

# Geometrie pro počítačovou grafiku

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK



# O čem předmět bude

Chceme podat **teoretický** základ nezbytný pro nejrůznější geometrické aplikace:

- Počítačová **grafika**, animace
- Počítačový design - CAD
- Robotika, mechanika, počítačem řízené obrábění (CNC stroje)
- Zpracování obrazu, umělé vidění
- atd. ...

Jde tedy o matematiku, ale pokusíme se ji co nejvíce motivovat a provázat na aplikace.

Aplikované geometrické disciplíny čerpají prakticky ze všech geometrických disciplín, zejména

- Analytická geometrie, afinní geometrie
- Projektivní geometrie
- Diferenciální geometrie
- Deskriptivní geometrie
- Algebraická geometrie
- atd. . . .

Pochopitelně nalezneme vazby na předmět Počítačová grafika XX a další aplikované přednášky.

## Kombinace

- Teoretické přednášky (definice, věty, důkazy)
- Ukázek aplikací
- Ukázky krátkých implementací
- Počítání příkladů (na papíru i na počítači)
- Samostudia (text, manuál)

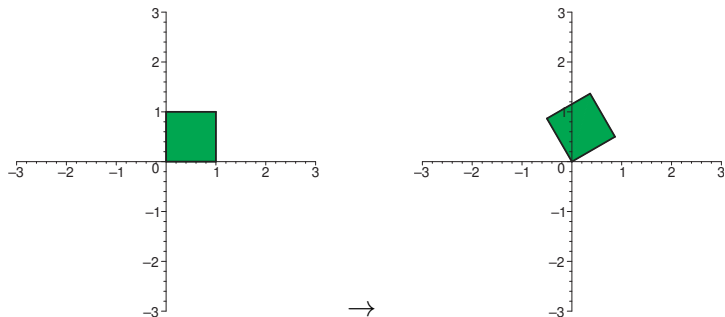
- Rozsah 2/0, Zk, 3 kredity
- Zkouška bude probíhat formou diskuze nad dvěma úkoly (programky, které student vytvoří v libovolném software (doporučuji MATHEMATICA, která je na MFF zdarma dostupný). Přitom teorii související s vybranými tématy by měl student znát podrobně (včetně důkazů) a teorii ze zbytku přednášky orientačně (definice, hlavní výsledky, schopnost počítat příklady).
- Další informace budou postupně stránkách předmětu.

Dva hlavní přístupy ke geometrii

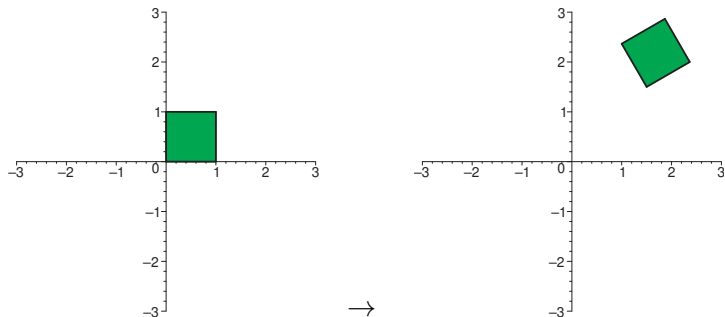
- Studovat objekty (Eukleidés 300 p.n.l. a celá stará tradice)
- Studovat transformace a jejich invarianty (Felix Klein, Erlangen 1872)

V tomto předmětu uplatníme především druhý přístup. Objektům aplikované geometrie (Splajny, NURBS atd.) se v ZS věnuje předmět Geometrické modelování PGR021.

