

Od unimodálních posloupností k narozeninovému paradoxu

Antonín Slavík, Praha

Abstrakt. Konečná posloupnost reálných čísel se nazývá unimodální, pokud ji lze rozdělit na neklesající a nerostoucí úsek. V textu se zaměříme především na kombinatorické posloupnosti tvořené kombinačními čísly nebo Stirlingovými čísly prvního a druhého druhu. Kromě unimodality se budeme věnovat též příbuznému pojmu logaritmické konkávnosti. Ukážeme, jak tato témata souvisejí s klasickými Newtonovými a Maclaurinovými nerovnostmi, které v závěru využijeme k řešení obecné verze narozeninového paradoxu.

1. Maxima v řádcích Pascalova trojúhelníku

V tabulce 1 vidíme několik prvních řádků známého Pascalova trojúhelníku, který je sestaven z kombinačních čísel $\binom{n}{k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Zkusíme-li v každém řádku najít maximální hodnotu, dospějeme k následujícímu pravidlu: Obsahuje-li řádek lichý počet čísel (tj. n je sudé), pak maximální hodnota se nachází přesně uprostřed, zatímco řádky se sudým počtem čísel (kde n je liché) mají uprostřed dvojici maxim.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Tabulka 1 Pascalův trojúhelník

K ověření pravidla stačí porovnat podíly sousedních dvou kombinačních čísel s jedničkou. Zjistíme, že platí

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 & \text{pro } k < \frac{n+1}{2}, \\ = 1 & \text{pro } k = \frac{n+1}{2}, \\ < 1 & \text{pro } k > \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Doc. RNDr. ANTONÍN SLAVÍK, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8–Karlín, e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz

Pro n sudé je podmínka $k < \frac{n+1}{2}$ ekvivalentní s nerovností $k \leq \frac{n}{2}$ a podmínka $k = \frac{n+1}{2}$ není nikdy splněna. To znamená, že

$$\binom{n}{0} < \dots < \binom{n}{n/2} > \dots > \binom{n}{n}.$$

Pro n liché platí $k < \frac{n+1}{2}$ právě tehdy, když $k \leq \frac{n-1}{2} = \lfloor n/2 \rfloor$; odtud plyne, že

$$\binom{n}{0} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \dots > \binom{n}{n}.$$

2. Unimodální a logaritmicky konkávní posloupnosti

Řádky Pascalova trojúhelníku představují typický příklad tzv. unimodální posloupnosti; jedná se o posloupnosti tvořené nejprve neklesajícím a poté nerostoucím úsekem.

Definice 1. Posloupnost reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^n$ se nazývá *unimodální*, pokud existuje $j \in \{0, \dots, n\}$ takové, že platí $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n$.¹

Speciálně je tedy každá monotónní posloupnost unimodální. Z předchozí části dále víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je posloupnost čísel $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ unimodální. Pokud n je sudé, pak index j v předchozí definici je roven $n/2$, zatímco pro n liché můžeme volit $j = \lfloor n/2 \rfloor$ nebo $j = \lceil n/2 \rceil$.

Zavedeme ještě následující důležitý pojem.

Definice 2. Posloupnost reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^n$ se nazývá *logaritmicky konkávní*, pokud pro každé $k \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Všimněme si, že pokud je posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^n$ kladná, můžeme logaritmováním dospět k ekvivalentní podmínce

$$\frac{\log a_{k-1} + \log a_{k+1}}{2} \leq \log a_k, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Tu lze geometricky interpretovat tak, že bod $[k, \log a_k]$ leží nad úsečkou spojující body $[k-1, \log a_{k-1}]$ a $[k+1, \log a_{k+1}]$, případně na této úsečce; viz obrázek 1. Kladná posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^n$ je tedy logaritmicky konkávní právě tehdy, když lomená čára spojující body $[k, \log a_k]$, $k \in \{0, \dots, n\}$, je grafem konkávní funkce.

