

1. zápočtová písemka z Kalkulu 3
7. listopadu 2023

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující funkce definují metriku na \mathbb{R} . Svůj závěr zdůvodněte.

(i) (5 bodů) $\rho(x, y) = |x^4 - y^4|$;

(ii) (5 bodů) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3| + |x^4 - y^4|$.

Příklad 2. (i) (5 bodů) Najděte měřitelnou funkci f na $(0, 1)$, která patří do $L^2((0, 1))$, ale nikoliv do $L^3((0, 1))$.

(ii) (5 bodů) Najděte posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která patří do ℓ^3 , ale nikoliv do ℓ^2 .

Příklad 3. (10 bodů) Uvažujme Hilbertův prostor $H = L^2([-1, 1])$ a jeho podprostor $Y = \text{LO}\{t, t^2\}$ (lineární obal množiny $\{t, t^2\}$). Najděte nějakou ortonormální bázi Y a určete nejbližší bod v Y k bodu $f(t) = \sin 2t$.

K úspěšnému napsání písemky je třeba získat alespoň 15 bodů.