedy souřadnicím  $f$ -obrazu  $i$ -tého bázového vektoru báze  $M$  vzhledem k bázi  $N$ .

Označme opět souřadnice vektoru  $u \in V$  vzhledem k  $M$  jako  $(u)_M \equiv (x_1, \dots, x_n)^T$  a matici  $(f)_{NM}$  jako  $A$ . Pak

$$f(u) = \sum_{j=1}^n x_j f(u_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) v_i$$

Tedy souřadnice  $f(u)$  vzhledem k  $N$  se dostanou jako součin matice homomorfizmu  $A$  a souřadnic  $u$  vzhledem k  $M$ :

$$(f(u))_N = (f)_{NM}(u)_M$$

Naopak, pro libovolnou matici  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$  má zobrazení  $f$ , definované na bázi  $M$  předpisem  $f(u_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j$ , matici  $(f)_{NM}$  rovnou  $A$ . Libovolnému homomorfizmu  $f \in \text{Hom}(V_n, V_m)$  je tedy přiřazena matice  $(f)_{NM} \in M_{mn}(\mathbb{F})$ , a to bijektivně. Nedá příliš práce ověřit, že toto zobrazení  $F : \text{Hom}(V_n, V_m) \rightarrow M_{mn}(\mathbb{F})$  je homomorfismus vektorových prostorů. Tedy prostory  $\text{Hom}(V_n, V_m)$  a  $M_{mn}(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^{mn}$  jsou izomorfní a mají tudíž stejnou dimenzi, čímž jsme znovu ověřili, že  $\dim \text{Hom}(V_n, V_m) = mn$ . Zároveň vidíme, že pojem matice homomorfizmu můžeme chápat jako způsob, jak zavést souřadnice na prostoru  $\text{Hom}(V_n, V_m)$ , které budou v nějakém smyslu kompatibilní s již zavedenými souřadnicemi na prostorech  $V_n$  a  $V_m$ .

Vrátíme-li se k našemu příkladu zobrazení typu  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definovanému předpisem  $f_A(x) = Ax$ , vidíme, že matice  $A$  je rovna matici  $(f_A)_{K'K}$  homomorfizmu  $f_A$  vzhledem ke kanonickým bázím v  $K \subset \mathbb{R}^n$  a  $K' \subset \mathbb{R}^m$ . Proto se dají všechna lineární zobrazení mezi dvěma aritmetickými vektorovými prostory zapsat jako  $f_A$  pro nějakou matici  $A$ .

**Lemma 12.** *Nechť  $U, V, W$  jsou tři vektorové prostory nad  $\mathbb{F}$  a  $M, N, P$  po řadě báze v nich,  $f : U \rightarrow V$ ,  $g : V \rightarrow W$  homomorfizmy. Pak*

1.  $(1_U)_{MM} = E$
2.  $(gf)_{PM} = (g)_{PN}(f)_{NM}$
3. *Pokud  $f$  je izomorfismus, pak  $(f^{-1})_{MN} = (f)_{NM}^{-1}$ .*

*Důkaz.* První tvrzení je zřejmé z definice. Pro druhé stačí vzít libovolný vektor  $u \in U$  a rozepsat

$$(g)_{PN}(f)_{NM}(u)_M = (g)_{PN}(f(u))_N = (g(f(u)))_P = (gf)_{PM}(u)_M.$$

To musí platit pro libovolný vektor  $(u)_M$ . Vezmeme-li  $(u)_M = e_i$ ,  $i$ -tý prvek kanonické báze, pak rovnost říká, že  $i$ -tý sloupec matice  $(g)_{PN}(f)_{NM}$  a matice  $(gf)_{PN}$  se rovnají. Protože  $i$  je libovolné, rovnají se matice jako celek.

Třetí tvrzení je důsledkem prvních dvou a vztahu  $f^{-1}f = 1_U$ .  $\square$

Třetí tvrzení říká, že pokud je  $f$  izomorfismus, pak je jeho matice vzhledem k libovolným bázím regulární. Naopak, pro regulární matici  $A$  a dané dvě báze  $M$  a  $N$  lze sestavit homomorfizmy  $f : U \rightarrow V$  a  $g : V \rightarrow U$  takové, že  $(f)_{NM} = A$  a  $(g)_{MN} = A^{-1}$ . Pak ale podle druhého bodu lemmatu  $(gf)_{MM} = E$  a  $(fg)_{NN} = E$ , tedy  $gf = 1_U$  a  $fg = 1_V$  a tedy  $g = f^{-1}$ , protože inverzní izomorfismus je určen jednoznačně.

**Věta 20.** *Nechť  $V, W$  jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad  $\mathbb{F}$ ,  $M \subset V$ ,  $N \subset W$  báze v nich,  $f : V \rightarrow W$  homomorfismus. Pak  $h(f) = h((f)_{NM})$ .*

*Důkaz.* Označme  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Pak

$$h(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle = \dim \langle f(u_1)_N, \dots, f(u_n)_N \rangle = h((f)_{NM})$$

$\square$

**Lemma 13.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$  konečné dimenze a  $M, M'$  jsou dvě báze v něm. Pak matice  $(1_V)_{MM'}$  je rovna matici přechodu od báze  $M$  k bázi  $M'$ .*

*Důkaz.* Pokud aplikujeme homomorfismus  $1_V$  na libovolný vektor  $u \in V$ , dostaneme z definice matice homomorfizmu

$$(u)_M = (1_V(u))_M = (1_V)_{MM'}(u)_{M'}$$

To znamená, že pokud vynásobíme maticí přechodu od  $M$  k  $M'$  „čárkované“ souřadnice vektoru  $u$ , získáme jeho „nečárkované“ souřadnice, což je přesně způsob, jak transformuje souřadnice matice přechodu od  $M$  k  $M'$ .  $\square$

**Věta 21.** *Nechť  $V, W$  jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad  $\mathbb{F}$ ,  $M, M'$  báze  $V$ ,  $N, N'$  báze  $W$  a  $f : V \rightarrow W$  homomorfismus. Pak*

$$(f)_{N'M'} = (1_W)_{N'N}(f)_{NM}(1_V)_{MM'}$$

*Důkaz.* Jde jen o přímočaré užití druhého bodu lemmatu 12 na  $f$  zapsané jako složení  $1_W \circ f \circ 1_V$ .  $\square$

Protože matici homomorfizmu můžeme chápat jako zavedení souřadnic na prostoru  $\text{Hom}(V, W)$ , které jsou v nějakém smyslu kompatibilní se zvolenými souřadnicemi na  $V$  a  $W$ , popisuje tato věta vlastně pravidlo, jak se tyto souřadnice transformují. V druhém semestru podobným způsobem odvodíme pravidla transformace libovolných tenzorů.

Věta se nejčastěji používá v případě  $V = W$ ,  $M = N$ ,  $M' = N'$ . Pak s využitím  $(1_V)_{M'M}^{-1} = (1_V)_{MM'}$  dostáváme

$$(f)_{M'M'} = (1_V)_{M'M} (f)_{MM} (1_V)_{M'M}^{-1}$$

Operaci, kdy se matici  $A$  přiřadí matice  $RAR^{-1}$  nazýváme **konjugováním** matice  $A$  maticí  $R$ . Víme již, že konjugování zachovává hodnotu a podle poslední věty vlastně odpovídá vyjadřování endomorfizmu v různých bázích. O maticích  $A$  a  $B$ , pro něž existuje regulární matice  $Q$  taková, že  $B = QAQ^{-1}$ , řekneme, že jsou **podobné**, značíme  $A \sim B$ .

*Příklad.* Spočtíme matici lineárního zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , které je definováno předpisem  $f(x, y, z) = (x + z, x - 2y)$  vzhledem ke kanonickým bázím, k bázím  $M = \{(2, 3, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $N = \{(1, 2), (1, 3)\}$  a k bázím  $M' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 0)\}$ ,  $N' = \{(1, 1), (2, 1)\}$ . Určeme jádro zobrazení  $gf$ , kde  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  je lineární zobrazení přiřazující vektoru  $(3, 1)$  vektor  $(1, -1, 0, 1)$  a vektoru  $(2, 1)$  vektor  $(-1, 1, 0, -1)$ .

Nejjednodušší je určit matici

$$(f)_{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sloupce matice  $(f)_{NM}$  jsou souřadnice obrazů báze  $M$  vzhledem k bázi  $N$ . Stačí tedy řešit soustavu

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 10 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & -11 & -2 \end{array} \right),$$

čili

$$(f)_{NM} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 3 \\ -8 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

Matici  $(f)_{N'M'}$  můžeme počítat podobně, ale pojďme si vyzkoušet použít matice přechodu  $(1)_{N'N}$  a  $(1)_{MM'}$ . Ty se dostanou vyjádřením vektorů báze  $N$  vůči  $N'$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

a vektorů báze  $M'$  vzhledem k  $M$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Tedy

$$(f)_{N'M'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 14 & 3 \\ -8 & -11 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Snadno ověříme, že přímý výpočet dává stejný výsledek:

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

Zobrazení  $g$  jsme dostali definované hodnotami na bázi  $P = \{(3, 1), (2, 1)\}$ .

Tedy matice  $g$  vzhledem k bázi  $P$  a kanonické bázi v  $\mathbb{R}^4$  je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice složeného homomorfizmu je součin matic jednotlivých homomorfizmů, pokud je báze v prostředním prostoru pro oba homomorfizmy stejná. Známe matici  $(f)_{N'M'}$  a matici  $(g)_{KP}$ . Potřebujeme tedy ještě vložit matici přechodu od báze  $P$  k bázi  $N'$ . Nejprve tuto matici vypočteme

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

a následně použijeme ve vyjádření

$$\begin{aligned} (gf)_{KM'} &= (g)_{KP}(1)_{PN'}(f)_{N'M'} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 10 \\ 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Jádrem homomorfizmu  $gf$  jsou všechny vektory, pro něž  $gf(u) = 0$ , čili pro jejichž souřadnice  $(u)_{M'} \equiv (x, y, z)$  vzhledem k  $M'$  platí  $(gf)_{KM'}(u)_{M'} = 0$ . Tedy  $(u)_{M'} \in \langle (10, 0, 1), (11, 1, 0) \rangle$ . Ze souřadnic vypočteme samotné bázové vektory jádra  $10(1, 0, 1) + (0, 1, 0)$  a  $11(1, 0, 1) + (1, 1, 2)$  a máme

$$\text{Ker } gf = \langle (10, 1, 10), (12, 1, 13) \rangle.$$

Bylo by samozřejmě možné postupovat i jinými způsoby, například vypočítat

$$(gf)_{KK} = (g)_{KK}(f)_{KK} = (g)_{KP}(1)_{PK}(f)_{KK},$$

k čemuž nám ještě chybí matice přechodu od  $P$  ke  $K$ , a řešit soustavu rovnic s maticí  $(gf)_{KK}$ . Pak bychom ušetřili poslední krok, protože výsledek by vyšel v souřadnicích vzhledem ke kanonické bázi.

## Cvičení

1. **(4)** Necht'  $V$  je vektorový prostor všech funkcí z intervalu  $I$  do  $\mathbb{R}$ . Dokažte, že zobrazení  $F : V \rightarrow V$ , definované pro  $f \in V$  vztahem  $\forall x \in I, [F(f)](x) = xf(x)$ , je lineární zobrazení.
2. **(4)** Necht'  $0 \neq r \in \mathbb{R}$ . Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  jsou lineární:
  - (a)  $(x, y, z, u) \rightarrow (xy, y - x, z, u)$
  - (b)  $(x, y, z, u) \rightarrow (ry, y - x, z, u)$
  - (c)  $(x, y, z, u) \rightarrow (0, z, y, x + y + z + u)$
  - (d)  $(x, y, z, u) \rightarrow (1, z + y, z + x, z + u)$

Zdůvodněte.

3. **(3)** Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení  $f : V \rightarrow W$  jsou lineární:
  - (a)  $V = W = \mathbb{C}$  a  $f$  je komplexní sdružení  $f(v) = \bar{v}$
  - (b)  $V$  je prostor všech reálných čtvercových matic stupně  $n$ ,  $W = \mathbb{R}$ ,  $f(A) = \text{Tr } A$ .
  - (c)  $V = W$  je prostor všech reálných funkcí na  $\mathbb{R}$  a  $f$  je zobrazení přiřazující funkci její absolutní hodnotu  $f(g) = |g|$ .

