Kalkulus 3, zimní semestr 2023-2024
Seznam vět z přednášky

1. Metrické prostory

Definice. Nechť X je množina a $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce splňující
(i) pro x, $y \in X$ je $\rho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
(ii) pro x, $y \in X$ je $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
(iii) pro x, y, $z \in X$ je $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$.
Potom funkci ρ nazýváme metrikou na X a dvojici (X, ρ) nazýváme metrickým prostorem. Jsou-li x, y prvky množiny X, pak $\rho(x, y)$ nazýváme jejich vzdáleností.

Příklady. • $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, x, $y \in \mathbb{R}$
• $X = \mathbb{R}^n$, $\rho_{\text{eukl}}(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (eukleidovská metrika)
• $X = \mathbb{R}^n$, $\rho_{\max}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| :\ i = 1, \dots, n\}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (maximová metrika)
• $X = C([a, b])$ (množina spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$), $\rho_{\sup} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$, f, $g \in X$ (supremová metrika)

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x \in X$, $r > 0$. Pak množinu $B(x, r) = \{y \in X :\ \rho(x, y) < r\}$ nazýváme otevřenou koulí se středem x a poloměrem r.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$, $x \in X$. Řekneme, že x je vnitřním bodem množiny A, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A$.
Množina A je otevřená, pokud každý bod $x \in A$ je jejím vnitřním bodem.
Vnitřkem množiny A rozumíme množinu všech vnitřních bodů A a značíme jej $IntA$.

Věta 1 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak*
(i) *$\emptyset$, X jsou otevřené v (X, ρ),*
(ii) *sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina,*
(iii) *průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.*

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků z X konverguje k prvku $x \in X$ v prostoru (X, ρ), pokud platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (X, ρ). Konvergentní posloupností v (X, ρ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (X, ρ).

Definice. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z metrického prostoru (X, ρ). Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$, případně vybranou posloupností posloupnosti $\{x_n\}$.

Věta 2 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z X.*
(i) *$\{x_n\}$ má v (X, ρ) nejvýše jednu limitu.*
(ii) *Nechť $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Je-li $x \in X$ limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (X, ρ), pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.*

Příklad. $(X, \rho) = (C([0, 1]), \rho_{\sup})$, $f_n(t) = t + 1/n$, $f(t) = t$, pak $f_n \to f$ v (X, ρ). (konvergence v $\rho_{\sup}$ splývá se stejnoměrnou konvergencí)

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Řekneme, že A je uzavřená v (X, ρ), pokud platí

$$\{x_n\} \subseteq A, x_n \to x \text{ v } (X, \rho) \text{ pro nějaké } x \in X, \text{ pak } x \in A.$$

Věta 3 (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Pak A je otevřená právě tehdy, když $X \setminus A$ je uzavřená.*

Věta 4 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť* (X, ρ) *je metrický prostor, pak*
(i) $\emptyset$, X *jsou uzavřené v* (X, ρ),
(ii) *sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina,*
(iii) *průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

___________ konec přednášky 5.10.2023

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Pak uzávěr množiny A v (X, ρ) definujeme jako množinu všech limitních bodů posloupností z A a značíme ho $\overline{A}$.

Věta 5 (vlastnosti uzávěru)**.** *Nechť* (X, ρ) *je metrický prostor,* $A, B \subseteq X$. *Pak*
(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$,
(ii) *je-li* $A \subseteq B$, *pak* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$; *speciálně vždy platí* $\overline{A} \subseteq X$,
(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(iv) $\overline{A}$ *je nejmenší uzavřená množina obsahující* A.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subseteq X$ je hustá v (X, ρ), pokud $\overline{A} = X$.

Příklady. • Množina racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$.
• Množina všech polynomů na $[a, b]$ je hustá v $(C([a, b]), \rho_{\mathrm{sup}})$.

1.1. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory.

Definice. Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení X do Y. Řekneme, že f je spojité, jestliže

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \text{ je-li } y \in X, \rho(x, y) < \delta, \text{ pak } \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Příklad. Je-li $f : (\mathbb{R}^n, \rho_{\mathrm{eukl}}) \to (\mathbb{R}, \rho_{\mathrm{eukl}})$ definováno vztahem $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$, pak f je spojité.

Věta 6 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť* (X, ρ), (Y, σ) *jsou metrické prostory,* $f : X \to Y$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*
(i) f *je spojité.*
(ii) *Pro každou otevřenou množinu* G *v* (Y, σ) *je* $f^{-1}(G)$ *otevřená v* (X, ρ).
(iii) *Pro každou uzavřenou množinu* F *v* (Y, σ) *je* $f^{-1}(F)$ *uzavřená v* (X, ρ).
(iv) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *prvků z* X *a* $x \in X$ *splňující* $x_n \to x$ *v* (X, ρ) *platí* $f(x_n) \to f(x)$ *v* (Y, σ).

1.2. Kompaktní prostory.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, pokud z každé posloupnosti prvků z X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Řekneme, že množina $K \subseteq X$ je kompaktní v X, jestliže metrický prostor (K, ρ) je kompaktní, tj. jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v X a jejíž limita je prvkem K.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak $[a, b]$ je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Věta 7 (vlastnosti kompaktních prostorů)**.** *Nechť* (X, ρ) *je metrický prostor,* $K \subseteq X$.
(i) *Je-li* K *kompaktní, pak je* K *uzavřená.*
(ii) *Je-li* (X, ρ) *kompaktní,* K *uzavřená, pak* K *je kompaktní.*
(iii) *Je-li* (X, ρ) *kompaktní,* (Y, σ) *metrický prostor,* $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ *spojité, pak* $f(X)$ *je kompaktní v* (Y, σ).

Věta 8 (kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť* $K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Pak* K *je kompaktní v* $(\mathbb{R}^n, \rho_{\mathrm{eukl}})$ *právě tehdy, když je uzavřená a omezená.*

Poznámka. Množina $A \subseteq (X,\rho)$ je omezená, pokud $\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x,y) :\ x,y \in A\} < \infty$.

Příklad. Množina $A = \{f \in C([0,1]) :\ |f(x)| \leq 1\}$ je uzavřená a omezená v $(C([0,1]), \rho_{\sup})$, ale není kompaktní.

____________ konec přednášky 6.10.2023

1.3. **Úplné prostory.**

Definice. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ posloupnost prvků z X. Řekneme, že $\{x_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (případně, že $\{x_n\}$ je cauchyovská), pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_0 :\ \rho(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

Věta 9 (konvergentní posloupnost je cauchyovská)**.** *Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků z X. Pak $\{x_n\}$ je cauchyovská.*

Definice. Řekneme, že metrický prostor (X,ρ) je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost prvků z X je konvergentní.

Příklady. • $(\mathbb{R}, \rho_{\mathrm{eukl}})$ je úplný
- $((0,1), \rho_{\mathrm{eukl}})$ není úplný
- $(\mathbb{R}^n, \rho_{\mathrm{eukl}})$ je úplný

Věta 10 (úplnost a uzavřenost)**.** *Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor, $M \subseteq X$. Pak (M,ρ) je úplný právě tehdy, když M je uzavřená v (X,ρ).*

Příklad. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $(M, \rho_{\mathrm{eukl}})$ je úplný právě tehdy, když M je uzavřená.

1.4. **Integrace komplexních funkcí.**

Reálnou funkcí rozumíme funkci s hodnotami v $\mathbb{R}$. Komplexní funkcí rozumíme funkci s hodnotami v $\mathbb{C}$.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f : X \to \mathbb{C}$. Řekneme, že f je měřitelná, pokud $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subseteq \mathbb{C}$ otevřenou.

Poznámka. Pokud tuto definici měřitelnosti použijeme pro reálné funkce, dostaneme stejný pojem jako ten definovaný v Kalkulu 2.

Věta 11 (měřitelnost komplexních funkcí)**.** *Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor.*

(i) *Jsou-li u,v reálné měřitelné funkce na X a $f = u+iv$, pak f je komplexní měřitelná funkce na X.*

(ii) *Je-li $f = u + iv$ komplexní měřitelná funkce na X, pak $u, v, |f|$ jsou reálné měřitelné funkce na X.*

(iii) *Jsou-li f,g komplexní měřitelné funkce na X, pak $f+g, fg$ jsou rovněž měřitelné funkce na X.*

(iv) *Je-li f komplexní měřitelná funkce na X, pak existuje komplexní měřitelná funkce α taková, že $|\alpha| = 1$, $f = \alpha|f|$.*

Příklad. $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ je měřitelná na $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou. Soubor všech komplexních měřitelných funkcí f na X splňujících $\int_X |f|\, d\mu < \infty$ budeme značit $L^1(X,\mu)$.

Poznámka. $L^1(X,\mu) = L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ lze alternativně definovat i pro reálné funkce, viz Kalkulus 2.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$, $f = u+iv$, $f \in L^1(X,\mu)$. Pak definujeme Lebesgueův integrál funkce f přes množinu E jako

$$\int_E f\, d\mu = \int_E u\, d\mu + i \int_E v\, d\mu.$$

Poznámka. Integrál výše je dobře definován, neboť $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$, a tedy $\int_E u\, d\mu$ a $\int_E v\, d\mu$ konvergují.