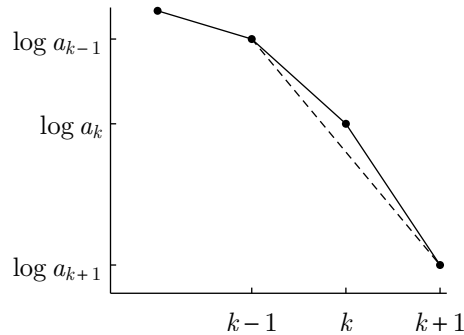
Důležitým příkladem logaritmicky konkávních posloupností jsou opět řádky Pascalova trojúhelníku. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ totiž platí

$$\frac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2} = \frac{\frac{n \cdots (n-k+2)}{(k-1)!} \frac{n \cdots (n-k)}{(k+1)!}}{\left(\frac{n \cdots (n-k+1)}{k!}\right)^2} = \frac{k}{k+1} \frac{n-k}{n-k+1} < 1, \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

tj. posloupnost čísel $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ je logaritmicky konkávní.

Pro naše účely jsou logaritmicky konkávní posloupnosti důležité zejména s ohledem na následující tvrzení.

¹Pokud jsou všechny nerovnosti ostré, pak má posloupnost právě jedno maximum a nazývá se silně nebo též ryze unimodální. Z pohledu informatiky je zajímavé, že maximum takové posloupnosti lze najít metodou půlení intervalu v čase $O(\log n)$ [7, str. 242], zatímco k nalezení maxima obecné unimodální posloupnosti může být v nejhorsím případě nutné projít všechny její členy.



Obr. 1. Geometrický význam logaritmické konkávnosti.

Věta 3. Každá kladná logaritmicky konkávní posloupnost je unimodální.

Důkaz. Je-li $\{a_k\}_{k=0}^n$ kladná a logaritmicky konkávní, pak z definice plyne, že pro každé $k \in \{1, \dots, n-1\}$ platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

To znamená, že podíly sousedních členů posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^n$ tvoří nerostoucí posloupnost. Pokud jsou všechny tyto podíly větší nebo rovny 1, posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^n$ je neklesající, a tedy unimodální. V opačném případě existuje nejmenší $j \in \{0, \dots, n-1\}$ takové, že $a_{j+1}/a_j < 1$. Odtud plyne, že platí $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j > a_{j+1} > \dots > a_n$. \square

Dále uvidíme, že ověření logaritmické konkávnosti může být v řadě případů jednodušší než důkaz unimodality; předchozí věta proto představuje užitečnou postačující podmínku pro unimodality. Nejedná se ovšem o podmínku nutnou; např. kladná posloupnost $(2, 3, 5)$ je unimodální, ale není logaritmicky konkávní.

Dokážeme ještě následující pomocné tvrzení, které využijeme později.

Lemma 4. Nechť $\{a_k\}_{k=0}^n$ je nezáporná logaritmicky konkávní posloupnost. Jsou-li navíc členy a_1, \dots, a_{n-2} kladné, pak platí

$$a_{k-2}a_{k+1} \leq a_{k-1}a_k, \quad k \in \{2, \dots, n-1\}.$$

Důkaz. Podle předpokladu pro každé $k \in \{2, \dots, n-1\}$ máme $a_{k-1} \neq 0$, a tedy

$$a_{k-2}a_{k+1} = \frac{a_{k-2}a_{k+1}a_{k-1}}{a_{k-1}} \leq \frac{a_{k-2}a_k^2}{a_{k-1}} \leq \frac{a_{k-1}^2 a_k}{a_{k-1}} = a_{k-1}a_k. \quad \square$$

3. Stirlingova čísla

Dalšími zajímavými příklady unimodálních posloupností jsou řádky trojúhelníků sestavených z tzv. Stirlingových čísel prvního a druhého druhu. Tato čísla mají jednoduchou kombinatorickou interpretaci a hrají důležitou roli v řadě úloh z diskrétní matematiky. Jsou pojmenována po skotském matematikovi Jamesi Stirlingovi (1692–1770), který je popsal ve své knize *Methodus Differentialis* z roku 1730 (viz např. [2]). V následujícím

textu stručně připomeneme kombinatorické definice Stirlingových čísel, podrobnější informace lze najít např. v [5].

