Geometrické důkazy v matematické analýze

Antonín Slavík

Abstrakt. Článek představuje alternativní pohled na některé známé výsledky z matematické analýzy. Ukazuje jejich geometrickou interpretaci, případně využívá vhodných ilustrací ke zdůvodnění platnosti příslušných tvrzení. Uvedené postupy nejsou vždy zcela precizní, na rozdíl od formálně přesných důkazů však umožňují hlubší porozumění problematice.

Následující text je věnován geometrickým interpretacím vybraných výsledků ze základního kurzu matematické analýzy. Postupně se zaměříme na pět témat: Eulerovo číslo, Cauchyovu větu o střední hodnotě, l'Hospitalovo pravidlo, integraci per partes a Youngovu nerovnost.

1. Eulerovo číslo jako limita posloupnosti

Existuje mnoho různých přístupů k definici Eulerova čísla e; asi nejčastěji se zavádí jako limita posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Nevýhodou tohoto přístupu je skutečnost, že postrádá geometrickou interpretaci a zpočátku není jasné, proč právě tato limita hraje v matematice klíčovou roli.

Další možností je nejprve definovat exponenciální funkci, např. jako součet mocninné řady $\exp(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, a poté položit $\mathrm{e}=\exp(1)$. Čím ale motivovat zavedení samotné exponenciály? Je možné ukázat, že představuje řešení jedné z nejjednodušších lineárních diferenciálních rovnic $y'(x)=y(x)$ s počáteční podmínkou $y(0)=1$. Vyřešením této rovnice se pak otevírá cesta k řešení všech lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

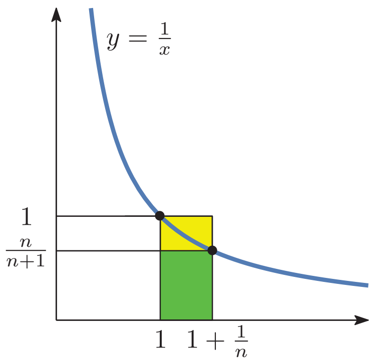
Snad ještě názornější je začít s definicí přirozeného logaritmu

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,\qquad x\in(0,\infty),\tag{1}$$

která má jasný geometrický význam: $\ln x$ je obsah rovinného útvaru mezi intervalem $[1,x]$ na ose x a hyperbolou $y=\frac{1}{x}$ (pro $x<1$ používáme konvenci $\int_1^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_x^1\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$). Z definice (1) se poměrně snadno odvodí další standardní vlastnosti přirozeného logaritmu, např. identita $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$ pro $x,y>0$. Je pozoruhodné, že takto postupovali již v 17. století jezuitští matematikové Grégoire de Saint-Vincent a Alphonse Antonio de Sarasa, a to ještě před objevem integrálního počtu – pouze na základě geometrických úvah, viz např. [3], str. 154–156.

Funkce definovaná vztahem (1) je rostoucí, a tudíž k ní existuje inverzní funkce, která se nazývá exponenciála. Eulerovo číslo je hodnota exponenciály v bodě 1, neboli

Doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz



Obr. 1. Horní a dolní odhad pro $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

číslo x takové, že obsah oblasti mezi intervalem $[1, x]$ a hyperbolou je 1. Nyní můžeme ukázat, že tato definice je ekvivalentní s definicí založenou na limitě posloupnosti.

Věta 1.1. *Platí* $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Podle definice platí $\ln \mathrm{e} = 1$, a proto stačí dokázat zlogaritmovaný vztah

$$1 = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{2}$$

Následující postup je popsán v [6], str. 57: Obrázek 1 ukazuje, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $[1, 1 + \frac{1}{n}]$ shora i zdola omezit konstantními funkcemi:

$$\frac{n}{n+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq 1.$$

Pro obsahy oblastí pod grafy těchto tří funkcí na intervalu $[1, 1 + \frac{1}{n}]$ platí

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \leqq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} \cdot 1,$$

čili po úpravě

$$\frac{n}{n+1} \leqq n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqq 1.$$

Přechodem k limitě pro $n \to \infty$ získáme požadovaný vztah (2) a věta 1.1 je dokázána. Čtenář si může promyslet, že téměř stejným postupem lze dokázat obecnější vztah $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Zastavme se ještě u posloupnosti $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ a pomocí jednoduché geometrické úvahy ukažme, že je rostoucí.

