Cvičení z Kalkulu 3
Zimní semestr 2023-2024

1. cvičení

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené, respektive uzavřené.
   (i) $\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$
   (ii) $\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\}$
   (iii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 2\}$
   (iv) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 2\}$
   (v) $\{2^n:\ n\in\mathbb{N}\}$
   (vi) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=y,\ x\geq 1\}$
   (vii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y>0,\ x+y<2\}$
2. Dokažte, že (X,ρ) je metrický prostor.
   (i) X libovolná množina, $\rho(x,y)=1$ pro $x\neq y$, $\rho(x,x)=0$
   (ii) $X=C([a,b])$, množina všech spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$,
$\rho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$
3. Rozhodněte, zda následující funkce definují metriku na $\mathbb{R}$.
   (i) $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$
   (ii) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$
   (iii) $\rho(x,y)=(x-y)^2$
   (iv) $\rho(x,y)=\max\{|x-y|,1\}$
   (v) $\rho(x,y)=|x-y|+|x^2-y^2|$

Výsledky: 1. (i) uzavřená, není otevřená; (ii) není otevřená ani uzavřená; (iii) uzavřená, není otevřená; (iv) není otevřená ani uzavřená; (v) uzavřená, není otevřená; (iv) uzavřená, není otevřená; (vii) otevřená, není uzavřená.
3. (i) ne; (ii) ano; (iii) ne; (iv) ne; (v) ano.

2. cvičení

1. Musí pro množiny A, B v metrickém prostoru platit $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$?
2. Na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definujme funkci

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & |x-y|\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ \frac{1}{2}, & |x-y|\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

Dokažte, že ρ je metrika na $\mathbb{R}$. Charakterizujte všechny otevřené, uzavřené a kompaktní množiny v této metrice.
3. Dokažte, že posloupnost $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$, nemá limitu v $(C([0,1]),\rho_{\sup})$.
4. Uvažujme $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

Charakterizujte všechny otevřené, uzavřené a kompaktní množiny v této metrice.
5. Rozhodněte, zda spojitý obraz uzavřené množiny musí být uzavřená množina.
6. Rozhodněte, zda spojitý obraz otevřené množiny musí být otevřená množina.

Výsledky: 1. ne; 2. a 4. všechny podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou otevřené i uzavřené; kompaktní množiny jsou ty, které mají konečný počet prvků; 5. ne; 6. ne.

3. cvičení

1. Nechť $1\leq p\leq\infty$. Najděte všechna $\gamma\in\mathbb{R}$, pro která funkce $f(x)=x^\gamma$, $x\in(0,1)$, patří do prostoru $L^p(0,1)$.

2. Najděte funkci f na $\mathbb{R}$, která je esenciálně omezená, ale není omezená.
3. Nechť $1 < p < q < \infty$. Dokažte, že $L^\infty(0,1) \subseteq L^q(0,1) \subseteq L^p(0,1) \subseteq L^1(0,1)$.
4. Najděte $f \in L^1(0,1) \setminus L^2(0,1)$.
5. Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která posloupnost $a_n = n^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, patří do prostoru ℓ^p.
6. Dokažte, že $\ell^1 \subseteq \ell^2$.
7. Spočtěte $\|f\|_\infty$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,2], \\ 1, & x \in [0,1) \cup (1,2], \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

8. Najděte $f \in L^3(0,1) \setminus L^4(0,1)$.
9. Najděte $f \in \ell^4 \setminus \ell^3$.
10. Najděte $f \in L^3(\mathbb{R}) \setminus L^4(\mathbb{R})$.
11. Najděte $f \in L^4(\mathbb{R}) \setminus L^3(\mathbb{R})$.
12. Najděte $f \in L^1(0,1)$ takovou, že $f \notin L^p(0,1)$ pro žádné $p > 1$.

