Cvičení z Matematické analýzy 2
Letní semestr 2023-2024

1. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+2n+4}{n^2+3}$
   (ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n-2n}$
   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$
   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n}{4^n+3n}$
   (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
   (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{n^3+1}$
   (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}$
   (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$
   (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+4}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n}}$
   (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+\frac{1}{n})^n}$
   (xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
   (xii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{(n^2-n+1)^{n+1}}}$
   (xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$
   (xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[n]{n^n+3n!+4^n}}$
2. Zkonstruujte posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ konverguje.

Výsledky: 1. (i) diverguje; (ii) konverguje; (iii) konverguje; (iv) konverguje; (v) diverguje; (vi) diverguje; (vii) konverguje; (viii) konverguje; (ix) konverguje; (x) konverguje; (xi) diverguje; (xii) konverguje; (xiii) konverguje; (xiv) konverguje.

2. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$, $x \in \mathbb{R}$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$
   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
   (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
   (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$
   (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$
   (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\binom{2n}{n}$
   (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$
   (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{2^n}$
   (xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$
2. Zkonstruujte kladnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Výsledky: 1. (i) konverguje pro $x<0$, diverguje pro $x\geq 0$; (ii) diverguje; (iii) konverguje; (iv) konverguje; (v) konverguje; (vi) konverguje pro $x\leq 0$, diverguje pro $x>0$; (vii) konverguje; (viii) konverguje; (ix) diverguje; (x) diverguje; (xi) diverguje.

3. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})n^a$, $a\in\mathbb{R}$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\frac{1}{n^\beta}-\log(\sin\frac{1}{n^\beta})\right)$, $\beta>0$
   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$
   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n})\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$
   (v) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$
   (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}-1\right)^3$
   (vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-(1+\frac{1}{n})^n\right)^p$, $p\in\mathbb{R}$
   (viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\log(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})\right)$
2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Rozhodněte, zda platí
   (i) pokud $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje;
   (ii) pokud $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ konverguje.

Výsledky: 1. (i) konverguje pro $a<1$, diverguje pro $a\geq 1$; (ii) konverguje pro $\beta>1/2$, diverguje pro $\beta\leq 1/2$; (iii) diverguje; (iv) konverguje pro $\alpha>-2$, diverguje pro $\alpha\leq -2$; (v) konverguje; (vi) konverguje; (vii) konverguje pro $p>1$, diverguje pro $p\leq 1$; (viii) diverguje.
2. (i) ne; (ii) ano.

4. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-100\sqrt{n}}$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$, $z\in\mathbb{R}$
   (iii) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$
   (iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$
   (v) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$
   (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$
   (vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
   (viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\log\frac{n^2-1}{n^2+1}$
   (ix) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$
2. Najděte nezápornou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, ale $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ diverguje.

Výsledky: 1. (i) konverguje neabsolutně; (ii) pro $|z|<1$ konverguje absolutně, pro $|z|>1$ diverguje, pro $z=1$ konverguje neabsolutně, pro $z=-1$ diverguje; (iii) konverguje neabsolutně; (iv) konverguje absolutně pro $x\in\mathbb{R}$; (v) konverguje neabsolutně; (vi) konverguje neabsolutně; (vii) konverguje neabsolutně; (viii) konverguje absolutně; (ix) pro $|x|<1$ konverguje absolutně, pro $|x|>1$ diverguje, pro $|x|=1$ konverguje neabsolutně.

5. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{\sqrt{n}}$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{2n^2+1}{n^2}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctan n$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{\log(\log n)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log^2 n}$

3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3n-100\sqrt{n}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)(\sqrt{n^6+n}-n^3)$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+3} \cos(n\pi)$

4. (i) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Rozhodněte, zda pak musí konvergovat i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$.

