DALŠÍ ÚLOHY REKREAČNÍ MATEMATIKY

Antonín Slavík

Tento příspěvek volně navazuje na podobně zaměřený text [Sl] a přináší dalších dvanáct rozmanitých úloh z rekreační matematiky. Opět se věnujeme problémům, které sice nejsou bezprostředně užitečné v praxi, mají však atraktivní zadání a jejich řešení jsou elementární, často důvtipná nebo překvapivá. Věříme, že úlohy tohoto druhu mohou zaujmout studenty a posloužit jako motivace k dalšímu studiu matematiky. Čtenáři doporučujeme, aby se nad každým problémem nejprve samostatně zamyslel a teprvé poté prostudoval předložené řešení.

Úloha 1. [1] Vodní meloun je z 99 procent tvořen vodou. Během přepravy jedné tuny melounů se část vody vypařila a melouny pak obsahovaly pouze 98 procent vody. Jaká byla jejich celková hmotnost po přepravě?[2]

Řešení. Na začátku představuje hmotnost pevných částí melounů (bez vody) 1 procento celkové hmotnosti, která je stonásobná. Po přepravě tvoří pevná část 2 procenta hmotnosti, která je padesátinásobná. Hmotnost pevné části se během přepravy nezměnila. Celková hmotnost je tedy po přepravě poloviční a činí 0,5 tuny. □

Úloha 2. [3] Máme deset hromádek po deseti mincích. Jedna hromádka obsahuje samé falešné mince, ostatní hromádky samé pravé mince. Známe hmotnost pravé mince a víme, že falešná mince je o gram těžší než pravá mince. K dispozici máme standardní váhu, která ukazuje hmotnost předmětu na misce. Kolik vážení potřebujeme, abychom zjistili, na které hromádce jsou falešné mince?

Řešení. Stačí jedno vážení. Nechť m je hmotnost pravé mince v gramech. Očíslujme hromádky čísly 1 až 10. Pro každé i vezmeme z i-té hromádky i mincí a všechny mince dohromady zvážíme. Pokud by byly všechny pravé, navážili bychom $m(1 + \cdots + 10) = 55m$ gramů. Pokud j-tá hromádka obsahuje samé falešné mince, pak navážíme $55m + j$ gramů. Jinak řečeno, odečteme-li od výsledku vážení $55m$, získáme číslo hromádky s falešnými mincemi. □

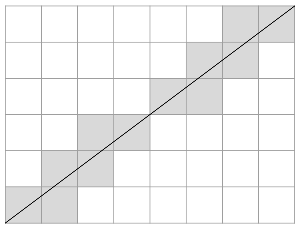
[1] Úloha je převzata z článku [La].

[2] Internetové zdroje uvádějí, že ve skutečnosti je v melounu 92 až 96 procent vody. Zadání úlohy je úmyslně voleno tak, aby řešení vycházelo pěkně.

[3] Úlohu lze nalézt v mnoha zdrojích, např. [Ga, str. 26]. Pěkná sbírka úloh souvisejících s vážením mincí je ve 4. kapitole diplomové práce [Ha].

Úloha 3. [4] Obdélník o rozměrech $m \times n$, kde m, n jsou přirozená čísla, je rozdělen na mn jednotkových čtverečků. Kolik z těchto čtverečků protíná úhlopříčka obdélníku?

Slovem „protíná“ máme na mysli čtverečky, které mají s úhlopříčkou společné vnitřní a nikoliv pouze hraniční body. Situaci pro $m = 6$ a $n = 8$ ilustruje následující obrázek.



Řešení. Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby uvažovaná úhlopříčka spojovala body $[0, 0]$ a $[n, m]$. Rovnice úhlopříčky je $y = \frac{m}{n}x$, $x \in \langle 0, n\rangle$.

Jsou-li m, n nesoudělná přirozená čísla, pak $\frac{m}{n}x$ není celé číslo pro žádné $x \in \{1, \dots, n-1\}$ (pokud $x \in \mathbb{Z}$ a $\frac{m}{n}x = k \in \mathbb{Z}$, pak $mx = nk$ a ze základní věty aritmetiky plyne, že x je násobkem n). Úhlopříčka tedy kromě bodů $[0, 0]$ a $[n, m]$ neprochází žádnými dalšími body s celočíselnými souřadnicemi. Na cestě z $[0, 0]$ do $[n, m]$ přitom protne $n - 1$ svislých přímek s celočíselnou x-ovou souřadnicí a $m - 1$ vodorovných přímek s celočíselnou y-ovou souřadnicí. Každý takový průsečík leží na hranici mezi dvěma jednotkovými čtverečky, které úhlopříčka protíná. Celkový počet takových čtverečků je tedy $(n-1)+(m-1)+1 = m + n - 1$.