Výsledky: 1. $\gamma > -1/p$, je-li $1 \leq p < \infty$; $\gamma \geq 0$, je-li $p = \infty$; 5. $\alpha < -1/p$, je-li $1 \leq p < \infty$; $\alpha \leq 0$, je-li $p = \infty$; 7. 1.

4. cvičení

1. Rozhodněte, pro která $p \in [1,\infty]$ následující posloupnosti konvergují v ℓ^p.
   (i) $\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, ($n$-krát);
   (ii) $\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \dots\}$, ($n$-krát);
   (iii) $\{1, 2, 3, \dots, n, 0, \dots, 0, \dots\}$;
   (iv) $\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots, 0, \dots\}$, ($n$-krát).
2. Dokažte, že operace $\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^\infty a_k \overline{b_k}$ definuje skalární součin na prostoru ℓ^2. Poté s použitím Věty 16 z přednášky dokažte, že ℓ^2 je Hilbertův prostor.
3. Nechť ℓ^2_0 je prostor všech komplexních posloupností, které mají konečně mnoho nenulových prvků. Na tomto prostoru uvažujme skalární součin $\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^\infty a_k \overline{b_k}$. Dokažte, že ℓ^2_0 s tímto skalárním součinem není Hilbertův prostor.
4. Nechť je v Hilbertově prostoru $L^2(-1,1)$ dána funkce $f(x) = x$. Popište $f^\perp$ a nalezněte nějakou nenulovou funkci g, která patří do $f^\perp$.
5. Nechť je v Hilbertově prostoru $L^2(-1,1)$ dán podprostor $Y = \{f \in L^2(-1,1) :\ f \text{ je lichá funkce}\}$. Nalezněte $Y^\perp$.

Výsledky: 1. (i) nekonverguje pro žádné $p \in [1,\infty]$; (ii) $p \in (1,\infty]$; (iii) nekonverguje pro žádné $p \in [1,\infty]$; (iv) $p \in (2,\infty]$.
4. $f^\perp = \{g \in L^2(-1,1) :\ \int_{-1}^1 x g(x)\, dx = 0\}$; např. $g = 1$.
5. $Y^\perp = \{g \in L^2(-1,1) :\ g \text{ je sudá funkce}\}$.

5. cvičení

1. V následujících příkladech je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y a určete nejbližší bod v Y k bodu x_0.
   (i) $H = L^2([-1,1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = \sin t$;
   (ii) $H = \ell^2$, Y je lineární obal množiny $\{(2^{-n})_{n=1}^\infty, (3^{-n})_{n=1}^\infty\}$, $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$;
   (iii) $H = L^2([-1,1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 1, $x_0(t) = \cos t$;
   (iv) $H = L^2([0,1], t\, dt)$, Y je lineární obal množiny $\{1, t^2\}$, $x_0(t) = t$;
   (v) $H = L^2((0,\infty), e^{-t}\, dt)$, Y je lineární obal množiny $\{1, e^{-2t}\}$, $x_0(t) = e^{-3t}$.

Výsledky: 1. (i) ON báze je například $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}(t^2-\frac{1}{3})\}$; nejbližší bod je $3(\sin 1-\cos 1)t$; (ii) ON báze je například $\{(\sqrt{3}\cdot 2^{-n})_{n=1}^{\infty}, (\sqrt{200}(3^{-n}-\frac{3}{5}\cdot 2^{-n}))_{n=1}^{\infty}\}$; nejbližší bod je $(-\frac{5}{2}\cdot 2^{-n}+\frac{20}{3}\cdot 3^{-n})_{n=1}^{\infty}$; (iii) ON báze je například $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t\}$; nejbližší bod je $\sin 1$; (iv) ON báze je například $\{\sqrt{2}, \sqrt{24}(t^2-\frac{1}{2})\}$; nejbližší bod je $\frac{4}{5}t^2+\frac{4}{15}$; (v) ON báze je například $\{1, \frac{\sqrt{45}}{2}(e^{-2t}-\frac{1}{3})\}$; nejbližší bod je $\frac{1}{4}+\frac{45}{48}(e^{-2t}-\frac{1}{3})$.

