Typové příklady ze středoškolské analytické geometrie

Případné nedostatky si můžete doplnit studiem příslušné středoškolské učebnice nebo jednoho z řady přehledů, například *Josef Polák, Přehled středoškolské matematiky, Prometheus* nebo *Josef Polák, Středoškolská matematika v úlohách, Prometheus* (mnoho vydání v různých letech).

1. Určete odchylku α vektorů $u = (1, 1)$, $v = (-4, 1)$.

   [$\alpha \doteq 2.11$]

2. Napište všechny typy rovnice přímky, která prochází body $A[-2, 2]$, $B[4, -1]$.

3. Stanovte rovnici přímky, která prochází bodem $A[1; 1]$ kolmo k přímce $6x+4y-3 = 0$.

   [$2x - 3y + 1 = 0$ (až na násobek)]

4. Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p : x = 5 - 3t; y = 2 + 2t;$ a přímky AB, kde $A[1; 2]$, $B[4; 8]$. Případně určete souřadnice jejich průsečíku.

   [různoběžky, průsečík $[2; 4]$]

5. Stanovte rovnici přímky, která prochází bodem $B[2; 3]$ a má od přímky $2x+5y-5 = 0$ odchylku 45 stupňů.

6. Určete vzdálenost bodu $M[7; -2]$ od přímky $p : 6x - 8y - 77 = 0$.

   [$\frac{19}{10}$]

7. Určete obecnou rovnici roviny, je-li dáno její parametrické vyjádření:

   $$x = t + s, y = t - s, z = 5 + 6t - 4s,$$

   kde $t, s \in \mathbb{R}$.

   [$x + 5y - z + 5 = 0$ (až na násobek)]

8. Zjistěte vzájemnou polohu přímek p1; p2 daných parametrickým vyjádřením a u různoběžek určete jejich průsečík P:

   - $p1 : x = 1 - 2t; y = 3t; z = -2 + t;$ $p2 : x = 7 + 4s; y = 5 - 6s; z = 4 - 2s;$
   - $p1 : x = 8 + 3t; y = 7 - 2t; z = 11 + t;$ $p2 : x = 5 - 6s; y = 9 + 4s; z = 10 - 2s;$
   - $p1 : x = -3t; y = 2 + 3t; z = 1;$ $p2 : x = 1 + 5s; y = 1 + 13s; z = 1 + 10s;$
   - $p1 : x = 3 + t; y = 1 - t; z = 2 + 2t;$ $p2 : x = -s; y = 2 + 3s; z = 3s,$

   kde je vesměs $t \in R$, $s \in R$.

9. Zjistěte vzájemnou polohu rovin α, β daných rovnicemi:

   - $\alpha : x - y + 3z + 1 = 0;$ $\beta : 2x - y + 5z - 2 = 0,$
   - $\alpha : 3x + 2y - z + 2 = 0;$ $\beta : 6x + 4y - 2z + 1 = 0,$
   - $\alpha : 2x + y + 2z + 4 = 0;$ $\beta : 4x + 2y + 4z + 8 = 0.$

10. Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny α v případě, že se protínají, určete jejich průsečík P:

- $p: x = 2 + 4t; y = -1 + t; z = 2 - t; t \in \mathbb{R}$; $\alpha: 4x + y - z + 13 = 0$,
- $p: x = 2 - 3t; y = -1 + t; z = -2t; t \in \mathbb{R}$; $\alpha: x + y - z + 3 = 0$,
- $p: x = t; y = -8 - 4t; z = -3 - 3t; t \in \mathbb{R}$; $\alpha: x + y - z + 5 = 0$.

11. Vypočtěte odchylku α přímky $p: x = t, y = 1 + t, z = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ a roviny $\alpha: x = 1 + r - s, y = r + s, z = 2s$, kde $r, s \in \mathbb{R}$.

[$\alpha \doteq 0.491$]

12. Určete vzdálenost bodu $M[7; 9; 7]$ od přímky $p: x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

[$\sqrt{22}$]

13. Určete rovnici tečny t kružnice $k: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 100$ v bodě $T[9; 6]$.

[$2x - 3y + 1 = 0$ (až na násobek)]

14. V závislosti na parametru p spočtěte druhý průsečík kružnice $x^2 + y^2 = 1$ s přímkou AB, kde $A = [-1, 0]$ a $B = [0, p]$.

$\left[\frac{1-p^2}{1+p^2}, \frac{2p}{1+p^2}\right]$

15. Najděte osovou rovnici elipsy, která má střed $S[0; 0]$ a prochází body: $M[6; 4]$; $N[8; 3]$. Určete délky hlavní a vedlejší poloosy, excentricitu a ohniska této elipsy.

16.* Určete typ kuželosečky dané rovnicí $4x^2 + y^2 + 16x - 4y - 80 = 0$ a nalezněte k ní tečny bodem $[5, 0]$.

[elipsa, body dotyku jsou $[1; -6]$ a $[2; 8]$]

17.* Určete rovnici kulové plochy procházející daným bodem $A[1; -1; 4]$ a dotýkající se všech souřadnicových rovin kartézské soustavy souřadnic Oxyz.

18.* Ve kterých bodech hyperboly $h: 3x^2 - 2y^2 = 30$ jsou jejich průvodiče vůči ohniskům (tzv. ohniskové průvodiče) k sobě kolmé?

19.* Dokažte, že čtyřúhelník ABCD, jehož vrcholy mají v kartézské soustavě souřadnic souřadnice $A[5; 2; 6]$, $B[6; 4; 4]$, $C[4; 3; 2]$, $D[3; 1; 4]$ je čtverec.

20.* Dokažte, že výšky libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě.