PÝTHAGOREJSKÉ TROJÚHELNÍKY A JINÉ ÚLOHY

Antonín Slavík

Úloha 71-B-I-1 matematické olympiády je pěknou ukázkou problému, kdy se za otázkou z geometrie skrývá algebraická úloha:

Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990*. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.*

Hledání pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran fascinovalo matematiky již ve starověku (viz např. [Be], [Ma]); jedná se o tzv. pýthagorejské trojúhelníky.

1 Pýthagorejské trojice

Označíme-li délky odvěsen pýthagorejského trojúhelníku písmeny a, b a délku přepony písmenem c, pak platí $a^2+b^2=c^2$. Trojice přirozených čísel (a,b,c) s touto vlastností se nazývají pýthagorejské, přičemž nejznámějším příkladem je $(3,4,5)$. Z každé pýthagorejské trojice (a,b,c) lze získat nekonečně mnoho dalších trojic ve tvaru $(k\cdot a, k\cdot b, k\cdot c)$, kde $k\in\mathbb{N}$. Takové trojice ovšem nejsou zvlášť zajímavé a k nalezení všech pýthagorejských trojic stačí zkoumat případy, kdy čísla a, b, c jsou nesoudělná, tj. nemají společného dělitele většího než 1. Tyto pýthagorejské trojice se nazývají primitivní a na hledání takové trojice vede úloha 71-B-I-1.

Je zřejmé, že v žádné primitivní pýthagorejské trojici nemohou být obě čísla a, b sudá. Nemohou však být ani obě lichá, jinak by číslo na pravé straně rovnosti $a^2+b^2=c^2$ bylo dělitelné 4, zatímco levá strana by při dělení 4 dávala zbytek 2. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že a je sudé a b je liché. Číslo $c^2=a^2+b^2$ je pak liché, tudíž i c je liché a obvod pravoúhlého trojúhelníka $a+b+c$ je sudé číslo, což je v souladu se zadáním úlohy, kde máme požadavek $a+b+c=11\,990$.

Označíme-li $a=2t$, dostáváme podmínku

$$(2t)^2+b^2=c^2,$$

neboli po úpravě

$$t^2=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}.$$

Na pravé straně máme součin dvou přirozených čísel, která jsou nesoudělná (ověření tohoto faktu přenecháváme čtenáři). S ohledem na tvar levé strany se tedy musí jednat o druhé mocniny jistých přirozených čísel m, n:

$$\frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2.$$

Z předchozích rovností plynou vztahy

$$c = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad a = 2mn, \tag{1.1}$$

které byly známy již ve starověku. Ukázali jsme, že každou primitivní pýthagorejskou trojici lze vyjádřit v tomto tvaru.

Obráceně, pokud za m, n dosadíme libovolná přirozená čísla splňující $m > n$, je snadné ověřit, že takto získané hodnoty a, b, c skutečně splňují $a^2 + b^2 = c^2$ (nemusí se ovšem nutně jednat o primitivní pýthagorejskou trojici).

Vztahy (1.1) představují jednu možnou, nikoliv však nejkratší cestu k řešení soutěžní úlohy. Je zajímavé, že i bez informace o tom, že jedna z odvěsen má prvočíselnou délku, je hledaný pýthagorejský trojúhelník určen jednoznačně. Informace o prvočíselnosti se však při hledání řešení dá s výhodou využít.

K problematice pýthagorejských trojic a trojúhelníků existuje velké množství zdrojů. Výše uvedené úvahy vedoucí ke vztahům (1.1) lze najít např. v [Ma]. Další zajímavé informace jsou uvedeny v [Ře], [Sl], [Wi1].

2 Další úlohy

Podívejme se na některé další úlohy týkající se obrazců s celočíselnými délkami stran.

Úloha 2.1. [1] *Popište všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obvod má stejnou hodnotu jako obsah.*

Řešení. Použijeme obvyklé značení, kdy a, b jsou délky odvěsen a c je délka přepony. Platí tedy

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leq b$. Aby měly obvod a obsah stejnou hodnotu, musí platit

$$\frac{1}{2}ab = a + b + c.$$

[1] Úloha je převzata z [KVW], problém 95.

Kombinací předchozích dvou rovností a postupnými úpravami získáváme:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2 \\
a^2 + b^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &= \frac{1}{4}a^2b^2 - a^2b - ab^2 + 2ab \\
0 &= ab - 4a - 4b + 8 \\
8 &= (a-4)(b-4)
\end{aligned}$$

Na pravé straně je součin dvou celých čísel, která jsou děliteli 8. Jde tedy o čísla z množiny $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, \}$. S ohledem na předpoklad $a \leq b$ připadají v úvahu následující možnosti:

- $a - 4 = 1$, $b - 4 = 8$, tj. $a = 5$, $b = 12$. Pak $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
- $a - 4 = 2$, $b - 4 = 4$, tj. $a = 6$, $b = 8$. Pak $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
- $a - 4 = -8$, $b - 4 = -1$, tj. $a = -4$, $b = 3$, což nevyhovuje zadání, protože a musí být kladné.
- $a - 4 = -4$, $b - 4 = -2$, tj. $a = 0$, $b = 2$, což nevyhovuje zadání, protože a musí být kladné.

Úloha má právě dvě řešení, pravoúhlé trojúhelníky o stranách délek 5, 12, 13, resp. 6, 8, 10. □

Následující jednodušší variantu úlohy 2.1, kde místo troúhelníků uvažujeme obdélníky, přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Cvičení 2.2. *Popište všechny obdélníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obvod má stejnou hodnotu jako obsah.*

Pracnější je následující varianta úlohy, kdy se z roviny přesouváme do prostoru.