2. L^p PROSTORY

Připomeňme, že reálná funkce φ na intervalu (a,b) se nazývá konvexní, pokud platí

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y), \quad x,y\in(a,b),\ 0\lambda\leq 1.$$

Každá konvexní funkce na (a,b) je spojitá na (a,b).

Věta 12 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou splňující $\mu(\Omega)=1$, $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$. Pokud $f\in L^1(\Omega,\mu)$ je reálná funkce splňující $a<f(x)<b$ pro $x\in\Omega$ a φ je konvexní na (a,b), pak*

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi\circ f\,d\mu.$$

Příklad. Z Jensenovy nerovnosti lze odvodit nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$(y_1\dots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{y_1+\dots y_n}{n}, \quad y_1,\dots,y_n>0.$$

———————— konec přednášky 12.10.2023

Definice. Nechť $p,q>0$ splňující $p+q=pq$, neboli $1/p+1/q+1$. Čísla p,q nazýváme sdružené exponenty. Pak nutně platí $1<p,q<\infty$. Dále pokud $p\to 1_+$, pak $q\to\infty$. Dvojici $1,\infty$ budeme též nazývat sdruženými exponenty. Často značíme $p'=q$.

Příklad. $2'=2$, $1'=\infty$, $\infty'=1$, $3'=3/2$

Věta 13 (Hölderova a Minkowského nerovnost)**.** *Nechť p,q jsou sdružené exponenty, $1<p<\infty$. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, f, $g: X\to[0,\infty]$ měřitelné. Pak*

(i) *(Hölderova nerovnost)*

$$\int_X fg\,d\mu \leq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

(ii) *(Minkowského nerovnost)*

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, $1<p<\infty$, $f: X\to\mathbb{C}$ měřitelná. Položme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

a označme $L^p(X,\mu)$ množinu takových f, pro které $\|f\|_p<\infty$. Výraz $\|f\|_p$ nazýváme L^p-normou f.

Je-li $(X,\mathcal{A},\mu)$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mírou, píšeme pouze $L^p(X)$. Je-li μ počítací míra na množině A, píšeme $\ell^p(A)$, nebo jen ℓ^p, je-li $A=\mathbb{N}$. ℓ^p je tedy prostor posloupností a platí $\|\{a_n\}\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, $g: X\to[0,\infty]$ měřitelná. Nechť S je množina všech $\alpha\in\mathbb{R}$ takových, že $\mu(g^{-1}((\alpha,\infty]))=0$. Je-li $S=\emptyset$, položme $\beta=\infty$. Je-li $S\neq\emptyset$, položme $\beta=\inf S$. Číslo β nazývýme esenciálním supremem g a značíme $\operatorname{ess\,sup} g$.

Je-li $f: X\to\mathbb{C}$ měřitelná, položme $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ a označme $L^\infty(X,\mu)$ množinu takových f, pro které je $\|f\|_\infty<\infty$. Funkce z $L^\infty(X,\mu)$ nazýváme esenciálně omezené funkce.

Je-li $(X,\mathcal{A},\mu)$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mírou, píšeme pouze $L^\infty(X)$. Je-li μ počítací míra na množině A, píšeme $\ell^\infty(A)$, nebo jen ℓ^∞, je-li $A=\mathbb{N}$.

Poznámka. $|f(x)|\leq\lambda$ pro s.v. $x\in X$ právě tehdy, když $\lambda\leq\|f\|_\infty$.

Poznámka. Je-li μ počítací míra, pak ess sup $f = \sup f$, neboť každá neprázdná množina má kladnou míru.

Věta 14 (Hölderova nerovnost pro L^p prostory)**.** *Nechť p, q jsou sdružené exponenty, $1 \leq p \leq \infty$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$. Pak $fg \in L^1(X, \mu)$ a platí $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Věta 15 (trojúhelníková nerovnost pro L^p prostory)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^p(X, \mu)$. Pak $f + g \in L^p(X, \mu)$ a platí $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$.*

Poznámka. $L^p(X, \mu)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

____________ konec přednášky 13.10.2023

Poznámka. Rozdělme $L^p(X, \mu)$ do tříd ekvivalence tak, že $f \sim g$, pokud $f = g$ μ-s.v. Jsou-li F, G dvě takové třídy ekvivalence, položme $\rho(F, G) = \|f - g\|_p$, kde $f \in F$ a $g \in G$. Tato definice je korektní (nezávisí na volbě funkcí f, g) a ρ je metrika na množině všech tříd ekvivalence v $L^p(X, \mu)$. V tomto smyslu lze tedy $L^p(X, \mu)$ považovat za metrický prostor.

Poznámka. Je-li $\{f_n\}$ poslounost v $L^p(X, \mu)$, $f \in L^p(X, \mu)$, řekneme, že
- f_n konverguje k f v $L^p(X, \mu)$, pokud $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$;
- f_n je cauchyovská v $L^p(X, \mu)$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ m, n \geq n_0 : \ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Tyto definice odpovídají dříve zavedeným pojmům pro metrické prostory.

Věta 16 (úplnost L^p prostoru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, pak $L^p(X, \mu)$ je úplný metrický prostor.*

Věta 17 (vztah konvergence v L^p a bodové konvergence s.v.)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $L^p(X, \mu)$ s limitou f. Pak existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ posloupnosti $\{f_n\}$ taková, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ pro μ-s.v. $x \in X$.*

Příklad. Je-li $\{f_n\}$ cauchyovská posloupnost v $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, pak obecně nemusí platit, že f_n konverguje bodově μ-s.v.

Příklad. Nechť $f_n = \chi_{(n,n+1)}$, pak $f_n(x) \to 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, ale $f_n \not\to 0$ v $L^p(\mathbb{R})$.

2.1. **Jednoduché funkce.**

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkci $s : X \to \mathbb{C}$ nazveme jednoduchou funkcí, pokud obor hodnot s obsahuje pouze konečně mnoho bodů.

Poznámka. Každou jednoduchou funkci lze zapsat ve tvaru $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ je obor hodnot s a $A_i = \{x \in X : \ s(x) = \alpha_i\}$. Platí, že s je měřitelná právě tehdy, když $A_i \in \mathcal{A}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Věta 18 (aproximace jednoduchými funkcemi)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f : X \to [0, \infty]$ měřitelná. Pak existují jednoduché měřitelné funkce s_n takové, že*
 (a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$,
 (b) $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$, $x \in X$.

Věta 19 (hustota jednoduchých funkcí v L^p prostoru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, S je množina všech komplexních měřitelných jednoduchých funkcí s na X splňujících $\mu(\{x \in X : \ s(x) \neq 0\}) < \infty$. Je-li $1 \leq p < \infty$, pak S je hustá v $L^p(X, \mu)$.*

2.2. **Aproximace spojitými funkcemi.**

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $f : X \to \mathbb{C}$. Nosič funkce f definujeme jako

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Soubor všech spojitých komplexních funkcí na X s kompaktním nosičem značíme $C_c(X)$.

Poznámka. • $C_c(X)$ je vektorový prostor.
• Je-li X kompaktní, pak $C_c(X)$ splývá s prostorem spojitých funkcí na X.

__________ konec přednášky 19.10.2023

Věta 20 (Luzinova)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je lebesgueovsky měřitelná a splňuje $\lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0\}) < \infty$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ splňující $\lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ a $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.*

Věta 21 (hustota spojitých funkcí v L^p)**.** *Nechť $1 \leq p < \infty$, pak $C_c(\mathbb{R}^n)$ je hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Definice. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se anuluje v ∞, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $|f(x)| < \varepsilon$ pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Množinu spojitých funkcí s touto vlastností značíme $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{1+|x|} \in C_0(\mathbb{R}^n) \setminus C_c(\mathbb{R}^n)$.

Věta 22 (uzávěr spojitých funkcí s kompaktním nosičem v supremové metrice)**.** *Nechť $(C(\mathbb{R}^n), \rho_\infty)$ značí prostor omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^n$ se supremovou metrikou*

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|.$$

Pak uzávěr množiny $C_c(\mathbb{R}^n)$ v prostoru $(C(\mathbb{R}^n), \rho_\infty)$ je $C_0(\mathbb{R}^n)$.

3. Hilbertovy prostory

Definice. Nechť H je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Řekneme, že H je prostor se skalárním součinem, pokud každé dvojici $x, y \in H$ lze přiřadit komplexní číslo $\langle x, y\rangle$ (nazývané skalární součin x a y) tak, že platí
(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $x, y, z \in H$,
(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $x \in H$,
(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Poznámky. • Podmínky (ii) a (iii) říkají, že pro každé $y \in H$ je zobrazení $x \mapsto \langle \alpha x, y\rangle$ lineární.
• $\langle 0, y\rangle = 0$ pro všechna $y \in H$,
• $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$, $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
• $\langle z, x + y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$, $x, y, z \in H$.

Definujme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in H$. Číslo $\|x\|$ nazýváme normou vektoru $x \in H$.

Schwarzova nerovnost: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, $x, y \in H$
Trojúhelníková nerovnost: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in H$

Důsledek. *Uvažujme funkci $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in H$. Pak ρ je metrika na H, tj. (H, ρ) je metrický prostor.*

Definice. Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je Hilbertův prostor, je-li metrický prostor (H, ρ) úplný.

