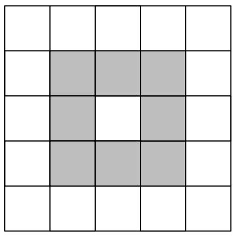
LODĚ, TANKY A KRÁLOVÉ

Antonín Slavík

Zadání úlohy 70-B-I-6 matematické olympiády je velmi atraktivní, připomíná známou námořní bitvu na čtverečkovaném papíru nebo některé počítačové hry:

Na plánu o rozměrech 12×12 *čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce* 3×3 *(na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?*



Obrázek 1: Tvar lodi v soutěžní úloze

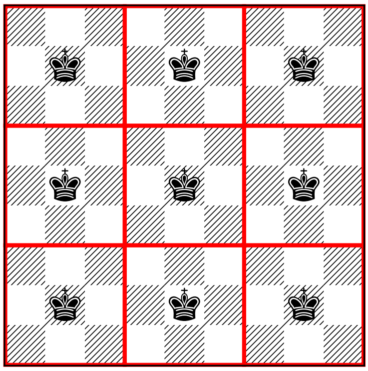
Řešení úlohy nevyžaduje složité výpočty, stačí dobrý nápad a chvíle experimentování.

1 Králové na šachovnici

Ukažme si úlohu, jejíž zadání vypadá na první pohled odlišně, ale princip řešení je velmi podobný.

Úloha 1.1. *Král je šachová figura, která se v jednom tahu může posunout o jedno pole ve vodorovném, svislém nebo diagonálním směru. Jaký minimální počet králů musíme umístit na šachovnici o rozměrech* 9×9 *tak, aby společně ohrožovali všechna pole? (Král ohrožuje pole, na kterém stojí, nebo na které se může dostat pomocí jednoho tahu.)*

Řešení. Obrázek 2 ukazuje devět králů, kteří ohrožují všechna pole šachovnice 9×9. Každý z nich totiž ohrožuje všechna pole čtverce 3×3, v jehož středu stojí (na obrázku jsou čtverce vyznačeny barevně). Menší počet králů nestačí – pokud by v některém čtverci 3×3 nebyl žádný král, pak prostřední pole tohoto čtverce nebude ohroženo.



Obrázek 2: Devět králů ohrožuje všechna pole šachovnice 9×9

Je možné použít i mírně odlišné zdůvodnění, které je užitečné při řešení podobné úlohy na šachovnicích o jiných rozměrech: Žádný král nemůže ohrozit více než jedno políčko z těch, na kterých stojí králové z obr. 2. Z toho plyne, že méně než devět králů nemůže stačit. □

Jako cvičení si čtenář může zkusit vyřešit podobnou úlohu na šachovnicích 7×7, 8×8, resp. obecněji $n \times n$; řešení lze najít v článku [Chy], kde jsou uvažovány i jiné šachové figury.

2 Pohyblivý tank na šachovnici

Budeme pokračovat některými náročnějšími problémy, které volně souvisejí se soutěžní úlohou 70-B-I-6. Následující úloha je převzata z [Wa1], kde je řešena i obecnější verze s tankem pohybujícím se po hranách neorientovaného grafu.

Úloha 2.1. *Dobře maskovaný tank je ukryt na neznámém políčku šachovnice o rozměrech* 41×41. *K jeho zničení jsou nutné dva zásahy. V okamžiku, kdy je tank poprvé zasažen, se přesune vodorovným nebo svislým směrem na sousední políčko (zůstává však nadále neviditelný). Jaký je minimální počet střel nutných k tomu, abychom tank s jistotou zničili? (Každá střela zasáhne právě jedno políčko.)*

Řešení. Předpokládejme, že šachovnice je obarvena tak, že rohová políčka jsou černá. Celkový počet černých políček je tedy 841 a bílých políček je 840.

Pokud nejprve vystřelíme na všechna bílá políčka, poté na všechna černá a nakonec opět na všechna bílá, pak máme jistotu, že tank bude zničen; tato strategie potřebuje 2521 střel.

