

Geometrie - seznam vět a definic - LS 2018/19, znění je zde přesné, ale důkazy jen naznačeny. Kompletní důkazy jsou na přednáškách.

- za základní pro potřeby prvního bodu písemné části zkoušky jsou považovány všechny definice z kapitol 1 a 2, nebudou zde zkoušeny definice kapitoly 3.
- za základní věty pro potřeby prvního bodu jsou považovány 1.10, 1.17, 1.24, 1.25, 1.28, 2.13, 2.18, 2.20, 2.27, 2.33, 2.35, 3.11, 3.12, 3.14, 3.19.
- Důkazy následujících vět se budou zkoušet pouze v ústní části a to v takovém rozsahu a preciznosti v jaké byly odpředneseny na přednášce: 1.9, 1.18, 1.19, 1.20, 1.24, 1.28, 1.29, 2.25, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 3.12, 3.14, 3.16, 3.17.

## 1 Teorie křivek

**Definice 1.1** (srovnej Pick a kol. 14.1.43). Bud'  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval (případně neomezený), spojitě zobrazení  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá *parametrická křivka* v  $\mathbb{R}^n$ . Množina  $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$  se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže  $\mathbf{c}$  je třídy  $\mathcal{C}^\infty$  a *regulární*, jestliže  $\mathbf{c}$  je regulární, tedy  $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0)^T$  pro každé  $t \in I$ .

**Příklad 1.2.** V této kapitole budeme věty a definice ilustrovat na příkladu parametrizace kružnice

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix}$$

pro  $t \in (-\pi, \pi)$  a její reparametrizace

$$\mathbf{c}(u) = \frac{3}{1+u^2} \begin{pmatrix} 1-u^2 \\ 2u \end{pmatrix}$$

pro  $u \in (-\infty, \infty)$ . Reparametrizace je tvaru  $u = \tan \frac{t}{2}$  a naopak  $t = 2 \arctan u$ .

**Poznámka.**

- Je-li  $I$  uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na  $I$  restrikci na  $I$  hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.
- Parametrická křivka je popsána  $n$ -ticí funkcí  $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$  jedné proměnné definovaných na  $I$ .
- Její derivace je lineární zobrazení (totální diferenciál), které vyjádříme sloupcovým vektorem (maticí  $n \times 1$ ) a budeme ho chápat jako (tečný) vektor  $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^n$ , který závisí na parametru. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti  $\|\mathbf{c}'(t)\|$ , která je hladká a kladná.
- Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy  $\mathcal{C}^\infty$ ), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti (například  $\mathcal{C}^3$ ).

**Definice 1.3.** Je-li  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulární parametrická křivka a  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  hladký difeomorfismus intervalu  $\tilde{I}$  na  $I$ , je  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako  $\mathbf{c}$ . Difeomorfismus  $\phi$  pak nazýváme *změnou parametru* a  $\tilde{\mathbf{c}}$  *reparametrizací*  $\mathbf{c}$ . Je-li navíc  $\phi' > 0$  na  $\tilde{I}$ , nazveme  $\tilde{\mathbf{c}}$  reparametrizací  $\mathbf{c}$  *zachovávající orientaci*.

**Poznámka.** V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku  $\mathbf{c}(t)$  budeme její reparametrizaci  $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$  označovat jednoduše  $\mathbf{c}(s)$ . Dále budeme psát například  $t(s)$  namísto  $t = \phi(s)$  a v důsledku i  $s(t)$  namísto  $s = \phi^{-1}(t)$ . Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například  $\mathbf{c}'$  místo  $\mathbf{c}'(t)$  a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci  $\frac{d}{dt}$  a tečka derivaci  $\frac{d}{ds}$ .

**Lemma 1.4.** Pro derivace dvou parametrizací  $\mathbf{c}(t)$  a  $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$  téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \begin{pmatrix} \dot{t} & \ddot{t} & \ddot{\ddot{t}} \\ 0 & \dot{t}^2 & 3\dot{t}\ddot{t} \\ 0 & 0 & \dot{t}^3 \end{pmatrix}.$$

**Důkaz:** Přímý výpočet derivace složné funkce, např:  $\dot{\mathbf{c}} = \frac{d}{ds}\mathbf{c}(t(s)) = \frac{d}{dt}\mathbf{c}(t)\frac{dt}{ds} = \dot{t}\mathbf{c}'$ .  $\square$

**Definice 1.5** (Rovinné křivky). V každém bodě hladké regulární parametrické křivky v  $\mathbb{R}^2$  definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\vec{\mathbf{t}}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\vec{\mathbf{n}}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{t}}(t)$$

a znaménkovou křivkost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivkost nulová nazýváme inflexní.

**Věta 1.6.** Při reparametrizaci křivky v  $\mathbb{R}^2$  zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivkost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivkost pouze změní znaménko.

**Důkaz:** S využitím lemmatu 1.4

$$\vec{\mathbf{t}}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{t}\mathbf{c}'}{\|\dot{t}\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t})\vec{\mathbf{t}}(t).$$

Dále platí

$$\vec{\mathbf{n}}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{t}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sign}(\dot{t})\vec{\mathbf{t}}(t) = \text{sign}(\dot{t})\vec{\mathbf{n}}_*(t).$$

Konečně

$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'') \begin{pmatrix} \dot{t} & \ddot{t} \\ 0 & \dot{t}^2 \end{pmatrix}\right]}{\|\dot{t}\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{t})\kappa_z(t).$$

$\square$

**Věta 1.7.** Znaménková křivkost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem  $\mathbb{R}^2$ . Přesněji mějme přímou shodnost ve tvaru  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ , kde  $A \cdot A^T = I_2$ . Máme-li parametrickou křivku  $\mathbf{c}(t)$  a v jejím libovolném bodě  $\kappa_z, \vec{\mathbf{t}}, \vec{\mathbf{n}}_*$ , pak křivka  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$  má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivkost  $\tilde{\kappa}_z = (\det A)\kappa_z$ , tečný vektor  $\tilde{\vec{\mathbf{t}}} = A\vec{\mathbf{t}}$  a normálový vektor  $\tilde{\vec{\mathbf{n}}}_* = (\det A)A\vec{\mathbf{n}}_*$ .

**Důkaz:** Plyne z definic a toho, že  $\tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t)$  a  $\tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t)$ .  $\square$

**Definice 1.8.** Pro každou křivku  $\mathbf{c}$  definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t) \rangle$  a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako  $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$ , její *střed křivosti* jako bod  $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\vec{\mathbf{n}}_*(t)$  a kružnici se středem  $S(t)$  a poloměrem  $R(t)$  nazýváme *oskulační kružnice* v bodě  $\mathbf{c}(t)$ .

**Věta 1.9.** Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech přímk kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou a ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

**Důkaz:** Díky lineární reparametrizaci postačí tuto vlastnost studovat v bodě  $t = 0$  a díky přímé shodnosti můžeme předpokládat, že  $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$  a  $\mathbf{c}'(0) = (c'_x(0), 0)$ , kde  $c'_x(0) > 0$ . Máme tedy  $\vec{\mathbf{t}}(0) = (1, 0)$  a  $\vec{\mathbf{n}}_*(0) = (0, 1)$ . V tomto bodě uvažujeme Taylorův rozvoj křivky

$$\mathbf{c}(t) = \left( c'_x(0)t + \frac{1}{2}c''_x(0) + o(t^2), \frac{1}{2}c''_y(0) + o(t^2) \right).$$

Dosazením do obecné rovnice přímky

$$ax + by + c = 0$$

vyvodíme, že pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit  $c = 0$  a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí navíc platit  $a = 0$ , čímž dostáváme tečnou přímku. Kontakt vyššího řádu není možný.

Dosazením do obecné rovnice kružnice

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$$

vyvodíme, že pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit  $R^2 = S_x^2 + S_y^2$  a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí platit  $S_x = 0$  a pro kontakt řádu 2 (trojnásobný průsečík) musí platit  $S_y = 1/\kappa'_z(0)$  čímž dostáváme oskulační kružnici. Kontakt vyššího řádu není obecně možný, nastal by pouze v případě, že  $\kappa'_z(0) = 0$ , tedy v kritickém bodě křivosti, například v jejím maximu.  $\square$

**Věta 1.10.** Pro hladkou regulární parametrickou křivku  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  platí

$$\vec{\mathbf{t}}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|\kappa_z(t)\vec{\mathbf{n}}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce  $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $\vec{\mathbf{t}}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  pro  $t \in I$  a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ , pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

**Důkaz:** Derivováním dostaneme

$$\vec{\mathbf{t}}' = \left( \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right)' = \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3}$$

a pak výsledek dopočítáme v souřadnicích  $x, y$ .  $\square$

**Věta 1.11.** Pro každou hladkou funkci  $f(t)$  pro  $t \in I$  existuje až na přímou podobnost právě jedna hladká rovinná křivka  $\mathbf{c}(t)$  parametrizovaná jednotkovou rychlostí tak, že  $\kappa_z(t) = f(t)$ .

**Důkaz:**  $\square$

**Definice (a lemma) 1.12.** V každém bodě hladké regulární křivky  $\mathbf{c}$  v  $\mathbb{R}^3$  definujeme její *křivost*

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3}.$$

Tento výraz nezávisí na parametrizaci. Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *torzi*

$$\tau = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \frac{\det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2}.$$

Tento výraz nezávisí na parametrizaci.

**Definice (a lemma) 1.13.** V každém bodě hladké regulární křivky  $\mathbf{c}(t)$  definujeme její *jednotkový tečný vektor* výrazem

$$\vec{\mathbf{t}}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Tento vektor se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tečný vektor mění na vektor opačný, tedy na  $-\vec{\mathbf{t}}(t)$ . V každém neinflexním bodě  $\mathbf{c}(t)$  definujeme její *jednotkový binormálový vektor*

$$\vec{\mathbf{b}}(t) = \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}$$

a *jednotkový normálový vektor*

$$\vec{\mathbf{n}}(t) = \vec{\mathbf{b}}(t) \times \vec{\mathbf{t}}(t).$$

Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci zůstává normálový vektor beze změny a binormálový vektor se mění na vektor opačný.

**Definice 1.14.** Pro hladkou regulární křivku  $\mathbf{c}$  v  $\mathbb{R}^3$  definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t) \rangle$  a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- ortonormální *Frenetův repér* jako uspořádanou trojici  $\{\vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t)\}$ ,
- její *oskulační rovinu* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t) \rangle$ ,
- její *rektifikační rovinu* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t) \rangle$ ,
- její *normálovou rovinu* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{n}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t) \rangle$ .

**Definice (a lemma) 1.15.** O parametrizované křivce  $\mathbf{c}(t)$  řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna  $t \in I$  platí  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ . Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li  $\mathbf{c}(s)$  nějaká parametrizace obloukem, pak všechny reparametrizace  $\mathbf{c}(\tilde{s})$  obloukem z ní získáme změnou parametru ve tvaru  $s = \pm \tilde{s} + s_0$ , kde  $s_0$  je libovolná konstanta.