6. cvičení

1. Najděte reálnou Fourierovu řadu 2π-periodické funkce f, která je na intervalu $[-\pi,\pi)$ zadána následujícím předpisem.

(i) $f(x)=\cos 2x+\sin 3x$;
(ii) $f(x)=x$;
(iii)
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ 3, & x\in[0,\pi);\end{cases}$$
(iv)
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ x, & x\in[0,\pi);\end{cases}$$
(v) $f(x)=1+\sin 2x+\cos 4x$;
(vi) $f(x)=\pi^2-x^2$.

Výsledky: 1. (i) $\cos 2x+\sin 3x$; (ii) $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$; (iii) $\frac{3}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x$; (iv) $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$; (v) $1+\sin 2x+\cos 4x$; (vi) $\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

7. cvičení

1. Je následující zobrazení norma na $L^1([0,1])$ (chápeme-li $L^1([0,1])$ jako prostor tříd ekvivalence vzhledem k rovnosti s.v.)?

(i) $\|f\|=\int_0^1|f(t)|\,dt$;
(ii) $\|f\|=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(t)|\,dt$;
(iii) $\|f\|=\left(\int_0^1|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Je následující zobrazení norma na prostoru $X=\{p:\ p \text{ je polynom na } [0,1]\}$?

(i) $\|p\|=\sup\{|p(t)|:\ t\in[0,1]\}$;
(ii) $\|p\|=\int_0^1 p(t)\,dt$;
(iii) $\|p\|=|p(0)|$.

3. Spočtěte normu funkcionálu φ na prostoru X a zjistěte, zda φ své normy nabývá.

(i) $X=\ell^\infty$, $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}x_n$;
(ii) $X=C([0,1])$, $\varphi(f)=\int_0^1(t-\frac{1}{2})f(t)\,dt$;
(iii) $X=L^\infty([0,1])$, $\varphi(f)=\int_0^1(t-\frac{1}{2})f(t)\,dt$;
(iv) $X=\ell^1$, $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$;
(v) $X=\ell^1$, $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})x_{2n}$;
(vi) $X=C([0,1])$, $\varphi(f)=f(0)$;
(vii) $X=C([0,1])$, $\varphi(f)=f(0)-f(1)$;
(viii) $X=C([0,1])$, $\varphi(f)=\int_0^1 tf(t)\,dt$;
(ix) $X=L^1([0,1])$, $\varphi(f)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)\,dt$.

Výsledky: 1. (i) ano; (ii) ne; (iii) ne.
2. (i) ano; (ii) ne; (iii) ne.
3. (i) 1, nabývá se; (ii) 1/4, nenabývá se; (iii) 1/4, nabývá se; (iv) 1, nabývá se; (v) 1, nenabývá se; (vi) 1, nabývá se; (vii) 2, nabývá se; (viii) 1/2, nabývá se; (ix) 1, nabývá se.

8. cvičení

1. V příkladech níže dokažte, že $T : X \to Y$ je omezené lineární zobrazení, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda T své normy nabývá. Dále odpovězte na následující otázky:
   - Je zobrazení T prosté? Pokud ne, určete jeho jádro.
   - Je zobrazení T na?

   (i) $X = Y = \ell^2$, $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{\frac{x_n}{n}\}_{n=1}^\infty$;
   (ii) $X = \ell^1$, $Y = \ell^\infty$, $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{x_1 + \cdots + x_n\}_{n=1}^\infty$;
   (iii) $X = Y = L^p([0,1])$, $p \in [1,\infty]$, $Tf = f\chi_{[0,1/2]}$;
   (iv) $X = Y = \ell^2$, $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
   (v) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f(1-t)$;
   (vi) $X = Y = L^p([0,1])$, $p \in [1,\infty]$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.