Příklady. Příklady Hilbertových prostorů:
- $\mathbb{C}$, $\langle x, y\rangle = x\overline{y}$,
- $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$, kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,
- $L^2(X, \mu)$, kde μ je prostor s mírou; $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu$. Odpovídající norma je $\|f\| = \|f\|_2$.

Příklad. Množina komplexních spojitých funkcí na $[0, 1]$ s $\langle f, g\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}\, dt$ je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

Věta 23 (spojitost skalárního součinu a normy)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $y \in H$. Pak zobrazení*

$$x \mapsto \langle x, y\rangle, \quad x \mapsto \langle y, x\rangle, \quad x \mapsto \|x\|$$

jsou spojitá na H.

3.1. **Podprostory. Připomeneme:** Podmnožina M vektorového prostoru V je podprostorem V, pokud platí

$$x, y \in M \Rightarrow x + y \in M; \quad x \in M, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha x \in M.$$

Příklady. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$, pak $V_1 = \{f \in V : \ f \text{ je omezená}\}$ je podprostor V, ale $V_2 = \{f \in V : \ |f(x)| \leq 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}\}$ není podprostor V.

——————— konec přednášky 20.10.2023

Definice. Je-li H Hilbertův prostor a M je podprostor H, pak M je uzavřený podprostor H, je-li M uzavřená podmnožina H.

Pozorování. Je-li M podprostor H, pak $\overline{M}$ je též podprostor H.

3.2. **Konvexní množiny.**

Definice. Nechť V je vektorový prostor, $E \subseteq V$. Řekneme, že E je konvexní, pokud platí:

$$x \in E, \ y \in E, \ 0 < t < 1 \Rightarrow z_t := (1 - t)x + ty \in E.$$

3.3. **Ortogonalita (kolmost).**

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor, x, $y \in H$. Řekneme, že x, y jsou ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Píšeme $x \perp y$.

Nechť $x \in H$, M je podprostor H. Značíme

$$x^\perp = \{y \in H : \ \langle x, y\rangle = 0\},$$
$$M^\perp = \{y \in H : \ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } x \in M\}.$$

Poznámka. Relace $x \perp y$ je symetrická, tj. $\langle x, y\rangle = 0$ právě tehdy, když $\langle y, x\rangle = 0$.
Pozorování. Nechť $x \in H$, M je podprostor H. Pak $x^\perp$, $M^\perp$ jsou uzavřené podprostory H.

Příklad. Nechť $H = L^2((0, 1))$ a $g(t) = 1$ pro $t \in (0, 1)$. Pak $g^\perp = \{f \in L^2((0, 1)) : \ \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$.

Věta 24 (o prvku s nejmenší normou)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $E \subseteq H$ neprázdná, uzavřená a konvexní. Pak existuje právě jeden prvek $x \in E$ takový, že $\|x\| = \min_{y \in E} \|y\|$.*

Tvrzení (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, x, $y \in H$. Pak*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Věta 25 (o ortogonální projekci)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a M jeho uzavřený podprostor.*
(i) *Pro každé $x \in H$ existuje jednoznačný rozklad $x = Px + Qx$, kde $Px \in M$ a $Qx \in M^\perp$.*
(ii) *Px, Qx jsou takové body z M, resp. $M^\perp$, které mají od x nejmenší vzdálenost.*
(iii) *Zobrazení $P : H \to M$, $Q : H \to M^\perp$ jsou lineární.*
(iv) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

Zobrazení P, Q se nazývají ortogonální projekce prostoru H na M, resp. $M^{\perp}$.

Připomeneme: $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je pro každé $y \in H$ spojitý lineární funkcionál na H.

Věta 26 (spojité lineární funkcionály na Hilbertově prostoru)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a L je spojitý lineární funkcionál na H. Pak existuje právě jedno $y \in H$ takové, že $Lx = \langle x, y\rangle$, $x \in H$.*

____________ konec přednášky 26.10.2023

3.4. **Ortonormální množiny.**

Definice. Řekneme, že množina vektorů $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální, pokud platí $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0$ kdykoliv $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in A$, $\beta \in A$, a zároveň $\|u_\alpha\| = 1$ pro všechna $\alpha \in A$.

Příklad. $H = \mathbb{C}^n$, pak $u_1 = (1, 0, \ldots, 0), u_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, u_n = (0, \ldots, 0, 1)$ je ortonormální množina.

Definice. Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H. Každému $x \in H$ přiřadíme komplexní funkci $\widehat{x}$ na množině A definovanou vztahem $\widehat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle$, $\alpha \in A$. Čísla nazýváme Fourierovými koeficienty x vzhledem k množině $\{u_\alpha\}$.

Příklad. Nechť $H = \mathbb{C}^n$, $\{u_i : i = 1, \ldots, n\}$ jsou jako výše. Je-li $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, pak $\widehat{x}(i) = \langle x, u_i\rangle = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Věta 27 (o konečných ortonormálních množinách)**.** *Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in F\}$ je konečná ortonormální množina v Hilbertově prostoru H. Nechť M_F je lineární obal množiny $\{u_\alpha : \alpha \in F\}$.*

(i) *Je-li φ komplexní funkce na F, pak existuje $y \in M_F$ splňující $\widehat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\alpha \in F$. Prvek y je tvaru $y = \sum_{\alpha\in F} \varphi(\alpha)u_\alpha$ a splňuje $\|y\|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\varphi(\alpha)|^2$.*

(ii) *Je-li $x \in H$ a $s_F(x) = \sum_{\alpha\in F} \widehat{x}(\alpha)u_\alpha$, pak $\|x - s_F(x)\| < \|x - s\|$ pro $s \in M_F$, $s \neq s_F(x)$, a platí $\sum_{\alpha\in F} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$. Tj. $s_F(x)$ je nejlepší aproximace x v prostoru M_F.*

Příklad. Uvažujme $H = \mathbb{C}^4$ s ortonormální množinou $\{u_i : i = 1, 2\}$, tj. $F = \{1, 2\}$. Pak $M_F = \{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$. Je-li $x \in \mathbb{C}^4$, pak $s_F(x) = x_1u_1 + x_2u_2 = (x_1, x_2, 0, 0)$.

Definice. Nechť A je množina a φ je funkce na A. Pak $\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha)$ definujeme jako Lebesgueův integrál funkce φ vzhledem k počítací míře na A. Speciálně, je-li $0 \leq \varphi(\alpha) \leq \infty$, pak $\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha)$ je rovna supremu všech konečných sum $\varphi(\alpha_1) + \cdots + \varphi(\alpha_n)$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou po dvou různé prvky z A.

Definice. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$. Řekneme, že f je izometrie, pokud $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$, $x, y \in X$.

Věta 28 (o ortonormální množině)**.** *Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H a nechť P je lineární obal množiny $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$.*

(i) *(Besselova nerovnost) $\sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$, $x \in H$.*

(ii) *(Rieszova-Fischerova věta) $x \mapsto \widehat{x}$ je spojité lineární zobrazení prostoru H na $\ell^2(A)$.*

(iii) *Restrikce zobrazení z části* (ii) *na množinu $\overline{P}$ je izometrie $\overline{P}$ na $\ell^2(A)$.*

Věta 29 (o maximální ortonormální množině)**.** *Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *$\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je maximální ortonormální množina v H (tj. každá ortonormální množina obsahující $\{u_\alpha\}$ je rovna $\{u_\alpha\}$).*

(ii) *Lineární obal množiny $\{u_\alpha\}$ je hustý v H.*

(iii) *$\sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$, $x \in H$.*

(iv) *(Parsevalova rovnost) $\sum_{\alpha\in A} \widehat{x}(\alpha)\overline{\widehat{y}(\alpha)} = \langle x, y\rangle$, $x \in H$, $y \in H$.*

Maximální ortonormální množina se často nazývá ortonormální báze prostoru H.

Definice. Řekneme, že Hilbertovy prostory H_1, H_2 jsou izomorfní, pokud existuje lineární bijekce $\Lambda : H_1 \to H_2$ taková, že $\langle \Lambda x, \Lambda y\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1}$, $x, y \in H_1$. Zobrazení Λ se nazývá izomorfismus.

Poznámka. Z Vět 28 a 29 plyne, že je-li $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ maximální ortonormální množina v Hilbertově prostoru H, pak zobrazení $x \mapsto \widehat{x}$ je izomorfismus H na $\ell^2(A)$.

Věta 30 (existence maximální ortonormální množiny)**.** *Nechť B je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H. Potom existuje maximální ortonormální množina A v H taková, že $B \subseteq A$.*

Důsledek. *Každý netriviální Hilbertův prostor je izomorfní prostoru $\ell^2(A)$ pro nějakou množinu A.*

Definice. Dvojici $(\mathcal{P}, \leq)$ nazveme částečně uspořádanou množinou, pokud platí
(i) $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$,
(ii) $a \leq a$ pro každé $a \in \mathcal{P}$,
(iii) $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$.

Podmnožina $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ je totálně uspořádaná, pokud pro všechna $a, b \in \mathcal{L}$ platí buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$.

