1. Funkce více proměnných 2

1.1. Spojitost funkcí a parciálních derivací, věta o implicitní funkci

Definice (z minulého semestru)**.** Nechť f je funkce n proměnných a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že *f je spojitá v bodě x*, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta)\colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in A$. Řekneme, *že f je spojitá v bodě x vzhledem k A*, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) \cap A\colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že *f je spojitá na množině A*, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in A$ vzhledem k A a že *f je spojitá*, jestliže je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

Věta 1.1 (o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}^n$ je interval, f je spojitá funkce na množině I a nechť jsou dány body $a, b \in I$ takové, že $f(a) < f(b)$. Pak pro libovolné $\zeta \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in I$ takové, že $f(c) = \zeta$.*

Příklad. $f(x, y) = x^2 + y^4$, pak $f([0, 2] \times [0, 1]) = [0, 5]$.

Definice (z minulého semestru)**.** Nechť f je funkce n proměnných, $x \in \mathbb{R}^n$ a $i = 1, \ldots, n$. Pak *parciální derivaci funkce f v bodě x podle i-té proměnné* definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t},$$

pokud tato limita existuje vlastní.

Věta 1.2 (vztah parciálních derivací a spojitosti)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě a. Pak f je spojitá v bodě a.*

Příklad. Existence parciálních derivací nestačí. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ nebo } y = 0; \\ 0, & x \neq 0 \text{ a } y \neq 0. \end{cases}$$

Pak $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, ale f není spojitá v bodě $(0, 0)$.

Definice. Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\mathbf{x} \in G$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle proměnné x_j v bodě $\mathbf{x}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$, pokud $i \neq j$, nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$, je-li $i = j$. Tyto funkce nazýváme *parciální derivace druhého řádu* funkce f.
Analogicky se definují parciální derivace vyšších řádů.

Příklad. $f(x, y) = x^3 + y^4$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2$

Poznámka. Obecně nemusí platit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, ale platí to, pokud jsou funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě (x_0, y_0).

Definice. Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace až do řádu k. Pak říkáme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^k$ na G. Množinu všech takových funkcí značíme $\mathcal{C}^k(G)$.

Příklad. $f(x,y) = x^3 + y^4$, pak z předchozího příkladu plyne, že $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ (dokonce platí, že $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$)

Věta 1.3. *[o implicitní funkci] Nechť $k \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená, $F : G \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in G$ a nechť platí*

(i) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon))$ a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \qquad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

____________ konec přednášky 30.9.2022

Příklad. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, pak množinu M lze v okolí bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x a platí $\varphi'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1$. V bodě $(1,0)$ naopak není předpoklad věty o implicitní funkci splněn.

Poznámka. Může se stát, že předpoklad Věty 1.3 není splněn, ale závěr přesto platí. To nastává například v případě, kdy $F(x,y) = x - y^3$ a $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Příklad. Rovnice $e^{xy^2-1} + \log(\frac{x}{y}) = 1$ určuje na okolí bodu $(1,1)$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$, která je třídy C^2 a splňuje $\varphi'(1) = -2$, $\varphi''(1) = -12$. Odtud plyne, že φ je na okolí bodu 1 klesající a konkávní.

____________ konec přednášky 5.10.2022

1.2. Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in M$ a f je reálná funkce definovaná alespoň na M. Řekneme, že f nabývá v bodě x

- *maxima* na M, jestliže platí $\forall y \in M : \ f(y) \leqslant f(x)$,
- *lokálního maxima vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta) \cap M : \ f(y) \leqslant f(x)$,
- *ostrého maxima na M*, jestliže platí $\forall y \in M \backslash \{x\} : \ f(y) < f(x)$,
- *ostrého lokálního maxima vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in (B(x,\delta) \backslash \{x\}) \cap M : \ f(y) < f(x)$

Analogicky definujeme *minimum* a *ostré minimum na M*, *lokální minimum* a *ostré lokální minimum vzhledem k M*.

Extrémy na otevřené množině

Věta 1.4 (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí:*

$$\textit{Parciální derivace} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \textit{buď neexistuje, nebo je rovna nule.}$$

Příklad. Kandidáti na lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ jsou body $(-1,-1)$, $(0,0)$ a $(1,1)$.

Definice. Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. *Gradientem funkce f v bodě a* rozumíme vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Pokud $\nabla f(a) = \mathbf{o}$, pak bod a nazýváme *stacionárním bodem* funkce f.

Příklad. Stacionární body funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ jsou body $(-1,-1)$, $(0,0)$ a $(1,1)$.

Definice. Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak *Hessova matice* je matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Značíme ji symbolem $\nabla^2 f(a)$.

Příklad. Hessova matice funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ je rovna $\begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$.

Věta 1.5 (postačující podmínky pro existenci lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $a \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*

(a) Je–li matice $\nabla^2 f(a)$ negativně definitní, nabývá f v bodě a ostrého lokálního maxima.

(b) Je–li matice $\nabla^2 f(a)$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě a ostrého lokálního minima.

(c) Je–li matice $\nabla^2 f(a)$ indefinitní, nenabývá f v bodě a ani lokálního minima, ani lokálního maxima, tj. a je sedlový bod funkce f.

Poznámka. (i) Pojem pozitivní/negativní definitnosti byl definován v předmětu Lineární algebra. Připomeňme, že symetrická matice $\begin{pmatrix} b & d \\ d & c \end{pmatrix}$ je

- pozitivně definitní, právě když $b > 0$ a $bc > d^2$,
- negativně definitní, právě když $b < 0$ a $bc > d^2$,
- indefinitní, právě když $bc < d^2$.