- (d)  $V$  je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše  $n$ ,  $W = \mathbb{C}^n$  a  $f$  je zobrazení přiřazující polynomu  $p$  vektor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jeho kořenů (včetně násobností).
- (e)  $V = W$  je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše  $n$  a  $f$  je zobrazení přiřazující polynomu  $p$  jeho derivaci  $f(p) = p'$ .
4. **(3)** Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  zadaného vztahem  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 4x_1 + x_3)$ .
5. **(3)** Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadaného vztahem  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_2 - 2x_3, x_1 + 4x_3 + x_4)$ .
6. **(3)** Necht'  $V$  je vektorový prostor všech reálných čtvercových matic řádu  $n$ . Popište jádro a obraz zobrazení  $F$  které matici  $A = (a_{ij})$  přiřazuje matici, jejíž  $ij$ -tý prvek je  $a_{ij} + a_{ji}$ .
7. **(3)** Popište jádro a obraz endomorfizmu  $F$  množiny  $M$  všech reálných funkcí na  $\mathbb{R}$ , který je definován vztahem  $\forall f \in M, \forall x \in \mathbb{R}, (F(f))(x) = f(x) - f(-x)$ .
8. **(3)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  splňuje

$$\begin{aligned} f_A((1, 1, 1)) &= (0, 1, 1) \\ f_A((1, 1, 0)) &= (1, 0, 2) \\ f_A((1, 0, 0)) &= (3, 1, -2) \end{aligned}$$

9. **(3)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  splňuje

$$\begin{aligned} f_A((2, 3, 5)) &= (1, 1, 1) \\ f_A((0, 1, 2)) &= (1, 1, -1) \\ f_A((1, 0, 0)) &= (2, 1, 2) \end{aligned}$$

10. **(3)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  splňuje

$$\begin{aligned} f_A((2, 0, 3)) &= (1, 2, -1) \\ f_A((4, 1, 5)) &= (4, 5, -2) \\ f_A((3, 1, 2)) &= (1, -1, 1) \end{aligned}$$

11. **(4)** Rozhodněte, zda je zobrazení  $f : M_{22}(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(x, \mathbb{R})$ , definované vztahem

$$f \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + d + (c + 2b)x^2 - x^3,$$

lineární.

12. **(4)** Rozhodněte, zda je zobrazení  $f : P(x, \mathbb{R}) \rightarrow M_{22}(\mathbb{R})$

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(2) & p(3) \end{pmatrix}$$

lineární.

13. **(4)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  přiřazuje vektoru  $(x, y, z)$  vektor  $(z, y)$ .
14. **(4)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  přiřazuje vektoru jeho  $c$ -násobek.
15. **(4)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  přiřazuje vektoru  $(x, y, z)$  vektor osově souměrný podle roviny  $xz$ .
16. **(3)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  přiřazuje vektoru  $(x, y, z)$  vektor potočený okolo osy  $x$  o úhel  $\alpha$ .
17. **(3)** Nechť  $u \in \mathbb{R}^3$ . Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  přiřazuje vektoru  $x$  vektorový součin  $x \times u$ . Určete jádro a obraz tohoto zobrazení.
18. **(3)** Dokažte, že zobrazení  $f : P(x, \mathbb{R}) \rightarrow P(x, \mathbb{R})$ , které polynomu  $p(x)$  přiřazuje polynom  $p(x - 1)$ , je izomorfismus vektorových prostorů.
19. **(3)** Najděte dva různé izomorfizmy mezi prostory  $P_n(x, \mathbb{R})$  a  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
20. **(3)** Najděte dva různé izomorfizmy mezi prostory  $M_{mn}(\mathbb{R})$  a  $\mathbb{R}^{mn}$ .
21. **(3)** Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte jádro a obraz zobrazení  $f : M_{32}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ , které matici  $X$  přiřazuje matici  $AX$ .

22. **(3)** Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte jádro a obraz zobrazení  $f : M_{22}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{23}(\mathbb{R})$ , které matici  $X$  přiřazuje matici  $XA$ .

23. **(3)** Najděte jádro a obraz zobrazení  $f : P_n(x, \mathbb{R}) \rightarrow P_n(x, \mathbb{R})$ , které polynomu přiřazuje jeho první derivaci.
24. **(2)** Jakou podmínku musí splňovat lineární zobrazení, aby zobrazovalo lineárně nezávislé množiny na lineárně nezávislé množiny? Dokažte.
25. **(2)** Jakou podmínku musí splňovat lineární zobrazení, aby zobrazovalo množiny generátorů na množiny generátorů? Dokažte.
26. **(2)** Jakou podmínku musí splňovat lineární zobrazení, aby zobrazovalo báze na báze? Dokažte.
27. **(4)** Necht  $f, g : V \rightarrow W$  jsou dvě lineární zobrazení. Dokažte, že množina vektorů z  $V$ , na nichž se zobrazení  $f$  a  $g$  rovnají, je vektorový podprostor.
28. **(2)** Najděte endomorfismus, který je monomorfismem, ale není epimorfismem.
29. **(2)** Najděte endomorfismus, který je epimorfismem, ale není izomorfismem.
30. **(2)** Dokažte, že  $f : V \rightarrow V'$  je monomorfismus, právě když existuje homomorfismus  $g : V' \rightarrow V$  takové, že  $gf = 1_V$ .
31. **(2)** Dokažte, že  $f : V \rightarrow V'$  je epimorfismus, právě když existuje homomorfismus  $g : V' \rightarrow V$  takové, že  $fg = 1_{V'}$ .
32. **(2)** Dokažte, že pro libovolné dva homomorfismy  $f : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $g : V_2 \rightarrow V_3$  pro jádra platí  $\text{Ker } f \leq \text{Ker}(g \circ f)$  a formulujte a dokažte obdobné tvrzení pro obrazy.
34. **(3)** Jaké je jádro endomorfismu konečně dimenzionálního vektorového prostoru, který je epimorfismem? Odpověď zdůvodněte.

35. **(3)** Necht'  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ . Rozhodněte, které z následujících výroků platí a odpověď zdůvodněte:
- (a)  $\text{Im } f_{AB} = \text{Im } f_B$
  - (b)  $\text{Im } f_{AB} \supset \text{Im } f_B$
  - (c)  $\text{Im } f_{AB} \subset \text{Im } f_A$
  - (d)  $\text{Im } f_{AB} = \text{Ker } f_{B^T}$
  - (e)  $\text{Im } f_{AB} = \text{Im } f_A$
36. **(2)** Necht'  $V_1, V_2$  jsou vektorové prostory konečné dimenze,  $g : V_1 \rightarrow V_2$  a  $f : V_2 \rightarrow V_1$  jsou homomorfizmy. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Je-li  $gf$  izomorfismus a  $fg$  izomorfismus, pak  $g$  je izomorfismus a  $f$  je izomorfismus. Odpověď zdůvodněte. Rozhodněte, zda tvrzení platí i bez požadavku konečné dimenze.
37. **(3)** Necht'  $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ . Rozhodněte, které z následujících výroků platí a odpověď zdůvodněte:
- (a)  $\text{Ker } f_{AB} = \text{Ker } f_A$
  - (b)  $\text{Ker } f_{AB} \subset \text{Ker } f_A$
  - (c)  $\text{Ker } f_{AB} \supset \text{Ker } f_B$
  - (d)  $\text{Ker } f_{AB} = \text{Im } f_{A^T}$
  - (e)  $\text{Ker } f_{AB} = \text{Ker } f_B$
38. **(2)** Necht'  $f : V_2 \rightarrow V_3$ ,  $g : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $h : V_1 \rightarrow V_3$ ,  $h = fg$  jsou tři homomorfizmy vektorových prostorů. Rozhodněte, které z následujících výroků jsou pravdivé, a své rozhodnutí zdůvodněte.
- (a)  $h, f$  jsou monomorfizmy  $\Rightarrow g$  je monomorfismus
  - (b)  $f, g$  jsou monomorfizmy  $\Rightarrow h$  je monomorfismus
  - (c)  $h, g$  jsou monomorfizmy  $\Rightarrow f$  je monomorfismus
  - (d)  $h$  je monomorfismus  $\Rightarrow g$  je monomorfismus
  - (e)  $g$  je monomorfismus  $\Rightarrow h$  je monomorfismus
  - (f)  $h$  je monomorfismus  $\Rightarrow f$  je monomorfismus

39. **(3)** Najděte příklad dvou homomorfizmů  $f$  a  $g$  takových, že ani  $f$  ani  $g$  nejsou izomorfizmy, ale  $gf$  izomorfismus je. Mohou být  $f$  a  $g$  endomorfizmy?
40. **(4)** Najděte nenulový endomorfizmus  $f$ , pro nějž  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .
41. **(4)** Jaké je jádro endomorfizmu konečně dimenzionálního vektorového prostoru, který je epimorfizmem?
42. **(4)** Jaký je obraz endomorfizmu konečně dimenzionálního vektorového prostoru, který je zároveň monomorfizmem?
43. **(2)** Nechť  $V_1, V_2$  jsou vektorové prostory,  $M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  je báze  $V_1$  a  $F : M \rightarrow V_2$  je libovolná funkce. Dokažte, že existuje právě jeden homomorfizmus  $f : V_1 \rightarrow V_2$  splňující  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} f(u_i) = F(u_i)$ .
44. **(2)** Dokažte, že jsou-li  $f$  a  $g$  homomorfizmy a  $gf$  je monomorfizmus, pak  $f$  je monomorfizmus. Ukažte také, že  $g$  monomorfizmus být nemusí.
45. **(2)** Uvažujme homomorfizmy  $f : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $g : V_2 \rightarrow V_3$  takové, že  $f$  je monomorfizmus,  $g$  je epimorfizmus a  $gf = 0$ . Dokažte, že potom  $\dim V_2 \geq \dim V_1 + \dim V_3$ .
46. **(1)** Nechť  $V$  je vektorový prostor dimenze  $2n$  a  $f$  endomorfizmus na  $M$ . Dokažte, že  $\text{Ker } f = \text{Im } f$  právě když  $f^2 = 0$  a současně hodnota  $f$  je rovna  $n$ .
47. **(3)** Najděte matici  $A$  takovou, že zobrazení  $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  splňuje

$$\begin{aligned} f_A((1, 1)) &= (0, 1, 2) \\ f_A((1, -1)) &= (2, 0, -1) \end{aligned}$$

48. **(4)** Dokažte, že  $f_A + f_B = f_{A+B}$ .
49. **(3)** Dokažte, že pro  $A$  regulární je  $f_A$  izomorfizmus a  $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ .
50. **(3)** Nechť  $V, V'$  je vektorové prostory,  $M \subset V$  a  $f : V \rightarrow V'$  lineární zobrazení. Dokažte, že  $f(\langle M \rangle) = \langle f(M) \rangle$ .
51. **(3)** Nechť  $V, V'$  je vektorové prostory,  $M$  je množina generátorů  $V$  a  $f : V \rightarrow V'$  epimorfizmus. Dokažte, že  $f(M)$  generuje  $V'$ .

52. **(2)** Necht'  $V, V'$  jsou vektorové prostory,  $M \subset V$ ,  $f : V \rightarrow V'$  lineární zobrazení takové, že  $f|_M$  je prosté zobrazení a  $f(M)$  je lineárně nezávislá množina. Dokažte, že pak  $M$  je lineárně nezávislá.
53. **(2)** Necht'  $V, V'$  jsou vektorové prostory,  $M$  je báze  $V$ ,  $F : M \rightarrow V'$  je zobrazení a  $f : V \rightarrow V'$  jednoznačně určený homomorfismus, pro který  $f|_M = F$ . Dokažte, že  $f$  je monomorfismus právě když  $F(M)$  je lineárně nezávislá množina.
54. **(2)** Necht'  $V, V'$  jsou vektorové prostory,  $M$  je báze  $V$ ,  $F : M \rightarrow V'$  je zobrazení a  $f : V \rightarrow V'$  jednoznačně určený homomorfismus, pro který  $f|_M = F$ . Dokažte, že  $f$  je epimorfismus právě když  $F(M)$  generuje  $V'$ .
55. **(3)** Necht'  $V, V'$  jsou vektorové prostory,  $M$  je lineárně nezávislá podmnožina ve  $V$ , která není bází,  $F : M \rightarrow V'$  je zobrazení. Zkonstruujte dva různé homomorfizmy  $f, g : V \rightarrow V'$ , pro které  $f|_M = g|_M = F$ .
56. **(3)** Necht'  $V, V'$  jsou vektorové prostory,  $M$  je množina generující  $V$ , která není bází. Ukažte, že existuje zobrazení  $F : M \rightarrow V'$  takové, že neexistuje žádný homomorfismus  $f : V \rightarrow V'$ , pro který  $f|_M = F$ .
57. **(4)** Najděte souřadnice vektoru  $u = (7, -3, 4, 12)$  vzhledem k bázi  $M = \{(2, 3, 1, 4), (1, -2, 2, 3), (-3, 2, 1, -2)\}$  podprostoru  $\langle M \rangle \subset \mathbb{R}^4$ .
58. Určete matici homomorfizmu  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$  vzhledem ke kanonickým bázím  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$  a vzhledem k bázím  $M = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$  a  $M' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ . Určete jádro a obraz  $f$ .
59. **(3)** Homomorfismus  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  má vzhledem k bázím  $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  a  $\{(1, 1), (2, 0)\}$  matici
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Určete obraz vektoru  $(x, y, z)$ .
60. **(3)** Určete matici homomorfizmu  $f : P_2(x, \mathbb{R}) \rightarrow P_2(x, \mathbb{R})$  přiřazujícího polynomu  $p(x)$  polynom  $p'(x) - 2p(x)$ , kde  $p'(x)$  je první derivace  $p(x)$ , vzhledem k bázím  $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$  a  $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$ .