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme Stirlingovo číslo druhého druhu $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ jako počet možností, jak rozdělit prvky n -prvkové množiny do k neprázdných podmnožin. Platí například $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 6$, neboť čtyři různé prvky lze do tří podmnožin rozdělit $\binom{4}{2} = 6$ způsoby (vybíráme dva prvky, které budou ve stejné podmnožině; zbývající dva prvky budou tvořit jednoprvkové podmnožiny).

V tabulce 2 uvádíme některé další hodnoty $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$; omezujeme se pouze na případ, kdy $0 \leq k \leq n$, neboť pro každé $k > n$ zřejmě platí $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

n	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 6 \end{smallmatrix} \right\}$
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Tabulka 2 Stirlingova čísla druhého druhu

Pomocí principu inkluze a exkluze lze dokázat (viz např. [6, str. 206]) obecný vzorec

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \quad (1)$$

Stirlingova čísla druhého druhu lze počítat i pomocí následujícího rekurentního vztahu, který připomíná známé pravidlo pro sestavování Pascalova trojúhelníku:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \quad n, k \geq 1 \quad (2)$$

Skutečně, vezmeme-li např. n -prvkovou množinu $\{1, \dots, n\}$, pak člen $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ na pravé straně vztahu je počet všech možností, kde jedna z podmnožin obsahuje jediný prvek n a zbývajících $n-1$ čísel je rozděleno do $k-1$ podmnožin, zatímco člen $k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ odpovídá rozdělení čísel $1, \dots, n-1$ do k podmnožin a následnému zařazení čísla n do některé z existujících podmnožin.

Na rozdíl od Pascalova trojúhelníku nejsou řádky tabulky 2 symetrické, jsou však unimodální. Dokázat tuto skutečnost je složitější, než tomu bylo u kombinačních čísel. Místo explicitního vzorce (1) je výhodnější použít rekurentní vztah (2) a dokazovat logaritmickou konkávnost.²

²Důkaz je převzat z [6, str. 265]. Přímý důkaz unimodality Stirlingových čísel bez použití logaritmické konkávnosti lze najít v [4].

Věta 5. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je posloupnost $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ logaritmicky konkávní.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle n . Pro $n = 0$ a $n = 1$ tvrzení platí, neboť každá posloupnost délky 1 nebo 2 je logaritmicky konkávní. Předpokládejme dále, že tvrzení platí pro $n - 1$. Potom je i posloupnost

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ n \end{smallmatrix} \right\} \quad (3)$$

logaritmicky konkávní, protože $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 0$ a přidání nulového členu na konec nezáporné posloupnosti neporuší logaritmickou konkávnost.

Zvolme libovolné $k \in \{1, \dots, n-1\}$ a dokažme, že

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} \leq \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^2.$$

Pro $k = 1$ nerovnost platí, neboť levá strana je nulová. Pro $k \in \{2, \dots, n-1\}$ vyjdeme z rekurentního vztahu (2), získaný součin roznásobíme a odhadneme s využitím logaritmické konkávnosti posloupnosti (3) a lemmatu 4:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} &= \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-2 \end{smallmatrix} \right\} + (k-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \right) \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + (k+1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} \right) \\ &= \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + (k^2 - 1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} + (k-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \\ &\quad + (k+1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} \leq \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}^2 + (k^2 - 1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^2 \\ &\quad + (k-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + (k+1) \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} < \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}^2 + k^2 \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^2 \\ &\quad + 2k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \right)^2 = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Důsledek 6. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je posloupnost $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ unimodální.