**Lemma 1.16.** Pro křivku hladkou  $\mathbf{c}(t)$  v  $\mathbb{R}^3$  parametrizovanou obloukem v každém bodě platí  $\vec{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{c}'(t)$  a v každém neinflexním bodě navíc platí  $\vec{\mathbf{n}}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}''(t)\|}$  a  $\kappa(t) = \|\mathbf{c}''(t)\| = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|$ .

**Věta 1.17** (Frenetovy vzorce). Je-li  $\mathbf{c}(t)$  hladká křivka v  $\mathbb{R}^3$  parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\vec{\mathbf{t}}' = \kappa \vec{\mathbf{n}}, \quad \vec{\mathbf{n}}' = -\kappa \vec{\mathbf{t}} + \tau \vec{\mathbf{b}}, \quad \vec{\mathbf{b}}' = -\tau \vec{\mathbf{n}},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{t}}' \\ \vec{\mathbf{n}}' \\ \vec{\mathbf{b}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{t}} \\ \vec{\mathbf{n}} \\ \vec{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru  $\vec{\mathbf{d}} = \tau \vec{\mathbf{t}} + \kappa \vec{\mathbf{b}}$  jako

$$\vec{\mathbf{t}}' = \vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{t}}, \quad \vec{\mathbf{n}}' = \vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{n}}, \quad \vec{\mathbf{b}}' = \vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{b}}.$$

**Poznámka.** Vidíme tedy, že v parametrizaci obloukem (kdy se poloha bodu mění jednotkovou rychlostí) křivost vyjadřuje rychlost okamžité změny tečného vektoru (a tím i tečné přímky) a torze rychlost okamžité změny binormálového vektoru (a tím i oskulační roviny). Rovněž můžeme okamžitou změnu celého Frenetova repéru chápat jako rotaci kolem Darbouxova vektoru, jejíž rychlost je daná jeho délkou, tedy  $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ , které se někdy říká celková křivost.

**Věta 1.18.** V libovolném neinflexním bodě  $\mathbf{A}$  hladké křivky  $\mathbf{c}$  uvažujme parametrizaci obloukem  $\mathbf{c}(t)$ , pro kterou  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{A}$ . V souřadnicích daných počátkem  $\mathbf{A}$  a Frenetovým repérem v bodě  $\mathbf{A}$  má tato parametrizace takzvaný kanonický Taylorův rozvoj

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{\kappa(0)^2}{6} t^3 + \dots \\ \frac{\kappa(0)}{2} t^2 + \frac{\kappa'(0)}{6} t^3 + \dots \\ \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} t^3 + \dots \end{pmatrix}$$

**Důsledek 1.19.** Ve svém každém neinflexním bodě hladká regulární křivka v  $\mathbb{R}^3$

1. protíná normálovou rovinu
2. máli v tomto bodě nenulovou torzi, pak protíná i oskulační rovinu
3. dotýká se rektifikační roviny, ale neprotíná ji (tedy v okolí tohoto bodu zůstává pouze v jednom z poloprostorů, na které rektifikační rovina rozděluje  $\mathbb{R}^3$ )
4. má ze všech přímků kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou
5. má ze všech rovin nejvyšší kontakt s oskulační rovinou

**Věta 1.20.** Necht'  $f > 0, g$  jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu  $I$ . Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka  $\mathbf{c}(t)$  v  $\mathbb{R}^3$  parametrizovaná obloukem na intervalu  $I$  tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

**Věta 1.21.** Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  bez inflexních bodů platí

$$\tau(t) = 0, t \in I \iff \text{křivka leží v rovině.}$$

**Věta 1.22.** Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  vnořenou do  $\mathbb{R}^3$  zobrazením  $(x, y) \rightarrow (x, y, 0)$  platí

$$\kappa = |\kappa_z|$$

a v neinflexních bodech

$$\vec{\mathbf{n}} = \text{sign}(\kappa_z) \vec{\mathbf{n}}_*.$$

**Definice 1.23.** Parametrizovaná křivka  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je *uzavřená*, jestliže  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$  a  $\mathbf{c}^{(i)}(a) = \mathbf{c}^{(i)}(b)$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ . Uzavřená křivka je *jednoduchá*, je-li  $\mathbf{c}$  prosté na  $[a, b)$ . *Jordanova křivka* je jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka.

**Věta 1.24** (Umlaufsatz). Je-li  $\mathbf{c}(t)$  hladká Jordanova křivka s kladnou orientací (proti směru hodinových ručiček) parametrizovaná obloukem na intervalu  $t \in [a, b]$ , pak

$$\int_c \kappa_z dc = \int_a^b \kappa_z(t) dt = 2\pi.$$

**Poznámka.** Uvažujme kladně orientovaný (proti směru hodinových ručiček) mnohoúhelník  $A_1, A_2, \dots, A_n$  s vnitřními úhly  $\alpha_i$ . V každém vrcholu  $A_i$  uvažujme vnější úhel  $\bar{\alpha}_i = (\pi - \alpha_i) \in (-\pi, \pi)$ , jako orientovaný úhel změny tečného vektoru (měřený proti směru hodinových ručiček). Pak platí

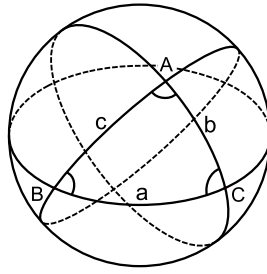
$$\sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i = 2\pi.$$

Podobně pro křivočarý rovinný mnohoúhelník, jehož strany jsou hladké křivky  $\mathbf{c}_i$ , které v bodech  $A_1, A_2, \dots, A_n$  navazují s vnějším úhlem  $\bar{\alpha}_i$  platí

$$\sum_{i=0}^n \int_{\mathbf{c}_i} \kappa_z + \sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i = 2\pi.$$