1. **(3)** Určete matici přechodu od báze  $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$  k bázi  $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$  v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.
61. **(3)** Je dán homomorfismus  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$f \left( a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ = a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte, jestli je  $f$  automorfismus a pokud ano, najděte matici inverzního automorfizmu vzhledem ke kanonickým bázím.

62. **(3)** Necht'  $v \in \mathbb{R}^3$ . Určete matici homomorfizmu  $f_v(x) = v \times x$  daného vektorovým součinem s  $v$  vůči kanonickým bázím. Určete jádro a obraz tohoto homomorfizmu.
63. **(2)** Necht'  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  je homomorfismus určený vztahem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3 - 2x_4)$$

Najděte nějakou bázi  $M$  jádra zobrazení  $f$  a nějakou bázi  $N$  obrazu zobrazení  $f$ . Dále najděte nějaký doplněk  $W$  podprostoru  $\text{Ker } f$  v  $\mathbb{R}^4$  a takovou jeho bázi  $P$ , aby matice zúženého zobrazení  $f|_W$  vzhledem k bázím  $P$  a  $N$  byla jednotková matice.

64. **(3)** Necht'  $v \in \mathbb{R}^n$  a  $p_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je zobrazení dané pro libovolný vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  vztahem  $(p_v(x))_i = (\sum_{j=1}^n v_j x_j) v_i$ . Ověřte, že  $p_v$  je lineární zobrazení, najděte matici zobrazení  $p_v$  vzhledem ke kanonickým bázím a určete jádro, obraz a hodnotu zobrazení  $p_v$ .
65. **(3)** Necht'  $V$  je prostor všech reálných čtvercových matic stupně 2 a definujme zobrazení  $f : V \rightarrow V$  vztahem  $f_B(X) = BXB^{-1}$ , kde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$



Určete matici zobrazení  $f_B$  vzhledem k bázi

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

66. **(2)** Ukažte, že pokud  $A \sim B$ , pak  $A^k \sim B^k$  pro všechna  $k \in \mathbb{N}$  a pokud  $A$  je regulární, pak  $A^k \sim B^k$  pro všechna  $k \in \mathbb{Z}$ .
67. **(2)** Dokažte, že zobrazení  $f : P_n(x, \mathbb{R}) \rightarrow P_n(x, \mathbb{R})$  přiřazující polynomu  $p(x)$  polynom  $p(x-1)$  je automorfismus a najděte jeho matici vzhledem k bázi  $\{1, x, \dots, x^n\}$ .
68. **(2)** Necht'  $a \in \mathbb{R}$ . Najděte matici přechodu od báze  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  k bázi  $\{1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\}$  a naopak v  $P_n(x, \mathbb{R})$ .
69. **(2)** Dokažte, že relace „býti izomorfní“ je relace ekvivalence na množině všech vektorových prostorů.
70. **(2)** Řekneme, že podmnožina  $M$  vektorového prostoru  $V$  je konvexní, pokud pro libovolné dva body  $u, v \in M$  je v  $M$  i jejich spojnice, tedy množina vektorů  $\{tu + (1-t)v \mid t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ . Dokažte, že lineární zobrazení zachovávají konvexitu množin.
71. **(2)** Dokažte, že duální prostor  $V_n^*$  je izomorfní prostoru  $V_n$ .
72. **(1)** Dokažte, že pro každý homomorfismus  $f : V_n \rightarrow W_m$  existují báze  $V_n$  a  $W_m$  takové, že matice  $f$  vůči těmto bázím je horní trojúhelníková.
73. **(1)** Pokud  $A$  a  $B$  jsou dvě čtvercové matice stejné velikosti, pro něž  $ABAB = 0$ , plyne z toho již  $BABA = 0$ ?
74. **(1)** Necht'  $f \in \text{End}(V_n)$ . Dokažte, že

$$\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = h(f) - h(f^2)$$



# Kapitola 7

## Skalární součin

V této kapitole se podíváme na příklad dodatečné struktury, kterou je možné definovat na vektorovém prostoru, na skalární součin. Zavedením skalárního součinu získává čistě algebraický objekt geometrické vlastnosti - umíme říct, kdy jsou vektory kolmé, změřit jejich velikost, definovat úhel mezi nimi. Některé báze se stanou význačnými - ortogonální a ortonormální báze. Mezi lineárními zobrazeními, která byla definována jako podmnožina všech zobrazení, která se chovají „hezky“ k algebraické struktuře vektorového prostoru, budeme moci vybrat menší podmnožinu lineárních zobrazení, která se chovají „hezky“ i k dodatečné struktuře geometrické, kterou s sebou přináší skalární součin.

**Definice 23.** Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{F}$ , přičemž  $\mathbb{F}$  je  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ , které splňuje  $\forall u, v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}$

1.  $g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = g(u, \bar{\lambda}v)$ ,
2.  $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$ ,  $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$ ,
3.  $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$ ,
4.  $g(u, u) \geq 0$ , přičemž  $g(u, u) = 0$  nastává pouze pro  $u = 0$ ,

nazýváme **skalární součin** na  $V$ .

Jsou to vlastně dvě definice v jedné. V reálném případě je  $\bar{\lambda} = \lambda$ , tedy první dvě podmínky vlastně říkají, že pokud do prvního nebo druhého argumentu zobrazení  $g(\cdot, \cdot)$  dosadíme libovolný vektor, pak vzniklé zobrazení z  $V$

do  $\mathbb{R}$  je lineární. Takové zobrazení z  $V \times V$  do  $\mathbb{R}$  se nazývá **bilineární forma**. Podobně lze definovat pojem trilineární, kvadrilineární nebo obecně **multilineární formy**. V komplexním případě je situace jiná, při „vytknutí“ konstanty z druhého argumentu přibere tato konstanta komplexní sdružení. Taková vlastnost se nazývá **antilinearitou**, dobrým příkladem antilineárního zobrazení je  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := \bar{z}$ . Pro zobrazení z  $V \times V$  do  $\mathbb{C}$ , které je v jednom argumentu lineární a v druhé antilineární, se používá pojem **seskvilineární forma**.

Třetí podmínka opět říká něco trochu jiného na reálném a na komplexním vektorovém prostoru. Mluvíme o **symetrické** bilineární, resp. **hermitovské** seskvilineární formě. Poslední podmínka má smysl v reálném i komplexním případě, protože z předchozí podmínky plyne, že  $g(u, u)$  je vždy reálné číslo a má tedy smysl ho porovnávat s nulou. O bilineární formě, splňující čtvrtou podmínku říkáme, že je **pozitivně definitní**. Funkce  $\|u\|_g := \sqrt{g(u, u)}$  se nazývá **norma** příslušná skalárnímu součinu  $g$ . Pozitivní definitnost zaručuje, že norma je dobře definovaná a že nulovou normu má pouze nulový vektor.

Pokud bude jasné, s jakým skalárním součinem na prostoru pracujeme, budeme jej značit místo  $g(u, v)$  jen  $(u, v)$  a jeho normu  $\|u\|$ . Naopak, pokud budeme chtít explicitně vyznačit, že na prostoru  $V$  používáme skalární součin  $g$ , budeme prostor a skalární součin psát jako dvojici  $(V, g)$ .

## 7.1 Geometrie definovaná skalárním součinem

Skalární součin umožňuje definovat na vektorovém prostoru pojem vzdálenosti. Abstraktně se vzdálenost na nějaké množině zavádí pomocí pojmu **metriky**:

**Definice 24.** Necht'  $M$  je množina. Funkci  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme metrikou na  $M$ , pakliže splňuje pro všechny body  $x, y, z \in M$  následující axiomy:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  a  $\rho(x, y) = 0$  právě když  $x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Dvojici  $(M, \rho)$  pak nazýváme **metrický prostor**.

První axiom říká, že vzdálenost je vždy nezáporná a žádné dva různé body nemohou mít nulovou vzdálenost. Druhý axiom vyjadřuje symetrii pojmu vzdálenosti a třetímu se říká **trojúhelníková nerovnost**.

*Příklad.* Na prostoru  $\mathbb{R}^n$  lze zavést metriku různými způsoby. Tradiční je metrika euklidovská,  $\rho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ . Jsou ale i jiné způsoby, například metrika manhattanská,  $\rho_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ , nebo metrika maximová,  $\rho_\infty(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ . Zkuste si u každé z nich ověřit platnost axiomů.

**Věta 22.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro libovolné vektory  $u, v \in V$  platí*

1.  $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$
2.  $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$
3. Dvojice  $(V, \rho)$ , kde  $\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je definována  $\rho(u, v) := \|u - v\|$ , tvoří metrický prostor.

*Důkaz.* Pro  $v = 0$  je první tvrzení zřejmé. Pokud  $v \neq 0$ , pak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| u - \frac{(u, v)}{\|v\|^2} v \right\|^2 = \left( u - \frac{(u, v)}{\|v\|^2} v, u - \frac{(u, v)}{\|v\|^2} v \right) \\ &= \|u\|^2 - \frac{(u, v)}{\|v\|^2} (v, u) - \frac{\overline{(u, v)}}{\|v\|^2} (u, v) + \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2 \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2} + \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2}, \end{aligned}$$

což vede po úpravě na dokazovanou nerovnost. Tu pak využijeme na dokázání druhého tvrzení:

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= (u - v, u - v) = \|u\|^2 - (u, v) - (v, u) + \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 - 2 \operatorname{Re}(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Třetí tvrzení je zřejmé: první axiom metriky je důsledkem čtvrté vlastnosti skalárního součinu, druhý axiom plyne z první vlastnosti a trojúhelníková nerovnost je důsledkem druhého tvrzení této věty.  $\square$

Prvnímu tvrzení se říká Cauchyova nerovnost (někdy též Schwarzova nebo Buňakovského). Věta vlastně ověřuje korektnost následující definice, která zavádí na vektorovém prostoru se skalárním součinem nejdůležitější geometrické pojmy:

**Definice 25.** Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem,  $u, v \in V$ . Pak číslo  $\|u - v\|$  nazýváme **vzdáleností vektorů**  $u$  a  $v$ . Řekneme, že  $u, v \in V$  jsou **kolmé**, pokud  $(u, v) = 0$ , značíme  $u \perp v$ . Pokud  $V$  je reálný vektorový prostor, pak číslo  $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ , pro které platí  $\cos \varphi = \frac{(u, v)}{\|u\|\|v\|}$ , nazýváme **úhlem mezi vektory**  $u$  a  $v$ .

Metrice  $\rho(u, v) := \|u - v\|$  se říká metrika indukovaná skalárním součinem. Pokud  $V$  je reálný vektorový prostor, splňuje tato metrika vztah

$$(u, v) = \frac{1}{4} (\rho(u, -v)^2 - \rho(u, v)^2),$$

kterému se někdy říká **polarizační identita** a který se dá snadno dokázat z definic (zkuste si a pokuste se také napsat verzi pro komplexní vektorový prostor). Je to vlastně rekonstrukce skalárního součinu z jím indukované metriky. Zkuste dokázat, že pokud  $\rho$  splňuje vlastnosti metriky a definujeme  $\forall u, v \in V$  číslo  $(u, v)$  pomocí polarizační identity, pak toto zobrazení splňuje vlastnosti skalárního součinu.