Ukažme, že menší počet střel nemusí stačit. Pokryjeme všechna políčka šachovnice s výjimkou jednoho (např. rohového) pomocí nepřekrývajících se domin, tj. dlaždic o rozměrech 2×1. Těchto domin je 840. Předpokládejme, že tank stojí na začátku na některém dominu a po zásahu se přesune na druhé políčko domina. Pokud bychom věděli, o které domino se jedná, ale nevěděli, na kterém ze dvou políček tank na začátku stojí, potřebovali bychom k jeho zničení 3 střely. Ve skutečnosti však správné domino neznáme, a tak potřebujeme aspoň $3 \cdot 840$ střel. Může se ovšem stát, že tank bude začínat na políčku, které není pokryto dominem. Abychom ošetřili i tento případ, musíme aspoň jednou vystřelit na nepokryté políčko. Pokud to uděláme hned na začátku, pak se po zásahu tank přesune na některé domino, kde bude v další fázi zničen. Celkem tedy potřebujeme aspoň $3 \cdot 840 + 1 = 2521$ střel. □

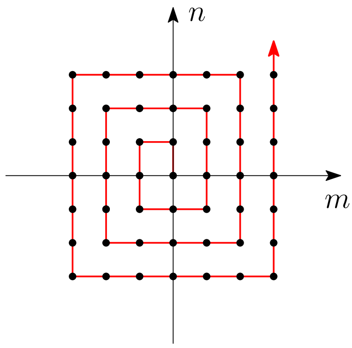
3 Loď na přímce

Následující úloha je převzata z [Wa2].

Úloha 3.1. *Na reálné ose se nachází nepřátelská loď. Víme, že vyplouvá z jistého bodu $n \in \mathbb{Z}$ a pohybuje se konstantní rychlostí $m \in \mathbb{Z}$ jednotek za sekundu (kladná hodnota znamená pohyb vpravo, záporná vlevo). Neznáme hodnoty m, n a nevíme, jakým směrem se loď pohybuje. Každou sekundu můžeme vystřelit do libovolného bodu reálné osy. Navrhněte strategii, která zaručí, že loď bude v konečném čase zničena. (Ke zničení stačí jeden zásah.)*

Řešení. Nechť loď vyplouvá z bodu n v čase $t_0 = 0$ rychlostí m. V čase t sekund ji zasáhneme právě tehdy, když vystřelíme do bodu $n + m \cdot t$. Abychom loď s jistotou zasáhli, potřebujeme postupně zkoušet všechny možné dvojice $m, n \in \mathbb{Z}$. Jak to zařídit? Dvojici m, n můžeme interpretovat jako souřadnice bodu v rovině. Stačí tedy ukázat, že všechny body v rovině s celočíselnými souřadnicemi lze seřadit do posloupnosti. Jeden možný způsob, jak toho dosáhnout, ukazuje obrázek 3. Hledaná strategie pak vypadá tak, že v čase t vezmeme t-tou dvojici (m, n) a vystřelíme do bodu $n + m \cdot t$. □

Čtenář obeznámený se základy teorie množin si jistě všiml, že strategie popsaná v řešení předchozí úlohy funguje díky tomu, že nepřátelská loď se pohybuje po bodech s celočíselnými souřadnicemi celočíselnou



Obrázek 3: Spirála procházející všemi body s celočíselnými souřadnicemi

rychlostí a množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je spočetná. Na webu [Wa2] je vyřešena i mnohem obtížnější verze úlohy, kdy polohy a rychlosti nemusejí být celočíselné a loď má kladnou délku (v naší verzi úlohy jsme loď považovali za hmotný bod).

4 Torpédování lodě

V souvislosti s ničením nepřátelských lodí nelze nezmínit následující klasickou úlohu, která je převzata z [Nah]. Jedná se o problém, který sice příliš nesouvisí s předchozími úlohami v této kapitole, zato však dokládá, jak užitečná je znalost geometrie pro kariéru v armádě.