**Věta 1.25.** Jestliže vnitřní úhly u vrcholů sférického trojúhelníka na jednotkové sféře  $A, B, C$  postupně označíme  $\alpha, \beta, \gamma$ , pak pro velikost  $|ABC|$  plochy trojúhelníka  $ABC$  platí

$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



**Poznámka.** Jsou-li  $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$ ,  $\bar{\beta} = \pi - \beta$ ,  $\bar{\gamma} = \pi - \gamma$  vnější úhly trojúhelníka, pak zjevně platí

$$|ABC| = 2\pi - (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}).$$

Obecněji uvažujme na jednotkové sféře uzavřenou jednoduchou orientovanou lomenou čáru  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_1$  a její vnější úhly, pak pro ohraničenou plochu platí

$$|A_1 A_2 \dots A_n| = 2\pi - \sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i.$$

Při správně definované (geodetické) znaménkové křivosti pak plocha ohraničená kladně orientovanou uzavřenou křivkou bude

$$2\pi - \int_a^b \kappa_z(t) dt.$$

a pro křivočarý mnohoúhelník

$$2\pi - \sum_{i=0}^n \int_{c_i} \kappa_z - \sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i.$$

**Lemma 1.26.** Bud'  $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), y_y(t))^T$ ,  $t \in [a, b]$  kladně orientovaná hladká Jordanova křivka. Pak plošný obsah oblasti  $\text{Int } c$  je roven

$$A = - \int_a^b c_y(t) c'_x(t) dt = \int_a^b c_x(t) c'_y(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b (c_x c'_y - c'_x c_y) dt.$$

**Lemma 1.27** (Wirtinger). Necht'  $f(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká funkce, pro kterou platí  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Pak

$$\int_0^\pi f'^2(t) dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když  $f(t) = D \sin(t)$ , kde  $D$  je konstanta.

**Věta 1.28** (Isoperimetrická nerovnost). Bud'  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  hladká Jordanova křivka délky  $l$  a bud'  $A$  plošný obsah vnitřku  $\text{Int } c$ . Pak

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A,$$

přítom rovnost nastane, právě když  $\mathbf{c}$  je kružnice.

## 2 Elementární teorie ploch

**Definice 2.1.** Necht'  $\mathcal{O}$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ . Mapa  $\mathbf{p}$  v  $\mathbb{R}^3$  je hladký regulární homeomorfismus  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Regularita znamená, že hodnost Jacobiho matice  $\mathbf{p}$  je ve všech bodech rovna 2 či ekvivalentně, že vektory parciálních derivací  $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$  jsou v každém bodě lineárně nezávislé.

**Lemma 2.2.** Necht'  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$  je mapa a  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  hladké zobrazení, jehož obraz je podmnožinou  $\langle \mathbf{p} \rangle$ . Pak i zobrazení  $\mathbf{p}^{-1} \circ f$  je hladké.

**Věta 2.3.** Je-li  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mapa a  $\phi : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$  hladký difeomorfismus otevřených podmnožin  $\mathbb{R}^2$ , pak je také  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \phi$  mapou. Naopak, jsou-li  $\mathbf{p}$  a  $\tilde{\mathbf{p}}$  dvě mapy takové, že  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle$ , pak existuje hladký difeomorfismus  $\phi$  takový, že  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \phi$ .

**Definice 2.4.** Řekneme, že množina  $S \subset \mathbb{R}^3$  je hladká plocha, pokud pro každý bod  $s_0 \in S$  existuje okolí  $U \subset \mathbb{R}^3$  a mapa  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow S$  tak, že  $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$ . Soubor map, které pokrývají celou plochu  $S$  se nazývá atlas plochy  $S$ . Jsou-li  $\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}$  dvě mapy na  $S$ , pak budeme zobrazení  $\phi = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ \mathbf{p}$  nazývat (tam kde je definované) přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.

### Příklad 2.5.

1. Jednotková sféra se šesti mapami typu

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(u, v) &= (u, v, \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}) \\ \mathcal{O} &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}\end{aligned}$$

2. Válec  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| < 1$  s mapami  $\mathbf{p}_{1,2}(\phi, t) = (\cos \phi, \sin \phi, t)$ ,  $\mathcal{O}_1 = (-\pi, \pi) \times (-1, 1)$  a  $\mathcal{O}_2 = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ .

3. Graf hladké funkce  $z = f(x, y)$  je hladká plocha s jedinou mapou

$$\mathbf{p}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

4. Jestliže  $F(x, y, z)$  je hladká funkce, pak definuji  $S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ . Jestliže  $\nabla F = (F_x, F_y, F_z) \neq 0$  na celé množině  $S$ , pak  $S$  je hladká plocha s mapami z věty o implicitních funkcích.

**Definice 2.6.** Řekneme, že vektor  $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$  je tečný vektor k ploše  $S$  v bodě  $s_0 \in S$ , pokud existuje parametrizovaná křivka  $\mathbf{c}(t)$  taková, že  $\langle \mathbf{c} \rangle \subset S$ ,  $\mathbf{c}(t_0) = s_0$  a  $\mathbf{c}'(t_0) = \vec{\mathbf{w}}$ . Množina všech tečných vektorů v bodě  $s_0 \in S$  se nazývá tečný prostor k ploše  $S$  v bodě  $s_0$  a značí se  $T_{s_0}S$ .

