ÚLOHY O STŘELCÍCH

Antonín Slavík

Šachové úlohy jsou tradiční součástí rekreační matematiky. Většinou jde o úlohy inspirované šachem, k jejichž řešení však nejsou zapotřebí žádné šachové dovednosti – stačí znát způsob, jakým se pohybují jednotlivé šachové figury. K nejznámějším problémům patří (kromě procházek po šachovnici) úlohy týkající se rozmístění maximálního počtu neohrožujících se figur a dále úlohy zaměřené na rozmístění minimálního počtu figur tak, aby ohrožovaly všechna pole šachovnice. Úloha 69-B-I-6 matematické olympiády zní:

Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici 8×8 *tak, aby se střelci navzájem neohrožovali.*

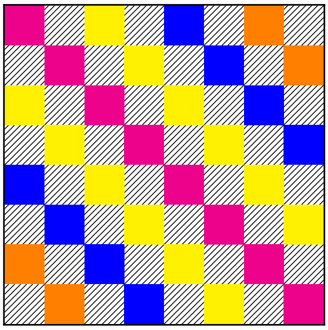
V tomto textu se zaměříme na příbuzné úlohy související s figurou střelce; jde o klasické úlohy převzaté z [Ch1], [Ch2], [JJ], [Wa]. V těchto zdrojích čtenář najde též úlohy věnované dalším figurám. Jak je zmíněno v zadání soutěžní úlohy, střelec se v jednom tahu může posunout o libovolný počet polí, a to v úhlopříčném směru. Barvy figur obvykle nehrají v matematických úlohách žádnou roli, proto budeme v obrázcích všechny střelce znázorňovat černou barvou bez ohledu na to, zda stojí na černém nebo bílém poli.

1 Maximální počet neohrožujících se střelců

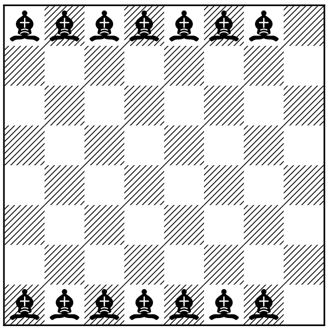
Úloha 1.1. *Dokažte, že maximální počet střelců, které lze rozmístit na šachovnici* 8×8 *tak, aby se navzájem neohrožovali, je* 14.

Řešení. Šachovnici lze rozdělit na 15 navzájem rovnoběžných úhlopříček tak, jak ukazuje obr. 1.

Na každé z úhlopříček může stát nejvýše jeden střelec. Jelikož pole v levém dolním a v pravém horním rohu leží na jedné úhlopříčce, může být střelcem obsazeno nejvýše jedno z nich. Vidíme, že střelců nemůže být více než 14. Obr. 2 ukazuje jeden možný způsob, jak tohoto počtu dosáhnout. □



Obrázek 1: Šachovnice rozdělená na 15 úhlopříček vyznačených střídavě šrafovaně a barevně



Obrázek 2: Rozmístění 14 neohrožujících se střelců

Úloha 1.2. *Dokažte, že pokud je na šachovnici* 8×8 *rozmístěno* 14 *neohrožujících se střelců, pak všichni stojí na okraji šachovnice.*

Řešení. Každému poli šachovnice přiřadíme celé číslo udávající počet střelců, kteří toto pole ohrožují. (Dohodněme se přitom, že každý střelec ohrožuje pole, na kterém stojí.) Každé z těchto čísel je kladné – pokud by některé pole nebylo ohroženo žádným střelcem, mohli bychom na toto pole umístit další figuru, což by bylo ve sporu s předchozí úlohou. Zároveň je zřejmé, že žádné pole není ohroženo více než dvěma střelci.