Pokud  $(M, \rho)$  a  $(N, \sigma)$  jsou dva metrické prostory a  $f : M \rightarrow N$  je zobrazení, které  $\forall x, y \in M$  splňuje  $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$ , pak se toto  $f$  nazývá **izometrie**. Z polarizační identity plyne, že homomorfismus  $f : (V, g) \rightarrow (W, h)$  dvou vektorových prostorů se skalárním součinem je izometrie, právě tehdy když  $\forall u, v \in V$  platí  $g(u, v) = h(f(u), f(v))$ . Lineární zobrazení s touto vlastností se nazývají v reálném, resp. komplexním případě **ortogonální**, resp. **unitární**. Ze čtvrté vlastnosti skalárního součinu plyne, že takové zobrazení musí být monomorfismus. Pokud je  $(V, g) = (W, h)$  vektorový prostor konečné dimenze, a jde tedy o endomorfismus, musí být  $f$  izomorfismem. Je jednoduché ověřit, že množina všech ortogonálních endomorfizmů prostoru  $(V, g)$  tvoří grupu, a stejně tak i množina všech unitárních endomorfizmů.

## 7.2 Skalární součin v souřadnicích

Je-li  $V$  vektorový prostor konečné dimenze se skalárním součinem,  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  jeho báze,  $u, v$  dva vektory z  $V$  a  $x \equiv (x_1, \dots, x_n)^T = (u)_M$ ,

$y \equiv (y_1, \dots, y_n)^T = (v)_M$  jejich souřadnice, potom

$$(u, v) = \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j (u_i, u_j) = x^T Q \bar{y},$$

kde jsme číslo  $(u_i, u_j)$  identifikovali jako  $ij$ -tý element matice  $Q$ . Ta se nazývá **maticí skalárního součinu** vzhledem k bázi  $M$ . Je to symetrická, resp. hermitovská matice, neboť  $(u_i, u_j) = \overline{(u_j, u_i)}$ , tedy  $Q = Q^+$ . Jak se na matici  $Q$  projeví podmínka pozitivní definitnosti, to je trochu složitější a více o tom budeme moci říct až v příštím semestru, kdy budeme studovat bilineární formy podrobněji. Zde se omezíme jen na pozorování, že pro  $Q = E$  je

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

$$\|u\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

a pozitivní definitnost je zjevně zaručena. Skalárnímu součinu na  $\mathbb{R}^n$ , resp.  $\mathbb{C}^n$ , jehož matice vzhledem ke kanonické bázi je  $E$ , se říká **standardní skalární součin**. Vidíme, že standardní skalární součin je právě ten, který indukuje na  $\mathbb{R}^n$  euklidovskou metriku.

Co se stane s maticí  $Q$  při změně báze? Pokud  $M'$  je další báze ve  $V$  a  $R$  je matice přechodu od  $M$  k  $M'$ , tedy pro souřadnice platí  $x = Rx'$ , pak také  $x^T = x'^T R^T$ ,  $\bar{y} = \bar{R} \bar{y}'$ , a tudíž

$$(u, v) = x^T Q \bar{y} = x'^T R^T Q \bar{R} \bar{y}', \quad (7.1)$$

čili maticí skalárního součinu vzhledem k  $M'$  je  $R^T Q \bar{R}$ . Pokud chceme, aby matice skalárního součinu vzhledem k bázi  $M'$  byla stejná jako k  $M$ , dostáváme podmínku  $Q = R^T Q \bar{R}$ . Všechny matice  $R$ , které pro dané pevné  $Q$  tuto podmínku splňují, tvoří grupu vzhledem k násobení (ověřte sami!). Speciálně pokud  $Q = E$ , zjednoduší se podmínka na  $R^+ R = E$  v komplexním případě, resp. na  $R^T R = E$  v reálném případě. Takovým maticím  $R$  se pak říká **unitární**, resp. **ortogonální**, a příslušná grupa matic stupně  $n$  se značí  $U(n)$ , resp.  $O(n)$ .

Jaký je vztah mezi unitárními maticemi a unitárními endomorfizmy? Pokud  $V_n$  je prostor se skalárním součinem,  $f \in \text{End}(V)$  je unitární endomorfismus,  $M$  je báze  $V_n$ , vůči níž mají vektory  $u, v \in V$  souřadnice  $(u)_M = x$ ,  $(v)_M = y$ ,  $f$  maticí  $A$  a skalární součin maticí  $Q$ , pak

$$x^T Q \bar{y} = (u, v) = (f(u), f(v)) = x^T A^T Q \bar{A} \bar{y}$$

Pokud  $Q = E$ , dostáváme  $A^+A = E$ . Tedy vzhledem k bázi, vůči níž je matice skalárního součinu jednotková, má unitární endomorfismus unitární matici a podobně ortogonální endomorfismus má vůči takové bázi ortogonální matici. Existuje taková báze vždy a pokud ano, jak ji najít?

### 7.3 Ortonormální báze

**Definice 26.** Necht'  $V$  je prostor se skalárním součinem. Bázi prostoru  $V$ , v níž je každý vektor kolmý na všechny ostatní, nazýváme **ortogonální báze**, pokud navíc je norma všech vektorů rovna jedné, mluvíme o **ortonormální bázi**.

Pokud  $V_n$  je vektorový prostor konečné dimenze, pak matice skalárního součinu vzhledem k ortogonální bázi je diagonální s kladnými hodnotami na diagonále a vzhledem k ortonormální bázi je to jednotková matice  $E$ . Vidíme tedy, že je-li  $M$  ortonormální báze, pak  $M'$  je také ortonormální právě když matice přechodu od  $M$  k  $M'$  je ortogonální, resp. unitární matice. Pokud najdeme jednu ortonormální bázi, pak už se dokážeme alespoň teoreticky dostat ke všem ostatním prostřednictvím elementů  $O(n)$  resp.  $U(n)$ . Postup, jak ortonormální bázi získat postupnými úpravami libovolné báze, nese název **Gramova-Schmidtova ortogonalizace**. Uvažujme  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  bázi  $V_n$  a definujme  $v_1 := u_1$ . Vektor

$$v_2 := u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1,$$

je kolmý na  $v_1$ , stačí dosadit. Dále definujme

$$v_3 := u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{\|v_2\|^2} v_2,$$

opět vidíme, že  $v_3$  je kolmé na  $v_1$  i na  $v_2$ . Pokračováním tohoto postupu získáme ortogonální bázi a vydělením každého vektoru jeho normou bázi ortonormální. Přesněji to formuluje následující věta:

**Věta 23.** Necht'  $V_n$  je vektorový prostor se skalárním součinem a  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  jeho báze. Pak existuje ortonormální báze  $M' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$  prostoru  $V_n$  taková, že  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u'_1, \dots, u'_k \rangle$ .



*Důkaz.* Budeme postupovat indukcí podle  $n$ . Pokud  $n = 1$ , pak definujme  $v_1 := u_1$ ,  $u'_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ , tvrzení věty platí. Nechť nyní  $n > 1$  a předpokládejme platnost tvrzení pro všechny prostory dimenze menší nebo rovné  $n$ . Takovým prostorem je  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ , takže podle indukčního předpokladu v něm máme ortonormální bázi  $\{u'_1, \dots, u'_n\}$ , pro kterou  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u'_1, \dots, u'_k \rangle$ . Definujme nyní

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^n (u_{n+1}, u'_i) u'_i.$$

Tento vektor je kolmý na  $u'_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Dále po úpravě vidíme, že  $u_{n+1}$  je lineární kombinací vektorů  $u'_i$  a  $v_{n+1}$ , čili  $u_{n+1} \in \langle v_{n+1} \rangle \vee \langle u'_1, \dots, u'_n \rangle = \langle v_{n+1} \rangle \vee \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ , tedy  $v_{n+1}$  nemůže být nulový vektor. Proto má smysl definovat  $u'_{n+1} := \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$ . Je pak zřejmé, že  $\|u'_{n+1}\| = 1$ ,  $u'_{n+1}$  je kolmý na všechny vektory  $u'_1, \dots, u'_n$  a  $\langle u'_1, \dots, u'_{n+1} \rangle = \langle u_1, \dots, u_{n+1} \rangle$ . Tím je věta dokázána.  $\square$

Triviálním důsledkem věty je, že v každém vektorovém prostoru  $(V_n, g)$  nad  $\mathbb{F}$  existuje ortonormální báze. Je zřejmé, že lineární zobrazení, které  $i$ -tému bázeovému vektoru této báze přiřadí  $i$ -tý prvek kanonické báze  $\mathbb{F}^n$ , je izometrie prostoru  $(V_n, g)$  a prostoru  $\mathbb{F}^n$  se standardním skalárním součinem. Dostáváme tedy zesílení dříve dokázaného tvrzení, že každý vektorový prostor konečné dimenze je izomorfní nějakému  $\mathbb{F}^n$ , nyní již víme, že je mu dokonce izometrický (ať už je skalární součin na  $V$  jakýkoli).

Zastavme se ještě u klíčového kroku v důkazu věty. Máme ortonormální množinu  $M = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ , jejímž lineárním obalem je  $W := \langle M \rangle$ . Zobrazení  $P_W : V \rightarrow V$ , které vektoru  $u$  přiřazuje vektor  $\sum_{i=1}^n (u, u'_i) u'_i$  je zjevně homomorfismus, jehož obrazem je právě  $W$ . Navíc platí, že  $P_W P_W = P_W$  (ověřte sami) a všechny vektory kolmé na  $W$  zobrazuje  $P_W$  na nulu. Je to tudíž **ortogonální projekce** na podprostor  $W$ . V důkazu věty tedy vlastně konstruujeme  $v_{n+1}$  tak, že odečítáme od  $u_{n+1}$  jeho kolmý průmět na  $W$ . Vzniklý rozdíl je kolmý na  $W$  a tedy i na všechny vektory z  $M$ .

Mezi ortogonálními maticemi a ortonormálními bázemi je ještě jeden zajímavý vztah. Podmínka ortogonality matice  $R$  se dá přepsat jako  $R^T R = E$ . Prvek na pozici  $ij$  součinu matic na levé straně je vlastně euklidovským skalárním součinem  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku matice  $R^T$ , takže podmínka ortogonality znamená, že sloupce matice  $R$  tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{R}^n$ . Podobně sloupce unitární matice tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{C}^n$ . Vynásobením rovnosti

$R^T R = E$ , resp.  $R^+ R = E$  zleva  $R$  a zprava  $R^{-1}$  dostáváme  $RR^T = E$ , resp.  $RR^+ = E$ , tedy že ortonormální bázi tvoří i řádky.

*Příklad.* Nalezneme ortonormální bázi podprostoru  $\langle (1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7) \rangle$  v  $\mathbb{R}^4$  se standardním skalárním součinem. Označme vektory po řadě  $u_1, u_2, u_3$  a vezměme  $v_1 := u_1$ . Platí  $\|v_1\|^2 = 10$  a  $(u_2, v_1) = 1 + 2 - 10 - 3 = -10$ . Tedy

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 = (1, 1, -5, 3) - \frac{-10}{10} (1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2)$$

Vidíme, že skutečně  $v_2 \perp v_1$ . Spočteme  $\|v_2\|^2 = 26$ ,  $(u_3, v_1) = 30$  a  $(u_3, v_2) = -26$ , takže

$$v_3 = (3, 2, 8, -7) - \frac{30}{10} (1, 2, 2, -1) - \frac{-26}{26} (2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2),$$

což je opět vektor kolmý na  $v_2$  i  $v_1$ ,  $\|v_3\|^2 = 10$ . Nakonec vydělíme každý vektor jeho normou a získáváme ortonormální bázi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 2, 2, -1), \frac{1}{\sqrt{26}} (2, 3, -3, 2), \frac{1}{\sqrt{10}} (2, -1, -1, -2) \right\}$$

Pokud  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  je báze  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem, pak můžeme sestavit matici  $B$ , jejímž  $i$ -tým řádkem bude vektor  $u_i$ . Pokud se budeme dívat na algoritmus GS-ortogonalizace jako na posloupnost úprav matice  $B$ , pak v prvním kroku neděláme nic, ve druhém přičteme do druhého řádku nějaký násobek prvního, ve třetím do třetího nějakou lineární kombinaci prvních dvou a obecně v každém kroku do řádku lineární kombinaci předchozích řádků. Matice takové úpravy je dolní trojúhelníková a součin dolních trojúhelníkových matic je dolní trojúhelníková matice. Posledním krokem GS-ortogonalizace je normalizace každého vektoru na jedničku, což odpovídá násobení diagonální maticí. Výsledná matice už má ortonormální řádky a je to tudíž ortogonální matice. Celkově tedy pro libovolnou regulární matici  $B$  existuje dolní trojúhelníková matice  $L$ , diagonální matice  $D$  a ortogonální matice  $O$ , takové, že platí

$$O = DLB$$

Pokud tuto rovnost transponujeme, označíme  $K := O^T$  a násobíme zprava maticemi  $A := D^{-1}$  a  $N := (L^T)^{-1}$ , dostáváme, že libovolná regulární matice  $B^T$  se dá (jednoznačně) zapsat jako součin  $KAN$  ortogonální, diagonální a

horní trojúhelníkové matice s jednotkami na diagonále, tzv. **KAN-rozklad**. Je možné jej modifikovat i pro případ komplexní matice a také lze zahrnout matice singularní. Při označení  $Q = K$  a  $R = AN$  rovnou dostáváme speciální případ tzv. **QR-rozkladu** libovolné matice na součin ortogonální a horní trojúhelníkové matice. Obecný QR-rozklad funguje i pro matice, které nejsou čtvercové.