**Věta 2.7.** Tečný prostor  $T_{s_0}S$  v libovolném bodě je vektorovým podprostorem  $\mathbb{R}^3$ . Jestliže  $\mathbf{p}$  je mapa na  $S$  a  $s_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$ , pak

$$T_{s_0}S = LO(\mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0)).$$

**Poznámka.** Vektory  $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$  parciálních derivací v bodě  $(u_0, v_0)$  tedy tvoří bázi tečného prostoru  $T_{s_0}S$  a tento prostor je ztotožněn s  $\mathbb{R}^2$  prostřednictvím derivace k  $\mathbf{p}$  v bodě  $(u_0, v_0)$ , která má tvar

$$\mathbf{p}' : (a, b)^T \rightarrow a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v.$$

**Definice 2.8.** Jednodimenzionální ortogonální doplněk tečného prostoru  $T_{s_0}S$  v každém bodě se nazývá *normálový prostor* a značí se  $N_{s_0}S$ . Řekneme, že plocha  $S$  je *orientovaná*, jestliže je v každém jejím bodě zvolena jednotková normála  $\mathbf{N}$  takovým způsobem, že existuje takový atlas plochy  $S$ , že pro každou jeho mapu  $\mathbf{p}$  platí

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|}.$$

**Poznámka.** Později uvidíme, že zobrazení které každému bodu plochy přiřazuje takovouto jednotkovou normálu je hladké zobrazení z orientované plochy na jednotkovou sféru a budeme ho nazývat Gaussovo zobrazení.

**Definice 2.9.** Je-li  $S$  plocha a  $s_0 \in S$  její bod, pak na  $T_{s_0}S$  definujeme skalární součin jako restrikcí kanonického Eukleidovského skalárního součinu na  $\mathbb{R}^3$

$$I_{s_0}(\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) := \vec{\mathbf{w}}_1 \cdot \vec{\mathbf{w}}_2.$$

Tato symetrická bilineární forma se nazývá *první fundamentální forma* plochy  $S$  v bodě  $s_0 \in S$ .

**Věta 2.10.** Je-li  $\mathbf{p}(u, v)$  mapa, pak je první fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi  $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$  symetrickou maticí

$$G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix} = [\mathbf{p}'^T] \cdot [\mathbf{p}].$$

**Poznámka.** První fundamentální formu na ploše můžeme chápat rovněž jako kvadratickou formu, která se tradičně zapisuje jako  $g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$ . Někdy se pro koeficienty první fundamentální formy používá označení  $g_{11} = E$ ,  $g_{12} = g_{21} = F$  a  $g_{22} = G$ .

**Důsledek 2.11.** Necht'  $\mathbf{p}(u, v)$  je mapa na ploše  $S$  a  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$  parametrizovaná křivka na ploše. Pak  $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(u', v')G_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}$  a její délka je tedy  $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(u', v')G_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}} dt$ .

Jestliže navíc  $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$  je další křivka na ploše  $S$ , která má s  $\mathbf{c}(t)$  společný bod, pak úhel křivek  $\mathbf{c}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$  v jejich společném bodě definujeme jako úhel jejich tečných vektorů v tomto bodě a jeho cosinus vypočítáme jako

$$\frac{(u', v')G_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{pmatrix}}{\sqrt{(u', v')G_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}} \sqrt{(\tilde{u}', \tilde{v}')G_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{pmatrix}}}.$$

**Definice 2.12.** Mapa  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow S$  se nazývá

1. *isometrická*, pokud zachovává délku křivek, tedy délka každé  $(u(t), v(t))$  je stejná jako délka  $\mathbf{p}(u(t), v(t))$
2. *konformní*, (též *úhlojevná*) jestliže zachovává úhly mezi křivkami, tedy pro každé dvě křivky je úhel mezi  $(u(t), v(t))$  a  $(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$  stejný jako úhel mezi  $\mathbf{p}(u(t), v(t))$  a  $\mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$ .
3. *plochojevná*, jestliže je velikost každé otevřené podmnožiny  $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$  stejná jako velikost plochy  $\mathbf{p}(\tilde{\mathcal{O}})$ .

**Věta 2.13.** Mějme mapu  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow S$  s maticí první fundamentální formy  $G_{\mathbf{p}}$ . Pak

1.  $\mathbf{p}$  je isometrická mapa, právě tehdy, když  $G_{\mathbf{p}} = I_2$ .
2.  $\mathbf{p}$  je konformní mapa, právě tehdy, když  $G_{\mathbf{p}} = \lambda I_2$ , kde  $\lambda > 0$  je hladká funkce  $u, v$ .
3.  $\mathbf{p}$  plochojevná mapa, právě tehdy, když  $\det G_{\mathbf{p}} = 1$ .

**Příklad 2.14.**

1. Mapy válce z příkladu 2.5 jsou isometrické.
2. Mapa stereografické projekce je úhlojevná.
3. Mapy sféry získané z válce složením se zobrazením

$$f([x, y, z]) = \left( \frac{x\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right)$$

jsou plochojevné.

**Definice 2.15.** Necht'  $S$  je orientovaná plocha,  $s_0 \in S$  a  $\mathbf{N}_{s_0}$  jednotková normála v bodě  $s_0$ . *Druhá fundamentální forma*  $II_{s_0}$  plochy  $S$  v bodě  $s_0$  je kvadratická forma definovaná na tečném prostoru  $T_{s_0}S$  následujícím způsobem. Necht'  $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0}S$  a  $\mathbf{c}(t)$  libovolná parametrizovaná křivka na ploše  $S$  taková, že  $\mathbf{c}(t_0) = s_0$  a  $\mathbf{c}'(t_0) = \vec{\mathbf{w}}$ . Pak definujeme

$$II_{s_0}(\vec{\mathbf{w}}) := \mathbf{c}''(t_0) \cdot \mathbf{N}_{s_0}.$$



**Důsledek 2.16.** Je-li  $\mathbf{p}(u, v)$  mapa, pak je druhá fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi  $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$  symetrickou maticí

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

**Poznámka.** Druhá fundamentální forma se tradičně zapisuje jako  $h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$ . Někdy se pro koeficienty první fundamentální formy používá označení  $h_{11} = L$ ,  $h_{12} = g_{21} = M$  a  $h_{22} = N$ .