# Grupy transformací - otočení

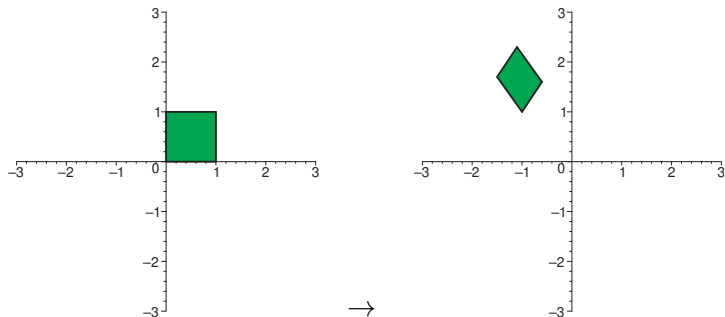


# Grupy transformací - shodnost

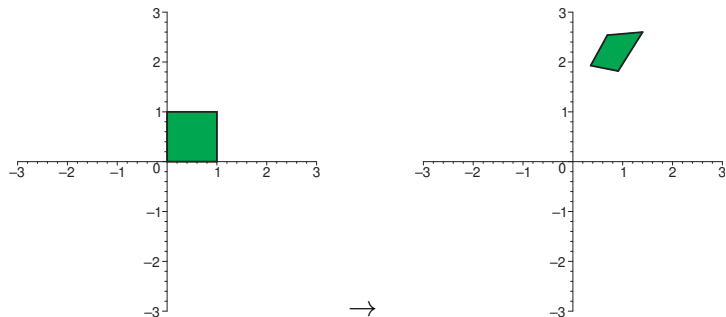




# Grupy transformací - afinita

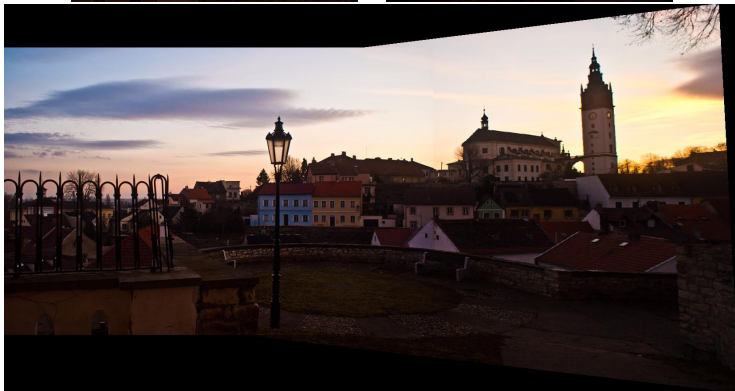


# Grupy transformací - projektivní

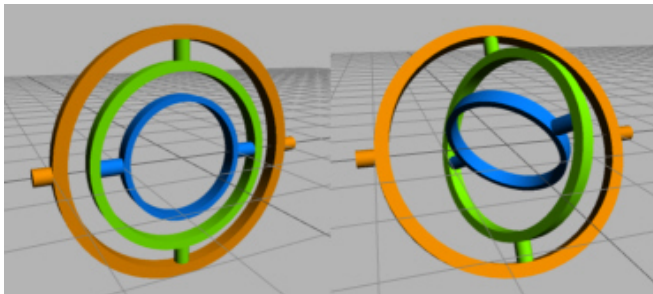


- shodnosti a podobnosti ve 2D, popis, klasifikace, aplikace, Cauchy - Croftonova formule
- diferenciální geometrie křivek (kvůli pohybu objektu podél křivky)
- shodnosti a podobnosti ve 3D, dimenze a klasifikace
- parametrizace shodností ve 3D pomocí kvaternionů a duálních kvaternionů
- interpolace poloh objektu ve 3D, animace
- projektivní prostor, projektivní transformace
- konečné projektivní geometrie
- lepení snímků, rekonstrukce 3D scény, kalibrace fotoaparátu

# Projektivní lepení snímků



# Popis rotací a shodností v prostoru



Správným řešením je užití kvaternionů a duálních kvaternionů.

# Správné pochopení geometrie je zásadní

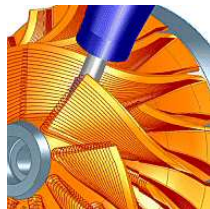
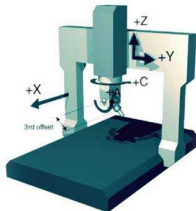
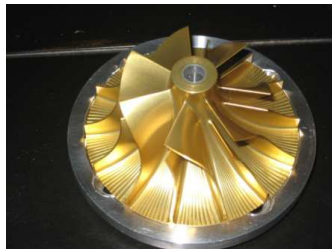
Singularity paralelního robota (Steward platform):



- dvě šestice bodů leží na kuželosečkách a jsou projektivně příbuzné  $\Rightarrow$  samopohyb
- šest spojnic tvoří projektivní lineární komplex  $\Rightarrow$  robot lokálně ztrácí stupeň volnosti