———————— konec přednášky 27.10.2023

Příklad. Nechť $\mathcal{P}$ je soubor všech otevřených množin v $\mathbb{R}^2$ a $G_1 \leq G_2$, pokud $G_1 \subseteq G_2$. Nechť $\mathcal{L}$ je soubor všech otevřených kruhů se středem v počátku. Pak $\mathcal{L}$ je maximální totálně uspořádaná množina v $\mathcal{P}$.

Tvrzení (Hausdorffova věta o maximalitě)**.** *Každá neprázdná částečně uspořádaná množina obsahuje maximální totálně uspořádanou podmnožinu.*

3.5. **Trigonometrické řady.** Nechť $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je-li F funkce na T, definujeme funkci f na $\mathbb{R}$ vztahem

$$f(t) = F(e^{it}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Pak f je 2π-periodická, tj. $f(t + 2\pi) = f(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Podobně, je-li f 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$, definujeme funkci F na T vztahem (3.1). Tedy 2π-periodické funkce na T lze ztotožnit s funkcemi na T.

L^p prostory na T značíme $L^p(T)$ a ztotožníme je s L^p prostory na $(-\pi, \pi)$ vzhledem k normalizované Lebesgueově míře $\frac{1}{2\pi}\,dx$, tj.

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

a

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|.$$

Dále definujeme $C(T)$ jako soubor všech spojitých komplexních funkcí na T (nebo ekvivalentně všech spojitých komplexních 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$), s normou

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|.$$

Trigonometrický polynom je funkce tvaru

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$. S použitím vzorců $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ a $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ lze (3.2) přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

kde $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} - \frac{a_n+ib_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Položme $u_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pak $\{u_n\}$ je maximální ortonormální množina v $L^2(T)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

3.6. **Fourierovy řady.**

Definice. Nechť $f \in L^1(T)$. Pak definujeme Fourierův koeficient f vztahem

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

a Fourierovu řadu f vztahem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Částečné součty této řady jsou

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Rieszova-Fischerova věta. Je-li $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel splňující $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, pak existuje $f \in L^2(T)$ taková, že $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Parsevalova věta. $f \in L^2(T)$, $g \in L^2(T)$, pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Speciálně

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt. \tag{3.3}$$

Poznámka. Aplikací (3.3) na funkci $f - s_N$ dostaneme $\lim_{N\to\infty} \|f - s_N\|_2 = 0$, tj. částečné součty Fourierovy řady funkce f konvergují k f v L^2 normě.

Důsledek. *Zobrazení $f \mapsto \widehat{f}$ je izomorfismus mezi Hilbertovými prostory $L^2(T)$ a $\ell^2(\mathbb{Z})$.*

Poznámka. Je-li $f \in L^1(T)$ reálná funkce, jsou koeficienty $\widehat{f}(n)$ obecně komplexní čísla. Je ale možné uvažovat reálnou Fourierovu řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Pak $a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$, $a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n = (c_{-n} - c_n)/i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$, $n \in \mathbb{N}$. Částečné součty jsou potom rovny

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a Parsevalova rovnost má tvar

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

___________ konec přednášky 3.11.2023

Poznámka. Je-li $f\in L^1(T)$ sudá, pak

$$b_n = 0 \text{ pro } n\in\mathbb{N}, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \text{ pro } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Je-li $f\in L^1(T)$ lichá, pak

$$a_n = 0 \text{ pro } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \text{ pro } n\in\mathbb{N}.$$

Příklad. Reálná Fourierova řada 2π-periodické funkce f splňující $f(t)=\operatorname{sgn} t$, $t\in[-\pi,\pi)$, je $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$. Z Parsevalovy rovnosti plyne $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Příklad. Reálná Fourierova řada 2π-periodické funkce f splňující $f(t)=t^2$, $t\in[-\pi,\pi)$, je $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$. Pokud bychom věděli, že tato řada konverguje k funkci f v bodě π, dosazením $t=\pi$ bychom dostali $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4. Banachovy prostory

Definice. Nechť X je vektorový prostor na $\mathbb{C}$. Řekneme, že X je normovaný lineární prostor, pokud každému prvku $x\in X$ je přiřazeno nezáporné reálné číslo $\|x\|$, nazývané norma x, splňující
(i) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$, $x,y\in X$;
(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, $x\in X$, $\alpha\in\mathbb{C}$,
(iii) $\|x\|=0 \Rightarrow \|x\|=0$.

Poznámka. Je-li X normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\rho(x,y)=\|x-y\|$ je metrika na X.

Definice. Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Příklady. • $X=\mathbb{C}$, $\|x\|=|x|$ je Banachův prostor.
• Každý Hilbertův prostor s normou $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ je Banachův.
• Je-li (X,μ) prostor s mírou a $1\le p\le\infty$, pak $L^p(X,\mu)$ je Banachův prostor.
• $X=\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n\neq 0$ jen pro konečně mnoho indexů $n\}$, $\|\{a_n\}\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$. Pak X je normovaný lineární prostor, který není Banachův.

Poznámka. Lze rovněž uvažovat reálné Banachovy prostory. Definice je analogická, pouze u podmínky (ii) předpokládáme, že $\alpha\in\mathbb{R}$.

Příklad. $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_p)$ je reálný Banachův prostor, kde $\|x\|_p=\begin{cases}(|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p}, & 1\le p<\infty,\\ \max\{|x_1|,|x_2|\}, & p=\infty.\end{cases}$

Definice. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\Lambda: X\to Y$ je lineární zobrazení. Normu zobrazení Λ definujeme vztahem

$$\|\Lambda\|=\sup\{\|\Lambda x\|_Y:\ x\in X, \|x\|_X\le 1\}.$$

Je-li $\|\Lambda\|<\infty$, řekneme, že Λ je omezené lineární zobrazení. Pokud navíc $Y=\mathbb{C}$, nazýváme Λ omezený lineární funkcionál.

Poznámka. Místo suprema přes jednotkovou kouli stačí uvažovat supremum přes jednotkovou sféru, tj. přes ta $x \in X$, pro která $\|x\| = 1$. Dále platí, že $\|\Lambda\|$ je nejmenší číslo takové, že $\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\|\|x\|$ pro všechna $x \in X$.

——————— konec přednášky 9.11.2023

Příklad. $\varphi : \ell^1 \to \mathbb{C}$ je definováno vztahem $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = x_1$. Pak $\|\varphi\| = 1$ a zobrazení své normy nabývá.

Věta 31 (charakterizace lineárních zobrazení)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\Lambda : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
(i) *Λ je omezené;*
(ii) *Λ je spojité;*
(iii) *Λ je spojité v 0.*

Poznámka. Dále někdy budeme psát "spojité lineární zobrazení" místo "omezené lineární zobrazení".

4.1. **Baireova věta a její důsledky.**

Věta 32 (Baireova)**.** *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor, pak průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v X je hustá množina v X.*

Poznámka. Speciálně je tedy výše uvedený průnik neprázdný (s výjimkou případu $X = \emptyset$).

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Řekneme, že A je typu G_δ v X, pokud A je průnikem spočetně mnoha otevřených množin.

Příklad. Nechť $X = \mathbb{R}$, pak $\{0\}$ není otevřená, ale je G_δ.

Věta 33 (Banachova-Steinhausova, princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor, $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je soubor omezených lineárních zobrazení X do Y. Pak buď*
(i) *existuje $M < \infty$ takové, že $\|\Lambda_\alpha\| \leq M$ pro všechna $\alpha \in A$,*
nebo
(ii) $\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha x\| = \infty$ *pro všechna x z nějaké husté G_δ množiny v X.*

Věta 34 (věta o otevřeném zobrazení)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a Λ je omezené lineární zobrazení X na Y. Pak $\Lambda(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu G v X.*

Věta 35 (spojitost inverzního zobrazení)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a Λ je omezené lineární zobrazení X na Y, které je navíc prosté. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\|\Lambda x\| \geq \delta\|x\|$, $x \in X$. Tedy Λ^{-1} je omezené lineární zobrazení Y na X.*

——————— konec přednášky 10.11.2023

Příklad. Existuje $f \in C(T)$ taková, že její Fourierova řada diverguje v 0. Označme $s_n(f, 0)$ částečné součty Fourierovy řady funkce f v 0 a položme $\Lambda_n f = s_n(f, 0)$. Pak $\|\Lambda_n\| \to \infty$ pro $n \to \infty$ a požadovaný závěr plyne z principu stejnoměrné omezenosti.

4.2. **Hahnova-Banachova věta.**

Věta 36 (Hahnova-Banachova)**.** *Je-li M podprostor normovaného lineárního prostoru X a f je omezený lineární funkcionál na M, pak f lze rozšířit na omezený lineární funkcionál F na X splňující $\|F\| = \|f\|$.*

Názvosloví. Funkcionál F je rozšířením funkcionálu f, pokud definiční obor F obsahuje definiční obor f a $F(x) = f(x)$ pro x z definičního oboru f. Dále

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \ x \in M, \ \|x\| \leq 1\}, \quad \|F\| = \sup\{|F(x)| : \ x \in X, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Poznámka. Je-li X Hilbertův prostor, pak výše uvedené rozšíření existuje jediné a je rovno 0 na $M^\perp$. Pro obecný normovaný lineární prostor ale takových rozšíření může existovat více.