(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ konverguje. Rozhodněte, zda pak musí konvergovat i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Výsledky: 1. (i) konverguje neabsolutně; (ii) konverguje neabsolutně; (iii) konverguje neabsolutně.
2. (i) konverguje; (ii) diverguje; (iii) konverguje.
3. (i) konverguje neabsolutně; (ii) konverguje absolutně; (iii) diverguje.
4. (i) ano; (ii) ne.

6. cvičení

1. Dokažte, že následující řady konvergují pro všechna $z \in \mathbb{C}$ z dané množiny.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $|z| \leq 1$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$, $|z| < 4$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$, $|z| < 1$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+2^n}{n^2}(z-1)^n$, $|z-1| \leq \frac{1}{6}$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2)$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n}))n \sin 2n$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

3. Najděte posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Výsledky: 2. (i) diverguje; (ii) konverguje; (iii) konverguje; (iv) konverguje; (v) konverguje.

7. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:

(i) $\int (x^{10} - e^x + \frac{2}{x} - \cos x)\, dx$

(ii) $\int \tan^2 x\, dx$

(iii) $\int x^3 e^x\, dx$

(iv) $\int e^x \sin x\, dx$

(v) $\int \frac{1}{(3x+2)^2}\, dx$

(vi) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx$

(vii) $\int \frac{1}{2x+3}\, dx$

(viii) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4}\, dx$

(ix) $\int x^2 \cos x\, dx$

(x) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$

(xi) $\int x \arctan x\, dx$
(xii) $\int \log 2x\, dx$
(xiii) $\int e^{ax} \cos bx\, dx,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
(xiv) $\int xe^x \cos x\, dx$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{x^{11}}{11} - e^x + 2\log|x| - \sin x$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; (ii) $\tan x - x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (iii) $x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x$ na $\mathbb{R}$; (iv) $-\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x$ na $\mathbb{R}$; (v) $-\frac{1}{3(3x+2)}$ na $(-\infty, -\frac{2}{3})$ a $(-\frac{2}{3}, \infty)$; (vi) $\arctan(x+2)$ na $\mathbb{R}$; (vii) $\frac{1}{2}\log|x + \frac{3}{2}|$ na $(-\infty, -\frac{3}{2})$ a $(-\frac{3}{2}, \infty)$; (viii) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; (ix) $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x$ na $\mathbb{R}$; (x) $\arctan(x+1)$ na $\mathbb{R}$; (xi) $\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2}$ na $\mathbb{R}$; (xii) $x\log(2x) - x$ na $(0, \infty)$; (xiii) $\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$ na $\mathbb{R}$; (xiv) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x + x\cos x - \sin x)$ na $\mathbb{R}$.

8. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:
(i) $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$
(ii) $\int \tan x\, dx$
(iii) $\int \sqrt{x^6}\, dx$
(iv) $\int \operatorname{cotg} x\, dx$
(v) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)}\, dx$
(vi) $\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$
(vii) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, dx$
(viii) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}\, dx$
(ix) $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$
(x) $\int |2x+1|\, dx$
(xi) $\int |\cos x|\, dx$

2. Nechť f a g jsou funkce definované na $\mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících implikací:
(i) Pokud existuje primitivní funkce k f a g na $\mathbb{R}$, pak existuje i primitivní funkce k $f+g$ na $\mathbb{R}$.
(ii) Pokud existuje primitivní funkce k $f+g$ na $\mathbb{R}$, pak existuje i primitivní funkce k f a g na $\mathbb{R}$.

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{1}{2}\arctan(x^2)$ na $\mathbb{R}$; (ii) $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (iii) $\frac{x^4}{4}\operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$; (iv) $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (v) $\frac{1}{3}\tan(x^3)$ na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$; (vi) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+\log x)^{\frac{1}{2}}$ na $(\frac{1}{e}, \infty)$; (vii) $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}}$ na každém z intervalů $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (viii) $-e^{-x}\arctan e^x - \frac{1}{2}\log\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ na $\mathbb{R}$; (ix) $\log|\tan\frac{x}{2}|$ na každém z intervalů $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
(x) $F(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ x^2 + x + \frac{1}{2}, & x \in [-\frac{1}{2}, \infty) \end{cases}$;
(xi) $F(x) = \begin{cases} \sin x + 4k, & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x + 4k + 2, & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. (i) platí; (ii) neplatí.

9. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:
(i) $\int \frac{x}{x^2-x+2}\, dx$
(ii) $\int \frac{x^3-4x-6}{x^3-5x^2+6x}\, dx$
(iii) $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\, dx$
(iv) $\int \frac{x}{x^3-1}\, dx$

(v) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx$
(vi) $\int \frac{dx}{x^4-1}$
(vii) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{1}{2}\log(x^2-x+2)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{7}})$ na $\mathbb{R}$; (ii) $x-\log|x|+3\log|x-3|+3\log|x-2|$ na $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$ a $(3,\infty)$; (iii) $\frac{x^{16}}{16}+\frac{x^{14}}{14}+\cdots+\frac{x^2}{2}+3\log|x+1|-2\log|x-1|$ na $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ a $(1,\infty)$; (iv) $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,1)$ a $(1,\infty)$; (v) $2\log|\frac{x+4}{x+2}|-\frac{5x+12}{(x+2)(x+4)}$ na $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$ a $(-2,\infty)$; (vi) $\frac{1}{4}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log|1+x|-\frac{1}{2}\arctan x$ na $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ a $(1,\infty)$; (vii) $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)$ na $\mathbb{R}$.

10. cvičení
1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:
(i) $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$
(ii) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$
(iii) $\int \frac{1}{x(\log^4 x-1)}\,dx$
(iv) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$
(v) $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$
(vi) $\int \frac{x^2+x}{x^6+3x^4+3x^2+1}\,dx$
(vii) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$
(viii) $\int \frac{2\log^2 x+3}{x\log^4 x-x\log^2 x-6x}\,dx$
2. Sestrojte funkci f, která má primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$, ale není spojitá v 0.

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{4}{3\sqrt{3}}(\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{(2x-1)^2+3}$ na $\mathbb{R}$; (ii) $e^x-\log(1+e^x)$ na $\mathbb{R}$; (iii) $-\frac{1}{4}\log|\log x+1|+\frac{1}{4}\log|\log x-1|-\frac{1}{2}\arctan\log x$ na $(0,\frac{1}{e})$, $(\frac{1}{e},e)$ a (e,∞); (iv) $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$ na $\mathbb{R}$; (v) $\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}$ na $\mathbb{R}$; (vi) $\frac{1}{8}\arctan x+\frac{x^3-x-2}{8(x^2+1)^2}$ na $\mathbb{R}$; (vii) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\log|e^x-1|+\frac{1}{6}\log(e^x+2)$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$; (viii) $\frac{1}{5\sqrt{2}}\arctan(\frac{\log x}{\sqrt{2}})+\frac{9}{10\sqrt{3}}\log\left|\frac{\log x-\sqrt{3}}{\log x+\sqrt{3}}\right|$ na $(0,e^{-\sqrt{3}})$, $(e^{-\sqrt{3}},e^{\sqrt{3}})$ a $(e^{\sqrt{3}},\infty)$.

11. cvičení
1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:
(i) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$
(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$
(iii) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
(iv) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$
(v) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$
(vi) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx$
(vii) $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\,dx$
(viii) $\int \sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}}\,dx$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $-\log|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1|+\log|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1|-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ na $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$; (ii) $-2\arctan\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ na $(1,3)$; (iii) $-\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$ na $\mathbb{R}$; (iv) $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\log|1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}|-\log|1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}|$ na $(-1,0)$ a $(0,1)$; (v) $2\operatorname{sgn}(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ na $(-\infty,1)$ a $(1,2)$; (vi) $\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x+4}-x)+\log(\sqrt{x^2+2x+4}-x+1)+\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)}$ na $\mathbb{R}$; (vii) $6(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\log\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}$ na $(0,\infty)$; (viii) $-2\arctan\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}-\log|1-\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}|+\log|1+\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}|$ na $(-\infty,0)$.

13. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:
   (i) $\int(\tan x)^5\,dx$
   (ii) $\int\frac{3+\cos x}{2+\sin x}\,dx$
   (iii) $\int\frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx$
   (iv) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}\,dx$
   (v) $\int\frac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}\,dx$
   (vi) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $-\log|\cos x|-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{4\cos^4 x}$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
(ii)

$$F(x)=\begin{cases}\log(1+\frac{\sin x}{2})+2\sqrt{3}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\tan\frac{x}{2}+1))+2\sqrt{3}k\pi, & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi),\\ \sqrt{3}\pi+2\sqrt{3}\pi k, & x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

(iii) $2\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+3\log|\sin x-2|$ na $\mathbb{R}$; (iv) $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{2}\log(\cos x+1)+\frac{1}{2}\log|\cos x-1|$ na každém z intervalů $(\frac{k\pi}{2},\frac{(k+1)\pi}{2})$, $k\in\mathbb{Z}$;
(v)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{3}})-x+\frac{4k\pi}{\sqrt{3}}, & x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),\\ (\frac{4}{\sqrt{3}}-1)(\frac{\pi}{2}+k\pi), & x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

(vi)

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}, & x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)\setminus\{\pi+2k\pi\};\\ 0, & x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

14. cvičení

1. Spočtěte určité integrály:
   (i) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{3+\cos x}{2+\sin x}\,dx$
   (ii) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$
   (iii) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$
   (iv) $\int_0^{100\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2-\sin x}\,dx$
2. S použitím Riemannova integrálu spočtěte limity:
   (i) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$
   (ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>1$
3. Sestrojte omezenou funkci f na $(0,1)$, která je na $(0,1)$ spojitá, ale není tam stejnoměrně spojitá.

Výsledky: 1. (i) $\frac{4}{\sqrt{3}}\pi - \log 2$; (ii) $\frac{\pi}{2}$; (iii) $2\pi - \sqrt{2}\pi$; (iii) $50\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
2. (i) $\log 2$; (ii) $\frac{1}{p+1}$.

15. cvičení

1. Spočtěte určité integrály:
   (i) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$
   (ii) $\int_0^2 x^2e^{-x^3}\,dx$
   (iii) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$
   (iv) $\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,dx$
   (v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}\,dx$
   (vi) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2+\cos x}{2+\sin x+\cos x}\,dx$
2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:
   (i) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5+2}}$
   (ii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$
   (iii) $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   (iv) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x^3}$
   (v) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. Sestrojte posloupnost funkcí $f_k : [0,1] \to [0,\infty)$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ pro všechna $x \in [0,1]$, ale $\int_0^1 f_k(x)\,dx = 1$ pro $k \in \mathbb{N}$. V tomto případě

$$1 = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim_{k\to\infty} f_k(x))\,dx = 0,$$

a tedy obecně nelze prohodit limitu a integrál.

Výsledky: 1. (i) $1-\frac{2}{e}$; (ii) $\frac{1}{3}(1-e^{-8})$; (iii) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; (iv) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$; (v) $3-4\log 2$; (vi) $\pi(1+\frac{1}{\sqrt{7}})$.
2. (i) konverguje; (ii) konverguje; (iii) konverguje pro $\alpha < 4$; (iv) diverguje; (v) konverguje pro $\max\{\alpha,\beta\} > 1 > \min\{\alpha,\beta\}$.

16. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:
   (i) $\int_1^\infty \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   (ii) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,dx$
   (iii) $\int_0^\infty x^\alpha(\arctan x)^\beta\,dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   (iv) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$
   (v) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$
   (vi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{1}{\sin x})\,dx$
   (vii) $\int_0^\infty \sin(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha)\,dx$
   (viii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\,dx$
   (ix) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(\frac{1}{x})}\,dx$
   (x) $\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,dx$

Výsledky: 1. (i) konverguje pro $\alpha > 2$; (ii) konverguje; (iii) konverguje pro $\alpha+\beta > -1$, $\alpha < -1$; (iv) konverguje; (v) konverguje; (vi) konverguje; (vii) konverguje pro $\alpha > 1$; (viii) konverguje pro $\alpha \in (-3,1)$; (ix) konverguje pro $\alpha < \frac{3}{2}$; (x) konverguje pro $\alpha > 1$.

17. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících integrálů:

(i) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$
(ii) $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$
(iii) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x}}\,dx$
(iv) $\int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)}{\log(\log(10+x))}\,dx$
(v) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$
(vi) $\int_0^\infty x\cos(x^4)\,dx$
(vii) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x}\cos x\,dx$
(viii) $\int_0^\infty \frac{x^2\sin^3 x}{1+x^3}\,dx$

2. Nechť f, g jsou nezáporné spojité funkce na $(0,1)$. Rozhodněte, zda platí následující implikace.
(i) Pokud $\int_0^1 f(x)\,dx$ a $\int_0^1 g(x)\,dx$ divergují, pak diverguje i $\int_0^1 \min\{f(x), g(x)\}\,dx$.
(ii) Pokud $\int_0^1 f(x)\,dx$ a $\int_0^1 g(x)\,dx$ divergují, pak diverguje i $\int_0^1 \max\{f(x), g(x)\}\,dx$.

Výsledky: 1. (i) konverguje neabsolutně; (ii) konverguje neabsolutně; (iii) konverguje neabsolutně; (iv) konverguje neabsolutně; (v) diverguje; (vi) konverguje neabsolutně; (vii) konverguje neabsolutně; (viii) konverguje neabsolutně.
2. (i) neplatí; (ii) platí.

18. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících integrálů:
(i) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt[3]{x^2}}\sin x\,dx$
(ii) $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(iii) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(iv) $\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^\alpha\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(v) $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(vi) $\int_{-\infty}^\infty \sin(e^x)\,dx$
(vii) $\int_0^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ má $f(x) = \sin^k x$ omezenou primitivní funkci.

Výsledky: 1. (i) konverguje neabsolutně; (ii) konverguje pro $\alpha \in (0,4)$, konverguje absolutně pro $\alpha \in (1,4)$; (iii) konverguje pro $\alpha > 0$, konverguje absolutně pro $\alpha > 1$; (iv) konverguje pro $\alpha \in (-5,0)$, konverguje absolutně pro $\alpha \in (-5,-1)$; (v) konverguje pro $\alpha \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, konverguje absolutně pro $\alpha < -1$; (vi) konverguje neabsolutně; (vii) konverguje neabsolutně pro $\alpha \in (0,2)$.
2. k liché.

19. cvičení

1. Spočtěte obsah plochy vymezené následujícími křivkami:
(i) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$
(ii) $y = x^2$, $y = 2 - x$
(iii) $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$
(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. Spočtěte délky následujících křivek:
(i) $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0,1]$
(ii) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0,4]$
(iii) $y = \log x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

3. Spočtěte objem a povrch kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.
4. Spočtěte objem následujících těles:

(i) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tan z, \ z \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$
(ii) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq -5, \ y^2 + z^2 \leq x^2, \ y^2 + z^2 \leq 2 - x\}$
5. S pomocí integrálního kritéria vyšetřete konvergenci řad:
(i) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^2 n}{1+n^2}$

Výsledky: 1. (i) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; (ii) $\frac{9}{2}$; (iii) $\frac{16}{3}$; (iv) πab.
2. (i) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{2} - 1)$; (ii) $\frac{8}{27}(\sqrt{1000} - 1)$; (iii) $1 + \frac{1}{2}\log(\frac{3}{2})$.
3. objem$= \frac{1}{3}\pi r^2 v$, povrch $= \pi r\sqrt{r^2 + v^2}$ (bez podstavy).
4. (i) $\pi(1 - \frac{\pi}{4})$; (ii) 16.
5. (i) konverguje pro $\alpha > 1$; (ii) diverguje; (iii) konverguje.

20. cvičení
1. Najděte maximální řešení následujících diferenciálních rovnic:
(i) $y' = y$
(ii) $y' = \sqrt[5]{y^4}$
(iii) $y' = xy$
(iv) $y' = \sqrt[3]{y}$
(v) $y' - y^2 \cos x = \cos x$
(vi) $(1 + e^x)yy' = e^x$
2. Najděte všechny kladné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce y na $\mathbb{R}$ splňující $y''(x)y(x) \geq 2(y'(x))^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Výsledky: 1. (i) $y(x) = Ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$;
(ii) $y_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
$$y_1(x) = \begin{cases} (\frac{1}{5}(x + C))^5, & x \in (-\infty, -C] \\ 0, & x \in (-C, \infty) \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$
$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C] \\ (\frac{1}{5}(x + C))^5, & x \in (-C, \infty) \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$
$$y_3(x) = \begin{cases} (\frac{1}{5}(x + C_1))^5, & x \in (-\infty, -C_1) \\ 0, & x \in [-C_1, -C_2] \\ (\frac{1}{5}(x + C_2))^5, & x \in (-C_2, \infty) \end{cases}, C_2 \leq C_1$$
(iii) $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$;
(iv) $y_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\frac{3}{2}C] \\ (\frac{2}{3}x + C)^{\frac{3}{2}}, & x \in (-\frac{3}{2}C, \infty) \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$
$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\frac{3}{2}C] \\ -(\frac{2}{3}x + C)^{\frac{3}{2}}, & x \in (-\frac{3}{2}C, \infty) \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$
(v) $y(x) = \tan(\sin x + C)$ na intervalech, kde $\sin x + C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(vi) $y_1(x) = \sqrt{2}\sqrt{\log(e^x + 1) + C}$, $y_2(x) = -\sqrt{2}\sqrt{\log(e^x + 1) + C}$
pokud $C \geq 0$, jsou obě řešení definována na $\mathbb{R}$; pokud $C < 0$, jsou řešení definována na $(\log(e^{-C} - 1), \infty)$
2. $y(x) = C$, $C > 0$.

21. cvičení
1. Najděte maximální řešení následujících diferenciálních rovnic:

(i) $y' = \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = \frac{1}{2}$
(ii) $xy' - y(1 + \log \frac{y}{x}) = 0$
(iii) $y' = 2\sqrt{y}$
(iiia) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(4) = 1$
(iiib) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = -1$
(iiic) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(1) = 0$
(iv) $y' = x\sqrt[3]{1-y}$
(v) $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$, $y(0) = 1$
(vi) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

Výsledky: 1. (i) $y(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (0, \infty)$;
(ii) $y(x) = xe^{Cx}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $C \in \mathbb{R}$;
(iii) $y_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C] \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty), C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(iiia) $y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3] \\ (x-3)^2, & x \in (3, \infty) \end{cases}$
(iiib) řešení neexistuje
(iiic) $y_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C] \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty), C \leq -1 \end{cases}$$

(iv) $y_0(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -\sqrt{3C}] \\ 1 + \sqrt{(C - \frac{x^2}{3})^3}, & x \in (-\sqrt{3C}, \sqrt{3C}), \ C > 0 \\ 1, & x \in [\sqrt{3C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -\sqrt{3C}] \\ 1 - \sqrt{(C - \frac{x^2}{3})^3}, & x \in (-\sqrt{3C}, \sqrt{3C}), \ C > 0 \\ 1, & x \in [\sqrt{3C}, \infty) \end{cases}$$

(v) $y(x) = \tan(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{\pi}{4})$, $x \in (-\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}} - 1}, \sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}} - 1})$
(vi) $y(x) = -x\log(-\log|x| + C)$, $x \in (-e^C, 0)$ nebo $x \in (0, e^C)$, $C \in \mathbb{R}$