(ii) Je-li matice $\nabla^2 f(a)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze určit, zda f má v a extrém.

Příklad. Funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ má lokální minimum v bodech $(-1,-1)$ a $(1,1)$. Nemá lokální maximum.

Extrémy na uzavřené množině

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud je omezená množina $\{\rho(x,0);\ x \in A\}$.

Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktní*, pokud je uzavřená a omezená.

Příklad. Množina $[1,2] \times [3,4]$ je kompaktní. Množiny $\mathbb{R} \times [0,1]$ a $(0,1) \times [0,1]$ nejsou kompaktní.

Věta 1.6 (o nabývání extrémů)**.** *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina, $f : A \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak existují body $c, d \in A$ takové, že*

$$f(c) = \inf\{f(x);\ x \in A\}, \qquad f(d) = \sup\{f(x);\ x \in A\}.$$

Příklad. Supremum funkce $f(x,y) = x - 2y$ na množině $M = \{(x,y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x + y \leqslant 1\}$ je rovno 1 a infimum je rovno -2.

____________ konec přednášky 7.10.2022

Příklad. Supremum funkce $f(x,y) = x - 2y$ na množině $M = \{(x,y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ x + y \leqslant 1\}$ je rovno 1 a infimum je rovno -2.

Příklad. Supremum funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $M = \{(x,y) : \ |x| + |y| \leqslant 1\}$ je rovno 1 a infimum je rovno 0.

Věta 1.7 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$, $M = \{(x,y) \in G; \ g(x,y) = 0\}$ a $(x_0, y_0) \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(a) $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$,

(b) existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Příklad. Supremum funkce $f(x,y) = 2x - 3y$ na množině $M = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 = 13\}$ je rovno 13 a infimum je rovno -13.

____________ konec přednášky 12.10.2022

Příklad. Supremum funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ na množině $M = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$ je rovno $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ a infimum je rovno 0.

Příklad. Dokažte nerovnost

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x + y}{2} \right)^n, \quad n \geqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0.$$

Věta 1.8 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak pro každé $a \in G$ platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$.*

Příklad. Bez předpokladu $f \in \mathcal{C}^2(G)$ věta neplatí.

Příklad. Funkce $f(x,y) = |x^2 + y^2 - 1|$ má neostré lokální minimum v bodech jednotkové kružnice $x^2 + y^2 = 1$ a ostré lokální maximum v bodě $(0, 0)$.

____________ konec přednášky 14.10.2022

2. Posloupnosti a řady funkcí

2.1. Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud pro každé $x \in E$ platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ \forall n \geqslant k : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Příklad. Posloupnost $f_n(x) = x^n$ konverguje na intervalu $[0, 1]$ bodově k funkci $f(x) = 0$, $x \in [0, 1)$, a $f(1) = 1$. Tato konvergence není stejnoměrná.

Věta 2.1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Pro každé $x \in E$ označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.*

Příklad. $x^n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1 - \delta]$ pro $\delta \in (0, 1)$

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^{N} f_j\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje bodově na E k funkci f.

Řekneme, že *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$.

Fakt: Stejnoměrně konvergentní posloupnost (resp. řada) funkcí je bodově konvergentní.

Bolzanova–Cauchyova podmínka: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na E právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall m \geqslant n \geqslant k\ \forall x \in E : \quad \left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| < \varepsilon.$$

Nutná podmínka konvergence: Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na E, pak $f_n \rightrightarrows 0$ na E.

Tvrzení 2.2 (Weierstrassovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině E. Označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x)|$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na E.*

Příklad. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $[0, \frac{1}{2}]$

Příklad. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

——————— konec přednášky 19.10.2022

Tvrzení 2.3 (Zachování spojitosti)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí definovaných na neprázdné podmnožině $E \subseteq \mathbb{R}$ a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce.*

(i) Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

(ii) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

Příklad. $f_n(x) = x^n$ konverguje na intervalu $[0, 1]$ bodově k nespojité funkci, a tedy konvergence nemůže být stejnoměrná.

Tvrzení 2.4 (Záměna sumy a limity)**.** *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *řada spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$*, která stejnoměrně konverguje na* (a,b) *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní* $\lim_{x\to a^+} f_n(x)$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a^+} f_n(x) = \lim_{x\to a^+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Příklad. $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} = 0$

Tvrzení 2.5 (Záměna sumy a derivace)**.** *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *splňující*

(i) f_n *má vlastní derivaci na* (a,b)*,* $n \in \mathbb{N}$*,*

(ii) existuje $x_0 \in (a,b)$ *takové, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *je konvergentní,*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ *na* (a,b)*.*

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na* (a,b) *a pro každé* $x \in (a,b)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Příklad. Funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin(1+\frac{x}{n})}{\sqrt{n}}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Příklad. Funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a $f'(x) = f(x)$ na $\mathbb{R}$.

Příklad. Funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ je třídy $\mathcal{C}^1((1,\infty))$.

Tvrzení 2.6 (Záměna sumy a integrálu)**.** *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *splňující*

(i) f_n *má na* (a,b) *konvergentní Newtonův integrál,* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* (a,b)*.*

Pak f *má na* (a,b) *konvergentní Newtonův integrál a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

____________ konec přednášky 21.10.2022

2.2. Mocninné řady

Definice. *Mocninnou řadou o středu* $a \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$.

Věta 2.7 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek* $\varrho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*,* $|x-a| < \varrho$*, je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*,* $|x-a| > \varrho$*, je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ splňuje

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0. Prvek ϱ nazýváme poloměrem konvergence *uvedené řady.*

Příklad. (i) Řada $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ konverguje pouze pro $x = 0$.

(ii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ konverguje absolutně pro $|x| < 1$, konverguje neabsolutně pro $x = -1$, diverguje pro $x = 1$ a $|x| > 1$.

Lemma 2.8. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel a nechť existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom existuje také $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají.*

Příklad. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$ konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ konverguje absolutně pro $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$, konverguje neabsolutně pro $x = -\frac{4}{3}$ a diverguje pro $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup [-\frac{2}{3}, \infty)$.

Věta 2.9 (derivace a integrace mocninné řady)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Potom poloměr konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Potom*

(i) funkce f má v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ je primitivní funkce k f na $(a-\varrho, a+\varrho)$.

Příklad. (i) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, $x \in (-1,1)$;

(ii) $(1+x)\log(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} x^n$, $x \in (-1,1)$

Příklad. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(x-1)^2}$, $x \in (-1,1)$

____________ konec přednášky 26.10.2022

Příklad. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ je roven $-\frac{1}{2} + \frac{\log(1-x)}{x^2} - \frac{\log(1-x)}{x} + \frac{1}{x}$ pro $x \in [-1,1)\backslash\{0\}$; 0 pro $x = 0$; $\frac{1}{2}$ pro $x = 1$.

Věta 2.10 (Abelova)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a $\varrho \in (0,\infty)$.*

(a) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a-\varrho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n.$$

Příklad. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $x \in [-1,1]$

3. Teorie míry a integrálu

3.1. Pojem míry, abstraktní Lebesgueův integrál

3.1.1 Základní pojmy

Definice. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$. Pak *délkou* intervalu I rozumíme číslo $|b-a|$. Značíme $\ell(I) := |b-a|$. Dále definujeme $\ell(J) := \infty$, pokud J je neomezený interval.

Nechť $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ jsou intervaly a $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak *objemem* n-rozměrného intervalu Q rozumíme číslo $\ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$. Značíme $\ell^n(Q) := \ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$.

Definice. Nechť X je množina. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin X se nazývá *algebra*, pokud

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $E \in \mathcal{A} \implies X \backslash E \in \mathcal{A}$;

(iii) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \implies E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Pokud navíc $\mathcal{A}$ splňuje

(iv) $E_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$,

pak říkáme, že $\mathcal{A}$ je *σ-algebra*. Je–li $\mathcal{A}$ σ-algebra, dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá *měřitelný prostor* a prvky $\mathcal{A}$ se nazývají *měřitelné množiny*.

Příklad. Příklady σ-algeber:
(i) $\mathcal{P}(X)$;
(ii) $\{\emptyset, X\}$;
(iii) podmnožiny $\mathbb{R}$, které jsou spočetné nebo mají spočetný doplněk.

——————— konec přednášky 2.11.2022

Lemma 3.1. *Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky.*

Definice. Definujeme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *borelovská σ-algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud splňuje

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) jestliže $E_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou*.

Příklad. Příkladem míry je tzv. *počítací míra*, která každé množině $A \subseteq X$ přiřadí počet jejích prvků.

Věta 3.2 (Vlastnosti míry). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.*

(i) Je-li $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subseteq B$, je $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Navíc, pokud $\mu(B \backslash A) < \infty$, pak $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \backslash A)$.

(ii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(iii) *Je-li* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost z* $\mathcal{A}$ *splňující* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, *je* $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(iv) *Je-li* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost z* $\mathcal{A}$ *splňující* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ *a* $\mu(A_1) < \infty$, *je* $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je *úplná*, pokud každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná.

3.1.2 Konstrukce úplných měr, Lebesgueova míra

Definice. *Vnější míra* na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ splňující

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $A \subseteq B \implies \nu(A) \leqslant \nu(B)$;
3. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin X, pak $\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

Definice. Definujme funkci $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ předpisem

$$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell^n(Q_j);\ Q_j \text{ jsou } n\text{-rozměrné intervaly },\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supseteq A\}.$$

Pak λ^* je vnější míra na $\mathbb{R}^n$, které říkáme *Lebesgueova vnější míra na* $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť ν je vnější míra na množině X. Množinu $M \subseteq X$ nazveme ν*-měřitelnou*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subseteq X$ platí

$$\nu(T) = \nu(T \cap M) + \nu(T \backslash M).$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\nu)$.

Věta 3.3 (Konstrukce úplné míry)**.** *Nechť* ν *je vnější míra na množině* X*. Pak* $\mathfrak{M}(\nu)$ *je* σ*-algebra a funkce* $\mathfrak{M}(\nu) \ni A \mapsto \nu(A)$ *je úplná míra.*

Definice. Nechť λ^* je Lebesgueova vnější míra na $\mathbb{R}^n$. Funkci $\mathfrak{M}(\lambda^*) \ni A \mapsto \lambda^*(A)$ říkáme *Lebesgueova míra na* $\mathbb{R}^n$ a značíme ji λ^n. Množiny z $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ se nazývají *lebesgueovsky měřitelné.*

Věta 3.4 (Vlastnosti Lebesgueovy míry)**.** (i) *Každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.*
(ii) *Lebesgueova míra je úplná.*
(iii) *Pro každý* n*-rozměrný interval* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *platí* $\ell^n(Q) = \lambda^n(Q)$.
(iv) *Lebesgueova míra je invariantní vůči posunutí, tj. pro každou měřitelnou množinu* A *a každý vektor* $c \in \mathbb{R}^n$ *máme* $\lambda^n(A + c) = \lambda^n(A)$*, kde* $A + c = \{a + c :\ a \in A\}$.