Další zajímavý rozklad matice, který plyne z GS-ortogonalizace, je Choleského rozklad libovolné čtvercové symetrické pozitivně definitní matice  $A$  na součin  $U^T U$ , kde  $U$  je horní trojúhelníková matice s kladnými čísly na diagonále. Zde stačí definovat na  $\mathbb{R}^n$  skalární součin, který má vzhledem ke kanonické bázi matici  $A$ , a pak provést GS-ortogonalizaci kanonické báze. V takto vzniklé bázi  $M$  má skalární součin matici  $E$  a stačí vzít za  $U$  matici přechodu od  $K$  k  $M$ .

## 7.4 Ortogonální doplněk a dualita

Množinu všech vektorů kolmých na všechny prvky množiny  $M \subset V$  nazýváme **ortogonální doplněk**  $M$ , značíme  $M^\perp$ . Jak souvisí tento pojem s doplňkem podprostoru definovaným v kapitole o vektorových prostorech?

**Věta 24.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem,  $W$  jeho podprostor konečné dimenze. Pak ortogonální doplněk  $W^\perp$  podprostoru  $W$  je doplňkem podprostoru  $W$  ve  $V_n$ , tedy  $W \oplus W^\perp = V_n$ .*

*Důkaz.* Dokazujeme vlastně dvě tvrzení:  $W \cap W^\perp = 0$  a  $W \vee W^\perp = V$ . Pokud  $u \in W \cap W^\perp$ , pak  $u \perp u$ , čili  $(u, u) = 0$  a tudíž  $u = 0$ . Pro druhé tvrzení předpokládejme, že existuje  $u \in V_n$ ,  $u \notin W \oplus W^\perp$ . Zvolme ve  $W$  ortonormální bázi  $\{u_1, \dots, u_k\}$  a položme  $v := u - \sum_{i=1}^k (u, u_i)u_i$ . Pak také  $v \notin W \oplus W^\perp$  a tedy i  $v \notin W^\perp$ . Na druhou stranu pro libovolný vektor  $w = \sum_{j=1}^k r_j u_j$  z  $W$  platí

$$\begin{aligned} (v, w) &= \left( u - \sum_{i=1}^k (u, u_i)u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \bar{r}_j (u, u_j) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \bar{r}_j (u, u_i) (u_i, u_j) = 0, \end{aligned}$$

tedy  $v \in W^\perp$ , což je spor. □

Ortogonalní doplněk podmnožiny ve  $V$  je podprostorem  $V$ . Stačí ověřit, že  $u^\perp \equiv \{u\}^\perp$  je podprostor, pak již musí být  $M^\perp = \bigcap_{u \in M} u^\perp$  jakožto průnik podprostorů také. Platí též, že  $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$ , neboť pokud je vektor kolmý na všechny prvky z  $M$ , je kolmý i na každou jejich lineární kombinaci a naopak, pokud je kolmý na všechny lineární kombinace, pak je speciálně kolmý i na ty z nich, které jsou rovny přímo vektorům z  $M$ . Operace ortogonálního doplňku tedy přiřazuje podprostorům ve  $V$  jiné podprostory. Pokud navíc  $V$  je prostorem konečné dimenze  $n$  a  $W$  jeho podprostor, pak z předchozí věty plyne  $\dim W^\perp = n - \dim W$ . Použijeme-li operaci ortogonálního doplňku dvakrát, vidíme jednak, že  $\forall w \in W$  je  $w$  kolmé na všechny prvky z  $W^\perp$ , tedy  $W \leq (W^\perp)^\perp$ . Zároveň  $\dim(W^\perp)^\perp = n - \dim W^\perp = \dim W$ , tudíž musí být  $(W^\perp)^\perp = W$ . Operacím, které jsou stejně jako „vzetí ortogonálního doplňku k podprostoru“ samy sobě inverzní, se obecně říká **involuce** nebo **duality**, dalšími příklady jsou třeba komplexní sdružení nebo středová či osová souměrnost v prostoru. Dualita zprostředkovaná skalárním součinem páruje podprostory do dvojic, jejichž členové jsou si navzájem ortogonálním doplňkem. Podobně jsou párována do dvojic i lineární zobrazení:

**Definice 27.** Necht'  $(V, g), (W, h)$  jsou dva prostory nad  $\mathbb{F}$  se skalárním součinem a  $f \in \text{Hom}(V, W)$ . Pak homomorfismus  $f^* \in \text{Hom}(W, V)$ , který  $\forall v \in V, \forall w \in W$  splňuje

$$h(w, f(v)) = g(f^*(w), v),$$

nazýváme **duálním** nebo též **adjungovaným homomorfismem** k  $f$ .

Necht'  $M$  je ortonormální báze  $(V_m, g)$ ,  $N$  je ortonormální báze  $(W_n, h)$ ,  $f \in \text{Hom}(V_m, W_n)$ ,  $(v)_M \equiv x \equiv (x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $(w)_N \equiv y \equiv (y_1, \dots, y_n)^T$  a  $A := (f)_{NM}$ ,  $B := (f^*)_{MN}$ . Matice skalárního součinu  $g$  i  $h$  je vzhledem k libovolné ortonormální bázi jednotková. Pak

$$\sum_{i=1}^n y_i \overline{\left( \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)} = (w, f(v)) = (f^*(w), v) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n b_{ji} y_i \right) \bar{x}_j$$

Porovnáme-li obě strany, vidíme, že rovnost pro libovolná  $v$  a  $w$  vyžaduje, aby  $\bar{a}_{ij} = b_{ji}$  pro libovolné indexy  $i, j$ , čili  $B = A^+$  nebo v reálném případě  $B = A^T$ . Pokud tedy  $A$  je matice zobrazení  $f$ , pak matice transponovaná, resp. hermitovsky sdružená, je maticí zobrazení adjungovaného. Odtud je konečně vidět, čím je zavedení operací transponování a hermitovského sdružení matice

motivováno. Protože jsou tyto operace definovány pro libovolnou matici, je zřejmé, že na prostoru konečné dimenze má každý homomorfismus k sobě homomorfismus adjungovaný. Z  $(A^T)^T = A$  a  $(A^+)^+ = A$  plyne, že  $(f^*)^* = f$ , jedná se tedy skutečně o dualitu.

Konečně se dostáváme do bodu, kdy můžeme nově interpretovat a elegantněji dokázat tvrzení  $h(A) = h(A^T)$  a  $h(B) = h(B^+)$  z kapitoly o hodnotě matice. Tvrzení vlastně říká, že obraz homomorfismu  $f$  z  $\mathbb{F}^m$  do  $\mathbb{F}^n$  má stejnou dimenzi jako obraz jeho duálního homomorfismu  $f^*$ . Vektor  $w \in \mathbb{F}^n$  je prvkem  $(\text{Im } f)^\perp$ , právě když  $\forall v \in \mathbb{F}^m$  platí  $h(w, f(v)) = 0$ . To nastane právě když  $g(f^*(w), v) = 0$ , tedy  $f^*(w) \in (\mathbb{F}^m)^\perp \equiv 0$  neboli  $w \in \text{Ker } f^*$ . Tedy  $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f^* \leq \mathbb{F}^n$ , čili

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f^* = n$$

Podle věty o dimenzi jádra a obrazu ale také

$$\dim \text{Im } f^* + \dim \text{Ker } f^* = n$$

Tedy  $\dim \text{Im } f = \dim \text{Im } f^*$ .

## Cvičení

1. **(3)** Dokažte alternativní verzi polarizační identity na reálném vektorovém prostoru

$$(u, v) = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

2. **(3)** Dokažte tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Platí toto pravidlo pouze na reálném vektorovém prostoru, nebo i na komplexním?

3. **(3)** Dokažte na reálném vektorovém prostoru tzv. cosinovou větu

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \varphi,$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi vektory  $u$  a  $v$ .

4. **(4)** Je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maticí skalárního součinu na  $\mathbb{R}^2$ ?

5. **(4)** Je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maticí skalárního součinu na  $\mathbb{R}^2$ ?

6. **(3)** Je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

maticí skalárního součinu na  $\mathbb{R}^2$ ?

7. **(1)** Odvoďte polarizační identitu pro komplexní vektorový prostor.

8. **(3)** Bud'  $(\mathbb{R}^3, g)$  prostor se skalárním součinem daným předpisem  $g(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3$ . Najděte ortogonální bázi  $\{u_1, u_2, u_3\}$  prostoru  $(V_3, g)$ , která obsahuje vektor  $u_1 = (1, 2, 0)$ . Najděte příslušnou ortonormální bázi.

9. **(3)** Na stejném prostoru se stejným skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru  $\langle u, v \rangle$ ,  $u = (5, 1, -1)$ ,  $v = (0, 1, -1)$  a rozšiřte ji na ortonormální bázi celého  $\mathbb{R}^3$

10. **(3)** V  $\mathbb{R}^4$  se standardním skalárním součinem nalezněte ortonormální bázi podprostoru  $\langle (1, -1, 2, 4), (1, -2, 2, 3), (2, -2, 5, 7) \rangle$  obsahující kladný násobek vektoru  $(1, 0, 2, 5)$ . Najděte ortogonální doplněk tohoto podprostoru.

11. **(3)** Najděte všechny různé úhly a délky vyskytující se mezi hranami, stěnovými úhlopříčkami a tělesovými úhlopříčkami krychle v  $\mathbb{R}^3$ . Řešte analogickou úlohu v  $\mathbb{R}^4$ .

12. **(4)** Najděte v  $\mathbb{R}^4$  se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru  $\langle (1, 1, 2, 3), (3, 1, 1, 0) \rangle$

13. **(3)** Najděte v  $\mathbb{R}^5$  se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru  $\langle (2, 0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1) \rangle$  a najděte v tomto doplněku ortonormální bázi.
14. **(2)** Označme  $P^n$  prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše  $n$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Dokažte, že zobrazení

$$(\cdot, \cdot) : P^n \times P^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \times q \rightarrow \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

je skalární součin na  $P^n$ . Ortogonalizací báze  $\{1, x, x^2\}$  najděte ortonormální bázi prostoru  $P^2$  s tímto skalárním součinem.

15. **(1)** Pro všechna  $n \in \mathbb{Z}_0^+$  zaveďme polynomy

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

Dokažte, že množina  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  tvoří ortogonální bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše  $n$ . Dokažte, že jsou to až na násobek právě ty polynomy, které získáte ortogonalizací báze  $\{1, x, \dots, x^n\}$ .

16. **(1)** Dokažte, že pro libovolnou symetrickou matici  $Q$  existuje regulární matice  $R$  taková, že  $R^T Q R$  je diagonální. Návod: interpretujte matici  $R^T$ , resp.  $R$  jako součin matic řádkových, resp. sloupcových úprav. Odvoďte z toho postup, jak poznat, že matice  $Q$  je pozitivně definitní.
17. **(2)** Nechť  $W$  je podprostor ve vektorovém prostoru  $V_n$  se skalárním součinem,  $M$  ortonormální báze v něm a  $N$  ortonormální báze  $W^\perp$ . Dokažte, že  $M \cup N$  je ortonormální báze prostoru  $V_n$  a najděte matici projekcí  $P_W$  a  $P_{W^\perp}$  vzhledem k této bázi.
18. **(2)** Dokažte, že matice rotace v  $\mathbb{R}^2$  je ortogonální matice. Platí, že každá ortogonální matice je maticí rotace?
19. **(2)** Nechť  $u$  je vektor v  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem. Dokažte, že libovolný vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  je možné jednoznačně rozložit na součet  $x_\parallel + x_\perp$ , kde  $x_\parallel$  je násobkem  $u$  a  $x_\perp$  je kolmý na  $u$ . Ukažte, že zobrazení přiřazující vektoru  $x$  vektor  $x_\parallel$ , resp.  $x_\perp$  jsou homomorfizmy a najděte jejich matici vzhledem ke kanonické bázi a matici vzhledem k nějaké ortonormální bázi  $\mathbb{R}^2$  obsahující násobek vektoru  $u$ .