Úloha 4.1. *Z bodu A v rovině vyplouvá nepřátelská loď a pohybuje se po polopřímce p rychlostí v_L. Máme za úkol ve stejném čase vystřelit torpédo z bodu B rychlostí $v_T > v_L$ tak, aby zasáhlo loď. Jakým směrem máme vystřelit?*

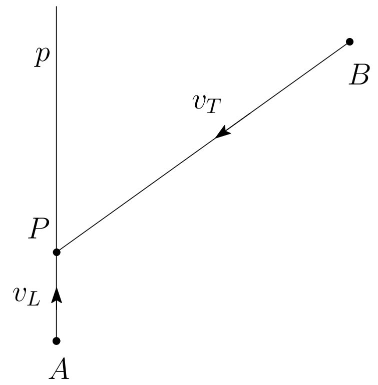
Řešení. Situaci znázorňuje obrázek 4. Naším úkolem je najít bod P, do kterého se loď i torpédo dostanou za stejný čas t.

Hledáme tedy bod P ležící na polopřímce p a splňující

$$\frac{|AP|}{v_L} = \frac{|BP|}{v_T},$$

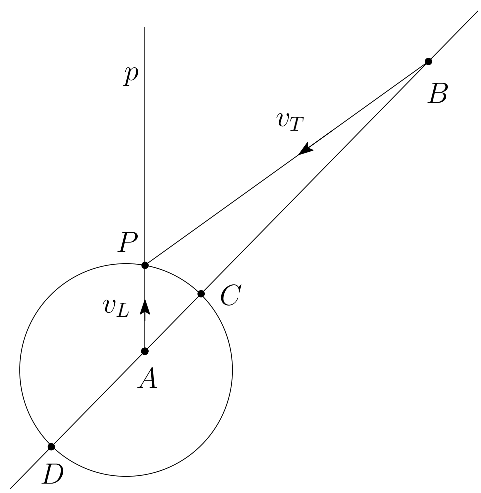
nebo ekvivalentně $\frac{|AP|}{|BP|} = k$, kde $k = v_L/v_T < 1$ je poměr rychlostí. Množina všech bodů X v rovině splňujících podmínku

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$



Obrázek 4: Loď a torpédo se střetnou v bodě P; ilustrace pro $v_T/v_L = 4$

kde $0 < k \neq 1$, je kružnice[1] (tzv. Apollóniova kružnice) nad průměrem CD, kde C, D jsou body na přímce AB splňující $\frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AD|}{|BD|}$; jeden z bodů C, D je vnitřním bodem úsečky AB, druhý jejím vnějším bodem. Hledaný bod P lze tudíž najít jako průsečík této kružnice s polopřímkou p, viz obrázek 5. $\square$



Obrázek 5: Bod P je průsečíkem Apollóniovy kružnice s polopřímkou p

[1] Tento poznatek lze odvodit např. pomocí analytické geometrie, přičemž je vhodné volit soustavu souřadnic tak, aby body A, B ležely na ose x; viz [Nah, str. 31–32]. Jiný důkaz založený na vektorovém počtu lze najít na stránce [Wi]. Důkaz využívající pouze syntetické geometrie je popsán v [Šed, str. 14–16].

Předchozí úloha bývá někdy formulována tak, že loď vyplouvající z bodu B se snaží dostihnout loď plující po polopřímce p (viz [Wi]). Pokud jsou body A, B dostatečně blízko, pak úloha může mít řešení i v případě $v_T < v_L$. Může se dokonce stát, že Apollóniova kružnice protne polopřímku ve dvou bodech – úloha pak má dvě řešení.

5 Závěr

Další úlohy související se 70-B-I-6 lze najít v archivu matematické olympiády [MO], doporučujeme zejména úlohy 58-B-I-4 a 58-B-II-2.

Literatura

[Chy] L. Chybová: *Šachové úlohy v kombinatorice.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 63 (2018), 125–147. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147328.

[MO] *Matematická olympiáda.* http://www.matematickaolympiada.cz.

[Nah] P. J. Nahin: *Chases and Escapes. The Mathematics of Pursuit and Evasion.* Princeton University Press, 2007.

[Šed] J. Šedivý: *O podobnosti v geometrii.* Škola mladých matematiků, sv. 7. Mladá fronta, 1963. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403480.

[Wa1] S. Wagon: *Problem of the Week 1224: War Games.* Dostupné z: http://stanwagon.com/potw/2016/p1224.html.

[Wa2] S. Wagon: *Problem of the Week 1164: Stop the Battleship.* Dostupné z: http://stanwagon.com/potw/fall13/p1164.html.

[Wi] *Wikipedia: Circles of Apollonius.* Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
slavik@karlin.mff.cuni.cz