Věta 1.2. *Posloupnost* $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je rostoucí.*

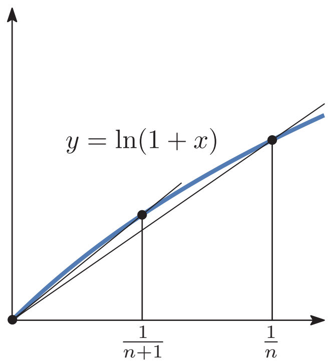
Postupujme podle [5], str. 116. Stačí dokázat, že zlogaritmovaná posloupnost, tj. posloupnost $\{n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\}_{n=1}^{\infty}$, je rostoucí, tj. že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < (n+1) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

neboli

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{1/(n+1)}. \tag{3}$$

Platnost této nerovnosti je již zřejmá z obrázku 2. Na obrázku jsou znázorněny sečny ke grafu funkce $f(x) = \ln(1+x)$ spojující bod $(0, 0)$ s bodem $(\frac{1}{n}, f(\frac{1}{n}))$, resp. s bodem $(\frac{1}{n+1}, f(\frac{1}{n+1}))$. Nerovnost (3) vyjadřuje skutečnost, že směrnice první sečny je větší než směrnice druhé sečny, což je důsledkem konkávnosti funkce f. (Konkávnost f plyne z definice (1) a ze skutečnosti, že $y = \frac{1}{x}$ je na intervalu $(0, \infty)$ klesající funkce.)



Obr. 2. Důkaz tvrzení, že $\{n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost

2. Cauchyova věta o střední hodnotě

Ke klasickým výsledkům diferenciálního počtu patří Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova věta o střední hodnotě. V přednáškách z matematické analýzy se často zmiňuje geometrická interpretace prvních dvou vět (existence vodorovné tečny, resp. tečny rovnoběžné se spojnicí krajních bodů grafu funkce na uzavřeném intervalu). O něco méně známý je geometrický význam Cauchyovy věty. Je popsán např. v článku [2], kde lze najít i netradiční důkaz založený na Rolleově větě (obvyklý důkaz využívá Lagrangeovu větu). Začneme připomenutím Cauchyovy věty.

Věta 2.1. *Jestliže reálné funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a mají vlastní derivace na intervalu (a, b), pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)). \tag{4}$$

Uvažujme parametrizovanou křivku

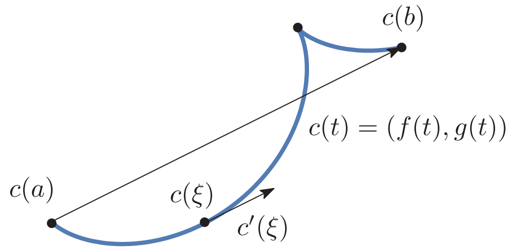
$$c(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in [a, b].$$

Rovnost (4) platí, právě když

$$\det \begin{pmatrix} f'(\xi) & f(b) - f(a) \\ g'(\xi) & g(b) - g(a) \end{pmatrix} = 0,$$

což nastává, právě když vektory $c(b) - c(a)$ a $c'(\xi)$ jsou lineárně závislé.

Pokud $c(a) = c(b)$, pak vztah (4) platí pro každou volbu $\xi \in (a, b)$. Předpokládejme dále, že $c(a) \neq c(b)$. Pro každé $\xi \in (a, b)$ je vektor $c'(\xi)$ buď nulový, nebo se jedná o vektor tečny ke křivce c v bodě $c(\xi)$. Cauchyova věta tedy tvrdí, že křivka c buď obsahuje bod, ve kterém je její derivace nulová (tzv. singulární bod), nebo bod, ve kterém je tečna rovnoběžná se spojnicí krajních bodů křivky. Obě možné situace (které mohou nastat současně) ukazuje obrázek 3.



Obr. 3. Geometrický význam Cauchyovy věty o střední hodnotě

Jak lze geometricky zdůvodnit platnost Cauchyovy věty? Leží-li celá křivka c na sečně spojující body $c(a)$, $c(b)$, pak je tvrzení zřejmé (za ξ lze volit libovolný bod). V opačném případě uvažujme všechny přímky rovnoběžné s danou sečnou. Vyberme z nich tu, která má od sečny co největší vzdálenost a přitom aspoň jeden společný bod s křivkou c. V tomto společném bodě je přímka tečnou ke křivce c, pokud ovšem křivka nějakou tečnu v tomto bodě má; v opačném případě se jedná o singulární bod.

Předchozí argumentace je upravenou verzí úvahy z článku [8], kde se rozebírá Lagrangeova věta.