Důkaz. Z předchozí věty plyne, že posloupnost $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ je logaritmicky konkávní. Protože je kladná, je podle věty 3 též unimodální. Vložíme-li na její začátek číslo $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, unimodalita zůstane zachována. \square

Obrátme nyní pozornost ke Stirlingovým číslům prvního druhu. Připomeňme, že každou permutaci libovolné konečné množiny lze rozložit na disjunktní cykly. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme číslo $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ jako počet permutací n -prvkové množiny tvořených právě k cykly. Platí např. $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 6$, neboť existuje šest permutací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ tvořených třemi cykly:

$$\begin{array}{ccc} ((1, 2), (3), (4)) & ((1, 3), (2), (4)) & ((1), (2, 3), (4)) \\ ((1, 4), (2), (3)) & ((1), (2, 4), (3)) & ((1), (2), (3, 4)) \end{array}$$

V tabulce 3 jsou zaneseny některé další hodnoty $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$; opět se omezuje pouze na případ, kdy $0 \leq k \leq n$, jelikož pro každé $k > n$ platí $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$.

n	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Tabulka 3 Stirlingova čísla prvního druhu

Stirlingova čísla prvního druhu lze počítat pomocí rekurentního vzorce:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}, \quad n, k \geq 1 \quad (4)$$

Člen $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ na pravé straně vztahu lze interpretovat jako počet všech permutací množiny $\{1, \dots, n\}$, kde číslo n tvoří samostatný cyklus a zbývajících $n-1$ čísel je rozděleno do $k-1$ cyklů, zatímco člen $(n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ odpovídá rozdělení čísel $1, \dots, n-1$ do k cyklů a následnému zařazení čísla n do některého z existujících cyklů.

Posloupnosti čísel v řádcích tabulky 3 jsou unimodální a logaritmicky konkávní; to je obsahem následující věty. Její důkaz přenecháváme čtenáři, provede se s využitím vztahu (4) velmi podobně jako důkaz věty 5 a důsledku 6 (viz též [6, str. 278]).

Věta 7. *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je posloupnost $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$ logaritmicky konkávní a unimodální.*

Dále si ukážeme ještě jiný způsob, jak k tomuto výsledku dospět.³

4. Souvislost s polynomy

Užitečným nástrojem pro zkoumání posloupností jsou generující (vytvorující) funkce (viz např. [5, 14, 16]). Je-li dána reálná posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, pak její generující funkce je mocninná řada $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. V tomto textu se omezujeme pouze na konečné posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^n$; generující funkcí takové posloupnosti je polynom $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Naším cílem je dokázat překvapivý a elegantní výsledek: Má-li polynom P pouze reálné kořeny, pak posloupnost jeho koeficientů je logaritmicky konkávní. K důkazu budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.⁴

Lemma 8. *Má-li reálný polynom pouze reálné kořeny, pak i jeho derivace má pouze reálné kořeny.*

Důkaz. Nechť P je reálný polynom stupně n , který má pouze reálné kořeny x_1, \dots, x_l s násobnostmi m_1, \dots, m_l , kde $\sum_{i=1}^l m_i = n$. Stačí dokázat, že polynom P' má $n-1$ reálných kořenů (každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost).

³Kombinační čísla i oba druhy Stirlingových čísel tvoří trojúhelníky, kde čísla v řádku n lze počítat jako lineární kombinace dvou sousedních čísel z řádku $n-1$. Obecné trojúhelníky tohoto typu jsou studovány v [10], kde je odvozena postačující podmínka pro logaritmickou konkávnost jejich řádků.

⁴Důkaz lemmatu 8 je převzat z [16, str. 146] a důkaz věty 9 z [15, str. 146].

Každý kořen x_i , jehož násobnost je $m_i > 1$, je $(m_i - 1)$ -násobným kořenem polynomu P' (toto známé tvrzení z algebry se snadno dokáže pomocí rozkladu P na kořenové činitele). Odtud plyne, že P' má aspoň $\sum_{i=1}^l (m_i - 1) = n - l$ reálných kořenů. Zbývajících $l - 1$ kořenů získáme z Rolleovy věty: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 < \dots < x_l$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, l - 1\}$ platí $P(x_i) = 0 = P(x_{i+1})$, a tedy existuje $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ splňující $P'(\xi_i) = 0$. \square

Věta 9. *Má-li reálný polynom $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ pouze reálné kořeny, pak posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^n$ a $\{a_k / \binom{n}{k}\}_{k=0}^n$ jsou logaritmicky konkávní.*

Důkaz. Zvolme libovolné $k \in \{1, \dots, n - 1\}$. Zderivujeme-li $(k - 1)$ -krát polynom P , obdržíme polynom

$$Q(x) = (k - 1)!a_{k-1} + k!a_k x + \frac{(k + 1)!}{2}a_{k+1}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n - k + 1)!}a_n x^{n-k+1},$$

který má podle předchozího lemmatu pouze reálné kořeny.