Uvažujme nyní obecný případ, kdy m, n mohou být soudělná přirozená čísla. Nechť d je jejich největší společný dělitel. Pak platí $m = dm'$, $n = dn'$, kde m', n' jsou nesoudělná přirozená čísla. Rozdělíme-li úhlopříčku na d stejně dlouhých úseků, pak se jedná o úhlopříčky v obdélnících o rozměrech $m' \times n'$. V každém z nich úhlopříčka protne $m' + n' - 1$ jednotkových čtverečků, což dává dohromady

$$m + n - d$$

jednotkových čtverečků. Např. pro $m = 6$ a $n = 8$ máme $d = 2$ a počet čtverečků je $6 + 8 - 2 = 12$, což odpovídá obrázku. □

[4] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 138. Nejedná se o ryze teoretickou úlohu. Pokud si jednotkové čtverečky představíme jako pixely na obrazovce počítače, zajímá nás, kolik pixelů je třeba obarvit pro vykreslení úsečky spojující zadané dva body.

Úloha 4. [5] Dvacet pět mravenců je náhodně umístěno na tyč o délce 1 metr. Každý mravenec si náhodně zvolí směr a začne se pohybovat rychlostí 1 centimetr za sekundu. Když se dva mravenci setkají, každý z nich se otočí čelem vzad a pokračují v pohybu. Pokud mravenec dojde na konec tyče, spadne na zem. Za jak dlouhou minimální dobu budou všichni mravenci zaručeně na zemi?

Řešení. Mravence můžeme považovat za navzájem nerozlišitelné – zadaná úloha se tím nijak nezmění. Situace, kdy se setkají dva mravenci a každý z nich se otočí čelem vzad, je pak ekvivalentní situaci, kdy se navzájem vyhnou a pokračují beze změny směru. Ve druhém případě je jasné, že každý mravenec spadne z tyče nejpozději po 100 sekundách. □

Úloha 5. [6] Devět mravenců je umístěno na dráhu ve tvaru kružnice. Počáteční rozestupy mezi mravenci jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 a 23 centimetrů (ne nutně v tomto pořadí). Každý mravenec si náhodně zvolí směr a začne se pohybovat rychlostí 1 centimetr za sekundu. Když se dva mravenci setkají, každý z nich se otočí čelem vzad a pokračují v pohybu. Nezávisle na tom, jaký směr si každý mravenec na počátku zvolil, po padesáti sekundách vždy zjistíme, že rozestupy mezi mravenci jsou přesně stejné jako na začátku. Jak je to možné?

Řešení. Stejně jako v řešení předchozí úlohy si můžeme představit, že se mravenci míjejí a nemění směr. Skutečnost, že počáteční rozestupy mezi mravenci jsou dány prvočísly, není podstatná a slouží jen ke zmatení čtenáře. Podstatná je skutečnost, že platí

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100,$$

z čehož plyne, že délka kružnice je 100 centimetrů. Za padesát sekund se tedy každý mravenec přesune ze startovní pozice do protilehlého bodu kružnice. Jinak řečeno, polohy mravenců po padesáti sekundách získáme z počátečních poloh pomocí středové souměrnosti vzhledem ke středu kružnice. Odtud je již zřejmé, že rozestupy mezi mravenci budou stejné jako na začátku. □

Úloha 6. [7] Cesta z bodu A do bodu B po proudu řeky zabere motorovému člunu tři dny, zpáteční cesta proti proudu trvá čtyři dny. Za jak dlouho by proud řeky dopravil z bodu A do bodu B dřevěnou kládu?

[5] Úloha je převzata z knihy [Wi], str. 36.
[6] Úloha je převzata z článku [ZZ].
[7] Úloha je převzata z článku [La].

Řešení. Nechť s značí vzdálenost z bodu A do bodu B, rychlost člunu ve stojaté vodě je v a rychlost proudu je v_0. Ze zadání plyne

$$\frac{s}{v+v_0} = 3, \quad \frac{s}{v-v_0} = 4.$$

Tyto dvě rovnice neurčují jednoznačně hodnoty všech tří neznámých, pro naše účely je však dostačující vypočítat hodnotu s/v_0. Kombinací předchozích dvou rovností získáme

$$3(v+v_0) = s = 4(v-v_0),$$

tedy po úpravě $v = 7v_0$. Proto

$$4 = \frac{s}{v-v_0} = \frac{s}{6v_0}$$

a $s/v_0 = 24$. Proud by kládu dopravil z bodu A do bodu B za 24 dnů.