Úloha 2.3. [2] *Popište všechny kvádry s celočíselnými délkami stran, jejichž objem má stejnou hodnotu jako povrch.*

Řešení. Nechť strany kvádru mají délky $a, b, c \in \mathbb{N}$; bez újmy na obecnosti lze předpokládat $a \leq b \leq c$. Zajímá nás, kdy platí

$$abc = 2ab + 2ac + 2bc.$$

[2] Úloha i předchozí cvičení jsou převzaty ze [Si], problém 66.

Vidíme, že $abc > 2bc$, tedy $a > 2$. Dále můžeme psát

$$abc = \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3}.$$

Kdyby platilo $c < 6$, pak také $a, b < 6$, a dostali bychom

$$abc < 2ab + 2ac + 2bc,$$

což je spor. Vidíme tedy, že $c \geq 6$. Kdyby platilo $a > 6$, pak také $b, c > 6$, a dostali bychom

$$abc > 2ab + 2ac + 2bc,$$

což je spor. Vidíme tedy, že $a \in \{3, 4, 5, 6\}$. Dále pokračujeme rozborem těchto čtyř případů. Pokud $a = 3$, pak řešíme následující rovnici:

$$\begin{aligned} 3bc &= 6b + 6c + 2bc \\ bc - 6b - 6c &= 0 \\ (b-6)(c-6) &= 36 \end{aligned}$$

Protože $b \leq c$ a $c \geq 6$, musí být na levé straně součin dvou přirozených čísel, kde první činitel nepřevyšuje druhý. Je celkem 5 možností, jak tímto způsobem vyjádřit číslo 36:

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

Dostáváme tak následující trojice (a, b, c):

$$(3, 7, 42),\ (3, 8, 24),\ (3, 9, 18),\ (3, 10, 15),\ (3, 12, 12)$$

Podobným způsobem se rozeberou případy $a \in \{4, 5, 6\}$; tento úkol již přenecháme čtenáři a prozradíme jen, že úloha má celkem 10 řešení. $\square$

3 Hérónovské trojúhelníky

Kromě pýthagorejských trojúhelníků existuje další zajímavý typ trojúhelníků, tzv. hérónovské trojúhelníky. Jedná se o trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obsah je rovněž celočíselný. Každý pýthagorejský trojúhelník je zřejmě hérónovský, neboť jeho obsah je $ab/2$ a víme, že jedno z čísel a, b je sudé.

Příkladem hérónovského trojúhelníku, který není pýthagorejský, je rovnoramenný trojúhelník se stranami o délkách 5, 5, 6; jeho obsah je podle Hérónova vzorce roven

$$\sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-5) \cdot (8-6)} = 12.$$

Ze dvou pýthagorejských trojúhelníků, které mají shodnou odvěsnu o délce a a jsou popsány trojicemi (a, b_1, c_1) a (a, b_2, c_2), lze složit hérónovský trojúhelník: Shodné odvěsny přiložíme k sobě tak, abychom dostali trojúhelník o stranách $(c_1, c_2, b_1 + b_2)$. Jeho obsah je součtem obsahů výchozích trojúhelníků, tj.

$$\frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}ab_2 = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2).$$

To je celé číslo, neboť víme, že buď a je sudé, nebo b_1 a b_2 jsou sudá.

Popsaným způsobem vznikne např. výše zmíněný trojúhelník $(5, 5, 6)$ ze dvou pýthagorejských trojúhelníků $(4, 3, 5)$. Naopak hérónovský trojúhelník $(5, 29, 30)$ nelze získat složením dvou pýthagorejských trojúhelníků, neboť ani jedna z jeho výšek není celočíselná.

Hérónovské trojúhelníky mají celou řadu pozoruhodných vlastností. Jedna z nich, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři jako cvičení, snadno plyne z Hérónova vzorce.

Cvičení 3.1. *Dokažte, že obvod každého héronovského trojúhelníku je sudé číslo.*

Další vlastnosti hérónovských trojúhelníků včetně jejich vztahu k pýthagorejským trojúhelníkům jsou popsány např. v [Do], [Sl], [Wi2].

Literatura

[Be] J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky.* In: J. Bečvář, E. Fuchs (eds.): *Historie matematiky I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, srpen 1993*, JČMF, 1994, 20–107. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400590`.

[Do] A. Dohnalová: *Heronovské trojúhelníky.* Diplomová práce, Pedagogická fakulta JU, 2010. Dostupné z: `http://tinyurl.com/kb5ux5c6`.

[KVW] J. D. E. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon: *Which way did the bicycle go? . . . and other intriguing mathematical mysteries.* The Mathematical Association of America, 1996.

[Ma] E. Maor: *The Pythagorean Theorem. A 4000-Year History.* Princeton University Press, 2007.

[Ře] J. Řeháček: *Matykání: jak si nabrnkat pythagorejské trojice.* `https://janrehacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=603423`.

[Si] D. Singmaster: *Problems for metagrobologists. A collection of puzzles with real mathematical, logical or scientific content.* World Scientific, 2016.

[Sl] M. Sláma: *Pythagorejské trojúhelníky.* Bakalářská práce, Pedagogická fakulta UK, 2015. Dostupné z: `http://tinyurl.com/ey3hm9wc`.

[Wi1] *Wikipedia: Pythagorean triple.* Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple`.

[Wi2] *Wikipedia: Heronian triangle.* Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle`.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`