____________ konec přednášky 4.11.2022

3.1.3 Měřitelná zobrazení

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor.

Definice. Nechť $D \in \mathcal{A}$, pak zobrazení $f : D \to \mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$ je $\mathcal{A}$*-měřitelné*, pokud $f^{-1}((\alpha, \infty]) := \{x \in D :\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

Úmluva. Pokud je z kontextu jasné, co je $\mathcal{A}$, pak říkáme, že funkce je "měřitelná" místo "$\mathcal{A}$-měřitelná".

Definice. Je–li X množina a $A \subseteq X$, pak *charakteristická funkce množiny* A je funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Pozorování. χ_A je $\mathcal{A}$-měřitelná právě tehdy, když $A \in \mathcal{A}$.

Věta 3.5 (Měřitelnost vzoru). *Nechť $D \in \mathcal{A}$, $f : D \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce a $A \subseteq \mathbb{R}$ je borelovská množina. Pak $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.*

Věta 3.6 (Měřitelnost složené funkce). *Nechť $D \in \mathcal{A}$, $G \subseteq \mathbb{R}$ otevřená, $f : D \to G$ je měřitelná funkce, $\varphi : G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak $\varphi \circ f$ je měřitelná funkce.*

Poznámka. Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelná.

Značení. Je–li $f : E \to \mathbb{R}^*$ funkce, definujeme $f^+ := \max\{f, 0\}$ a $f^- := \max\{-f, 0\}$. (Maximum/minimum funkcí definujeme bodově.) Tedy $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.

Věta 3.7 (vlastnosti měřitelných funkcí). *(i) Kdykoliv $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak f je borelovsky měřitelná.*

(ii) Každá monotónní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná.

(iii) Kdykoliv $D \in \mathcal{A}$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná, pak $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D a $\frac{1}{f}$ je měřitelná na $\{x \in D : \; f(x) \neq 0\}$.

(iv) Jsou-li $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ měřitelné, pak $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné na D a $\frac{f}{g}$ je měřitelná na $\{x \in D : \; g(x) \neq 0\}$.

(v) Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Příklad. • Funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (dolní celá část čísla x) je borelovsky měřitelná na $\mathbb{R}$, neboť je neklesající. Její absolutní hodnota je též borelovsky měřitelná.

• Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a g je spojitá na $\mathbb{R}$. Pak $g\chi_I$ a $g + \chi_I$ jsou borelovsky měřitelné funkce na $\mathbb{R}$.

• Nechť $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Pak

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

je borelovsky měřitelná na $[0, 1]$.

3.1.4 Lebesgueův integrál

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Definice. Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{A}$ nazveme *rozkladem* množiny $E \in \mathcal{A}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^{m} A_j = E$.

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{A}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \backslash N$.

Definice. Nechť f je měřitelná funkce (s hodnotami v $\mathbb{R}^*$).

1. Je–li $f \geqslant 0$, definujeme

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j);\ \{A_j\}_{j=1}^{m} \text{ je rozklad } X, 0 \leqslant a_j \leqslant f \text{ na } A_j,\ j = 1, \dots, m \right\},$$

   kde používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.

2. V obecném případě definujeme

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

pokud má tento rozdíl smysl.

3. Je–li $E \subseteq X$, $E \in \mathcal{A}$ a funkce f je definovaná skoro všude na E, pak definujeme

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \chi_{E \cap D(f)} \,\mathrm{d}\mu.$$

Je-li integrál $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ definován, říkáme, že funkce f má na E Lebesgueův integrál. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ konverguje a tento fakt značíme symbolem $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, nebo zkráceně $f \in L^1(E)$.

——————— konec přednášky 11.11.2022

Věta 3.8 (Lebesgueův integrál charakteristické funkce)**.** *Nechť* $E \in \mathcal{A}$. *Pak*

$$\int_X \chi_E \,\mathrm{d}\mu = \mu(E).$$

Příklad. Nechť $E = (0,1) \times (0,2) \cup (2,3) \times (0,1)$. Pak $\int_{\mathbb{R}^2} \chi_E d\lambda^2 = 3$.

Věta 3.9 (aritmetika Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť f a g jsou měřitelné funkce, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $E \in \mathcal{A}$. Pak*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g \,\mathrm{d}\mu,$$

má–li pravá strana smysl.

Důsledek 3.10. *Nechť vše je jako výše a D_1, D_2 je rozklad množiny E. Pak*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 3.11 (absolutní konvergence Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť f je měřitelná funkce a $E \in \mathcal{A}$.*

(i) Pokud $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$ konverguje, pak $|f| < \infty$ skoro všude na E.

(ii) $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ konverguje práě tehdy, když $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$ konverguje.

Příklad. $(N) \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje (neabsolutně), ale $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ neexistuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 3.12 (Lebesgueův integrál a nerovnosti)**.** *Nechť f a g jsou měřitelné funkce a $E \in \mathcal{A}$.*

(i) Jestliže f, g mají integrál a $f \leqslant g$ skoro všude na E, pak

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \,\mathrm{d}\mu;$$

(ii)

$$\left| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek 3.13. *Nechť vše je jako výše. Je-li $\mu(E) < \infty$ a f je omezená, pak $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ konverguje a $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)| \cdot \mu(E)$.5*

3.1.5 Vztah Lebesgueova integrálu k Newtonovu integrálu a Riemannovu integrálu

Věta 3.14 (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a,b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

Věta 3.15 (Vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a,b). Potom $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

Příklad. Lebesgueovy integrály

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\frac{1}{\sin x})}{\sqrt{x}}dx$$

konvergují.