Ke stejnému výsledku lze dospět i následující úvahou: Zvolme jednotku délky tak, aby vzdálenost s z A do B byla 1 jednotka. Pak rychlost člunu po proudu je $v+v_0 = 1/3$ jednotky za den a rychlost proti proudu je $v - v_0 = 1/4$ jednotky za den. Rychlost samotného proudu je polovinou rozdílu těchto čísel, tj. $v_0 = (1/3 - 1/4)/2 = 1/24$ jednotek za den. □

Úloha 7. [8] Ukažte, že každé přirozené číslo lze vynásobit vhodným přirozeným číslem tak, aby výsledek obsahoval všechny cifry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (cifry se mohou opakovat).

Řešení. Nechť je dáno přirozené číslo n, které má d cifer. Vezmeme-li n po sobě jdoucích čísel

$$1234567890 \cdot 10^d + 1, \ldots, 1234567890 \cdot 10^d + n,$$

bude mezi nimi právě jedno číslo dělitelné n. Všechna uvedená čísla mají navíc tu vlastnost, že na prvních 10 pozicích obsahují cifry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. □

Úloha 8. [9] Vynásobíme-li číslo 1089 devíti, získáme 9801 – cifry jsou stejné jako na začátku, ale v opačném pořadí! Existuje čtyřciferné číslo, které má stejnou vlastnost při násobení čtyřmi?

[8] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 81.
[9] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 82.

Řešení. Hledáme čtyřciferné číslo $pqrs$, kde $p, q, r, s \in \{0, \dots, 9\}$, $p \neq 0$, pro které platí

$$4(1000p + 100q + 10r + s) = 1000s + 100r + 10q + p.$$

Číslo na levé straně je sudé. Aby bylo i číslo na pravé straně sudé, musí být p sudé. Číslo na pravé straně je čtyřciferné. Aby bylo i číslo na levé straně čtyřciferné, musí platit $p \leq 2$. S ohledem na podmínku $p > 0$ tedy zjišťujeme, že $p = 2$. Pak je hodnota levé strany aspoň 8000, a proto $s \geq 8$. Pokud by platilo $s = 9$, pak poslední cifra čísla na levé straně by byla 6, ale poslední cifra pravé strany je 2. Musí tedy platit $s = 8$. Dosazením hodnot p a s získáme podmínku

$$4(2000 + 100q + 10r + 8) = 8000 + 100r + 10q + 2$$

a po úpravě

$$13q + 1 = 2r.$$

Číslo na pravé straně je aspoň 2 a nejvýše 18, z čehož plyne $q = 1$ a následně $r = 7$. Zkouškou lze ověřit, že čtyřnásobkem nalezeného čísla $pqrs = 2178$ je 8712. $\square$

Úloha 9. [10] Kolika způsoby lze rozměnit stokorunu tak, abychom použili všechny platné české mince? Jaký minimální obnos musíme mít, abychom mohli stokorunu rozměnit každým z těchto způsobů?

Řešení. Vezmeme-li jeden kus od každé platné české mince, získáme částku

$$1 + 2 + 5 + 10 + 20 + 50 = 88$$

[10] Úloha je převzata z knihy [Si], problém č. 59.

korun. Zbývá doplatit 12 korun, což lze provést následujícími 15 způsoby:

$$\begin{aligned}12 = {} & 10 + 2\\ & 10 + 2 \cdot 1\\ & 2 \cdot 5 + 2\\ & 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1\\ & 5 + 3 \cdot 2 + 1\\ & 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1\\ & 5 + 2 + 5 \cdot 1\\ & 5 + 7 \cdot 1\\ & 6 \cdot 2\\ & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1\\ & 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1\\ & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1\\ & 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1\\ & 1 \cdot 2 + 10 \cdot 1\\ & 12 \cdot 1\end{aligned}$$

K tomu, abychom byli schopni poskládat stokorunu každým z uvedených způsobů, potřebujeme minimální obnos

$$88 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 132$$

korun. □

Úloha 10. [11] Máme 54 chameleonů, z nichž 20 je na začátku červených, 18 zelených a 16 modrých. Kdykoliv se setkají dva různobarevní chameleoni, oba změní barvu na tu, kterou nemá ani jeden z nich. Může se stát, že všichni chameleoni budou mít po čase stejnou barvu?

Co platí v obecném případě, kdy je na začátku $\check{c}$ červených, z zelených a m modrých chameleonů?