Polí, na kterých stojí střelec, je 14 a mají číslo 1. Všechna rohová pole mají také číslo 1 a aspoň dvě z nich nejsou obsazena střelcem. Celkem tedy máme aspoň 16 polí s číslem 1 a nejvýše 48 polí s číslem 2. Pro součet S všech čísel na šachovnici tedy platí

$$S \le 1 \cdot 16 + 2 \cdot 48 = 112. \tag{1.1}$$

Všimněme si, že střelec stojící na libovolném krajním poli šachovnice ohrožuje právě 8 polí. Naopak střelec stojící jinde než na krajním poli ohrožuje aspoň 10 polí. Označíme-li písmenem a počet střelců stojících mimo okraj šachovnice, pak z předchozích pozorování plyne

$$S \ge a \cdot 10 + (14 - a) \cdot 8 = 2a + 112. \tag{1.2}$$

Obě nerovnosti (1.1) a (1.2) mohou platit současně jen tehdy, když $a = 0$, tj. když všech 14 střelců stojí na okraji šachovnice. □

Úloha 1.3. *Dokažte, že počet způsobů, jak na šachovnici* 8×8 *rozmístit* 14 *střelců tak, aby se navzájem neohrožovali, je* 256*.*

Řešení. Z předchozí úlohy víme, že všech 14 střelců musí stát na okraji šachovnice. Zaměříme se na její horní řádek. Na prvním (resp. posledním) poli tohoto řádku stojí střelec právě tehdy, když poslední (resp. první) pole dolního řádku je volné.

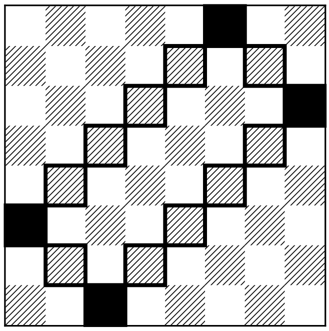
Uvažujme dále některé ze šesti polí horního řádku, které není na okraji; nechť jde o k-té pole zleva. Toto pole je součástí dvou úhlopříček, jejichž zbývající koncová pole leží na levém a pravém okraji šachovnice, viz obr. 3. Tato dvě pole leží na dalších úhlopříčkách, které se protínají v dolním řádku šachovnice, a to na k-tém poli zprava, viz opět obr. 3. Je-li na šachovnici rozmístěn maximální počet neohrožujících se střelců, znamená to, že ze čtyř zmíněných polí jsou obsazena buď pole u horního a dolního okraje, nebo pole u levého a pravého okraje.

Vidíme, že informace o pozicích střelců v horním řádku již jednoznačně určuje rozmístění všech ostatních střelců. Počet možností, jak obsadit či neobsadit pole v horním řádku, je $2^8 = 256$. □

2 Pokrývání šachovnice střelci

Budeme říkat, že daná skupina střelců pokrývá jistou množinu polí na šachovnici, pokud každé uvažované pole buď obsahuje střelce, nebo je některým střelcem ohroženo.

Úloha 2.1. *Dokažte, že nejmenší počet střelců, kterými lze pokrýt šachovnici* 8×8*, je* 8*.*



Obrázek 3: Přítomnost či nepřítomnost střelce na vyznačeném poli v horním řádku jednoznačně určuje obsazenost vyznačených polí u zbývajících tří okrajů šachovnice

Řešení. Každý střelec stojící na bílém (resp. černém) poli ohrožuje pouze bílá (resp. černá pole). Potřebujeme tedy zjistit, kolika střelci lze pokrýt pole každé ze dvou barev.

Představme si, že celou šachovnici otočíme o 45 stupňů. Střelci se pak z našeho pohledu pohybují vodorovně či svisle. Uprostřed otočené šachovnice se nachází obrazec složený z černých polí tvořený čtyřmi řádky a pěti sloupci, viz obr. 4 vlevo. K pokrytí tohoto obrazce jistě potřebujeme aspoň 4 střelce stojící na černých polích.