——————— konec přednášky 16.11.2022

3.2. Fubiniova věta

Definice. Nechť $E \subseteq X \times Y$. Značíme

$$E^{x,*} := \{y \in Y;\ (x,y) \in E\}, \qquad x \in X,$$
$$E^{*,y} := \{x \in X;\ (x,y) \in E\}, \qquad y \in Y.$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

Věta 3.16 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $n,m \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je Lebesgueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^{n+m} \tag{3.1}$$

má smysl. Potom všechny integrály níže mají smysl a platí

$$\int_E f\,\mathrm{d}\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E^{x,*}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^m(y)\right)\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{E^{*,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^n(x)\right)\mathrm{d}\lambda^m(y). \tag{3.2}$$

Poznámka. Integrál (3.1) má smysl například v případě, kdy $f \geqslant 0$ nebo je jeden z integrálů

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}, \quad \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E^{x,*}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda^m(y)\right)\mathrm{d}\lambda^n(x), \quad \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{E^{*,y}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x)\right)\mathrm{d}\lambda^m(y)$$

konečný.

Příklad. Nechť M je množina omezená křivkami $x=2$, $y=x$, $xy=1$. Pak $\lambda^2(M) = \frac{3}{2} - \log 2$.

Příklad. Nechť $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 1,\ 0 < y < \frac{1}{x}\}$. Pak $\lambda^2(M) = \infty$.

Příklad. Fubiniova věta nemusí platit, pokud $\int_E f(x,y)d\lambda^{n+m}$ neexistuje. Zvolme $n=m=1$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{ij}, \quad 0 < j = i+1, \\ -1, & x \in Q_{ij}, \quad 0 < i = j+1, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $Q_{ij} = [i,i+1) \times [j,j+1)$. Pak $\int_{-\infty}^\infty(\int_{-\infty}^\infty f(x,y)dx)dy = -1$, ale $\int_{-\infty}^\infty(\int_{-\infty}^\infty f(x,y)dy)dx = 1$.

Příklad.

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(2x+3y)^2}d\lambda^2 = -\frac{1}{6}\log 8 + \frac{1}{6}\log 2 + \frac{1}{6}\log 5.$$

Příklad. Nechť M je množina omezená plochou $z = e^{-x^2}$ a rovinami $y=0$, $y=x$, $x=1$ a $z=0$. Pak $\lambda^3(M) = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

——————— konec přednášky 18.11.2022

3.3. Věta o substituci

Definice. Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(G)$, $i = 1, \dots, n$. Uvažujme funkci $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : G \to \mathbb{R}^n$. Pak *Jacobiho matice zobrazení* φ *v bodě* t je matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t) \right)_{i,j=1}^n .$$

Pokud má Jacobiho matice zobrazení φ v každém bodě $t \in G$ hodnost n, pak řekneme, že φ je *regulární* a determinant Jacobiho matice nazýváme *jacobiánem* zobrazení φ v bodě t a značíme jej $J_\varphi(t)$.

Příklad. Definujme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vztahem $\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y)$. Pak φ je regulární zobrazení.

Věta 3.17 (O substituci)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť f je funkce na $E \subseteq \varphi(G)$. Potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}\lambda^n(t),$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Příklad. $\int_{\{(x,y):\ |x|+|y| \leqslant 1\}} ((x - y)^2 + (x + y)^2) d\lambda^2(x, y) = \frac{4}{3}$

Věta 3.18 (o zobecněných polárních souřadnicích)**.** *Nechť $a, b > 0$, $G = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha) := (ar \cos\alpha, br \sin\alpha)$, $(r, \alpha) \in G$. Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha)| = abr$ pro $(r, \alpha) \in G$. Je–li $E \subseteq \mathbb{R}^2$ a f funkce na E, pak*

$$\int_E f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abr \cdot f(ar \cos\alpha, br \sin\alpha)\,\mathrm{d}\lambda^2(r, \alpha),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Příklad. $\int_{\{(x,y):\ x^2+y^2 \leqslant 1\}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} d\lambda^2(x, y) = 2\pi$

Příklad. Obsah elipsy s poloosami délek a, b je roven πab.

____________ konec přednášky 23.11.2022

Věta 3.19 (o zobecněných válcových souřadnicích)**.** *Nechť $a, b > 0$, $G = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha, z) := (ar \cos\alpha, br \sin\alpha, z)$, $(r, \alpha, z) \in G$. Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha, z)| = abr$ pro $(r, \alpha, z) \in G$. Je–li $E \subseteq \mathbb{R}^3$ a f funkce na E, pak*

$$\int_E f(x, y, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abr \cdot f(ar \cos\alpha, br \sin\alpha, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(r, \alpha, z),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Příklad. Nechť $M = \{(x, y, z) :\ 0 \leqslant z \leqslant 2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Pak $\int_M z d\lambda^3(x, y, z) = 2\pi$.

Příklad. Nechť $M = \{(x, y, z) :\ z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 4z^2 \leqslant 4\}$. Pak $\lambda^3(M) = \frac{4}{3}\pi$.