3. L'Hospitalovo pravidlo

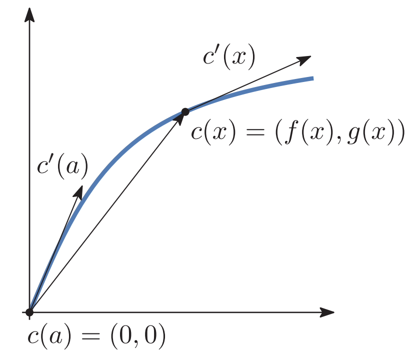
Cauchyova věta o střední hodnotě se využívá v důkazu l'Hospitalova pravidla o limitě podílu dvou funkcí typu $0/0$ nebo ∞/∞. V prvním případě má l'Hospitalovo pravidlo jednoduchou, ale málo známou geometrickou interpretaci, která je opět založena na tom, že dvojici reálných funkcí lze chápat jako parametrizaci rovinné křivky.

Věta 3.1. *Nechť reálné funkce f, g mají vlastní derivace na intervalu (a, b), přičemž derivace f je všude nenulová, a platí $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$. Pokud existuje $\lim_{x \to a+} g'(x)/f'(x)$, pak existuje též $\lim_{x \to a+} g(x)/f(x)$ a obě limity mají stejnou hodnotu.*

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$. Uvažujme parametrizovanou křivku

$$c(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in [a, b).$$

Platí $c(x) - c(a) = c(x) = (f(x),\, g(x))$. Pro každé $x \in (a,\, b)$ představuje číslo $g(x)/f(x)$ směrnici sečny ke křivce c spojující body $c(a)$ a $c(x)$, viz obrázek 4. (Z Lagrangeovy věty plyne $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)$ pro jisté $\xi \in (a, x)$, jmenovatel zlomku $g(x)/f(x)$ je tedy nenulový.) Pokud existuje $\lim\limits_{x \to a+} g(x)/f(x)$, pak se jedná o směrnici tečny ke křivce c v bodě $c(a) = (0,\, 0)$.



Obr. 4. Geometrický význam l'Hospitalova pravidla

Vektor $c'(x) = (f'(x),\, g'(x))$ je směrový vektor tečny ke křivce c v bodě $c(x)$ a $g'(x)/f'(x)$ je směrnice této tečny. L'Hospitalovo pravidlo tedy tvrdí, že směrnice tečny ke křivce c v bodě $(0,\, 0)$ je rovna limitě směrnic tečen v bodech $c(x)$ pro $x \to a+$ za předpokladu, že tato limita existuje.

Tvrzení je intuitivně zřejmé ve speciálním případě, kdy f a g jsou spojitě diferencovatelné funkce a tečna ke křivce c se mění spojitě.

4. Integrace per partes

Integrace per partes je jednou ze základních metod výpočtu integrálů. Tvrzení zformulované v následující větě snadno plyne ze vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí a z Newtonovy–Leibnizovy formule.

Věta 4.1. *Jestliže $f,\, g\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ jsou spojitě diferencovatelné funkce, pak platí*

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{5}$$

Ukažme si geometrickou interpretaci vztahu (5). Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy $f,\, g$ jsou neklesající funkce. Navíc bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f,\, g$ jsou nezáporné.[1]

Uvažujme opět parametrizovanou křivku

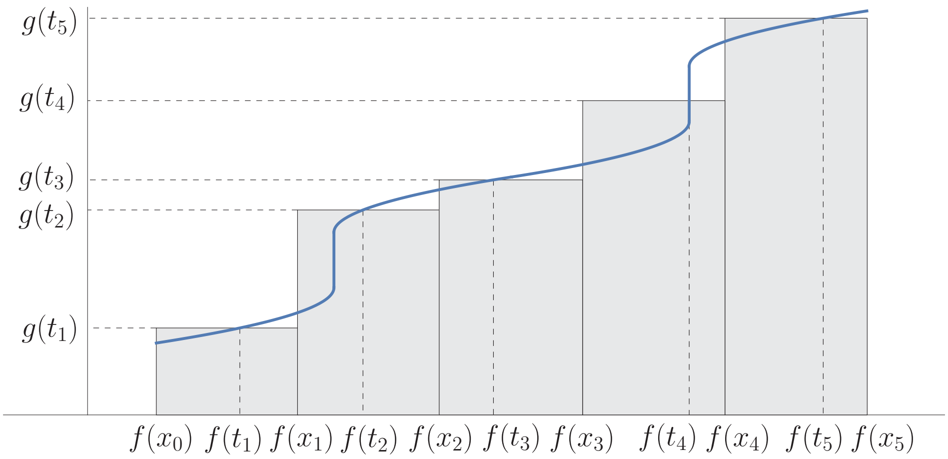
$$c(t) = (f(t),\, g(t)), \qquad t \in [a,\, b].$$