Uvažujme nyní polynom R , který vznikne z polynomu Q , jestliže zapíšeme koeficienty v obráceném pořadí:⁵

$$R(x) = (k - 1)!a_{k-1}x^{n-k+1} + k!a_k x^{n-k} + \frac{(k + 1)!}{2}a_{k+1}x^{n-k-1} + \dots + \frac{n!}{(n - k + 1)!}a_n$$

Povšimněme si, že pro každé $x \neq 0$ platí $R(x) = x^{n-k+1}Q(1/x)$. Odtud plyne, že R má také pouze reálné kořeny. (Je-li $R(x) = 0$, pak buď $x = 0$, nebo $x \neq 0$ a $x^{n-k+1}Q(1/x) = 0$. Ve druhém případě platí $Q(1/x) = 0$, tj. $1/x$ je kořen polynomu Q a x musí být reálné.) Zderivujeme-li $(n - k - 1)$ -krát polynom R , dostaneme kvadratický polynom

$$S(x) = (k - 1)!a_{k-1} \frac{(n - k + 1)!}{2}x^2 + k!a_k(n - k)!x + \frac{(k + 1)!}{2}(n - k - 1)!a_{k+1}.$$

Ten má podle lemmatu 8 pouze reálné kořeny, proto jeho diskriminant musí být nezáporný:

$$0 \leq (k!a_k(n - k)!)^2 - (k - 1)!a_{k-1}(n - k + 1)!(k + 1)!(n - k - 1)!a_{k+1} \quad (5)$$

Po úpravě získáme nerovnost

$$a_{k-1}a_{k+1} \leq \frac{a_k^2 k!^2 (n - k)!^2}{(k - 1)!(n - k + 1)!(k + 1)!(n - k - 1)!} = a_k^2 \frac{k}{k + 1} \frac{n - k}{n - k + 1} < a_k^2,$$

ze které je zřejmé, že posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^n$ je logaritmicky konkávní.⁶ Nerovnost (5) lze ovšem upravit také do tvaru

$$\frac{a_{k-1}(k - 1)!(n - k + 1)!}{n!} \frac{a_{k+1}(k + 1)!(n - k - 1)!}{n!} \leq \frac{a_k^2 k!^2 (n - k)!^2}{n!^2},$$

jejímž důsledkem je logaritmická konkávnost posloupnosti $\{a_k / \binom{n}{k}\}_{k=0}^n$. \square

⁵V angličtině se takový polynom označuje jako *reciprocal polynomial*. Česká terminologie je zde poněkud zavádějící, neboť reciprokým polynomem se obvykle rozumí polynom, jehož koeficienty tvoří palindromickou posloupnost; anglicky se takové polynomy nazývají *self-reciprocal* nebo *palindromic*.

⁶Protože je předchozí nerovnost ostrá, jedná se dokonce o tzv. ryze logaritmicky konkávní posloupnost. Z důkazu věty 3 je zřejmé, že takové posloupnosti mohou mít nejvýše dvě maxima.

Chceme-li dokázat logaritmickou konkávnost jisté posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^n$, pak podle věty 9 stačí ověřit, že polynom $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ má pouze reálné kořeny. Zdůrazněme, že se jedná o postačující, nikoliv však nutnou podmínku; např. posloupnost $(1, 1, 1)$ je logaritmicky konkávní, ale polynom $x^2 + x + 1$ nemá reálné kořeny.

Vezmeme-li posloupnost kombinačních čísel $a_k = \binom{n}{k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, pak z binomické věty plyne

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

a tento polynom má pouze reálný n -násobný kořen $x = -1$. Tím jsme jiným způsobem dokázali, že řádky Pascalova trojúhelníku jsou logaritmicky konkávní.