Věta 3.20 (o zobecněných sférických souřadnicích)**.** *Nechť $a, b, c > 0$, $G = \{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem*

$$\varphi(r, \alpha, \beta) := (ar \cos\alpha \cos\beta, br \sin\alpha \cos\beta, cr \sin\beta), \quad (r, \alpha, \beta) \in G.$$

Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha, \beta)| = abcr^2 \cos\beta$ pro $(r, \alpha, \beta) \in G$. Je–li $E \subseteq \mathbb{R}^3$ a f funkce na E, pak

$$\int_E f(x, y, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abcr^2 \cos\beta \cdot f(ar \cos\alpha \cos\beta, br \sin\alpha \cos\beta, cr \sin\beta)\,\mathrm{d}\lambda^3(r, \alpha, \beta),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Příklad. Objem koule o poloměru R je roven $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Příklad. Nechť $M = \{(x,y,z):\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ x^2+y^2 \leqslant z^2,\ z \geqslant 0\}$. Pak $\int_M (x^2+y^2) z d\lambda^3(x,y,z) = \frac{21}{16}\pi$.

____________ konec přednášky 25.11.2022

3.4. Lebesgueův-Stieltjesův integrál

Definice. Symbolem $\mathcal{I}$ budeme značit systém všech zprava polouzavřených omezených intervalů v $\mathbb{R}$, tedy intervalů tvaru $(a,b]$, $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Interval $(a,a]$ interpretujeme jako prázdnou množinu. Řekneme, že $m : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ je Lebesgueova-Stieltjesova funkce intervalu (zkratka LSFI), jestliže

- pro každou uspořádanou trojici reálných čísel (a,b,c) platí
$$a \leqslant b \leqslant c \implies m((a,c]) = m((a,b]) + m((b,c]);$$
- funkce $b \mapsto m((a,b])$ je zprava spojitá na $[a,\infty)$.

Věta 3.21. $m : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ *je Lebesgueova-Stieltjesova funkce intervalu právě tehdy, když existuje zprava spojitá neklesající funkce* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*
$$m((a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a), \quad (a,b] \in \mathcal{I}.$$

Příklady. (i) $m((a,b]) = b - a$;

(ii) $m((a,b]) = \frac{\ell((a,b]\cap[-1,1])}{2}$ (pravděpodobnost, že náhodně zvolené číslo z intervalu $[-1,1]$ patří do $(a,b]$). Odpovídající funkce φ je dána vztahem
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{x+1}{2}, & x \in [-1,1]; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(iii)
$$m((a,b]) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \{-1,1\} \cap (a,b] = \varnothing; \\ \frac{1}{2}, & \text{pokud právě jedno z čísel } \{-1,1\} \text{ patří do } (a,b]; \\ 1, & \text{pokud } \{-1,1\} \subseteq (a,b] \end{cases}$$
(pravděpodobnost, že náhodně zvolené číslo z množiny $\{-1,1\}$ patří do $(a,b]$). Odpovídající funkce φ je dána vztahem
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{1}{2}, & x \in [-1,1); \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Definice. Nechť m je LSFI. Pro $A \subseteq \mathbb{R}$ položme
$$m^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j);\ I_j \in \mathcal{I}, \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A\}.$$
O funkci $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ říkáme, že to je *Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná* m.

Lemma 3.22. *Nechť* m *je LSFI a* m^* *je Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná* m*. Pak* m^* *je vnější míra.*

Definice. Nechť m je LSFI a m^* je Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná m. Funkci $\mathfrak{M}(m^*) \ni A \mapsto m^*(A)$ říkáme *Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ (generovaná m).

Je–li $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zprava spojitá neklesající funkce a m je LSFI definovaná předpisem $(a,b] \mapsto \varphi(b) - \varphi(a)$, pak Lebesgueovu-Stieltjesovu míru na $\mathbb{R}$ generovanou m značíme jako μ_φ a říkáme, že μ_φ je *Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ *generovaná* φ.

Příklady. (i) Je–li $\varphi(x) = x$, pak μ_φ je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$.

(ii) Je–li $\varphi(x) = \chi_{[a,\infty)}(x)$, pak μ_φ je tzv. Diracova míra δ_a splňující

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A; \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

Věta 3.23. *Nechť m je LSFI a μ je Lebesgueova-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$ generovaná m. Pak μ je úplná míra, každá borelovská množina je μ-měřitelná a pro každé $A \in \mathcal{I}$ máme $m(A) = \mu(A)$.*

Definice (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)**.** Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zprava spojitá neklesající funkce a f je μ_φ-měřitelná funkce na μ_φ-měřitelné množině $E \subseteq \mathbb{R}$. Integrál

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu_\varphi$$

se nazývá Lebesgueův-Stieltjesův integrál funkce f podle μ_φ. Je–li $E = (a, b]$, používá se též označení

$$(LS) \int_a^b f \,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{(a,b]} f \,\mathrm{d}\mu_{\varphi(x)}.$$

Je–li $a, b \in \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neklesající, zprava spojitá funkce, pak používáme značení

$$(LS) \int_a^b f \,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b]} f \,\mathrm{d}\mu_{\widetilde{g}(x)},$$

kde $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(a) & x < a, \\ g(x) & x \in [a, b], \\ g(b) & x > b. \end{cases}$$

Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f \,\mathrm{d}g(x)$ místo $(LS) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}g(x)$.

Příklad. Nechť $b \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \chi_{[b,\infty)}(x)$, f je funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\int_\mathbb{R} f d\varphi = f(b)$.

____________ konec přednášky 30.11.2022

Věta 3.24 (Vztah Lebesgueova-Stieltjesova a Riemannova-Stieltjesova integrálu)**.** *Nechť $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je zprava spojitá a neklesající funkce. Má–li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci g, pak má také Lebesgueův-Stieltjesův integrál podle μ_g přes množinu $(a, b]$ a hodnoty těchto integrálů se rovnají.*

Značení. Pro reálnou funkci f definovanou na pravém (resp. levém) okolí bodu x označujeme symbolem $f(x+)$ (resp. $f(x-)$) limitu $\lim_{y\to x^+} f(y)$ (resp. $\lim_{y\to x^-} f(y)$).

