KALKULUS 3, ZIMNÍ SEMESTR 2023–2024
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

Popis předmětu

Jde o čtvrtou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro studenty oboru Finanční matematika. Věnuje se základům teorie Banachových a Hilbertových prostorů, prostorům L^p, Fourierově transformaci a úvodu do komplexní analýzy. Kurs se skládá z přednášek a cvičení, je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Vzhledem ke spíše teoretickému charakteru předmětu budou na cvičení probírány jak početní příklady, tak i příklady teoretické, sloužící k lepšímu pochopení látky probírané na přednášce.

Zápočet

Postačující podmínkou pro získání zápočtu bude alespoň 50% účast na cvičeních a dvě úspěšně napsané zápočtové písemky. Studenti, kteří se cvičení pravidelně účastní, ale některou ze zápočtových písemek nenapíší, dostanou možnost si písemku opravit dodatečným vypracováním příkladů zadaných cvičící.

Zkouška

Získání zápočtu bude nutnou podmínkou pro přihlášení se ke zkoušce. Zkouška bude písemná, v některých (spíše výjimečných) případech může po písemné části následovat část ústní, která se bude typicky konat následující pracovní den po konání písemné části. V zimním zkouškovém období jsou vypsány čtyři termíny zkoušky, podrobnější informace o čase a místě konání těchto zkoušek lze nalézt v SISu. V případě zájmu studentů bude po skončení zkouškového období vypsán pátý (a poslední) termín zkoušky.

Zkouška se bude skládat ze dvou částí: početní a teoretické. Obě části zkoušky budou zadány zároveň a čas k jejich vypracování bude 150 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby.

Početní část zkoušky bude obsahovat tři příklady z látky probírané v průběhu semestru. Konkrétně půjde o příklady z následujících partií:

- Banachovy prostory nebo Hilbertovy prostory (10 bodů)
- Fourierovy řady nebo Fourierova transformace (10 bodů)
- Komplexní analýza (10 bodů)

V teoretické části zkoušky bude mít student za úkol zformulovat jednu definici a čtyři věty z přednášky. Dále bude zadána též jedna teoretická otázka. Teoretická část zkoušky se tedy bude skládat celkem z šesti otázek, za každou z nich bude možné získat nejvýše pět bodů. Znalost definic a vět z kapitoly 1 (metrické prostory) se předpokládá a je nutná pro porozumění další látce. Otázky 1 - 5 z teoretické části zkoušky budou nicméně zaměřeny na formulace definic a vět z kapitol 2 - 6. Poslední teoretická otázka se může týkat jakékoliv kapitoly, včetně té o metrických prostorech.

Celkové hodnocení zkoušky
Student úspěšně složí zkoušku, pokud získá alespoň 16 bodů jak z početní, tak i z teoretické části zkoušky a jeho celkový součet za obě části zkoušky bude alespoň 35 bodů. K celkovému hodnocení známkou *výborně* je navíc třeba získat dohromady za obě části zkoušky alespoň 52 bodů, a k celkovému hodnocení známkou *velmi dobře* je třeba získat dohromady alespoň 43 bodů. Pokud student složí zkoušku, ale získá dohromady méně než 43 bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou *dobře*. V případě, že bude student pozván k ústní zkoušce, může být jeho bodové hodnocení (a tedy i výsledná známka) na základě ústní zkoušky ještě mírně poupraveno.

Vzor početní části zkoušky

Příklad 1. (10 bodů) Dokažte, že

$$\varphi(f) = f(3) - \int_0^1 f(2t)\,dt$$

je omezený lineární funkcionál na prostoru $C([0,3])$ a spočtěte jeho normu $\|\varphi\|$.

Příklad 2. (10 bodů) (i) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}|x|, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]. \end{cases}$$

(ii) S pomocí výsledku části (i) spočtěte Fourierovu transformaci funkce $g(x) = f(4x+6)$.

Příklad 3. (10 bodů) Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}.$$

Vzor teoretické části zkoušky

Otázka 1. (5 bodů) Napište definici Fourierovy transformace funkce $f \in L^2$.

Otázka 2. (5 bodů) Zformulujte větu o vztahu konvergence v L^p a bodové konvergence.

Otázka 3. (5 bodů) Zformulujte větu o maximální ortonormální množině v Hilbertově prostoru.

Otázka 4. (5 bodů) Zformulujte Hahnovu-Banachovu větu.

Otázka 5. (5 bodů) Zformulujte větu o Cauchyových-Riemannových podmínkách.

Otázka 6. (5 bodů) Nalezněte funkci definovanou na intervalu $(0, 1)$, která je na tomto intervalu esenciálně omezená, ale nikoliv omezená.

Seznam definic a vět, jejichž znalost bude požadována při teoretické části zkoušky (otázky 1-5).