Věta 37 (oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X a nechť $x_0 \in X \setminus M$. Pak existuje omezený lineární funkcionál f na X takový, že $f(x) = 0$ pro $x \in M$ a $f(x_0) \neq 0$.*

Příklad. Nechť $X = \mathbb{C}^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 :\ x + y = 0\}$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Pak funkcionál z (důkazu) předchozí věty má tvar $f(x, y) = x + y$.

Věta 38. *Je-li X normovaný lineární prostor a $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, pak existuje omezený lineární funkcionál f na X s normou 1 takový, že $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak soubor všech omezených lineárních funkcionálů na X značíme X^* a nazýváme duálním prostorem k prostoru X.

Poznámka. • X^* je Banachův prostor.
• Pokud $X \neq \{0\}$, pak $X^* \neq \{0\}$. Dokonce platí, že X^* odděluje body X, tj. jsou-li $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, pak existuje $f \in X^*$ splňující $f(x_1) \neq f(x_2)$.
• Je-li $x \in X$, pak

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| :\ f \in X^*,\ \|f\| = 1\}.$$

Pro dané $x \in X$ je tedy zobrazení $f \mapsto f(x)$ omezený lineární funkcionál na X^* s normou $\|x\|$.

____________ konec přednášky 16.11.2023

4.3. **Omezené lineární funkcionály na L^p.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, q je sdružený exponent k p. Je-li $g \in L^q(X, \mu)$, pak z Hölderovy nerovnosti plyne, že zobrazení

$$\Phi_g(f) = \int_X fg\, d\mu$$

je omezený lineární funkcionál na $L^p(X, \mu)$ s normou nejvýše $\|g\|_q$. Existují i jiné omezené lineární funkcionály na $L^p(X, \mu)$?

Věta 39 (omezené lineární funkcionály na L^p)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou, $1 \leq p < \infty$, Φ je omezený lineární funkcionál na $L^p(X, \mu)$. Pak existuje právě jedna $g \in L^q(X, \mu)$, kde q je sdružený exponent k p, taková, že*

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\mu, \quad f \in L^p(X, \mu). \tag{4.1}$$

Pro tato Φ a g platí $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Poznámky. • Předchozí věta říká, že $g \mapsto \Phi$ je lineární izometrie mezi $L^q(X, \mu)$ a $(L^p(X, \mu))^*$, $1 \leq p < \infty$.
• Předchozí věta neplatí pro $p = \infty$. Např. existuje omezený lineární funkcionál na $L^\infty([0, 1])$, který není tvaru (4.1) pro $g \in L^1([0, 1])$.

4.4. **Omezené lineární funkcionály na $C(K)$.**

Definice. Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, pokud $\Lambda f \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 40 (o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní metrický prostor a nechť Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje právě jedna regulární borelovská míra μ na K splňující*

$$\Lambda(f) = \int_K f\, d\mu, \quad f \in C(K).$$

Názvosloví. • Míra μ je borelovská, pokud je definována na σ-algebře borelovských podmnožin K.
• Borelovská míra μ je regulární, pokud pro každou borelovskou množinu $B \subseteq K$ platí

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U):\ U \supseteq B \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F):\ F \subseteq B \text{ uzavřená}\}.$$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkci $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ nazveme komplexní mírou, pokud platí
(a) $\mu(\emptyset) = 0$;
(b) jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Nechť μ je komplexní míra na $(X, \mathcal{A})$. Položme

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|, \quad E \in \mathcal{A},$$

kde supremum bereme přes všechny rozklady $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, kde $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní. Lze ukázat, že $|\mu|$ je nezáporná míra a $|\mu|(X) < \infty$. $|\mu|$ se nazývá totální variace μ.

Je-li μ komplexní borelovská míra, pak existuje komplexní borelovsky měřitelná funkce h splňující $|h| = 1$ a $d\mu = hd|\mu|$, tj. $\mu(E) = \int_E h\, d|\mu|$, $E \in \mathcal{A}$. Pro pěknou funkci f (například omezenou a borelovsky měřitelnou) pak definujeme integrál

$$\int_X f\, d\mu = \int_X fh\, d|\mu|.$$

Řekneme, že komplexní borelovská míra na X je regulární, pokud její totální variace $|\mu|$ je regulární.

Věta 41 (Rieszova věta o reprezentaci duálu k $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní metrický prostor a nechť Φ je omezený lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje právě jedna regulární komplexní borelovská míra μ splňující*

$$\Phi(f) = \int_K f\, d\mu, \quad f \in C(K).$$

Navíc $\|\Phi\| = |\mu|(K)$.

5. Fourierova transformace

Definice. Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ vydělenou konstantou $\sqrt{2\pi}$ budeme značit m. V této kapitole budeme prostor $L^p(\mathbb{R})$ značit L^p a uvažovat na něm normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Prostor všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, které se anulují v ∞, budeme značit C_0.

Definice. Nechť $f \in L^1$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme vztahem

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt}\, dm(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

____________ konec přednášky 23.11.2023

Poznámka. Jelikož $|f(x)e^{-ixt}| = |f(x)|$, integrál výše konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Věta 42 (základní vlastnosti Fourierovy transformace)**.** *Nechť $f \in L^1$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.*
(i) *Je-li $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t - \alpha)$.*
(ii) *Je-li $g(x) = f(x - \alpha)$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.*
(iii) *Je-li $g(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.*
(ii) *Je-li $g(x) = f(x/\lambda)$ a $\lambda > 0$, pak $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.*

Poznámka. Jsou-li $f,\, g \in L^1$, pak $\widehat{f+g}(t) = \widehat{f}(t) + \widehat{g}(t)$. Není ale pravda, že $\widehat{f}(t)\widehat{g}(t) = \widehat{fg}(t)$. Pro tyto účely je třeba nahradit součin funkcí jejich konvolucí.

Věta 43 (o konvoluci)**.** *Nechť $f \in L^1$, $g \in L^1$. Pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\, dm(y) < \infty \quad \textit{pro s.v. } x \in \mathbb{R}.$$

Pro tato x položme

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dm(y).$$

Pak $h \in L^1$ a platí $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Definice. Jsou-li $f,\, g \in L^1$, pak funkci h z Věty 43 nazýváme konvolucí funkcí f, g a značíme $h = f * g$.

Věta 44 (Fourierova transformace konvoluce a derivace)**.** *Nechť $f \in L^1$.*

(i) *Je-li $g \in L^1$ a $h = f * g$, pak $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$.*
(ii) *Pokud funkce $g(x) = -ixf(x)$ patří do L^1, pak $\widehat{g}(t) = (\widehat{f})'(t)$.*
(iii) *Pokud $f' \in L^1$, pak $\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t)$.*

Věta 45 (spojitost Fourierovy transformace)**.** *Je-li $f \in L^1$, pak $\widehat{f} \in C_0$ a platí $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Tvrzení. *Nechť $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\widehat{f} = f$.*

___________ konec přednášky 24.11.2023

Věta 46 (věta o inverzi)**.** *Pokud $f \in L^1$, $\widehat{f} \in L^1$ a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}\, dm(t)$, $x \in \mathbb{R}$, pak $g \in C_0$ a $f(x) = g(x)$ s.v.*

Důsledek (věta o jednoznačnosti)**.** *Je-li $f \in L^1$ a $\widehat{f}(t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = 0$ s.v.*

5.1. **Fourierova transformace na L^2.**

Tvrzení. *Nechť $f \in L^1 \cap L^2$. Pak $\widehat{f}$ patří do L^2 a platí $\|\widehat{f}\| = \|f\|_2$.*

Pozorování. Je-li $f \in L^2$, pak $f\chi_{(-N,N)} \in L^1$ pro $N > 0$, a tedy $\widehat{f\chi_{(-N,N)}}$ je definována. Dále platí, že posloupnost funkcí $\{\widehat{f\chi_{(-N,N)}}\}_{N=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní v L^2.

Definice. Nechť $f \in L^2$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme vztahem $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f\chi_{(-N,N)}}$, přičemž konvergenci rozumíme v L^2 smyslu.

Poznámka. Je-li $f \in L^1$, pak $\widehat{f}$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Je-li $f \in L^2$, pak $\widehat{f}$ je definována jako prvek prostoru L^2, a tedy bodově pouze skoro všude. Je-li $f \in L^1 \cap L^2$, pak její L^1-Fourierova transformace splývá s L^2-Fourierovou transformací skoro všude.

Věta 47 (Plancherel a Parseval)**.** *Nechť $f, g \in L^2$. Pak*

(i) $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ *(Plancherelova rovnost);*
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}\, dm(t)$ *(Parsevalova rovnost).*

Příklad. Pomocí Fourierovy transformace jsme řešili diferenciální rovnici $-u'' + u = f$, kde $f \in L^1$ a $u \in L^1$. Pak $\widehat{u}(t) = (t^2+1)^{-1}\widehat{f}(t)$, a tedy $u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$.

Poznámka. Rovnice $-u'' + u = f$ má nekonečně mnoho řešení, ale řešení nalezené výše je jediné, které patří do L^1.