Věta 3.25 (per partes pro LS integrál)**.** *Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou zprava spojité a neklesající funkce. Pak*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x-) \,\mathrm{d}f(x),$$

kde $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Příklad. Nechť $a < c < b$, $f(x) = x$, $g(x) = \chi_{[c,b]}(x)$. Pak $\int_a^b f(x)dg(x) = c$.

3.4.1 LS integrál pro obecnější funkce a jeho výpočet

Definice. Pokud je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající funkce, uvažujme zprava spojitou neklesající funkci $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x+)$. Míru $\mu_{\widetilde{\varphi}}$ pak označujeme jako μ_φ a říkáme, že μ_φ je *Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ *generovaná* φ. Analogicky jako výše pak píšeme $(LS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ (nebo dokonce jen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$, nemůže-li dojít ke zmatení) místo $\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu_\varphi(x)$.

Příklad.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1, & x \in (0,1); \\ 2, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

pak

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \in [0,1); \\ 2, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Definice. Nechť $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou borelovsky měřitelné funkce a nechť $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, kde $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou omezené neklesající funkce. Pak pro borelovskou množinu E definujeme

$$(LS)\int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) := \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi_1(x) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi_2(x),$$

má–li pravá strana rovnosti smysl. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ místo $(LS)\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ (kde $-\infty < a \leqslant b < \infty$).

Poznámka. Platí, že hodnota integrálu $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ nezávisí na volbě funkcí φ_1, φ_2, a definice tak dává dobrý smysl.

Příklad. Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \\ 3, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Pak $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, kde

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x \in [0,2) \\ 4, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

a

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Věta 3.26 (Pravidla pro počítání LS integrálu)**.** *Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rozdílem omezených neklesajících funkcí a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená borelovsky měřitelná funkce. Pak*

1. *Pokud interval I je disjunktním sjednocením intervalů $(I_j)_{j=1}^n$, pak*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

2. *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ máme*

$$\int_{\{c\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = f(c)\big(\varphi(c+) - \varphi(c-)\big).$$

3. *Pokud $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f \in \mathcal{C}(I)$ a $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, pak platí*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. *Pokud $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j g_j$, kde $c_j \in \mathbb{R}$ a $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou rozdílem omezených neklesajících funkcí pro každé $j = 1, \ldots, n$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_j(x).$$

Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ x^2, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

a

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Pak $\int_{[0,4)} f\,d\varphi = \frac{65}{3}$.

Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

a

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pak $\int_{[-1,1]} f\,d\varphi = 1$.

———————— *konec přednášky 2.12.2022*

3.5. Prohození integrálu a limity, integrálu a řady

Příklad. Obecně integrál a limitu prohazovat nelze. Nechť $f_j = \chi_{(j,\infty)}$, $j \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{j\to\infty} f_j = 0 =: f$, ale $\infty = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_j \neq \int_{\mathbb{R}} f = 0$.

Věta 3.27 (záměna limity a integrálu při stejnoměrné konvergenci)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $f_j \rightrightarrows f$, $\mu(E) < \infty$ a $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ existuje. Pak*

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Příklad. $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,dx = 0$

Věta 3.28 (Leviho věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $\int_E f_1\,\mathrm{d}\mu > -\infty$ a $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$. Pak*

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,\mathrm{d}\mu.$$

Poznámka. Závěr Leviho věty platí rovněž v případě, kdy $\int_E f_1 d\mu < \infty$ a $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$.

Příklad. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\,dx = 0$

Věta 3.29 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť posloupnost funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje bodově skoro všude na E. Nechť existuje integrovatelná funkce $g : E \to \mathbb{R}$ (takzvaná* integrovatelná majoranta*) taková, že*

$$|f_j(x)| \leqslant g(x), \quad j \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Příklad. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = 0$

Příklad. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx = 1$

Poznámka. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

———— *konec přednášky 7.12.2022*

Věta 3.30 (Leviho věta pro řady)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to [0, \infty)$ měřitelná funkce. Pak*

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 3.31 (Lebesgueova věta pro řady)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ jsou $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce splňující $\sum_{j=1}^{\infty} \int_E |f_j| d\mu < \infty$. Pak $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konverguje skoro všude na E a platí*

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Příklad. $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Příklad. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Příklad. $\int_0^\infty e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

———— *konec přednášky 9.12.2022*

3.6. Integrály závislé na parametru

Věta 3.32 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je otevřená množina obsahující bod a. Nechť funkce $f : U \times E \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ je funkce $U \ni t \mapsto f(t, x)$ spojitá v a,

(ii) pro všechna $t \in U$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ měřitelná,

(iii) existuje integrovatelná funkce g na E taková, že pro všechna $t \in U$ a $x \in E$ je $|f(t, x)| \leqslant g(x)$.

Potom pro všechna $t \in U$ je $E \ni x \mapsto f(t, x)$ integrovatelná a funkce

$$F(t) := \int_E f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in U$$

je spojitá v bodě a.

Příklad. Nechť $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$. Pak F je spojitá na $[0, \infty)$.

Příklad. Nechť $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} dx$. Pak F je spojitá na $(0, \infty)$.