**Poznámka. Poznámka.** Necht'  $s_0 \in S$ ,  $\mathbf{N}_s$  orientovaná normála,  $\vec{\mathbf{w}} \in T_s S$  jednotkový tečný vektor a křivka  $\mathbf{c}$  je parametrizovaná obloukem a má oskulační rovinu  $s_0 + \langle \mathbf{N}_{s_0}, \vec{\mathbf{w}} \rangle$  (například je přímo řezem plochy a roviny obsahující  $\mathbf{N}_{s_0}$ ). Pak křivost  $\mathbf{c}$  v bodě  $s$  je rovna  $\pm II_{s_0}(\vec{\mathbf{w}})$ .

**Definice 2.17.** Mějme orientovanou plochu  $S$ , bod na ploše  $s_0$  a nenulový tečný vektor  $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0} S$ . Pak definujeme normálovou křivost plochy  $S$  v bodě  $s_0$  ve směru  $\vec{\mathbf{w}}$  jako

$$\kappa_n(\vec{\mathbf{w}}) := \frac{II(\vec{\mathbf{w}})}{I(\vec{\mathbf{w}})}.$$

**Důsledek 2.18** (Meusnierova věta). Necht'  $\mathbf{c}(t)$  je křivka na orientované ploše a  $\kappa$  její křivost. Pak v každém jejím bodě platí

$$\kappa \cos \beta = \kappa_n(\mathbf{c}'),$$

kde  $\beta$  je úhel, který svírají vektory  $\vec{\mathbf{n}}$  a  $\mathbf{N}$ .

**Definice 2.19.** Minimum  $\kappa_1$  a maximum  $\kappa_2$  normálové křivosti v daném bodě  $s_0$  orientované plochy  $S$  se nazývají *hlavní křivosti* a odpovídající směry se nazývají *hlavní směry*.

**Poznámka.** Při změně orientace mění druhá forma plochy, normálové křivosti a hlavní křivosti znaménko. Hlavní směry zůstávají stejné.

**Věta 2.20** (Eulerova formule). V každém bodě  $s_0$  orientované plochy  $S$  existují dva navzájem kolmé hlavní směry  $\langle \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle$  (s minimální normálovou křivostí  $\kappa_1$ ) a  $\langle \vec{\mathbf{w}}_2 \rangle$  (s maximální normálovou křivostí). Pro normálovou křivost v libovolném jiném směru  $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0} S$  platí

$$\kappa_n(\vec{\mathbf{w}}) = \cos^2(\alpha)\kappa_1 + \sin^2(\alpha)\kappa_2,$$

kde  $\alpha$  je úhel, který svírají vektory  $\vec{\mathbf{w}}$  a  $\vec{\mathbf{w}}_1$ .

**Definice 2.21.** V každém bodě orientovatelné plochy definujeme Gaussovu křivost  $K$  a střední křivost  $H$  jako

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

**Poznámka.** Gaussova křivost nezáleží na volbě orientace. Bohužel se používá stejné písmeno  $H$  pro střední křivost i pro matici druhé fundamentální formy. Nenechejme se tím zmást!

**Definice 2.22.** Bod orientovatelné plochy se nazývá

1. *eliptický*, jestliže v něm platí  $K > 0$ ; jestliže navíc  $\kappa_1 = \kappa_2$  nazývá se *kruhový*.
2. *parabolický*, jestliže v něm platí  $K = 0$ ; jestliže navíc  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  nazývá se *planární*.
3. *hyperbolický*, jestliže v něm platí  $K < 0$ .

**Věta 2.23** (Výpočty v mapě.). Jestliže  $\mathbf{p}(u, v)$  je mapa na orientované oploše a  $G, H$  příslušné matice první a druhé fundamentální formy, pak

1. hlavní křivosti a hlavní směry vyjádřené v souřadnicích vůči bázi  $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$  nalezneme jako řešení rovnice

$$(H - \lambda G) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

s neznámými  $\lambda$  a  $(a, b)^T$ .

2. Pro Gaussovu křivost platí  $K = \frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G}$ .

3. Pro střední křivost platí  $H = \frac{h_{11}g_{22}-2h_{12}g_{12}+h_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}$ .

**Definice 2.24.** Parametrizovanou křivku  $\mathbf{c}(t)$  na ploše nazveme *hlavní*, jestliže pro každé  $t$  je  $\mathbf{c}'(t)$  hlavním směrem. Křivku nazveme *asymptotickou*, jestliže pro každé  $t$  je  $\kappa_n(\mathbf{c}'(t)) = 0$ .

**Věta 2.25.** Pro křivku vyjádřenou v mapě jako  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$  platí, že je

1. hlavní, právě když splňuje diferenciální rovnici

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

2. asymptotická, právě když splňuje diferenciální rovnici

$$h_{11}(u')^2 + 2h_{12}u'v' + h_{22}(v')^2 = 0.$$

**Definice 2.26.** Necht'  $\mathbf{c}(t)$  je regulární parametrizovaná křivka na orientované ploše  $S$ . *Geodetickou křivost* křivky  $\mathbf{c}$  definujeme jako

$$\kappa_g = \frac{\mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{N})}{\|\mathbf{c}'\|^3},$$

kde  $\mathbf{N}$  je normála plochy v příslušném bodě.

**Poznámka.** Geodetická křivost se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci křivky a mění znaménko při změně orientace křivky.