6. Úvod do komplexní analýzy

6.1. **Exponenciální funkce.** Pro $z \in \mathbb{C}$ uvažujme funkci $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Pak předchozí řada konverguje absolutně a platí $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Dále platí Eulerův vzorec

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

___________ konec přednášky 30.11.2023

Funkce exp má rovněž následující vlastnosti:

- $e^z \neq 0$ pro $z \in \mathbb{C}$;
- je-li $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, pak $w = e^z$ pro nějaké $z \in \mathbb{C}$;
- exp je periodická s periodou $2\pi i$.

Funkce sin a cos definujeme předpisem

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkce exp, sin, cos jsou spojité na $\mathbb{C}$.

6.2. **Derivace komplexních funkcí. Značení.** Nechť $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$, pak

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < r\},$$
$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| \leq r\},$$
$$D'(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z-a| < r\}.$$

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $E \subseteq X$. Řekneme, že E není souvislá, pokud existují neprázdné množiny A, $B \subseteq X$ takové, že $E = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Řekneme, že E je souvislá, pokud rozklad E jako výše neexistuje (E není nesouvislá).

Pozorování. Jednobodová množina je souvislá. Je-li $x \in E$, označme Φ_x soubor všech souvislých podmnožin E obsahujících x. Pak sjednocení všech množin z Φ_x je neprázdná souvislá množina. Navíc jde o maximální souvislou podmnožinu E. Tyto množiny nazýváme komponenty E. Platí, že každé dvě komponenty jsou disjunktní a E je sjednocením svých komponent.

Definice. Nechť $E \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že E je oblast, pokud je E neprázdná, otevřená a souvislá.

Značení. V této kapitole bude Ω značit otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$.

Definice. Nechť f je komplexní funkce na Ω. Nechť $z_0 \in \Omega$. Pak derivaci funkce f v bodě z_0 definujeme vztahem

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{6.1}$$

pokud tato limita existuje. Řekneme, že f je holomorfní (nebo analytická) v Ω, pokud $f'(z_0)$ existuje pro všechna $z_0 \in \Omega$. Množinu všech holomorfních funkcí na množině Ω značíme $\mathcal{H}(\Omega)$.

Poznámka. (i) Nechť $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pak $f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ a věta o derivaci součtu a součinu platí ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(ii) Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak složená funkce $h = g \circ f$ splňuje $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$, $z_0 \in \Omega$.

Příklady. • $f(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$, pak $f'(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$, a tedy $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

- Je-li $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = z^n$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ a $f'(z) = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.
- Funkce exp, sin, cos jsou holomorfní na $\mathbb{C}$ a platí $\exp'(z) = \exp z$, $\sin'(z) = \cos z$, $\cos'(z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C} : \ z \neq 0\}$.

Věta 48 (Cauchyovy–Riemannovy podmínky)**.** *Nechť f je komplexní funkce na Ω. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, tj.*

$$f(a+ib) = \tilde{f}_1(a,b) + i\tilde{f}_2(a,b), \quad a+ib \in \Omega.$$

Nechť $z = a+ib \in \Omega$.

(i) *Pokud $f'(z)$ existuje, pak existují obě parciální derivace funkcí $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ v bodě (a,b) a platí Cauchyovy–Riemannovy podmínky*

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a,b) \quad a \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a,b). \tag{6.2}$$

Navíc $f'(z) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a,b)$.

(ii) *Pokud mají obě funkce $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ spojité parciální derivace a platí* (6.2)*, pak $f'(z)$ existuje.*

Příklad. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6.3. **Mocninné řady.**

Definice. Mocninnou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, kde $c_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $z \in \mathbb{C}$.

Fakt. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je mocninná řada. Pak existuje číslo $R \in [0,\infty]$ (poloměr konvergence mocninné řady) takové, že řada konverguje absolutně a stejnoměrně na $\overline{D}(a,r)$, $r < R$, a diverguje, pokud $z \notin \overline{D}(a,R)$. Číslo R je dáno vztahem $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, přičemž výraz $\frac{1}{0}$ chápeme jako ∞ a výraz $\frac{1}{\infty}$ chápeme jako 0.
____________ konec přednášky 1.12.2023

Řekneme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω, pokud pro každý kruh $D(a,r) \subseteq \Omega$ existuje mocninná řada, která konverguje k $f(z)$ pro všechna $z \in D(a,r)$.

Věta 49 (derivace mocninné řady)**.** *Předpokládejme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω. Pak $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a funkci f' lze rovněž vyjádřit mocninnou řadou v Ω. Navíc, pokud*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad z \in D(a,r), \tag{6.3}$$

pak

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}, \quad z \in D(a,r).$$

Důsledek. *Předpokládejme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω. Pak f má v Ω derivace všech řádů a platí-li vztah* (6.3)*, pak*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}, \quad z \in D(a,r).$$

Speciálně tedy $c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$, $k = 0,1,2,\dots$

6.4. **Integrace podél cesty.**

Definice. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Křivkou v X rozumíme spojité zobrazení γ uzavřeného intervalu $[\alpha,\beta]$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ do X. Označme $\gamma^* = \gamma([\alpha,\beta]) = \{\gamma(t) : \alpha \le t \le \beta\}$.

Řekneme, že γ je uzavřená křivka, pokud její počáteční bod $\gamma(\alpha)$ splývá s koncovým bodem $\gamma(\beta)$.

Cesta je po částech spojitě diferencovatelná křivka v $\mathbb{C}$ (tj. existuje konečná posloupnost $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$ bodů z $[\alpha, \beta]$ taková, že γ má spojitou derivaci na (s_{j-1}, s_j), $j = 1, \ldots, n$, a γ' má v krajních bodech tohoto intervalu vlastní jednostranné limity).

Uzavřená cesta je uzavřená křivka, která je zároveň cestou.

Nechť γ je cesta a nechť f je spojitá funkce na γ^*. Definujeme integrál funkce f podél cesty γ jako

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Pozorování. Nechť φ je prostá a spojitě diferencovatelná funkce na $[\alpha_1, \beta_1]$, $\varphi([\alpha_1, \beta_1]) = [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha_1) = \alpha$, $\varphi(\beta_1) = \beta$. Položme $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Pak $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$ (integrál nezávisí na parametrizaci).

Definice. Nechť $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ je cesta. Pak opačnou cestou k γ rozumíme cestu $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$, $0 \le t \le 1$.

Pozorování. Je-li γ_1 opačná cesta k γ a f je spojitá na $\gamma_1^* = \gamma^*$, pak $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$.

Pozorování. Je-li γ cesta a f je spojitá na γ^*, pak $|\int_\gamma f(z)\,dz| \le \|f\|_\infty \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$, kde $\|f\|_\infty$ značí maximum f na γ^*. Výraz $\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$ nazýváme délkou cesty γ.

Příklady. (a) Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Pak cestu $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, nazýváme kladně orientovaná kružnice se středem a a poloměrem r. Platí $\int_\gamma f(z)\,dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{it}\,dt$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Pak cestu $\gamma(t) = a + (b-a)t$, $0 \le t \le 1$, nazýváme orientovaný interval $[a,b]$. Platí $\int_{[a,b]} f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)t)\,dt$. Opačná cesta k $[a,b]$ je $[b,a]$.

(c) Nechť $\{a, b, c\}$ je uspořádaná trojice komplexních čísel. Pak $\triangle = \triangle(a,b,c)$ je trojúhelník s vrcholy a, b, c. Definujeme $\int_{\partial\triangle} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$. Pokud $\triangle' = \triangle'(a,c,b)$, pak $\int_{\partial\triangle'} f = -\int_{\partial\triangle} f$.

Věta 50 (o indexu bodu vzhledem ke křivce)**.** *Nechť γ je uzavřená cesta a nechť Ω je doplněk γ^*. Definujeme*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w - z}, \quad z \in \Omega.$$

Pak funkce $\operatorname{Ind}_\gamma$ nabývá na Ω celočíselných hodnot, je konstantní na každé komponentě Ω a je rovna 0 na neomezené komponentě Ω.

Funkci $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ nazýváme index bodu z vzhledem ke křivce γ.

____________ konec přednášky 7.12.2023

Příklad. Nechť γ je kladně orientovaná kružnice se středem a a poloměrem r, pak

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & |z - a| < r, \\ 0, & |z - a| > r. \end{cases}$$

6.5. **Lokální Cauchyova věta.**

Věta 51 (integrál derivace podél uzavřené cesty)**.** *Nechť $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a F' je spojitá v Ω. Pak $\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$ pro každou uzavřenou cestu γ v Ω.*

Důsledek. • *Nechť γ je uzavřená cesta, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak $\int_\gamma z^n\,dz = 0$.*

• *Necť γ je uzavřená cesta taková, že $0 \notin \gamma^*$, $n = -2, -3, -4, \ldots$. Pak $\int_\gamma z^n\,dz = 0$.*

Věta 52 (Cauchyova věta pro trojúhelník)**.** *Nechť $\triangle$ je trojúhelník v Ω, $p \in \Omega$, f je spojitá na Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Pak $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$.*

Věta 53 (Cauchyova věta pro konvexní množinu)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je konvexní otevřená, $p \in \Omega$, f je spojitá na Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{p\})$. Pak $f = F'$ pro nějakou $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Speciálně tedy $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pro každou uzavřenou cestu γ v Ω.*

Příklad. Nechť $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a nechť γ je kladně orientovaná kružnice o středu -1 a poloměru $\frac{1}{2}$. Pak $\int_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i$.

