Zkoušková písemka z Kalkulu 3
23. ledna 2024

Početní část

Příklad 1. (10 bodů) Dokažte, že

$$Tf(t) = \chi_{[0,1]}(t)f(t) + \chi_{[2,3]}(t)f(t)$$

je omezené lineární zobrazení prostoru $L^2([0,3])$ do $L^2([0,3])$ a spočtěte $\|T\|$.

Příklad 2. (i) (6 bodů) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = e^{-2|x|}.$$

Výsledek zapište ve tvaru, z nějž bude patrné, že $\widehat{f}$ nabývá pouze reálných hodnot.

(ii) (4 body) S pomocí výsledku části (i) spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$g(x) = \sin x e^{-2|x|}.$$

Příklad 3. (10 bodů) S pomocí reziduové věty spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + 2\cos x)^2}\, dx.$$

Teoretická část

Otázka 1. (5 bodů) Napište definici pojmu Fourierův koeficient v Hilbertově prostoru.

Otázka 2. (5 bodů) Zformulujte Jensenovu nerovnost.

Otázka 3. (5 bodů) Zformulujte větu o charakterizaci omezených lineárních zobrazení mezi normovanými lineárními prostory.

Otázka 4. (5 bodů) Zformulujte Plancherelovu a Parsevalovu rovnost pro Fourierovu transformaci.

Otázka 5. (5 bodů) Zformulujte větu o Cauchyových-Riemannových podmínkách.

Otázka 6. (5 bodů) Nalezněte měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}$, která patří do $L^6(\mathbb{R})$, ale nikoliv do $L^4(\mathbb{R})$.

K úspěšnému složení zkoušky je třeba získat alespoň 16 bodů jak z početní, tak i z teoretické části a alespoň 35 bodů za obě části dohromady.
K celkovému hodnocení známkou výborně je navíc třeba získat dohromady za obě části zkoušky alespoň 52 bodů, a k celkovému hodnocení známkou velmi dobře je třeba získat dohromady alespoň 43 bodů.