Výsledky: 1. (i) $\|T\| = 1$, nabývá se, T je prosté, není na; (ii) $\|T\| = 1$, nabývá se, T je prosté, není na; (iii) $\|T\| = 1$, nabývá se, T není prosté, $\ker T = \{f \in L^p([0,1]) :\ f = 0 \text{ s.v. na } [0,1/2]\}$, T není na; (iv) $\|T\| = 1$, nabývá se, T není prosté, $\ker T = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty :\ x_k = 0 \text{ pro } k \geq 2\}$, T je na; (v) $\|T\| = 1$, nabývá se, T je prosté a na; (vi) $\|T\| = 1/2$, nenabývá se pro $p \in [1,\infty)$, nabývá se pro $p = \infty$, T je prosté, není na.

9. cvičení

1. Spočtěte Fourierovu transformaci následujících funkcí.
   (i) $f(x) = x\chi_{(-1,1)}(x)$;
   (ii) $f(x) = x\chi_{(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})}(x)$;
   (iii) $f(x) = (x-1)\chi_{(0,2)}(x)$;
   (iv) $f(x) = x\sin x\chi_{(-1,1)}(x)$;
   (v) $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$, odtud pak odvoďte pomocí vlastností Fourierovy transformace Fourierovu transformaci funkce $g(x) = \chi_{(4,6)}(x)$;
   (vi) $f(x) = (1-|x|)\chi_{(-1,1)}(x)$;
   (vii) $f(x) = e^{-|x|}$;
   (viii) $f(x) = \cos x e^{-|x|}$.

Výsledky: 1. (i) $\widehat{f}(t) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2})$, $t \neq 0$, $\widehat{f}(0) = 0$; (ii) $\widehat{f}(t) = \frac{1}{16} \cdot i\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\cos\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}} - \frac{\sin\frac{t}{4}}{\frac{t^2}{16}})$, $t \neq 0$, $\widehat{f}(0) = 0$; (iii) $\widehat{f}(t) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-it}(\frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2})$, $t \neq 0$, $\widehat{f}(0) = 0$; (iv) $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{\cos(t-1)}{t-1} - \frac{\sin(t-1)}{(t-1)^2} - \frac{\cos(t+1)}{t+1} + \frac{\sin(t+1)}{(t+1)^2})$, $t \notin \{-1,1\}$, $\widehat{f}(-1) = \widehat{f}(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{\sin 2}{4} - \frac{\cos 2}{2})$; (v) $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-it}}{it}$, $\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-4it}-e^{-6it}}{it}$; (vi) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos t}{t^2}$, $t \neq 0$, $\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; (vii) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+t^2}$; (viii) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t^2+2}{t^4+4}$.

10. cvičení

1. Najděte reálnou a imaginární část následujících komplexních čísel.
   (i) $\frac{1}{i}$;
   (ii) $\frac{1+i}{1-i}$.
2. Najděte všechny hodnoty komplexních odmocnin (tj. všechna řešení rovnice $z^n = a$, pokud je v zadání uvedeno $\sqrt[n]{a}$).
   (i) $\sqrt[3]{1}$;

(ii) $\sqrt{i-1}$.

3. V jakých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné?
   (i) $f(z)=|z|$;
   (ii) $f(z)=|z|^2+i\operatorname{Im}(z^2)$;
   (iii) $f(z)=|z|^2$;
   (iv) $f(z)=\overline{z}$;
   (v) $f(z)=|(\operatorname{Re}z)^2-(\operatorname{Im}z)^2|+2i|\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z|$.
4. Nechť f je holomorfní funkce na $\mathbb{C}$, která nabývá pouze reálných hodnot. Dokažte, že f je konstantní.
5. Nechť f je holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ taková, že $\overline{f}$ je holomorfní. Dokažte, že f je konstantní.