Věta 54 (Cauchyův vzorec pro konvexní množinu)**.** *Nechť Ω je konvexní otevřená podmnožina $\mathbb{C}$, γ je uzavřená cesta v Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Je-li $z \in \Omega$ a $z \notin \gamma^*$, pak*

$$f(z) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Příklad. Nechť $\gamma(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pak $\int_\gamma \frac{1}{\xi+1}\, d\xi = 2\pi i$.

____________ konec přednášky 8.12.2023

Věta 55 (vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pak funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω.*

Důsledek. *Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Věta 56 (Morerova)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, f je spojitá na Ω a $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ pro každý uzavřený trojúhelník $\triangle \subseteq \Omega$. Pak $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

6.6. **Vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou - důsledky.**

Definice. Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Řekneme, že z_0 je hromadným bodem množiny M, jestliže každé prstencové okolí $D'(z_0, r)$ $(r > 0)$ bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M.

Věta 57 (o kořenech holomorfní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Označme $Z(f) = \{a \in \Omega : \ f(a) = 0\}$. Pak buď*
(i) *$Z(f) = \Omega$,*
nebo
(ii) *$Z(f)$ má hromadný bod v Ω. V tomto případě lze pro každé $a \in Z(f)$ nalézt jednoznačně určené přirozené číslo m takové, že $f(z) = (z-a)^m g(z)$, $z \in \Omega$, kde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(a) \neq 0$. Množina $Z(f)$ je navíc nejvýše spočetná.*

Definice. Je-li a, m, f jako v předchozí větě, pak řekneme, že a je m-násobný kořen funkce f.

Důsledek. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, f, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pokud $f(z) = g(z)$ pro všechna z z nějaké množiny M, která má hromadný bod v Ω, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \Omega$.*

Poznámka. Předchozí tvrzení neplatí, pokud Ω není souvislá. Je-li například $\Omega = D(0,1) \cup D(3,1)$, pak funkce $f(z) = 0$, $z \in \Omega$, a $g(z) = 0$, $z \in D(0,1)$, a $g(z) = 1$, $z \in D(3,1)$, jsou holomorfní na Ω, rovnají se na $D(0,1)$, ale nikoliv na Ω.

Definice. Je-li $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, řekneme, že f má v bodě a izolovanou singularitu. Řekneme, že tato singularita je odstranitelná, pokud funkci f lze dodefinovat v bodě a tak, že výsledná funkce je holomorfní v Ω.

Příklad. $f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$ má v bodě 1 odstranitelnou singularitu.

Věta 58 (o odstranitelné singularitě)**.** *Nechť $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ a f je omezená na $D'(a, r)$ pro nějaké $r > 0$. Pak f má v bodě a odstranitelnou singularitu.*

Věta 59 (klasifikace izolovaných singularit)**.** *Nechť $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Pak nastává právě jedna z následujících možností.*
(i) *f má v bodě a odstranitelnou singularitu.*

(ii) $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$. *Pak existuje právě jedno $m \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$. Navíc existují komplexní čísla $c_1, \dots, c_m$, $c_m \neq 0$, taková, že funkce $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ má v bodě a odstranitelnou singularitu.*

(iii) *Pro každé $r > 0$ takové, že $D(a,r) \subseteq \Omega$, platí, že $f(D'(a,r))$ je hustá v $\mathbb{C}$.*

__________ konec přednášky 14.12.2023

Definice. Nastává-li případ (ii) z předchozí věty, řekneme, že f má v bodě a pól násobnosti m. Funkci $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ nazýváme hlavní částí funkce f v bodě a. Nastává-li případ (iii), řekneme, že f má v bodě a podstatnou singularitu.

Příklady. (a) $f(z) = \frac{1}{z+2}$ má v bodě -2 pól násobnosti 1.

(b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ má v bodě 0 podstatnou singularitu.

Tvrzení. *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Pokud $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z \in D(a,R)$, pak pro $0 < r < R$ platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

Definice. Řekneme, že f je celá funkce, pokud $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Věta 60 (Liouvilleova)**.** *Každá omezená celá funkce je konstantní.*

Věta 61 (princip maxima modulu)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}(a,r) \subseteq \Omega$. Pak*

$$|f(a)| \leq \max_{\theta\in\mathbb{R}} |f(a+re^{i\theta})|.$$

Rovnost v předchozí nerovnosti nastává právě tehdy, když f je konstantní na Ω.

Důsledek. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}(a,r) \subseteq \Omega$, $f \neq 0$ na $D(a,r)$. Pak*

$$|f(a)| \geq \min_{\theta\in\mathbb{R}} |f(a+re^{i\theta})|.$$

Věta 62 (základní věta algebry)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Pak P má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů.*

Věta 63 (Cauchyovy odhady)**.** *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$. Pokud $|f(z)| \leq M$ pro všechna $z \in D(a,R)$, pak*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{6.4}$$

Příklad. Předchozí odhad je nejlepší možný. Zvolme $f(z) = z^n \in \mathcal{H}(D(0,1))$, pak $|z|^n \leq 1 = M$ pro $z \in D(0,1)$. Dále $f^{(n)}(0) = n!$, tedy nastává rovnost v nerovnosti (6.4).

__________ konec přednášky 15.12.2023

Definice. Nechť $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na Ω. Řekneme, že f_j konverguje k f stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω (konverguje lokálně stejnoměrně), pokud pro každou $K \subseteq \Omega$ kompaktní platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall z \in K \; \forall j \in \mathbb{N}, \; j \geq N: \; |f_j(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Příklad. $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k 0 na kompaktních podmnožinách $D(0,1)$, ale konvergence není stejnoměrná na $D(0,1)$.

Věta 64 (zachování holomorfnosti při lokálně stejnoměrné konvergenci)**.** *Nechť $f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, a předpokládejme, že f_j konverguje k funkci f stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω. Pak $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f_j' \to f'$ stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω.*

Důsledek. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Za předpokladů předchozí věty platí, že $f_j^{(n)} \to f^{(n)}$ stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω.*

6.7. **Věta o otevřeném zobrazení.** Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast. Pak $f(\Omega)$ nemusí být otevřená množina (příklad: f je konstantní funkce). Ukazuje se ale, že konstantní funkce je v tomto ohledu jediná výjimka.

Věta 65 (o lokální existenci inverzní funkce)**.** *Nechť $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $\varphi'(z_0) \neq 0$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $D(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ a navíc*

(i) *φ je prostá na $D(z_0, r)$,*
(ii) *$W = \varphi(D(z_0, r))$ je otevřená množina,*
(iii) *inverzní funkce φ^{-1} je holomorfní na W.*

Příklad. Nechť $m \in \mathbb{N}$, $w \neq 0$. Pak funkce $f(z) = z^m$ nabývá hodnoty w v právě m různých bodech. To souvisí s tím, že z^m má v 0 kořen násobnosti m.

Věta 66. *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f \in \mathcal{H}(D(a, R))$, $b = f(a)$. Předpokládejme, že f není konstantní a funkce $f - b$ má v bodě a kořen násobnosti m. Pak existují $r \in (0, R)$, $\rho > 0$ taková, že pro každé $w \in D'(b, \rho)$ funkce f nabývá hodnoty w v právě m různých bodech z $D(a, r)$.*

Věta 67 (o otevřeném zobrazení)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a f není konstantní na Ω. Pak f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$ pro každou $G \subseteq \Omega$ otevřenou.*

Věta 68 (o prosté holomorfní funkci)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a f je prostá na Ω. Pak $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \Omega$ a inverzní funkce k f je holomorfní.*

Příklad. Opak Věty 68 neplatí. Je-li $f(z) = e^z$, pak $f'(z) = e^z \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, ale f není prostá na $\mathbb{C}$.

6.8. **Globální Cauchyova věta.**

Definice. Nechť $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ jsou cesty. Řetězcem rozumíme formální součet $\Gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$. Řetězec Γ se nazývá cykl, pokud jsou cesty $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ uzavřené. Definujeme $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$. Je-li f spojitá na Γ^*, definujeme integrál funkce f podél Γ jako

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\, dz.$$

Je-li Γ cykl, $\alpha \notin \Gamma^*$, definujeme index bodu α vzhledem k cyklu Γ jako

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - \alpha}.$$

Pozorování. $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}_{\gamma_i}(\alpha)$
____________ konec přednášky 21.12.2023

Poznámka. Pokud každou cestu γ_i nahradíme opačnou cestou, pak výsledný řetězec je $-\Gamma$. Platí $\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz$, $f \in C(\Gamma^*)$.

Věta 69 (globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Je-li Γ cykl v Ω splňující $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ pro $\alpha \notin \Omega$, pak*

$$f(z) \cdot \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \quad z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

a

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Poznámka. Nechť Ω je konvexní, $\alpha \notin \Omega$, pak $\frac{1}{z-\alpha}$ je holomorfní na Ω a z Cauchyovy věty pro konvexní množinu plyne $\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = 0$ pro uzavřenou cestu γ. Tedy $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$. Věta 69 tedy zobecňuje Věty 53 a 54.