Věta 3.33 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times E \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ má funkce $I \ni t \mapsto f(t, x)$ vlastní derivaci na celém intervalu I,

(ii) pro všechna $t \in I$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ měřitelná,

(iii) existuje integrovatelná funkce g na E taková, že pro všechna $t \in I$ a $x \in E$ je $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leqslant g(x)$,

(iv) existuje $t_0 \in I$ tak, že funkce $E \ni x \mapsto f(t_0, x)$ je integrovatelná.

Pak pro všechna $t \in I$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ integrovatelná, funkce

$$F(t) := \int_E f(t, x)\, \mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I$$

má vlastní derivaci na celém intervalu I a platí

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, \mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I.$$

Příklad. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\, dx = \log(a + 1)$ pro $a > -1$.

____________ *konec přednášky 14.12.2022*

Definice. Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, \mathrm{d}x, \quad s \in (0, \infty).$$

Věta 3.34 (Vlastnosti funkce Gamma)**.** *(i) $\Gamma(s) \in (0, \infty)$, $s \in (0, \infty)$;*

(ii) $\Gamma(1) = 1$ a pro každé $s \in (0, \infty)$ platí $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$. Speciálně, $\Gamma(n + 1) = n!$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\Gamma \in \mathcal{C}^k(0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$;

(iv) Γ je ryze konvexní na $(0, \infty)$;

(v) $\lim_{s\to0+} \Gamma(s) = \lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$;

(vi) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Definice. Funkci *Beta* definujeme na $(0, \infty) \times (0, \infty)$ předpisem

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, \mathrm{d}x, \quad (p, q) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Věta 3.35 (Vlastnosti funkce Beta)**.** *(i) Pro každé $p, q \in (0, \infty)$ máme $B(p, q) \in (0, \infty)$;*

(ii) pro každé $p, q \in (0, \infty)$ máme $pB(p, q + 1) = qB(p + 1, q)$;

(iii) pro každé $p, q \in (0, \infty)$ máme $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (speciálně $B(p, q) = B(q, p)$);

(iv) $B \in \mathcal{C}^k((0, \infty) \times (0, \infty))$, $k \in \mathbb{N}$;

(v) $B(1 - s, s) = \Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, $s \in (0, 1)$.

____________ *konec přednášky 16.12.2022*

Příklad. $\int_0^\infty x^4 e^{-x^2}\, dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$

Příklad. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx = \frac{3\pi}{512}$

Příklad. Nechť $F(a) = \int_1^\infty \frac{\cos(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^7}}\,dx$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pak

- F je spojitá na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;
- $F'(a) = \int_1^\infty \frac{\sin(\frac{x}{a})}{a^2\sqrt{x^7}}\,dx$;
- $\lim_{a\to\infty} F(a) = \frac{2}{5}$.

Příklad. Nechť $B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^n$ je koule se středem 0 a poloměrem R. Pak $\lambda^n(B(0,R)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}R^n$.

———————— *konec přednášky 21.12.2022*

Příklad (Stirlingův vzorec)**.**

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{e}{s}\right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}$$

Příklad. $\lim_{n\to\infty} \lambda^n(B(0,1)) = 0$

Příklad. Nechť $F(a) = \int_0^\infty \frac{(x^a-1)e^{-x^2}}{\log x}\,dx$. Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{F'(n+1)(2e)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n\cdot n^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.7. Radonova-Nikodýmova věta

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je *σ-konečná*, pokud existují měřitelné množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(A_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.

Příklady. • n-rozměrná Lebesgueova míra λ^n na $\mathbb{R}^n$ je σ-konečná.

- Každá konečná míra je též σ-konečná.
- Počítací míra na $\mathbb{R}$ není σ-konečná.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor a nechť μ,ν jsou míry na $(X,\mathcal{A})$. Řekneme, že ν *je absolutně spojitá vzhledem k* μ (značíme $\nu << \mu$), jestliže pro každou $E \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť δ_a je Diracova míra ($\delta_a(E) = 1$, pokud $a \in E$, jinak $\delta_a(E) = 0$). Pak δ_a není absolutně spojitá vzhledem k λ^n.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a nechť f je nezáporná μ-měřitelná funkce. Pak míra $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ definovaná předpisem

$$\nu(E) := \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

se nazývá *míra s hustotou f (vzhledem k μ)*. Naopak f se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radonova-Nikodýmova derivace* míry ν (vzhledem k ν) a značí se $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Věta 3.36 (Radonova-Nikodýmova věta)**.** *Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor, nechť μ je σ-konečná a nechť ν je σ-konečná míra na $(X,\mathcal{A})$ splňující $\nu << \mu$. Pak existuje právě jedna (až na modifikaci na množinách μ-míry nula) μ-měřitelná funkce f taková, že $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, tj.*

$$\nu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \mathcal{A}.$$

Navíc, pokud je ν konečná, pak f je μ-integrovatelná.

Tvrzení 3.37 (O integraci vzhledem k hustotě)**.** *Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor, nechť μ je σ-konečná a nechť ν je konečná míra na $(X,\mathcal{A})$ splňující $\nu << \mu$ a nechť $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{A}$ a každou μ-měřitelnou funkci $g : E \to \mathbb{R}$ platí*

$$\int_E g d\nu = \int_E gf\,\mathrm{d}\mu,$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Příklady. • Nechť míra ν splňuje $\nu(E) = 2\lambda^n(E)$ pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu E. Pak $\frac{d\nu}{d\lambda^n} = 2$.

- Nechť $\mu = \lambda^n + \delta_0$. Pak $\frac{d\lambda^n}{d\mu} = \chi_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}$.

———————— *konec přednášky 4.1.2023*