20. **(1)** Dokažte, že pokud je  $W$  podprostorem  $V_n$  se skalárním součinem, pak pro libovolný vektor  $u \in V_n$  má vektor  $P_W(u)$  menší vzdálenost od  $u$  než všechny ostatní vektory  $W$ .
21. **(1)** Metoda nejmenších čtverců je speciálním případem počítání projekce na podprostor. Mějme  $n \in \mathbb{N}$  a  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  naměřené hodnoty nějaké veličiny v bodech  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Chceme tuto závislost  $y$  na  $x$  co nejlépe aproximovat lineární funkcí, tedy najít taková čísla  $a, b \in \mathbb{R}$ , aby  $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$  bylo co nejmenší. Interpretujeme proto  $y = (y_1, \dots, y_n)$  jako prvek vektorového prostoru  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem. Množina všech vektorů z  $\mathbb{R}^n$ , které se dostanou jako  $(ax_1 + b, \dots, ax_n + b)$  pro nějaká  $a, b \in \mathbb{R}$  je vlastně podprostor  $W := \langle (1, \dots, 1), (x_1, \dots, x_n) \rangle$  v tomto prostoru. Pak projekce  $P_W(y)$  je hledaný vektor, protože podmínka minimality součtu čtverců je vlastně podmínka nejmenší vzdálenosti v euklidovské normě. Tato projekce je vektor  $W$ , který je určený konkrétními hodnotami  $a$  a  $b$  v závislosti na  $x_i, y_i$ . Najděte vztahy vyjadřující tuto závislost.
22. **(3)** Určete délku úhlopříčky  $n$ -rozměrné jednotkové krychle, její úhel s libovolnou hranou a délku průmětu hrany do směru úhlopříčky. Dokažte, že ortogonální průměty vrcholů dělí úhlopříčku na  $n$  stejných částí.
23. **(2)** Nechť  $V_n$  je vektorový prostor se skalárním součinem a  $M = \{u_1, \dots, u_n\}$  jeho báze. Dokažte, že pak existuje  $M^* = \{v_1, \dots, v_n\}$ , tzv. báze duální k  $M$ , splňující podmínky  $(u_i, v_j)$  je rovno 1 pro  $i = j$  a 0 jindy. Jaká je duální báze k ortogonální bázi? A k ortonormální? Jak souvisí matice přechodu od báze  $M$  k  $M'$  s maticí přechodu od  $M^*$  k  $M^*$ ?



# Kapitola 8

## Determinant matice

V kapitole o maticích jsme definovali pojem stopy čtvercové matice  $A$  stupně  $n$ ,  $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Jednou z jejích vlastností je, že pro tři matice  $A, B, C \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je  $\text{Tr } ABC = \text{Tr } CAB$ . Speciálně pro  $R$  regulární platí  $\text{Tr } R^{-1}AR = \text{Tr } RR^{-1}A = \text{Tr } A$ . Pokud  $A$  je matice endomorfizmu  $f \in \text{End } V_n$  vzhledem k bázi  $M$ , pak matice tohoto endomorfizmu vzhledem k jakékoli jiné bázi  $M'$  má tvar  $R^{-1}AR$ , kde  $R$  je matice přechodu od  $M$  k  $M'$ , a tedy má i stejnou stopu. Lze tedy definovat  $\text{Tr } f$  stopu endomorfizmu  $f$ . Je to číslo, které je třeba spočítat z vyjádření  $f$  vzhledem k nějaké bázi, ale výsledek na volbě této báze nezávisí. Takovému číslu se v matematice říká **invariant**. V této kapitole se budeme zabývat jiným invariantem, kterému se říká **determinant matice**. Determinant má oproti stopě názornější geometrický význam, jeho definice je ale komplikovanější, a než ji budeme moci napsat, musíme se nějaký čas zabývat něčím, co samo o sobě s lineární algebrou nemá příliš společného.

### 8.1 Permutace

Permutace je bijektivní zobrazení konečné množiny na sebe. Množina může být jakákoliv, ale obvykle se bere prostě  $\{1, \dots, n\}$ . Množinu všech permutací této množiny značíme  $S_n$ . Složení dvou permutací je permutace, identické zobrazení je permutace a inverzní zobrazení k permutaci je také permutace. Tedy  $S_n$  s operací skládání tvoří grupu, tzv. **symetrickou grupu** na  $n$  prvcích. Místo skládání někdy mluvíme o součinu permutací. Obvyklý

zápis permutace  $\pi$  je pomocí dvou řádků

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

a pokud nehrozí nedorozumění, můžeme psát jenom řádek obrazů  $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ . Pozor, nepleťte si tento zápis s podobným zápisem pro vektory a matice. Je snadné dokázat indukci, že na  $n$  prvcích existuje právě  $n!$  permutací.

*Příklad.* Grupa  $S_3$  sestává právě z šesti prvků:  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  a  $(3, 2, 1)$ . Inverzní prvek k  $\pi = (2, 3, 1)$  je  $\pi^{-1} = (3, 1, 2)$ , protože  $\pi(1) = 2$ , takže musí být  $\pi^{-1}(2) = 1$ , atd. Příklad složení dvou permutací zapíšeme pro přehlednost ve dvouřádkovém zápise:

$$\pi \circ \rho \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Levá strana je složení dvou permutací, takže nejprve je třeba zobrazit každý prvek permutací  $\rho$  a poté permutací  $\pi$ , např.

$$(\pi \circ \rho)(1) = \pi(\rho(1)) = \pi(3) = 1$$

**Definice 28.** Necht'  $\pi \in S_n$  a  $(i, j)$ ,  $i < j$  je dvojice indexů z  $\{1, \dots, n\}$ . Řekneme, že  $(\pi(i), \pi(j))$  **tvoří inverzi** v  $\pi$ , pakliže  $\pi(i) > \pi(j)$ . Počet všech takových dvojic nazveme  $I(\pi)$ , **počet inverzí** permutace  $\pi$ .

Pozor, pojmy tvořit inverzi a počet inverzí nemají žádnou souvislost s inverzní permutací, jsou to prostě ty dvojice čísel, které se na druhém řádku zápisu permutace vyskytují v opačném pořadí než na prvním. Například pro permutaci  $(4, 2, 1, 3)$  tvoří inverzi dvojice  $(4, 2)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(4, 3)$  a  $(2, 1)$ .

**Lemma 14.** Necht'  $\pi, \rho \in S_n$ . Pak existuje celé číslo  $k$  takové, že  $I(\pi \circ \rho) = I(\pi) + I(\rho) + 2k$ .

*Důkaz.* Necht'  $i < j$ , pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$\begin{aligned} (--) &: \rho(i) < \rho(j), \pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j)) \\ (-+) &: \rho(i) < \rho(j), \pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j)) \\ (+-) &: \rho(i) > \rho(j), \pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j)) \\ (++) &: \rho(i) > \rho(j), \pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j)) \end{aligned}$$

Označme počty dvojic odpovídající těmto variantám jako  $I_{--}$ ,  $I_{-+}$ ,  $I_{+-}$  a  $I_{++}$ . Varianty  $(+-)$  a  $(++)$  dávají inverzi permutace  $\rho$ , varianty  $(-+)$  a  $(++)$  inverzi permutace  $\pi$  a varianty  $(-+)$  a  $(+-)$  inverzi permutace  $\pi \circ \rho$ . Tedy

$$I(\pi \circ \rho) = I_{-+} + I_{+-} = (I_{-+} + I_{++}) + (I_{+-} + I_{++}) - 2I_{++} = I(\pi) + I(\rho) + 2k,$$

kde  $k = -I_{++}$ . □

**Definice 29.** Nechť  $\pi \in S_n$ . **Znaménkem permutace** budeme rozumět číslo  $\text{sgn}(\pi) := (-1)^{I(\pi)}$ .

Identická permutace  $\text{id}$  neobsahuje žádnou inverzi, tedy její znaménko je  $\text{sgn}(\text{id}) = 1$ . Z lemmatu plyne, že  $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\rho)$ , a z těchto dvou vlastností dohromady, že  $\text{sgn}(\pi^{-1} \circ \pi) = 1$ , tedy  $\text{sgn}(\pi^{-1}) = \text{sgn}(\pi)$ . Označíme-li  $\mathbb{Z}_2$  grupu tvořenou množinou  $\{1, -1\}$  s operací násobení, znamenají tyto vlastnosti, že zobrazení  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  je **grupový homomorfismus**.

**Definice 30.** Nechť  $G$  je grupa s operací  $*$  a neutrálním prvkem  $e_G$  a  $H$  je grupa s operací  $\circ$  a neutrálním prvkem  $e_H$ . Zobrazení  $f : G \rightarrow H$ , které splňuje pro všechna  $g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned} f(e_G) &= e_H \\ f(g_1 * g_2) &= f(g_1) \circ f(g_2) \end{aligned}$$

nazýváme homomorfizmem grup  $G$  a  $H$ .

V našem případě je tedy operace  $*$  skládání permutací a operace  $\circ$  násobení na  $\mathbb{Z}_2$ . Podobně jako u vektorových prostorů, i u grup pojem homomorfismus vyjadřuje, že se zobrazení „chová hezky“ k dané struktuře, v tomto případě struktuře grupy. Můžeme definovat **jádro grupového homomorfismu**  $\text{Ker } f$  jako množinu všech  $g \in G$ , pro něž  $f(g) = e_H$ , ověřte sami, že to je také grupa (s operací  $*$ ). V našem případě označujeme  $\text{Ker } \text{sgn} =: A_n$ , je to množina všech  $\pi \in S_n$  takových, že  $\text{sgn } \pi = 1$ . Mluvíme o grupě všech **sudých permutací** nebo též **alternujících grupě**. Permutace, pro které  $\text{sgn } \pi = -1$  se nazývají **liché** a zjevně grupu netvoří.

*Příklad.* Máme-li definován grupový homomorfismus, jeho jádro a obraz (to je prostě obraz zobrazení  $f$ ), můžeme definovat grupový monomorfismus, epimorfismus, mluvit o izomorfních grupách. Například grupa  $S_3$  je izomorfní

grupě všech symetrií rovnostranného trojúhelníka: stačí očíslovat vrcholy 1, 2, 3 a přiřadit každé permutaci  $\pi$  shodné zobrazení, které převádí vrchol 1 na  $\pi(1)$ , 2 na  $\pi(2)$  a 3 na  $\pi(3)$ . To je bijekce, která splňuje vlastnosti homomorfizmu, tedy je to izomorfizmus grup. Podobně je izomorfní  $S_4$  s množinou všech symetrií pravidelného čtyřstěnu. Podgrupa  $A_3$ , resp.  $A_4$  se pak v tomto izomorfizmu zobrazuje na podgrupu přímých shodností. Není těžké si rozmyslet, že ve skutečnosti každá konečná grupa  $G$  je izomorfní podgrupě v  $S_n$ , kde  $n$  je počet prvků  $G$ .

Označme  $\text{Supp } \pi$  **nosič permutace**, tedy množinu všech indexů  $i \in \{1, \dots, n\}$  takových, že  $\pi(i) \neq i$ . Permutace s dvouprvkovým nosičem se nazývají **transpozice**, vlastně pouze vyměňují nějaký prvek  $i$  s jiným prvkem  $j$ . Takovou transpozici budeme značit  $[i, j]$ , například  $(1, 4, 3, 2)$  je transpozice  $[2, 4] \equiv [4, 2]$ .

Transpozice  $[1, 2]$  obsahuje právě jednu inverzi a je to tedy lichá permutace. Transpozici  $[i, j]$ ,  $i < j$  lze zapsat jako  $\rho^{-1} \circ [1, 2] \circ \rho$ , kde  $\rho$  je libovolná permutace, pro kterou  $\rho(i) = 1$ ,  $\rho(j) = 2$ . Pak ale

$$\text{sgn}([i, j]) = \text{sgn}(\rho^{-1}) \text{sgn}([1, 2]) \text{sgn}(\rho) = \text{sgn}([1, 2]),$$

tedy každá transpozice je lichá permutace.