Řešení. Nechť $\check{c}$, z, m značí počty červených, zelených a modrých chameleonů. Co se stane při setkání červeného a zeleného chameleona? $\check{c}$ se sníží o 1, z se rovněž sníží o 1 a m se zvýší o 2. Zajímavější je, co se děje s rozdíly: $\check{c} - z$ se nezmění, $z - m$ se zmenší o 3 a $\check{c} - m$ se rovněž zmenší o 3. Při setkání chameleonů jiných dvou barev je situace podobná a rozdíl počtu chameleonů libovolných dvou barev se vždy mění o násobek tří.

[11] Úloha je převzata z knihy [Wi], str. 22.

V příkladu ze zadání na začátku platí $č-z=2$, $z-m=2$ a $č-m=4$. Protože se rozdíly mohou měnit jen o násobky tří, nemůže ani jeden z nich klesnout na nulu, tj. nikdy nemůže nastat situace, kdy by všichni chameleoni měli stejnou barvu.

Uvažujme nyní obecný případ. Pokud některý rozdíl (např. $č-m$) byl na začátku kladným násobkem tří, pak pomocí setkání chameleonů vhodných barev lze dosáhnout vynulování tohoto rozdílu (např. každé setkání červeného a zeleného zmenší rozdíl $č-m$ o 3; pokud by žádný zelený nebyl k dispozici, lze jej „vyrobit“ setkáním červeného a modrého – tím se rozdíl $č-m$ nezmění). Následným opakovaným kombinováním chameleonů těch barev, jejichž rozdíl jsme vynulovali, získáme jednobarevnou populaci.

Z předchozích úvah plyne následující závěr:

- Pokud rozdíl žádných dvou barev není násobkem tří, pak nelze dosáhnout jednobarevné populace chameleonů.
- Pokud je rozdíl jediné dvojice barev násobkem tří, pak lze dosáhnout jednobarevné populace mající zbývající barvu.
- Pokud je rozdíl libovolné dvojice barev násobkem tří, pak lze dosáhnout jednobarevné populace libovolné barvy.

Poznamenejme, že nemůže nastat případ, kdy by rozdíl právě dvou dvojic barev byl násobkem tří. Pokud totiž např. $č-z$ i $z-m$ jsou dělitelné třemi, pak i $č-m=č-z+z-m$ je dělitelné třemi. □

Úloha 11. [12] Gravitace na povrchu Měsíce je téměř přesně šestkrát slabší než na povrchu Země (gravitační zrychlení na Měsíci je $1{,}62\ \mathrm{m/s^2}$). Pokud zanedbáme odpor vzduchu na Zemi, rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá na Měsíci:

(a) Míč vyhozený z povrchu směrem vzhůru dosáhne šestinásobné výšky.

(b) Doba, která uplyne, než míč dopadne zpět, je šestinásobná.

(c) Kámen upuštený do propasti dopadne na dno za šestkrát delší čas.

(d) Náboj vystřelený z pušky ve vodorovném směru doletí do šestinásobné vzdálenosti.

[12] Úloha je převzata z knihy [Si], problém č. 169.

(e) Dělová koule vystřelená pod úhlem $45\,^\circ$ doletí do šestinásobné vzdálenosti.

Řešení. (a) Pohyb tělesa vyhozeného vzhůru je popsán vztahy

$$v = v_0 - gt, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Těleso se nachází v nejvyšším bodě v okamžiku, kdy $v = 0$. To nastane v čase $t = v_0/g$, a maximální výška je proto

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

Na Měsíci je g šestkrát menší než na Zemi, takže h je šestkrát větší, tvrzení tedy platí.

(b) Podle řešení předchozí části se míč pohybuje vzhůru po dobu v_0/g, stejnou dobu trvá i pád. Celkový čas $2v_0/g$ je při šestkrát menším g šestkrát delší, tvrzení tedy platí.

(c) Volný pád je popsán vztahem $s = \frac{1}{2} g t^2$. Pokud je hloubka propasti rovna d, kámen dopadne na dno za čas $t = \sqrt{2d/g}$. Při šestkrát menším g bude tento čas $\sqrt{6}$-krát delší, tvrzení tedy neplatí.

(d) Pohyb náboje vzniká složením dvou pohybů, volného pádu ve svislém směru a rovnoměrného přímočarého pohybu ve vodorovném směru. Vodorovná složka rychlosti nezávisí na g. Z řešení předchozí části víme, že náboj dopadne na zem za čas $t = \sqrt{2d/g}$. Při šestkrát menším g bude tento čas $\sqrt{6}$-krát delší a náboj stihne urazit $\sqrt{6}$-krát delší vodorovnou vzdálenost, tvrzení tedy neplatí.