Definice:

sdružené exponenty
prostory $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$
esenciální supremum, esenciálně omezená funkce
jednoduchá funkce
nosič funkce
prostory $C_c(\mathbb{R}^n)$ a $C_0(\mathbb{R}^n)$
prostor se skalárním součinem
Hilbertův prostor
konvexní množina
kolmost vektorů, $x^\perp$, $M^\perp$
ortonormální množina
Fourierovy koeficienty v Hilbertově prostoru
izometrie
ortonormální báze
izomorfismus Hilbertových prostorů
částečně uspořádaná množina
Fourierův koeficient a Fourierova řada funkce $f \in L^1(T)$
normovaný lineární prostor
Banachův prostor
norma lineárního zobrazení, omezené lineární zobrazení a funkcionál
množina typu G_δ
komplexní míra, totální variace míry
Fourierova transformace funkce z L^1
Fourierova transformace funkce z L^2
konvoluce
souvislá množina
oblast

derivace komplexní funkce komplexní proměnné
holomorfní funkce
celá funkce
mocninná řada v $\mathbb{C}$
cesta, uzavřená cesta
opačná cesta, délka cesty
integrál funkce podél cesty
index bodu vzhledem ke křivce
hromadný bod množiny
m-násobný kořen funkce
izolovaná singularita
odstranitelná singularita, pól násobnosti m, podstatná singularita
řetězec, cykl
integrál funkce podél řetězce, index bodu vzhledem k cyklu
homotopie křivek, jednoduše souvislý metrický prostor
meromorfní funkce, reziduum
Laurentova řada, její regulární a hlavní část, konvergence a součet

Věty:
Jensenova nerovnost (Věta 12)
Hölderova a Minkowského nerovnost (Věta 13)
Hölderova nerovnost pro L^p prostory (Věta 14)
trojúhelníková nerovnost pro L^p prostory (Věta 15)
úplnost L^p prostoru (Věta 16)
vztah konvergence v L^p a bodové konvergence s.v. (Věta 17)
aproximace jednoduchými funkcemi (Věta 18)
hustota jednoduchých funkcí v L^p prostoru (Věta 19)
Luzinova věta (Věta 20)
hustota spojitých funkcí v L^p prostoru (Věta 21)
uzávěr spojitých funkcí s kompaktním nosičem v supremové metrice (Věta 22)
spojitost skalárního součinu a normy (Věta 23)
o prvku s nejmenší normou (Věta 24)
o ortogonální projekci (Věta 25)
spojité lineární funkcionály na Hilbertově prostoru (Věta 26)
o konečných ortonormálních množinách (Věta 27)
o ortonormální množině (Věta 28)
o maximální ortonormální množině (Věta 29)
existence maximální ortonormální množiny (Věta 30)
charakterizace lineárních zobrazení (Věta 31)
Baireova věta (Věta 32)

Banachova-Steinhausova věta / princip stejnoměrné omezenosti (Věta 33)
věta o otevřeném zobrazení (Věta 34)
spojitost inverzního zobrazení (Věta 35)
Hahnova-Banachova věta (Věta 36)
oddělování bodu a podprostoru (Věta 37)
omezené lineární funkcionály na L^p (Věta 39)
o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$ (Věta 40)
Rieszova věta o reprezentaci duálu k $C(K)$ (Věta 41)
základní vlastnosti Fourierovy transformace (Věta 42)
o konvoluci (Věta 43)
Fourierova transformace konvoluce a derivace (Věta 44)
spojitost Fourierovy transformace (Věta 45)
věta o inverzi (Věta 46)
Plancherelova a Parsevalova rovnost (Věta 47)
Cauchyovy-Riemannovy podmínky (Věta 48)
derivace mocninné řady (Věta 49)
o indexu bodu vzhledem ke křivce (Věta 50)
integrál derivace podél uzavřené cesty (Věta 51)
Cauchyova věta pro trojúhelník (Věta 52)
Cauchyova věta pro konvexní množinu (Věta 53)
Cauchyův vzorec pro konvexní množinu (Věta 54)
vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou (Věta 55)
Morerova věta (Věta 56)
o kořenech holomorfní funkce (Věta 57)
o odstranitelné singularitě (Věta 58)
klasifikace izolovaných singularit (Věta 59)
Liouvilleova věta (Věta 60)
princip maxima modulu (Věta 61)
základní věta algebry (Věta 62)
Cauchyovy odhady (Věta 63)
zachování holomorfnosti při lokálně stejnoměrné konvergenci (Věta 64)
o lokální existenci inverzní funkce (Věta 65)
věta o otevřeném zobrazení pro holomorfní funkce (Věta 67)
o prosté holomorfní funkci (Věta 68)
globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec (Věta 69)
Maříkova věta (Věta 70)
zachování indexu při homotopii (Věta 71)
reziduová věta (Věta 72)
některé metody výpočtu reziduí (Věta 73)

rozvoj holomorfní funkce v mezikruží do Laurentovy řady (Věta 74)
charakterizace izolovaných singularit pomocí Laurentovy řady (Věta 75)