Zkoušková písemka z Kalkulu 3
6. února 2024

Početní část

Příklad 1. (10 bodů) Uvažujme Hilbertův prostor $H = \ell^2$ a jeho podprostor

$$Y = LO\left\{(2^{-n})_{n=1}^{\infty}, \left((3/2)^{-n}\right)_{n=1}^{\infty}\right\}.$$

Najděte nějakou ortonormální bázi Y a určete nejbližší bod v Y k bodu $(1, 0, 0, \dots)$.

Příklad 2. (i) (6 bodů) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = x\chi_{(-3,3)}(x).$$

Výsledek zapište ve tvaru, z něhož bude patrné, že $\widehat{f}$ nabývá pouze imaginárních hodnot.

(ii) (4 body) S pomocí výsledku části (i) spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$g(x) = x\cos x\chi_{(-3,3)}(x).$$

Příklad 3. (10 bodů) S pomocí reziduové věty spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 - 3\cos x}\, dx.$$

Teoretická část

Otázka 1. (5 bodů) Napište definici pojmu Fourierova transformace funkce f z L^2.

Otázka 2. (5 bodů) Zformulujte větu o hustotě spojitých funkcí v L^p prostoru.

Otázka 3. (5 bodů) Zformulujte větu o spojitosti skalárního součinu a normy.

Otázka 4. (5 bodů) Zformulujte větu o omezených lineárních funkcionálech na L^p.

Otázka 5. (5 bodů) Zformulujte Cauchyův vzorec pro konvexní množinu.

Otázka 6. (5 bodů) Rozhodněte, zda zobrazení

$$\|f\| = |f(0)| + |f(1)|$$

je norma na prostoru $C([0, 1])$.

K úspěšnému složení zkoušky je třeba získat alespoň 16 bodů jak z početní, tak i z teoretické části a alespoň 35 bodů za obě části dohromady.
K celkovému hodnocení známkou výborně je navíc třeba získat dohromady za obě části zkoušky alespoň 52 bodů, a k celkovému hodnocení známkou velmi dobře je třeba získat dohromady alespoň 43 bodů.