[1]Přičteme-li k funkci f libovolnou konstantu k_1, zvětší se obě strany vzorce (5) o $k_1 \cdot (g(b) - g(a))$. Přičteme-li k funkci g libovolnou konstantu k_2, zvětší se obě strany vzorce (5) o $k_2 \cdot (f(b) - f(a))$. Tyto operace tedy nemají vliv na platnost vzorce.

Tvrdíme, že číslo $\int_a^b f'g$ představuje obsah oblasti M mezi křivkou c a osou x. Skutečně, zvolme dělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Pak pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě bod $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takový, že $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$. Pak oblast M lze aproximovat pomocí n obdélníků znázorněných na obrázku 5. Součet jejich obsahů je

$$\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)f'(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Na pravé straně je riemannovský součet, který při zjemňování dělení konverguje k hodnotě $\int_a^b f'g$.

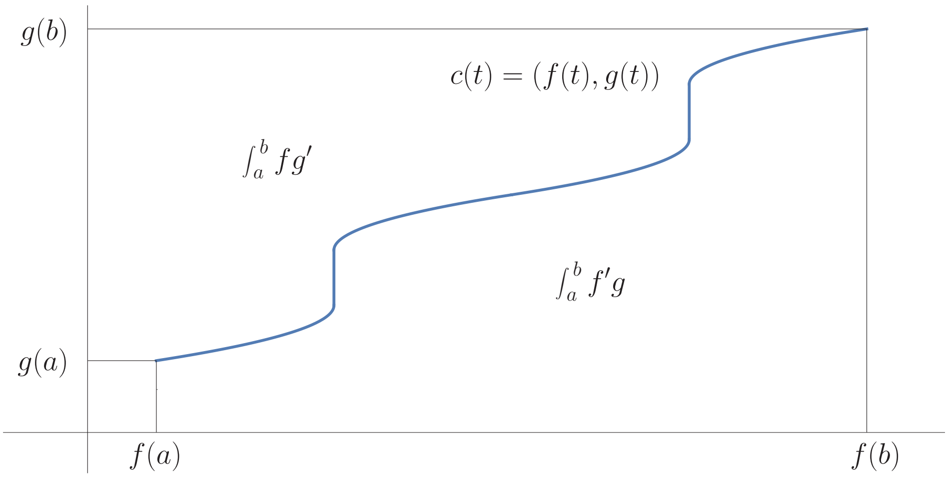


Obr. 5. Riemannovský součet pro integrál $\int_a^b f'g$

Ze symetrie je zřejmé, že číslo $\int_a^b fg'$ představuje obsah oblasti mezi křivkou c a osou y. Platnost vztahu (5) je nyní okamžitě zřejmá z obrázku 6, kde čísla $f(b)g(b)$ a $f(a)g(a)$ představují obsahy vyznačených obdélníků.

Čtenář si může zkusit rozmyslet, jak lze modifikovat předchozí postup pro případ, kdy pouze jedna z funkcí f, g je neklesající. Pokud např. f není neklesající, pak při úvahách o geometrickém významu integrálu $\int_a^b f'g$ je nutné upřesnit, co rozumíme oblastí mezi křivkou c a osou x.

Výše popsané úvahy jsou upravenou verzí postupu z učebnice Richarda Couranta [1], str. 219, kde se předpokládá, že obě funkce f, g jsou rostoucí. Obrázky 5 a 6 jsou s úpravami převzaty z [4]; tam je diskutována obecnější verze vzorce (5) pro



Obr. 6. Geometrický význam integrace per partes

Riemannův–Stieltjesův integrál, která nevyžaduje diferencovatelnost funkcí f, g:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g + \int_a^b g \,\mathrm{d}g = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

5. Youngova nerovnost

Následující tvrzení dokázal William Henry Young v článku [11] věnovaném Fourierovým řadám.

Věta 5.1. *Nechť $f\colon [0, c] \to \mathbb{R}$ je spojitá rostoucí funkce taková, že $f(0) = 0$. Pak pro každou dvojici čísel $a \in [0, c]$, $b \in [0, f(c)]$ platí*

$$ab \leqq \int_0^a f(x) \,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y) \,\mathrm{d}y, \tag{6}$$

přičemž rovnost nastává, právě když $b = f(a)$.