Pro Stirlingova čísla prvního druhu obdržíme polynom

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Pomocí matematické indukce a vztahu (4) se snadno ověří (viz např. [5, str. 263]), že

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1) \cdots (x+n-1).$$

Polynom na pravé straně má pouze reálné kořeny $0, -1, \dots, -(n-1)$, z čehož plyne, že posloupnost $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$ je logaritmicky konkávní.

Použitím věty 9 lze dokázat i logaritmickou konkávnost Stirlingových čísel druhého druhu; stačí ověřit, že polynom

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k$$

má pouze reálné kořeny. To je poněkud pracnější než v předchozích dvou případech; detaily lze najít v [16, str. 147].

5. Newtonovy a Maclaurinovy nerovnosti

Bezprostředním důsledkem věty 9 jsou tzv. *Newtonovy nerovnosti*, z nichž dále plynou tzv. *Maclaurinovy nerovnosti*. Jedná se o klasické a užitečné výsledky, jejichž historie sahá do 18. století a je úzce spjata s teorií algebraických rovnic.

Věta 10. *Nechť x_1, \dots, x_n jsou reálná čísla. Označme $E_0 = 1$,*

$$E_k = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Pak platí Newtonovy nerovnosti

$$E_k^2 \geq E_{k-1} E_{k+1}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (6)$$

Jsou-li navíc x_1, \dots, x_n kladná, pak platí Maclaurinovy nerovnosti

$$E_1 \geq E_2^{1/2} \geq E_3^{1/3} \geq \dots \geq E_{n-1}^{1/(n-1)} \geq E_n^{1/n}. \quad (7)$$

Důkaz. Pro polynom $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, který má pouze reálné kořeny, platí

$$P(x) = A_0 x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n A_n, \quad (8)$$

kde $A_0 = 1$ a

$$A_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \binom{n}{k} E_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Podle druhé části věty 9 je posloupnost

$$\frac{(-1)^n A_n}{\binom{n}{0}}, \quad \frac{(-1)^{n-1} A_{n-1}}{\binom{n}{1}}, \quad \dots, \quad \frac{-A_1}{\binom{n}{n-1}}, \quad \frac{A_0}{\binom{n}{n}}$$

logaritmicky konkávní. Tato posloupnost je však totožná s posloupností

$$\frac{(-1)^n A_n}{\binom{n}{n}}, \quad \frac{(-1)^{n-1} A_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{-A_1}{\binom{n}{1}}, \quad \frac{A_0}{\binom{n}{0}}.$$

Použitím logaritmické konkávnosti obdržíme vztahy

$$\left(\frac{(-1)^k A_k}{\binom{n}{k}} \right)^2 \geq \frac{(-1)^{k-1} A_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{(-1)^{k+1} A_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

neboli po úpravě

$$\left(\frac{A_k}{\binom{n}{k}} \right)^2 \geq \frac{A_{k-1} A_{k+1}}{\binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (9)$$

Tím jsou dokázány Newtonovy nerovnosti (6), které říkají, že posloupnost $\{E_k\}_{k=0}^n$ je logaritmicky konkávní.

Dále budeme předpokládat, že čísla x_1, \dots, x_n jsou kladná (a tedy E_0, \dots, E_n jsou také kladná), a odvodíme Maclaurinovy nerovnosti.⁷ Víme, že lomená čára spojující body $[k, \log E_k]$, $k \in \{0, \dots, n\}$, je grafem konkávní funkce. Čísla

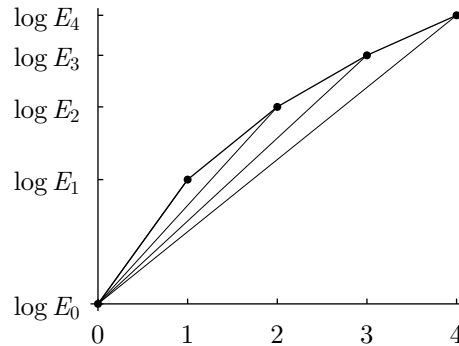
$$L_k = \frac{\log E_k}{k}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

představují směrnice úseček spojujících body $[k, \log E_k]$ s bodem $[0, 0] = [0, \log E_0]$. Z konkávnosti plyne (viz obrázek 2), že tyto směrnice tvoří nerostoucí posloupnost:

$$L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_{n-1} \geq L_n$$

Použitím exponenciální funkce ihned získáme vztahy (7). □

⁷Tato část důkazu je převzata z knihy [13]; tam lze najít i jiný důkaz Newtonových nerovností, který nevyužívá větu 9.