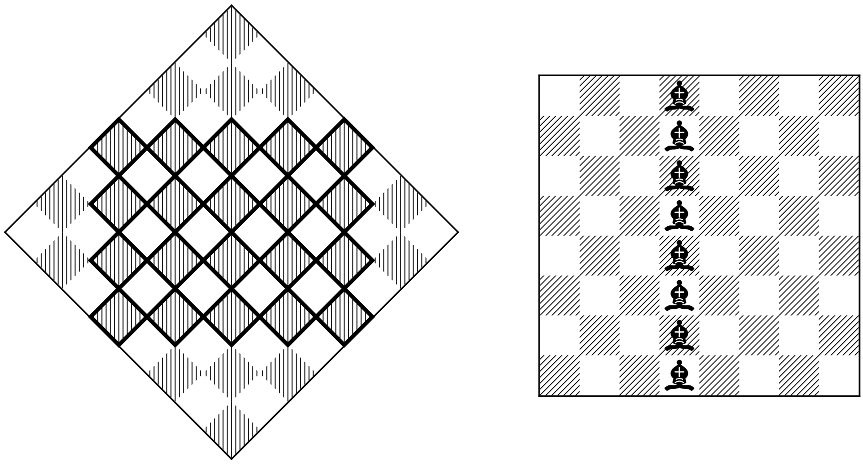
Podobně k pokrytí všech bílých polí potřebujeme další 4 střelce. 8 střelců již stačí k pokrytí celé šachovnice, viz obr. 4 vpravo. □

Úloha 2.2. *Dokažte, že počet způsobů, jak pokrýt šachovnici* 8×8 *pomocí* 8 *střelců, je* 11 664.

Řešení. Ukážeme, že počet způsobů, jak pokrýt černá pole pomocí 4 střelců, je 108. Díky symetrii je stejný i počet způsobů, jak pokrýt bílá pole, a výsledný počet pokrytí celé šachovnice je $108^2 = 11\,664$.

Stejně jako v řešení předchozí úlohy využijeme toho, že po otočení šachovnice o 45 stupňů se střelci pohybují vodorovně či svisle.

Uvažujme pouze černá pole na otočené šachovnici. Prostřední čtyři řádky v tomto obrazci jsou pokryty 4 střelci jen tehdy, když každý z nich obsahuje jednu figuru (v opačném případě existuje řádek a sloupec neobsahující střelce, a tedy jejich společné pole není pokryto žádnou figurou). Podobně platí, že prostřední tři sloupce jsou pokryty 4 střelci jen tehdy, když každý z nich obsahuje aspoň jednu figuru. Pokud naopak každý



Obrázek 4: Otočená šachovnice s vyznačeným obrazcem o rozměrech 4×5 (vlevo); pokrytí šachovnice 8 střelci (vpravo)

ze zmíněných tří sloupců a čtyř řádků obsahuje jednu figuru, pak jsou pokryta všechna černá pole.

Nyní je zřejmé, že při pokrytí černých polí 4 střelci vždy nastane jedna z následujících možností:

- Všechny 4 figury jsou v prostředních třech sloupcích (a zároveň v prostředních čtyřech řádcích). V jistém sloupci tedy stojí 2 figury. Počet rozmístění tohoto druhu je $3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 36$.

- V prostředních třech sloupcích jsou 3 figury a čtvrtá stojí jinde (přičemž všechny 4 figury jsou v prostředních čtyřech řádcích). Počet polí mimo prostřední tři sloupce, na která lze umístit jednoho střelce, je 12. Počet rozmístění všech čtyř figur je tedy $12 \cdot 3! = 72$.

Ukázali jsme, že celkový počet způsobů, jak pokrýt černá pole 4 střelci, je $36 + 72 = 108$. $\square$

3 Závěr

Matematické úlohy o šachových figurách lze řešit nejen na klasické šachovnici o rozměrech 8×8, ale též obecněji na čtvercových šachovnicích

$n \times n$ (či dokonce obdélníkových šachovnicích $m \times n$). Čtenář se může pokusit zobecnit úlohy z tohoto textu a odpovědět na následující otázky:

- Jaký maximální počet střelců lze rozmístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby se navzájem neohrožovali? Kolika způsoby toho lze dosáhnout?
- Jakým nejmenším počtem střelců lze pokrýt šachovnici $n \times n$? Kolika způsoby to lze udělat?

Příslušná řešení lze dohledat v [Ch1], [Ch2], [JJ], [Wa].

Literatura

[Ch1] L. Chybová: *Šachové úlohy v kombinatorice*. Diplomová práce, MFF UK, 2017. Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf`.

[Ch2] L. Chybová: *Šachové úlohy v kombinatorice*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 63 (2018), 125–147. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147328`.

[JJ] A. M. Jaglom, I. M. Jaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover Publications, Inc., 1964.

[Wa] J. J. Watkins: *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, 2004.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`