Příklad. Nechť D_1, D_2, D_3 jsou disjunktní uzavřené kruhy v $\mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$. Nechť γ_1, γ_2, γ_3 jsou kladně orientované kružnice v Ω takové, že γ_i obíhá D_i, ale nikoliv D_j, $j \neq i$. Nechť γ_4 je záporně orientovaná kružnice obíhající $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Pak předpoklady Věty 69 jsou splněny.

Důsledek. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Γ_0, Γ_1 jsou cykly takové, že $\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$ pro $\alpha \notin \Omega$. Pak $\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz$.*

Věta 70 (Maříkova)**.** *Nechť $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je uzavřená cesta. Nechť $\alpha < u < v < \beta$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| = r > 0$. Nechť dále platí*
(i) $\gamma(u) = a - b$, $\gamma(v) = a + b$;
(ii) $|\gamma(s) - a| < r$ *právě tehdy, když* $u < s < v$;
(iii) $|\gamma(s) - a| = r$ *právě tehdy, když* $s = u$ *nebo* $s = v$.
Předpokládejme, že $D(a, r) \setminus \gamma^*$ je sjednocením dvou oblastí D_+ a D_- takových, že $a + bi \in \overline{D_+}$, $a - bi \in \overline{D_-}$. Pak $\operatorname{Ind}_\gamma(x) = 1 + \operatorname{Ind}_\gamma(w)$, je-li $x \in D_+$, $w \in D_-$.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a γ_0, $\gamma_1 : [0, 1] \to X$ jsou uzavřené křivky. Řekneme, že γ_0, γ_1 jsou X-homotopické, pokud existuje spojité zobrazení H čtverce $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ do X takové, že

$$H(s, 0) = \gamma_0(s), \quad H(s, 1) = \gamma_1(s), \quad H(0, t) = H(1, t), \quad s \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

Položme $\gamma_t(s) = H(s, t)$. Pak γ_t, $t \in [0, 1]$, je soubor křivek v X, který "spojuje" γ_0 a γ_1.

Řekneme, že γ_0 je 0-homotopická, pokud je X-homotopická konstantnímu zobrazení γ_1 (γ_1 je konstantní, pokud γ_1^* je jednobodová množina). Je-li X souvislý a každá uzavřená křivka v X je 0-homotopická, pak řekneme, že X je jednoduše souvislý.

Intuice. X je jednoduše souvislý, pokud "nemá díru".

Příklad. Každá konvexní oblast v Ω je jednoduše souvislá. Nechť γ_0 je uzavřená křivka v Ω, $z_1 \in \Omega$. Definujeme $H(s, t) = (1 - t)\gamma_0(s) + tz_1$, $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Tedy γ_0 je 0-homotopická.

Věta 71 (zachování indexu při homotopii)**.** *Nechť Ω je oblast, Γ_0, Γ_1 jsou Ω-homotopické uzavřené cesty v Ω. Pak $\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha)$ pro $\alpha \notin \Omega$.*

Příklad. Nechť $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, \frac{1}{2})}$, Γ_0 je kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 1, Γ_1 je záporně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 2. Pak Γ_0, Γ_1 nejsou Ω-homotopické.

____________ konec přednášky 4.1.2024

Poznámka. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá. Pak každá uzavřená cesta Γ v Ω je 0-homotopická v Ω, a tedy $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ pro $\alpha \notin \Omega$. Tedy předpoklad globální Cauchyovy věty je splněn pro každou uzavřenou cestu Γ.

6.9. **Rezidua.**

Definice. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená. Řekneme, že f je meromorfní na Ω, pokud existuje množina $A \subseteq \Omega$ splňující
(i) A nemá hromadný bod v Ω;
(ii) $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$;
(iii) f má pól v každém bodě množiny A.

Poznámka. V předchozí definici je povoleno, aby $A = \emptyset$. Tedy každá $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ je meromorfní na Ω.

Definice. Nechť f, A jsou jako v předchozí definici, $a \in A$. Nechť $Q(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ značí hlavní část funkce f v bodě a (tj. $f - Q$ má v bodě a odstranitelnou singularitu). Potom číslo c_1 nazýváme reziduem funkce f v bodě a a značíme $c_1 = \operatorname{Res}(f, a)$.

Věta 72 (reziduová věta)**.** *Nechť f je meromorfní funkce na Ω a nechť A značí množinu bodů, ve kterých má funkce f póly. Je-li Γ cykl v $\Omega \setminus A$ splňující*

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \textit{pro } \alpha \notin \Omega, \tag{6.5}$$

pak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{\alpha\in A} \operatorname{Res}(f,\alpha)\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha).$$

Poznámka. Je-li Ω jednoduše souvislá a Γ je uzavřená cesta v Ω, pak je předpoklad (6.5) reziduové věty splněn.

Věta 73 (některé metody výpočtu reziduí)**.** *Nechť f, g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.*

(i) *Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti m, pak*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}(f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}.$$

(ii) *Jsou-li f, g holomorfní v bodě a, g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$), pak*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g},a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iii) *Je-li f holomorfní v a, g má v bodě a pól násobnosti 1, pak*

$$\operatorname{Res}(fg,a) = f(a)\operatorname{Res}(g,a).$$

(iv) *Je-li f holomorfní v a, g má v bodě a pól násobnosti m, pak*

$$\operatorname{Res}(fg,a) = \sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}c_k,$$

kde $c_1,\ldots,c_m$ jsou koeficienty hlavní části funkce g v bodě a.

Příklady. (i) $f(z) = z^2 + z + 1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$, pak $\operatorname{Res}(f,0) = 3$;

(ii) $f(z) = \frac{1+2z+3z^2}{3z+4z^2}$, pak $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{3}$;

(iii) $f(z) = (z+2)\cdot\frac{1+2z+3z^2}{3z+4z^2}$, pak $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{2}{3}$.

Příklad. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Příklad. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$

__________ konec přednášky 5.1.2024

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definujeme argument čísla z jako

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : \ z = |z|(\cos t + i\sin t)\}.$$

Hlavní hodnota argumentu čísla z je jediné reálné číslo $t \in \operatorname{Arg}(z)$, pro které platí $t \in (-\pi,\pi]$.

Tvrzení (Jordanovo lemma)**.** *Nechť $0 \le \alpha < \beta \le \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \ \arg(z) \in [\alpha,\beta], \ \ |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \arg z\in[\alpha,\beta]}} f(z) = 0. \tag{6.6}$$

Pro $r > R$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha,\beta]$. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\varphi_r} f(z)e^{ixz}\,dz = 0.$$

Poznámka. Předpoklad (6.6) znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| > K,\ \arg z \in [\alpha, \beta]:\ |f(z)| < \varepsilon.$$

Příklad. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2e}$

6.10. **Laurentovy řady a funkce holomorfní v mezikruží.**

Definice. Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{6.7}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Regulární částí řady (6.7) rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Hlavní částí řady (6.7) rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n. \tag{6.8}$$

Říkáme, že hlavní část řady (6.7) konverguje (v bodě z, absolutně, stejnoměrně na množině M, atd.), pokud příslušnou vlastnost má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$. Součet této řady nazveme součtem hlavní části řady (6.7) a značíme jej rovněž (6.8).

Říkáme, že řada (6.7) konverguje (v bodě z, absolutně, stejnoměrně na množině M, atd.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. Součtem řady (6.7) rozumíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Definice. Nechť $0 \le r < R \le \infty$, $a \in \mathbb{C}$. Označme $P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} :\ r < |z-a| < R\}$. Tuto množinu nazveme mezikružím o středu a, vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R.

Poznámka. • $P(a, 0, R) = D'(a, R)$, $R \in (0, \infty)$;
• $P(a, r, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r)$, $r \in (0, \infty)$;
• $P(a, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Tvrzení. *Mějme Laurentovu řadu (6.7). Pak existují $r, R \in [0, \infty]$, pro která platí*
• *regulární část řady (6.7) konverguje absolutně na $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| < R\}$ a diverguje pro $|z-a| > R$;*
• *hlavní část řady (6.7) konverguje absolutně na $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z-a| < r$.*

Je-li $r < R$, pak řada (6.7) konverguje absolutně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží nazýváme mezikružím konvergence řady (6.7).

Věta 74 (rozvoj holomorfní funkce v mezikruží do Laurentovy řady)**.** *Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ o středu a, která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ.

Věta 75 (charakterizace izolovaných singularit pomocí Laurentovy řady)**.** *Nechť f je holomorfní funkce v $D'(a,R) = P(a,0,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $D'(a,R)$. Pak platí*

(i) *f má v bodě a odstranitelnou singularitu právě tehdy, když $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;*

(ii) *f má v bodě a pól násobnosti m právě tehdy, když $a_{-m} \neq 0$, $a_n = 0$ pro všechna $n < -m$;*

(iii) *f má v bodě a podstatnou singularitu právě tehdy, když $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.*

____________ konec přednášky 11.1.2024