

**Zkoušková písemka z Kalkulu 3**  
**13. února 2024**

**Početní část**

**Příklad 1.** (10 bodů) Dokažte, že

$$\varphi(f) = \int_0^2 t^2 f(t) dt$$

je omezený lineární funkcionál na prostoru  $C([0, 2])$  a spočtěte  $\|\varphi\|$ .

**Příklad 2.** (i) (7 bodů) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = x^2 \chi_{(-2,2)}(x).$$

Výsledek zapište ve tvaru, z něhož bude patrné, že  $\widehat{f}$  nabývá pouze reálných hodnot.

(ii) (3 body) S pomocí výsledku části (i) spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$g(x) = (x + 2)^2 \chi_{(-4,0)}(x).$$

**Příklad 3.** (10 bodů) S pomocí reziduové věty spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

**Teoretická část**

**Otázka 1.** (5 bodů) Napište definici pojmu cesta a uzavřená cesta.

**Otázka 2.** (5 bodů) Zformulujte Hölderovu nerovnost pro  $L^p$  prostory.

**Otázka 3.** (5 bodů) Zformulujte větu o maximální ortonormální množině.

**Otázka 4.** (5 bodů) Zformulujte Hahnovu-Banachovu větu.

**Otázka 5.** (5 bodů) Zformulujte větu o inverzi pro Fourierovu transformaci.

**Otázka 6.** (5 bodů) Nalezněte komplexní funkci komplexní proměnné, která má v 0 podstatnou singularitu.

*K úspěšnému složení zkoušky je třeba získat alespoň 16 bodů jak z početní, tak i z teoretické části a alespoň 35 bodů za obě části dohromady.*

*K celkovému hodnocení známkou výborně je navíc třeba získat dohromady za obě části zkoušky alespoň 52 bodů, a k celkovému hodnocení známkou velmi dobře je třeba získat dohromady alespoň 43 bodů.*