**Věta 2.27.** Pro každou regulární parametrizovanou křivku  $\mathbf{c}$  na orientované ploše  $S$  platí

$$\kappa^2 = \kappa_n(\vec{\mathbf{t}})^2 + \kappa_g^2$$

a v jejích neinflexních bodech navíc platí

$$\kappa \vec{\mathbf{n}} = \kappa_n(\vec{\mathbf{t}})\mathbf{N} + \kappa_g(\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{t}}).$$

**Důkaz:** Křivka je regulární, můžeme ji tedy parameterizovat obloukem. Jestliže je pak v daném bodě  $\mathbf{c}'' = 0$ , tak jsou z definice všechny tři křivosti nulové. V opačném případě je  $\mathbf{c}''$  kolmé na  $\vec{\mathbf{t}}$  a lze ho tedy vyjádřit jako lineární kombinaci  $\mathbf{N}$  a  $\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{t}}$ , které tvoří ON bázi normálové roviny křivky. Dostáváme tedy

$$\kappa \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{c}'' = (\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + [\mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{t}})](\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{t}}) = \kappa_n(\vec{\mathbf{t}})\mathbf{N} + \kappa_g(\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{t}}).$$

První z rovností ve větě z toho pak plyne podle Pythagorovy věty.  $\square$

**Definice 2.28.** Řekneme, že parametrizovaná křivka  $\mathbf{c}(t)$  na ploše  $S$  je *geodetika*, jestliže v každém jejím bodě platí

$$\mathbf{c}''(t) \perp T_{\mathbf{c}(t)}S.$$

**Věta 2.29.** Parametrizovaná křivka  $\mathbf{c}(t)$  je geodetika na ploše  $S$  právě tehdy, když má v každém bodě nulovou geodetickou křivost a parametrizace parametrem  $t$  má konstantní rychlost  $\|\mathbf{c}'(t)\|$ .

**Důkaz:** Jestliže je křivka geodetikou, to jest  $\mathbf{c}''(t) \perp T_{\mathbf{c}(t)}S$ , tedy  $\mathbf{c}''$  je násobkem  $\mathbf{N}$  a tedy geodetická křivost je podle definice nulová. Navíc je  $\mathbf{c}''(t)$  kolmé na  $\mathbf{c}'(t)$  a tedy  $[\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t)]' = 2\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) = 0$  a tedy rychlost  $\sqrt{\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t)}$  je konstantní.

Naopak, jestliže má křivka konstantní rychlost, je  $\mathbf{c}''(t)$  kolmé na  $\mathbf{c}'(t)$ . Jestliže je tato rychlost nulová, pak je křivka konstantním bodem a tedy triviálně geodetikou. Jestliže je rychlost nenulová a kdyby  $\mathbf{c}''(t)$  nebylo násobkem  $\mathbf{N}$ , byly by vektory  $\mathbf{c}'(t)$ ,  $\mathbf{c}''(t)$  a  $\mathbf{N}$  lineárně nezávislé a geodetická křivost by byla nenulová. Musí tedy být tímto násobkem a křivka geodetikou.  $\square$

**Věta 2.30** (Soustava rovnic pro geodetiky). Křivka v mapě  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$  je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(g_{11}u' + g_{12}v') &= \frac{1}{2} \left( [g_{11}]_u (u')^2 + 2[g_{12}]_u u'v' + [g_{22}]_u (v')^2 \right), \\ \frac{d}{dt}(g_{12}u' + g_{22}v') &= \frac{1}{2} \left( [g_{11}]_v (u')^2 + 2[g_{12}]_v u'v' + [g_{22}]_v (v')^2 \right),\end{aligned}$$

kde  $G = \{g_{ij}\}$  je matice první fundamentální formy plochy.

**Lemma 2.31.** Pro každou mapu  $\mathbf{p}(u, v)$  existují hladké funkce  $\Gamma_{ij}^k(u, v)$  tak, že

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{p}_v + h_{11} \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vu} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{p}_v + h_{12} \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{p}_v + h_{22} \mathbf{N},\end{aligned}$$

kde  $h_{ij}$  jsou koeficienty druhé fundamentální formy plochy. Tyto funkce  $\Gamma_{ij}^k(u, v)$  se nazývají *Christoffelovy symboly* a lze je vyjádřit pomocí koeficientů  $g_{ij}$  první formy plochy a jejich derivací.

**Věta 2.32.** Soustavu rovnic pro geodetiky lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\begin{aligned}u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0.\end{aligned}$$

**Důsledek 2.33.** Pro daný bod  $s_0 \in S$  a nenulový vektor  $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0}$  existuje  $\epsilon > 0$  a právě jedna parametrizovaná geodetika  $\mathbf{c} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  taková, že  $\mathbf{c}(0) = s_0$  a  $\mathbf{c}'(0) = \vec{\mathbf{w}}$ .

**Lemma 2.34** (Euler-Lagrangeovy rovnice). Necht'  $F(t, u_1, v_1, u_2, v_2)$  je hladká funkce na  $\langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}^4$ . Necht'  $A, B \in \mathbb{R}^2$  jsou dva pevně zvolené body. Pro libovolnou křivku

$$\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t)) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$$

takovou, že  $\mathbf{c}(\alpha) = A$ ,  $\mathbf{c}(\beta) = B$  definujeme funkcionál

$$\Phi(\mathbf{c}) = \int_{\alpha}^{\beta} F(t, u, v, u', v') dt.$$

Jestliže křivka  $\mathbf{c}$  je globálním minimem funkcionálu  $\Phi$  pak pro  $\mathbf{c}$  platí pro každou hodnotu  $t$  následující rovnice

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u_2}(t, u, v, u', v') \right) &= \frac{\partial F}{\partial u_1}(t, u, v, u', v'), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial v_2}(t, u, v, u', v') \right) &= \frac{\partial F}{\partial v_1}(t, u, v, u', v').\end{aligned}$$

**Věta 2.35.** Jestliže křivka parametrizovaná na ploše konstantní rychlostí je nejkratší spojnici svých krajních bodů, pak je geodetikou.