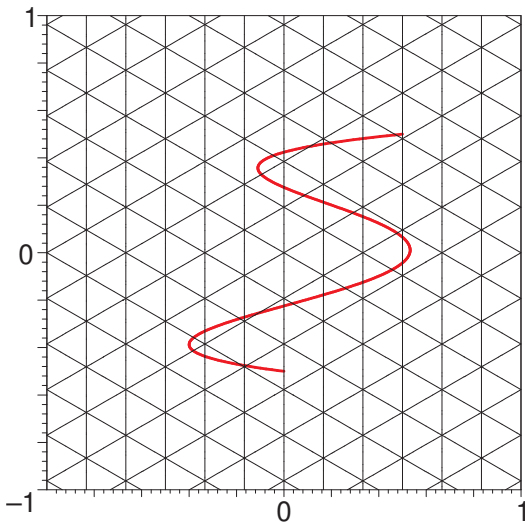
# Správné pochopení geometrie je zásadní

Obrábění rotoru turbodmychadla:



- pouze rozvinutelné plochy je možno obrábět válcovou frézou, jinak nutně dochází k podřezu
- chyby jsou často marně odstraňovány pokusy o vyšší kvalitu a přesnost frézování
- návrh správného nástroje je obtížný geometrický problém

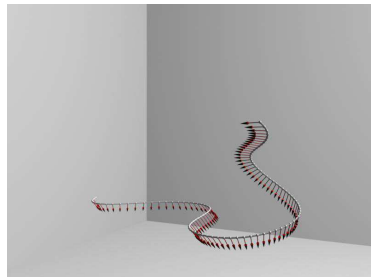
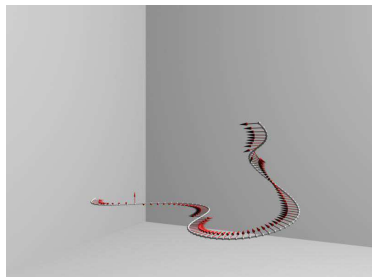
# Odhad délky křivky - Cauchy Crofton



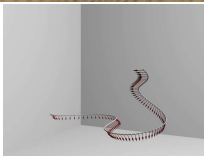


# Repéry podél křivky

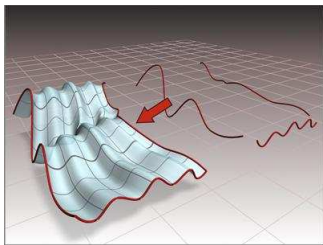
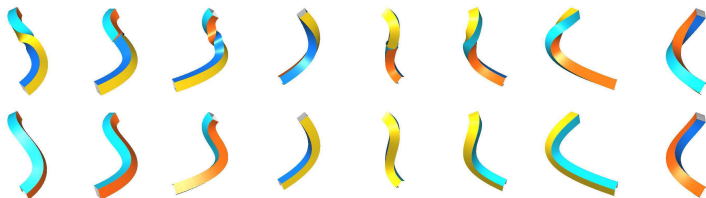
Uvažujeme podél dané křivky kolmý jednotkový vektor. Ten spolu s tečným jednotkovým vektorem určuje repér.



Nalevo je Frenetův repér, napravo repér minimalizující rotaci.



# Aplikace v CAD - Sweep surfaces



# Příklady na shodnosti v rovině

- 1 Nalezněte rovnice rotace roviny kolem počátku o úhel  $\alpha$ .
- 2 Nalezněte rovnice rotace o  $\frac{3}{2}\pi$  kolem bodu  $[2, 1]$ .
- 3 Nalezněte rovnice osové souměrnosti podle přímky  $x + 2y + 3 = 0$ .
- 4 Nalezněte rovnice projekce na přímku z předchozího bodu.
- 5 Určete parametry  $p, q$  tak, aby existovala shodnost eukleidovské roviny, při které se zobrazí  $[4, 0], [1, 2], [-1, -1]$  po řadě na body  $[1, 4], [p, 2], [2, q]$ .
- 6 Sestrojte rovnostranný trojúhelník, jehož jeden vrchol je pevně dán a zbylé dva leží na dvou daných přímkách.