(e) Pohyb můžeme opět rozložit na svislou a vodorovnou složku. Z řešení části (b) plyne, že při šestkrát menším g poletí koule šestkrát déle. Za tuto dobu stihne urazit šestkrát delší vodorovnou vzdálenost, tvrzení tedy platí.

□

Úloha 12. [13] Jisté množství krychliček o straně délky 1 cm je poskládáno do tvaru větší krychle. Některé stěny této krychle, avšak ne všechny, byly natřeny barvou. Po rozložení velké krychle zpět na jednotkové krychličky jsme zjistili, že 218 z nich je částečně obarveno. Jak dlouhá byla strana velké krychle a kolik jejích stěn bylo natřeno barvou?

[13] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 157.

Řešení. Nechť n je délka strany větší krychle složené z n^3 krychliček. Prozkoumejme, kolik stěn velké krychle mohlo být obarveno:

(a) *1 stěna.* Počet částečně obarvených krychliček by byl n^2.

(b) *2 protější stěny.* Počet částečně obarvených krychliček by byl $2n^2$.

(c) *2 sousední stěny.* Počet částečně obarvených krychliček by byl $2n^2 - n = n(2n-1)$.

(d) *3 stěny, které nemají společný roh.* V tomto případě existují dvě hrany, z nichž každá je společná pro dvojici obarvených stěn. Počet částečně obarvených krychliček by byl $3n^2 - 2n = n(3n-2)$.

(e) *3 stěny, které mají společný jeden roh.* Počet částečně obarvených krychliček by byl $3n^2 - 3n + 1 = 3(n^2 - n) + 1$.

(f) *4 stěny vybrané tak, že neobarvené stěny leží proti sobě.* Počet částečně obarvených krychliček by byl $4n^2 - 4n = 4(n^2 - n)$.

(g) *4 stěny vybrané tak, že neobarvené stěny spolu sousedí.* V tomto případě existuje pět hran společných pro dvojice obarvených stěn a 2 rohy se stejnou vlastností (pro lepší představu doporučujeme, aby si čtenář načrtl síť krychle). Počet částečně obarvených krychliček by byl $4n^2 - 5n + 2$.

(h) *5 stěn.* Počet částečně obarvených krychliček by byl $5n^2 - 8n + 4$.

(i) *6 stěn.* Tato možnost nepřipadá v úvahu, neboť v zadání je uvedeno, že nebyly obarveny všechny stěny.

Prvočíselný rozklad čísla 218 je $2 \cdot 109$, z čehož plyne, že 218 nelze vyjádřit ve tvarech uvedených v případech (a), (b), (c), (d), (f). Zbytek z 218 při dělení 3 je 2, nepřipadá tedy v úvahu ani možnost (e). Případ (g) by mohl nastat za předpokladu, že $4n^2 - 5n + 2 = 218$. Tato kvadratická rovnice má řešení $n_1 = -27/4$, $n_2 = 8$. Případ (h) by mohl nastat za předpokladu, že $5n^2 - 8n + 4 = 218$. Diskriminant této kvadratické rovnice je 1086 a jeho odmocnina je iracionální, rovnice tedy nemá žádná celočíselná řešení.

Úloha má právě jedno řešení: Velká krychle měla stranu délky 8, obarveny byly čtyři její stěny.[14] □

[14] Pokud by v zadání chyběla informace, že nebyly obarveny všechny stěny, pak by existovalo ještě druhé řešení – krychle o straně délky 7 se šesti obarvenými stěnami.

Literatura

[Ga] M. Gardner: *Hexaflexagons and other mathematical diversions*, University of Chicago Press, 1988.

[Ha] J. Hamáček: *Kombinatorické úlohy o mincích*, diplomová práce, MFF UK, 2016. K dispozici online na `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/jan_hamacek_dp/ulohy-o-mincich.pdf`.

[KVW] J. D. E. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon: *Which way did the bicycle go? ... and other intriguing mathematical mysteries*, The Mathematical Association of America, 1996.

[La] F. Lazebnik: *Surprises*, Mathematics Magazine 87 (2014), 212–221.

[Si] D. Singmaster: *Problems for metagrobologists. A collection of puzzles with real mathematical, logical or scientific content*, World Scientific, 2016.

[Sl] A. Slavík: *Deset úloh z rekreační matematiky.* In *Rozvíjení matematické gramotnosti na středních školách I*, MatfyzPress, 2018, 93–103.

[Wi] P. Winkler: *Mathematical Mind-Benders*, A K Peters, 2007.

[ZZ] A. Zaleski, D. Zeilberger: *Boolean function analogs of covering systems*, Mathematics Magazine 93 (2020), 54–61.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`