Transpozice je speciální případ **cyklu**, což je permutace s  $k$ -prvkovým nosičem  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  taková, že  $\pi(i_j) = i_{j+1}$  pro všechna  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  a  $\pi(i_k) = i_1$ . Cyklus označíme  $[i_1, i_2, \dots, i_k]$ , číslo  $k$  se nazývá **délkou cyklu**. Dva cykly nazveme nezávislými, pokud jsou jejich nosiče disjunktní.

**Věta 25.** *Každou permutaci lze zapsat jako součin nezávislých cyklů. Každou permutaci lze zapsat jako součin transpozic.*

*Důkaz.* Stačí vzít libovolný prvek  $i_{1,1} \in \text{Supp } \pi$ . Jeho obraz označíme  $i_{1,2} := \pi(i_{1,1})$ , dále  $i_{1,3} := \pi(i_{1,2})$  atd. Množina je konečná, takže pro nějaké  $k_1 \in N$  musí nastat  $i_{1,k_1+1} = i_{1,1}$ . Definujme  $\pi_1$  permutaci, jejíž nosič je  $\{i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1}\}$  a na této množině má stejné hodnoty jako  $\pi$ , je to zjevně cyklus délky  $k_1$ . Zvolme  $i_{2,1} \in \text{Supp } \pi \setminus \text{Supp } \pi_1$  a opakujme postup, získáme takto  $N$  cyklů  $\pi_j$  o délce  $k_j$ , které jsou nezávislé a platí  $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_N$ .

Cyklus  $[i_1, \dots, i_k]$  je roven například součinu transpozic  $[i_1, i_2][i_2, i_3] \dots [i_{k-1}, i_k]$  (rozmyslete si podrobně). Pokud tento rozklad použijeme pro každý cyklus  $\pi_1, \dots, \pi_N$ , dostáváme zápis permutace jako součinu transpozic.  $\square$

Z důkazu je zřejmé, že rozklad na nezávislé cykly je až na pořadí jednoznačný. Rozklad na transpozice jednoznačný zdaleka není, už cyklus lze

rozložit na transpozice mnoha jinými způsoby (najděte nějaký) a také lze do kteréhokoli místa rozkladu vložit součin typu  $[i, j][j, i]$ , čímž dostaneme jiný rozklad s jiným počtem transpozic. Protože ale víme, že transpozice je lichá permutace a že  $\text{sgn}$  je grupový homomorfismus, vidíme, že znaménko permutace lze také spočítat jako  $(-1)^N$ , kde  $N$  je počet transpozic v nějakém (a tedy libovolném) rozkladu na transpozice, nebo také  $(-1)^C$ , kde  $C$  je počet cyklů sudé délky v rozkladu na nezávislé cykly. To bývá obvykle rychlejší metoda výpočtu znaménka permutace než vypisování seznamu všech inverzí.

*Příklad.* Určeme znaménko permutace  $\pi = (7, 3, 5, 1, 2, 4, 6, 8)$ . Vidíme, že  $\pi(1) = 7$ ,  $\pi(7) = 6$ ,  $\pi(6) = 4$  a  $\pi(4) = 1$ , což dává cyklus  $[1, 7, 6, 4]$ . Dále  $\pi(2) = 3$ ,  $\pi(3) = 5$  a  $\pi(5) = 2$ , dalším nezávislým cyklem je  $[2, 3, 5]$ . Tím jsme vyčerpali celý  $\text{Supp } \pi$ , tedy  $\pi = [1, 7, 6, 4][2, 3, 5]$  a znaménko je  $-1$ , protože v rozkladu je jeden cyklus sudé délky.

**Věta 26.** *Nechť  $n > 1$ . Grupa  $A_n$  má  $\frac{n!}{2}$  prvků.*

*Důkaz.* Zvolme pevnou transpozici, například  $[1, 2]$ . Zobrazení  $T : S_n \rightarrow S_n$  definované jako  $T(\pi) = [1, 2] \circ \pi$  je bijekce na konečné množině, přičemž obrazem liché permutace je sudá a naopak. Pak ale množina lichých a sudých permutací musí být stejně velká, tedy sudých permutací je právě  $\frac{n!}{2}$ .  $\square$

## 8.2 Determinant

Většina pojmů, které jsme dosud definovali, byla zavedena induktivně, tedy zdola. Existovala pro ně motivace v podobě příkladů, které bylo vhodné zobecnit, přesněji pojmenovávaly něco, co už bylo v dané situaci intuitivně přítomno, nebo odpovídaly na přirozené otázky, které by si člověk mohl klást, často v analogii s jinou podobnou situací. Determinant oproti tomu budeme budovat deduktivním způsobem. Definice bude na první pohled naprosto znebespadlá a teprve poté, až dokážeme, že z ní plynou pěkné vlastnosti, zjistíme, k čemu je nám ten determinant vlastně dobrý.

**Definice 31.** Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ . Determinantem matice  $A$  nazveme číslo

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

Vidíme tedy, že determinant je součet  $n!$  členů, z nichž každý je součinem  $n$  elementů matice vynásobeným znaménkem permutace. V každém takovém

součinu se vyskytuje právě jeden element z každého řádku a právě jeden element z každého sloupce. Definice je tedy nejen znebespadlá, ale také prakticky nepříliš použitelná, protože s rostoucím  $n$  roste počet operací velmi rychle.

Místo  $\det A$  budeme také používat označení  $|A|$  nebo u konkrétní matice nahradíme závorky svislicemi. Pokud  $A$  je matice  $2 \times 2$ , pak

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(12)a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(21)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Podobně

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Označme řádky matice  $A$  jako  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , determinant matice  $A$  bude výhodné občas značit také jako  $|a_1, \dots, a_n|$ .

**Věta 27.** *Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ ,  $a'_i \in \mathbb{F}^n$ ,  $r \in \mathbb{F}$ .*

1.  $|A| = |A^T|$
2.  $|a_1, \dots, ra_i, \dots, a_n| = r|a_1, \dots, a_i, \dots, a_n|$ .
3. *Pokud  $1 \leq i \leq n$ , pak*

$$|a_1, \dots, a_i + a'_i, \dots, a_n| = |a_1, \dots, a_i, \dots, a_n| + |a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n|$$

4. *Pokud  $1 \leq i < j \leq n$ , pak*

$$|a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n| = -|a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n|$$

*Důkaz.* Podle definice

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho^{-1}(1)} a_{2\rho^{-1}(2)} \dots a_{n\rho^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} a_{\rho(2)2} \dots a_{\rho(n)n} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)}^T a_{2\rho(2)}^T \dots a_{n\rho(n)}^T = |A^T| \end{aligned}$$

Nejprve jsme využili toho, že pokud  $\rho$  běží přes celou  $S_n$ , pak  $\rho^{-1}$  také, pak jsme přeuspořádali činitele v součinu a použili  $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\rho^{-1})$ .

Druhé tvrzení plyne z

$$\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots (r a_{i\pi(i)}) \cdots a_{n\pi(n)} = r \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

a podobně zřejmé je i tvrzení třetí.

Zobrazení, které  $\pi$  přiřazuje  $\pi' = \pi \circ [i, j]$ , je bijekce  $S_n$  na  $S_n$ , takže

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi' \in S_n} \text{sgn}(\pi') a_{1\pi'(1)} \cdots a_{i\pi'(i)} \cdots a_{j\pi'(j)} \cdots a_{n\pi'(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi \circ [i, j]) a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(j)} \cdots a_{j\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{j\pi(i)} \cdots a_{i\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)}, \end{aligned}$$

čímž je dokázáno i poslední tvrzení.  $\square$

Tato věta má řadu důsledků. Z prvního tvrzení plyne, že druhé a třetí tvrzení platí i pro sloupce. Z druhého je jasné, že determinant matice, která obsahuje nulový řádek (nebo sloupec), je nulový. Druhé a třetí tvrzení dohromady znamenají, že pokud budeme determinant chápat jako zobrazení  $\det : \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ , které přiřazuje  $n$ -tici vektorů z  $\mathbb{F}^n$  číslo, pak je toto zobrazení multilineární. Čtvrté tvrzení vlastně říká, že při transpozici na řádky se determinant vynásobí znaménkem transpozice, a protože libovolnou permutaci lze získat jako součin transpozic, permutace řádků způsobí vynásobení determinantu znaménkem permutace. Ze čtvrtého tvrzení také plyne, že pokud má matice dva stejné řádky, pak je její determinant nulový. Pokud tedy do  $i$ -tého řádku matice přičteme  $r$ -násobek  $j$ -tého řádku pro  $i \neq j$ , pak je ve druhém tvrzení s  $a'_i = r a_j$  poslední člen nulový, takže se determinant nezmění. Přičítáním násobků ostatních řádků, přehazováním pořadí řádků a násobením řádku číslem je možné matici převést na horní trojúhelníkovou. Determinant horní trojúhelníkové matice je ale roven součinu diagonálních elementů, protože v definici determinantu všechny členy kromě členu příslušejícího  $\pi = \text{id}$  obsahují alespoň jeden prvek pod diagonálou, a ten je roven 0. Determinant matice lze tedy počítat Gaussovou eliminací, jen si musíme dát pozor, že změny pořadí řádků a násobení číslem determinant změní. Na druhou stranu ale můžeme využívat i sloupcové úpravy, pokud je to výhodné.

**Věta 28.** Matice  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je regulární, právě když  $|A| \neq 0$ .

*Důkaz.* Matice  $A$  je regulární právě když  $h(A) = n$ . Pokud matici převedeme Gaussovou eliminací na horní trojúhelníkovou, pak se hodnota zachová a nulovost či nenulovost determinantu také. Ale determinant horní trojúhelníkové matice je nenulový, právě když jsou nenulové všechny prvky na diagonále a právě tehdy je i hodnota matice rovna  $n$ .  $\square$

To je tedy první důležitá věc, na kterou se determinant hodí: jeho nulovost či nenulovost detekuje regularitu matice. Součin dvou regulárních matic je regulární matice a součin dvou singularních je singularní, takže nulovost determinantu se musí zachovávat i při součinech. Ve skutečnosti platí mnohem silnější tvrzení:

**Věta 29.** Necht'  $A, B \in M_{nn}(\mathbb{F})$ . Pak  $|AB| = |A||B|$ .

*Důkaz.* V matici  $AB$  je  $i$ -tý řádek lineární kombinací řádků matice  $B$  s koeficienty z  $i$  tého řádku matice  $A$ . Z multilinearity determinantu plyne

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2} b_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{ni_n} b_{i_n} \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} |b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}| \end{aligned}$$

Determinant  $|b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}|$  je nulový, pokud jsou v něm dva řádky stejné, jinými slovy pokud zobrazení množiny  $\{1, \dots, n\}$  do sebe, přiřazující indexu  $k$  index  $i_k$ , není permutace. Stačí tedy zachovat jen ty členy, pro které to permutace je:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} |b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots, b_{\pi(n)}| \\ &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \operatorname{sgn} \pi |b_1, b_2, \dots, b_n| = |A||B| \end{aligned}$$

Zde jsme využili toho, že přeuspořádání řádků permutací  $\pi$  má za následek vynásobení determinantu číslem  $\operatorname{sgn}(\pi)$  a poslední krok už je jen definice determinantu.  $\square$



Protože  $|E| = 1$ , plyne z této věty, že  $|A^{-1}A| = 1$  neboli  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$  a také že  $|R^{-1}AR| = |A|$ . To podobně jako u stopy znamená, že determinant matice endomorfizmu je invariantní vůči volbě báze a má tedy smysl definovat pro  $f \in V_n$  veličinu  $\det f$  jako determinant matice  $f$  vzhledem k libovolné bázi.

## 8.3 Aplikace determinantu

**Definice 32.** Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ . Nechť  $A_{IJ}$  je podmatice  $A$  vzniklá vynecháním řádků s indexy z množiny  $I \subset \{1, \dots, n\}$  a sloupců z množiny  $J \subset \{1, \dots, n\}$ . Pokud  $I$  a  $J$  mají stejný počet prvků, pak lze spočítat  $|A_{IJ}|$ , takovému determinantu se říká  $IJ$ -tý **minor** matice  $A$ . Pokud  $I = J$ , mluvíme o **hlavním minoru** a pokud  $I = \{i\}$  a  $J = \{j\}$ , je to **první minor**, značíme  $|A_{ij}|$ . Číslo  $\hat{A}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$  nazýváme  $ij$ -tým **kofaktorem** nebo též **algebraickým doplňkem** matice  $A$ .