Výsledky: 1. (výsledek ve tvaru $\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z$) (i) $0,-1$; (ii) $0,1$.
2. (i) 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi)$, $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi)$.
3. (i) nikde; (ii) v bodech, kde $\operatorname{Im}z=0$; (iii) v bodě 0; (iv) nikde; (v) v bodech, kde $0<\operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z$, nebo $\operatorname{Re}z<\operatorname{Im}z<0$, nebo $0<-\operatorname{Re}z<\operatorname{Im}z$, nebo $\operatorname{Im}z<-\operatorname{Re}z<0$.

11. cvičení

1. Spočtěte $\int_\gamma f$, kde
   (i) $f(z)=\operatorname{Im}z$, $\gamma(t)=e^{it}$, $0\le t\le\pi$;
   (ii) $f(z)=\operatorname{Re}z$, γ je orientovaný interval $[0,1+i]$.
2. Spočtěte $\int_\gamma f$, kde $f(z)=\frac{1}{z(z^2-1)}$ a γ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (i) 0; (ii) 1; (iii) 2.
3. Spočtěte $\int_\gamma f$, kde $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2-1)}$ a γ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (i) 0; (ii) 1; (iii) 2.
4. Spočtěte $\int_\gamma f$, kde γ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 2 a (i) $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$; (ii) $f(z)=\frac{e^z-z}{z^2-1}$; (iii) $f(z)=\frac{\sin(z+i)}{z^2+1}$.

Výsledky: 1. (i) $-\frac{\pi}{2}$; (ii) $\frac{1+i}{2}$.
2. (i) $-2\pi i$; (ii) πi; (iii) 0.
3. (i) 0; (ii) πi; (iii) 0.
4. (i) $\pi i(e-\frac{1}{e})$; (ii) $\pi i(e-\frac{1}{e}-2)$; (iii) $\frac{\pi i}{2}(e^2-e^{-2})$.

12. cvičení

1. Najděte a klasifikujte izolované singularity následujících funkcí:
   (i) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+3z+2}$;
   (ii) $f(z)=\frac{z}{e^z+1}$;
   (iii) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$;
   (iv) $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$;
   (v) $f(z)=\sin(\frac{\pi}{z^2})$;
   (vi) $f(z)=\frac{z^2-1}{z^3-3z+2}$;
   (vii) $f(z)=\cos e^{\frac{1}{z}}$.

Výsledky: 1. (i) v bodě -1 odstranitelná singularita, v bodě -2 pól násobnosti 1; (ii) pól násobnosti 1 v bodech $(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$; (iii) v bodě 0 odstranitelná singularita; (iv) v bodě 0 pól násobnosti 2; (v) v bodě 0 podstatná singularita; (vi) pól násobnosti 1 v bodech -2 a 1; (vii) v bodě 0 podstatná singularita.

13. cvičení

1. Najděte póly následujících funkcí a spočtěte příslušná rezidua.
   (i) $f(z)=\left(\frac{z-1}{z+3i}\right)^3$;

(ii) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$;

(iii) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

2. Spočtěte následující integrály.

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$;

(iii) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$;

(iv) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{5-4\cos x}\, dx$;

(v) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\, dx$;

(vi) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$;

(vii) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\, dx$;

(viii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\, dx$.

Výsledky: 1. (i) pól násobnosti 3 v bodě $-3i$, reziduum $-3(1+3i)$; (ii) pól násobnosti 2 v bodě i, reziduum $-i/4$; pól násobnosti 2 v bodě $-i$, reziduum $i/4$; (iii) pól násobnosti 3 v bodě -1, reziduum $2\sin 2$.

2. (i) $\sqrt{2}\pi$; (ii) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; (iii) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; (iv) $\frac{\pi}{6}$; (v) $(4\sqrt{2}-5)\pi$; (vi) $\frac{\pi}{60}$; (vii) $\frac{\pi}{16}$; (viii) $-\frac{\pi}{27}$.