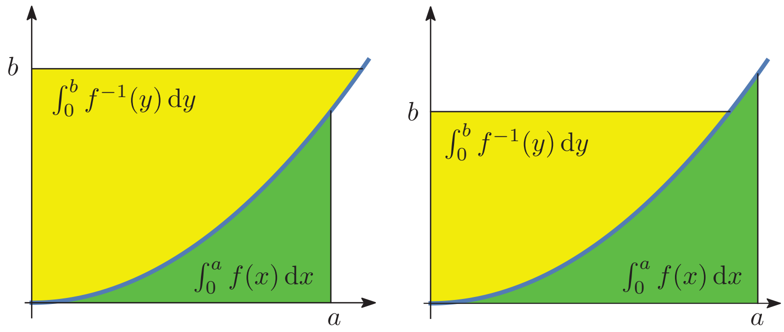
Jednoduchý geometrický důkaz Youngovy nerovnosti je popsán v článku [9] (viz též [6], str. 80) – stačí si dobře prohlédnout obrázek 7.

V Youngově článku [11] se vyskytuje i následující užitečný důsledek rovněž označovaný jako Youngova nerovnost.

Důsledek 5.2. *Jsou-li a, b nezáporná reálná čísla a p, $q \in (1, \infty)$ jsou čísla splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak*

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{7}$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a^p = b^q$.



Obr. 7. Důkaz Youngovy nerovnosti

Nerovnost (7) obdržíme z (6) volbou $f(x) = x^{p-1}$. Z podmínky $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ plyne $p + q = pq$, a tudíž $(x^{p-1})^{q-1} = x^{pq-p-q+1} = x$, což znamená, že inverzní funkce k f má předpis $f^{-1}(x) = x^{q-1}$. Podmínka pro rovnost z věty 5.1 má v tomto případě tvar $b = a^{p-1}$, který lze umocněním na q převést na ekvivalentní vztah $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$.

Poznamenejme, že z důsledku 5.2 snadno plyne Hölderova nerovnost, která se využívá v důkazu trojúhelníkové nerovnosti pro normu v prostorech posloupností ℓ^p (viz např. [10], str. 345–348), resp. v prostorech funkcí L^p (viz např. [7], str. 43–44).

6. Závěr

Věříme, že geometrické úvahy představené v tomto stručném článku představují zajímavý alternativní pohled na poznatky ze základního kurzu matematické analýzy. Geometrický přístup může být užitečný i v situaci, kdy na přednáškách nezbývá dost času na formálně přesné důkazy.

Čtenářům, které text zaujal, lze k dalšímu studiu doporučit knihy [5] a [6] obsahující desítky „důkazů beze slov“ z nejrůznějších oblastí matematiky. Další pěkné příspěvky tohoto druhu často vycházejí v časopisech *Mathematics Magazine*, *The College Mathematics Journal* a *American Mathematical Monthly*.

Poděkování. Autor děkuje Z. Halasovi, I. Netukovi, M. Rmoutilovi a P. Stehlíkovi za cenné připomínky k textu.

L i t e r a t u r a

[1] Courant, R.: *Differential and integral calculus, Volume 1.* 2nd English edition, Blackie, 1937.

[2] Das, J.: *Some generalizations of Rolle's theorem.* Int. J. Math. Educ. Sci. Tech. 35 (2004), 604–608.

[3] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag, 1979.

[4] Monteiro, G. A., Slavík, A., Tvrdý, M.: *Kurzweil-Stieltjes integral. Theory and applications.* World Scientific, 2019.

[5] Nelsen, R.: *Proofs without words. Exercises in visual thinking.* Mathematical Association of America, 1993.

[6] Nelsen, R.: *Proofs without words II. More exercises in visual thinking.* Mathematical Association of America, 2000.

[7] Netuka, I.: *Integrální počet. Vícerozměrný Lebesgueův integrál.* MatfyzPress, 2016.

[8] Swann, H.: *Commentary on rethinking rigor in calculus: The role of the mean value theorem.* Amer. Math. Monthly 104 (1997), 241–245.

[9] Tolsted, E.: *An elementary derivation of the Cauchy, Hölder, and Minkowski inequalities from Young's inequality.* Math. Mag. 37 (1964), 2–12.

[10] Veselý, J.: *Základy matematické analýzy, díl druhý.* MatfyzPress, 2009.

[11] Young, W. H.: *On classes of summable functions and their Fourier series.* Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 87 (1912), 225–229.