Následující věta nám mimojiné dává rekurzivní formulku, jak spočítat determinant matice pomocí jejích algebraických doplňků.

**Věta 30.** Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ ,  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Pak

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \hat{A}_{ki} = \begin{cases} |A| & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases}$$

*Důkaz.* Nechť nejprve  $j = n$ . Vytkněme v definici determinantu z každého členu prvek na  $n$ -tém řádku. Pak

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{n,i} \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(n)=i}} \text{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n-1,\pi(n-1)}$$

Pokud  $i = n$ , pak můžeme  $\pi$  chápat jako permutaci množiny  $\{1, \dots, n-1\}$  a  $n$ -tý sčítanec v sumě je roven  $|A_{nn}| = \hat{A}_{nn}$ . Pro ostatní členy  $\pi$  zobrazuje  $n$  na jiný index  $j$ . Složená permutace  $\pi' := \pi_j \circ \pi$ , kde  $\pi_j := [n, n-1, \dots, j+1, j]$  zobrazuje opět  $n$  na  $n$  a  $\text{sgn}(\pi') = (-1)^{n-j} \text{sgn}(\pi) = (-1)^{n+j} \text{sgn}(\pi)$ . Tedy  $j$ -tý sčítanec lze přepsat jako

$$(-1)^{n+j} \sum_{\pi' \in S_{n-1}} \text{sgn}(\pi') a_{1,\pi'(1)} \cdots a_{n-1,\pi'(n-1)} = (-1)^{n+j} |A_{nj}| = \hat{A}_{nj},$$

protože prvek  $a_{i,\pi(i)}$  je vlastně prvkem  $a'_{i,\pi'(i)}$  matice  $A' \equiv A_{nj}$  po přechíslování sloupců způsobeném vynecháním indexu  $j$  z  $\{1, \dots, n\}$ . Tím je tvrzení dokázáno pro  $j = k = n$ .

Pokud  $j = k \neq n$ , pak stačí přeuspořádat řádky matice  $A$  permutací  $\pi_j$ , která převádí  $j$ -tý řádek na pozici  $n$  a posouvá všechny následující řádky beze změny jejich pořadí, platí  $\text{sgn } \pi_j = (-1)^{n-j}$ . Označíme-li takto vzniklou matici  $\tilde{A}$ , pak

$$|A| = (-1)^{n-j} |\tilde{A}| = (-1)^{n+j} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ni} (-1)^{n+i} |\tilde{A}_{ni}| = \sum_{i=1}^n a_{ji} (-1)^{i+j} |A_{ji}|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Konečně pokud  $j \neq k$ , pak součet  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \hat{A}_{ki}$  vůbec nezávisí na hodnotách elementů na  $k$ -tém řádku matice  $A$ . Pokud tedy na  $k$ -tém řádku budou například samé nuly, musí být výsledek stejný. Takový determinant je ale nulový.  $\square$

Věta nám také dává přímé vyjádření jednotlivých prvků inverzní matice. Definujeme-li  $b_{jk} := \frac{1}{|A|} \hat{A}_{kj}$ , pak je

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \equiv \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^n a_{ij} \hat{A}_{kj}$$

rovno jedné pro  $i = k$  a rovno 0 pro  $i \neq k$ , čili  $AB = E$ ,  $B = A^{-1}$ . Pro matice  $2 \times 2$  odtud dostáváme snadno zapamatovatelné **Čihákovo pravidlo**:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

tedy že inverzní matice se dostane prohozením prvků na hlavní diagonále, „omínuskováním“ prvků na vedlejší diagonále a vydělením determinantem.

Z výrazu pro inverzní matici můžeme také odvodit vztah pro řešení soustav rovnic, známý jako **Cramerovo pravidlo**. Pokud  $A$  je regulární matice, pak řešením soustavy rovnic  $Ax = b$  je  $x = A^{-1}b$ . Dosazením vzorce pro inverzní matici dostáváme, že

$$x_i = \sum_{j=1}^n \hat{A}_{ji} \frac{1}{|A|} b_j$$

Označme  $A_{b,i}$  matici, která vznikne z  $A$  nahrazením  $i$ -tého sloupce vektorem  $b$ , pak rozvoj podle tohoto sloupce dává  $|A_{b,i}| = \sum_{j=1}^n \hat{A}_{ji} b_j$ , protože kofaktory matic  $A_{b,i}$  a  $A$  odpovídající vynechání  $i$ -tého sloupce jsou stejné. Dostáváme tedy

**Věta 31.** *Nechť  $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$  je regulární matice a  $b \in \mathbb{F}^n$ . Pak hodnota  $i$ -té složky (jediného) řešení  $x \in \mathbb{F}^n$  soustavy rovnic  $Ax = b$  je rovna  $\frac{|A_{b,i}|}{|A|}$ .*

Podobně jako skalární součin nám umožňuje zavést pojmy úhlu a vzdálenosti, determinant s sebou nese mnohé vlastnosti objemu. Pokud  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ , pak výraz  $|a_1, \dots, a_n|$  splňuje téměř všechny přirozené vlastnosti, které by měl splňovat objem rovnoběžnostěnu určeného vektory  $a_i$ . Skutečně: pokud jeden z vektorů  $r$ -krát prodloužíme, pak determinant  $r$ -násobně vzroste, stejně se chová i objem. Pokud k vektoru přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů, pak se „výška“ rovnoběžnostěnu nezmění, a tedy ani jeho objem. Stejně tak se nezmění ani determinant. Pokud  $a_i$  jsou prvky kanonické báze, je rovnoběžnostěnem krychlička o hraně jedna, která má objem také jedna a stejnou hodnotu má i determinant. Pokud jsou  $a_i$  lineárně závislé, pak jsou objem i determinant rovny nule. Jedinou vadou na kráse tedy zůstává, že determinant může narozdíl od objemu být i záporný. Ve skutečnosti to ale není vada, nýbrž vlastnost: znaménko determinantu nám umožňuje definovat, kdy je báze  $\{a_1, \dots, a_n\}$  kladně a kdy záporně orientovaná.

Pokud čtvercová matice  $R$  splňuje  $R^T R = E$ , znamená to, že je  $R$  ortogonální. Podle věty o determinantu součinu matic máme  $1 = |E| = |R^T R| = |R^T| |R| = |R|^2$ , tedy determinant (reálné) matice  $R$  může být  $+1$  nebo  $-1$ . Množina všech ortogonálních matic s determinantem 1 je grupa (ověřte), která se označuje  $SO(n)$ , **speciální ortogonální grupa**. Je to množina všech matic přechodu, které převádějí kladně orientované ortonormální báze na kladně orientované ortonormální báze. Je možné ukázat, že každá taková matice se dá napsat jako součin matic rotace kolem nějaké osy. Podobně můžeme definovat i grupu  $SU(n)$  a také  $SL(n)$  (množina všech regulárních matic s determinantem 1). Posledně jmenovanou je možné chápat jako množinu všech matic přechodu, které zachovávají orientaci báze a objem rovnoběžnostěnu vytýčeného bázovými vektory.

## Cvičení

1. (4) Je součin permutací komutativní?

2. **(1)** Dokažte, že grupa všech symetrií čtyřstěnu je izomorfní (tedy existuje bijektivní grupový homomorfizmus) grupě  $S_4$ . Čemu v tomto izomorfizmu odpovídá grupa  $A_4$ ?
3. **(1)** Patnáčka je klasický hlavolam tvaru čtvercové mřížky  $4 \times 4$ , v níž je 15 pohyblivých dlaždic očíslovaných 1 až 15. V základní pozici je volné pravé dolní pole a dlaždice 1 až 15 jsou srovnány v pořadí odleva doprava a odshora dolů. Hlavolam se stal slavným v roce 1880, kdy Samuel Lloyd nabídl odměnu 1000 dolarů tomu, kdo se dokáže ze základní pozice dostat do pozice, v níž je volné pole na stejném místě, ale dlaždice 14 a 15 jsou vyměněny. Dokažte, že tato úloha nemá řešení.
4. **(HC)** Dokažte, že na Rubikově kostce není možné vyměnit dvě kostičky, zatímco všechny ostatní kostky zůstanou na svém místě.
5. **(3)** Permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

rozložte na součin transpozic dvěma způsoby.

6. **(4)** Rozložte následující permutaci na nezávislé cykly a určete znaménko:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 10 & 8 & 12 & 3 & 16 & 11 & 4 & 5 & 15 & 1 & 14 & 7 & 2 & 9 & 6 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

7. **(3)** U permutace z předchozí úlohy určete  $\pi^{2006}$  a nejmenší  $k > 1000$  takové, že  $\pi^k = \pi^{-1}$ .
8. **(3)** Spočítejte převodem na trojúhelníkový tvar determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

9. (4) Spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

10. (4) Vypočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

11. (4) Spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

12. (2) Jak se změní determinant, pokud jeho elementy převrátíme vůči středu matice. Zdůvodněte.

13. (4) Ověřte, že pro matice

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

platí  $\det R_z(\varphi)R_x(\psi) = \det R_z(\varphi) \det R_x(\psi)$ .

14. (4) Řešte pomocí Cramerova pravidla

$$2x + 3y + 5z = 10$$

$$3x + 7y + 4z = 3$$

$$x + 2y + 2z = 3$$

15. (4) Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

16. (3) Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$$

17. (3) Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

18. (1) Spočtěte tzv. Vandermondův determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

19. (2) Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

20. **(2)** Dokažte, že množina reálných čtvercových matic řádu  $n$  s nenulovým determinanem tvoří grupu vůči násobení (značíme  $GL(n, \mathbb{R})$  - general linear group).
21. **(1)** Numerické přiblížení  $n$ -té derivace: Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a každou volbu vesměs různých reálných čísel  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  najděte reálné koeficienty  $q_0, q_1, \dots, q_n$ , aby

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^n q_i f(x + h\alpha_i)}{h^n} = f^{(n)}.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla převed'te tuto podmínku na soustavu  $n + 1$  lineárních rovnic a tu pak řešte Cramerovým pravidlem.

22. **(1)** Dokažte

$$\begin{vmatrix} 2 \cos \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}$$

23. **(2)** Dokažte, že pokud pro libovolné indexy  $i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_l$  platí  $a_{i_a j_b} = 0$  a  $k + l > n$ , pak je determinant matice  $a_{ij}$  roven nule.
24. **(2)** Jak se změní determinant matice, pokud její  $(i, j)$ -tý element vynásobíme  $c^{i-j}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ? Zdůvodněte.
25. **(2)** Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je nula.
26. **(2)** Spočtete determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

27. **(2)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

28. **(3)** Řešte pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{aligned} (1+a)x + y + z &= 1 \\ x + (1+a)y + z &= a \\ x + y + (1+a)z &= a^2 \end{aligned}$$

29. **(3)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

30. **(3)** Jak se změní determinant, pokud od každého řádku odečteme následující řádek, jen od posledního řádku odečteme první řádek? Zdůvodněte.
31. **(2)** Jak se změní determinant, pokud matici potočíme o 90 stupňů okolo „středu“ matice? Zdůvodněte.
32. **(2)** Určete součet determinantů všech matic stupně  $n$  takových, že v každém sloupci a každém řádku je právě jeden element roven jedné a ostatní jsou nuly. Zdůvodněte.
33. **(3)** Řešte pomocí Cramerova pravidla pro  $a \in \mathbb{R}$ , pro něž se toto pravidlo dá použít:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$



Jinou metodou pak dořešte pro ostatní hodnoty  $a$ .

34. **(3)** Určete pouze element na pozici 12 inverzní matice k

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

35. **(3)** Vypočtete determinantovou metodou inverzní matici k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

36. **(2)** Dokažte, že množina  $SO(n)$  je grupa vzhledem k násobení matic.

37. **(2)** Dokažte, že množina  $SU(n)$  je grupa vzhledem k násobení matic.

38. **(2)** Dokažte, že množina  $SL(n)$  je grupa vzhledem k násobení matic.

39. **(2)** Dokažte, že determinant blokově diagonální matice

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

je roven  $\det A \det B$ .

40. **(1)** Spočtete determinant

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$

41. **(2)** Dokažte, že inverzní matice k regulární antisymetrické matici je antisymetrická.
42. **(1)** Dokažte, že hodnost matice je rovna velikosti největšího jejího nenulového minoru.