Obr. 2. Směrnice úseček spojujících body $[k, \log E_k]$ s počátkem tvoří nerostoucí posloupnost.

Pro zajímavost poznamenejme, že Isaac Newton v knize *Arithmetica universalis* z roku 1707 zformuloval pravidlo umožňující odhadnout počet komplexních kořenů libovolného polynomu. Nerovnosti (9) z jeho pohledu představovaly nutnou podmínku pro to, aby všechny kořeny polynomu (8), tj. čísla x_1, \dots, x_n , byly reálné (srov. [15]). O důkaz Newtonova pravidla týkajícího se počtu komplexních kořenů se pokusil Colin Maclaurin a dospěl přitom k nerovnostem (7), které dnes nesou jeho jméno.⁸

Pokud ve vztahu (7) ponecháme pouze krajní členy, obdržíme známou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel x_1, \dots, x_n :

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

6. Narozeninový paradox

Jedna ze zajímavých aplikací Maclaurinových nerovností souvisí s tzv. *narozeninovým paradoxem*, což je následující klasická úloha:

Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině k náhodně vybraných lidí mají nějaké dvě osoby narozeniny ve stejný den? Jak velké musí být číslo k , aby hledaná pravděpodobnost činila aspoň 50 %?

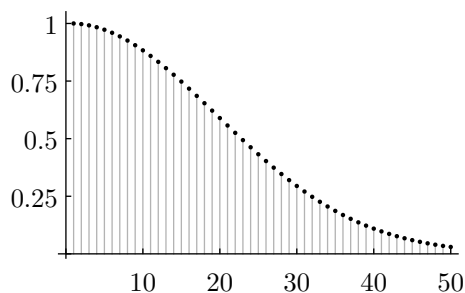
Jednodušší je vypočítat pravděpodobnost opačného jevu, tj. pravděpodobnost, že žádní dva lidé ve skupině k osob nemají narozeniny ve stejný den; označíme ji $P(k)$ a bude nás zajímat, kdy platí $P(k) < 1/2$. Vezmeme-li v úvahu i přestupné roky, pak existuje celkem $n = 366$ různých dat narozenin.

Při řešení úlohy se obvykle předpokládá, že všechna data narozenin jsou stejně pravděpodobná. V takovém případě platí

$$P(k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}.$$

Postupným dosazováním čísel $k \in \mathbb{N}$ lze zjistit, že podmínka $P(k) < 1/2$ je splněna pro $k \geq 23$ (viz obrázek 3). Název „narozeninový paradox“ souvisí se skutečností, že požadovaný počet osob je překvapivě nízký.

⁸Podrobnější informace o historii Newtonových a Maclaurinových nerovností lze najít v [11].



Obr. 3. Hodnoty pravděpodobností $P(k)$, $k \in \{1, \dots, 50\}$, pokud všechna data narozenin jsou stejně pravděpodobná.

Zkusme nyní uvažovat obecnější variantu úlohy, ve které vynecháme nepříliš realistický předpoklad, že všechna data narozenin jsou stejně pravděpodobná.⁹

Protože existuje celkem n různých dat narozenin, můžeme je očíslovat přirozenými čísly $1, \dots, n$. Nechť x_j značí pravděpodobnost, že náhodně zvolená osoba má narozeniny v j -tý den, $j \in \{1, \dots, n\}$. Pak platí

$$P(k) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \\ \text{navzájem různá}}} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = k! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

I když neznáme hodnoty x_1, \dots, x_n , můžeme pomocí Maclaurinových nerovností získat následující horní odhad pro pravděpodobnost $P(k)$:

$$\begin{aligned} P(k) &= k! \binom{n}{k} \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}}{\binom{n}{k}} = k! \binom{n}{k} E_k \leq k! \binom{n}{k} E_1^k = \\ &= k! \binom{n}{k} \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^k = k! \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že žádné dvě osoby ve skupině nemají narozeniny ve stejný den, se tedy oproti předchozí variantě úlohy nezvýšila. To znamená, že pro $k \geq 23$ opět máme aspoň padesátiprocentní pravděpodobnost nalezení dvou osob s narozeninami ve stejný den.¹⁰

7. Závěr

V kombinatorice i v jiných matematických disciplínách se můžeme setkat s mnoha dalšími zajímavými příklady unimodálních nebo logaritmicky konkávních posloupností. Zmíňme například tzv. Eulerova čísla (srov. [1, 5, 9]): Pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{0, \dots, n-1\}$

⁹Z údajů Českého statistického úřadu lze vypočítat, že v letech 2000–2014 se v České republice narodilo v červenci průměrně 9 578 dětí, zatímco v prosinci průměrně jen 8 274 dětí.

¹⁰Tento důkaz založený na použití Maclaurinových nerovností je převzat z [8]; jiný přístup k řešení úlohy lze najít v [3].

definujeme $\langle \frac{n}{k} \rangle$ jako počet permutací $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ s právě k poklesy, tj. permutací π splňujících podmínku

$$|\{i \in \{1, \dots, n-1\}; \pi(i+1) < \pi(i)\}| = k.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\langle \frac{n}{0} \rangle, \langle \frac{n}{1} \rangle, \dots, \langle \frac{n}{n-1} \rangle$ logaritmicky konkávní a unimodální. Toto tvrzení lze dokázat kombinatoricky (viz [1, str. 17]); jinou možností je ověřit, že polynom $\sum_{k=0}^{n-1} \langle \frac{n}{k} \rangle x^k$ má pouze reálné kořeny (viz [1, str. 24]).

Čtenářům se zájmem o hlubší studium unimodálních a logaritmicky konkávních posloupností doporučujeme přehledový článek [12], jehož součástí je i obsáhlý seznam literatury.

L i t e r a t u r a

- [1] BÓNA, M.: *Combinatorics of permutations*, 2nd edition. CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
- [2] BOYADZHIEV, K.N.: *Close encounters with the Stirling numbers of the second kind*. Math. Mag. 85 (2012), 252–266.
- [3] CLEVENSON, M.L., WATKINS, W.: *Majorization and the birthday inequality*. Math. Mag. 64 (1991), 183–188.
- [4] DOBSON, A.J.: *A note on Stirling numbers of the second kind*. J. Comb. Theory 5 (1968), 212–214.
- [5] GRAHAM, R.L., KNUTH, D.E., PATASHNIK, O.: *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, New York, 1994.
- [6] GROSS, J.L.: *Combinatorial methods with computer applications*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
- [7] KLEINBERG, J., TARDOS, É.: *Algorithm Design*. Pearson, 2005.
- [8] MCCONNELL, T.R.: *An inequality related to the birthday problem*. Technical Report, Department of Mathematics, University of Syracuse, 2001.
- [9] PETERSEN, T.K.: *Eulerian Numbers*. Birkhäuser/Springer, New York, 2015.
- [10] SAGAN, B.E.: *Inductive and injective proofs of log concavity results*, Discrete Math. 68 (1988), 281–292.
- [11] SLAVÍK, A.: *O některých klasických nerovnostech*. Sborník 36. mezinárodní konference Historie matematiky, J. Bečvář, M. Bečvářová (eds), Matfyzpress, Praha, 2015.
- [12] STANLEY R. P.: *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*. Ann. New York Acad. Sci., vol. 576, 500–535.
- [13] STEELE, J.M.: *The Cauchy-Schwarz master class. An introduction to the art of mathematical inequalities*. Mathematical Association of America, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [14] TROJOVSKÝ, P., VESELÝ, J.: *Vytvořující funkce*. PMFA 45 (2000), 7–35.
- [15] WAGNER, C.G.: *Newton's inequality and a test for imaginary roots*. Two-Year College Math. J. 8 (1977), 145–147.
- [16] WILF, H.S.: *Generatingfunctionology*, 3rd edition. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.