### 3 Hlubší výsledky o plochách.

**Definice 3.1.** Zobrazení  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  mezi dvěma plochami se nazývá hladké, jestliže pro každé dvě mapy  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow S$ ,  $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{S}$  je zobrazení

$$\tilde{\mathbf{p}}^{-1} \circ f \circ \mathbf{p}$$

hladkým zobrazením otevřených podmnožin  $\mathbb{R}^2$ .

**Definice 3.2.** Necht'  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  je hladké zobrazení mezi dvěma plochami. Pak pro každé  $s_0 \in S$  se lineární zobrazení

$$df(s_0) : T_{s_0}S \rightarrow T_{f(s_0)}\tilde{S},$$

keré vektoru  $\mathbf{c}'(0)$  přiřazuje vektor  $(f \circ \mathbf{c})'(0)$  nazývá *tečným zobrazením* k  $f$  v bodě  $s_0$ .

**Definice 3.3.** Mějme orientovanou plochu  $S$  s jednotkovou normálou  $\mathbf{N}$  a  $\mathbb{S}^2$  je jednotková sféra v  $\mathbb{R}^3$ . Zobrazení,

$$\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

keré každému bodu přiřazuje příslušnou normálu se nazývá *Gaussovo zobrazení*. Dále pro každý bod  $s_0 \in S$  definujeme Weingartenovo zobrazení jako

$$w(s_0) = -d\mathbf{N}(s_0) : T_{s_0}S \rightarrow T_{\mathbf{N}(s_0)}\mathbb{S}^2 = T_{s_0}S.$$

**Věta 3.4.** Weingartenovo zobrazení je vyjádřeno vůči bázi  $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$  maticí

$$W = G^{-1}H,$$

a tedy hlavní směry a hlavní křivosti jsou vlastními směry a vlastními čísly Weingartenova zobrazení.

**Důkaz.**  $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{N})$  je báze  $\mathbb{R}^3$  Parciální derivací vztahu  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$  dostáváme, že  $\mathbf{N}_u$  a  $\mathbf{N}_v$  jsou kolmé na  $\mathbf{N}$  a tedy můžeme psát

$$\mathbf{N}_u = d\mathbf{N}(\mathbf{p}_u) = -w_{11}\mathbf{p}_u - w_{21}\mathbf{p}_v, \quad \mathbf{N}_v = -w_{12}\mathbf{p}_u - w_{22}\mathbf{p}_v. \quad (1)$$

Parciálním derivováním vztahů  $\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{N} = 0$  dostáváme alternativní vzorce pro koeficienty druhé formy

$$\begin{aligned} h_{11} &= \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N}_u = w_{11}g_{11} + w_{21}g_{12} \\ h_{12} &= \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{N}_u = w_{12}g_{11} + w_{22}g_{12} = w_{11}g_{21} + w_{21}g_{22} \\ h_{22} &= \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{N}_v = w_{12}g_{21} + w_{22}g_{22}, \end{aligned}$$

což dohromady dává  $H = W^T \cdot G = G \cdot W$ . Tvrzení o hlavních křivostech a směrech plyne z 2.23. Vztah zapsaný bez souřadnic je

$$II(\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) = -I(\vec{\mathbf{w}}_1, d\mathbf{N}(\vec{\mathbf{w}}_2))$$

□

**Poznámka.** Mějme zobrazení  $f : S \rightarrow \tilde{S}$ , mapu  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow S$  s maticí první fundamentální formy  $G$  a mapu  $\tilde{\mathbf{p}} = f \circ \mathbf{p}$  na  $\tilde{S}$  s maticí první fundamentální formy  $\tilde{G}$ . Pro zobrazení mezi plochami definujeme vlastnosti stejně jako v 2.12. Pak platí podobně jako v 2.13

1.  $f$  je isometrické, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí  $G = \tilde{G}$ ,
2.  $f$  je konformní, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí  $G = \lambda\tilde{G}$ , kde  $\lambda$  je kladná funkce na  $\mathcal{O}$ ,
3.  $f$  zachovává velikosti ploch, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí  $\det G = \det \tilde{G}$ .

**Definice 3.5.** Předpokládejme, že  $S$  je plocha v  $\mathbb{R}^3$ . *Riemannova metrika* na  $S$  přiřazuje každému bodu  $s_0 \in S$  skalární součin  $I_{s_0}$  na tečném prostoru  $T_{s_0}S$  hladkým způsobem. Přesněji pro každou mapu  $\mathbf{p}(u, v)$  na  $S$  jsou položky matice

$$[I]_{(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)} = G(u, v) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

hladké. Symbolicky tuto Riemannovu metriku (ve zvolených souřadnicích) zapisujeme jako výraz

$$ds^2 := g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2.$$

**Poznámka.** Na ploše s Riemannovou metrikou můžeme studovat délku, úhly, plochy, isometrická, konformní a plochojevná zobrazení. Jsou-li  $S, \tilde{S}$  dvě plochy s R. metrikami s maticemi  $G$  a  $\tilde{G}$ , pak vlastnosti zobrazení  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  studujeme porovnáním matic  $G$  a  $D^T \tilde{G} D$ , kde  $D$  je matice  $df$  vyjádřená vůči příslušným bazím. Geodetiky definujeme jako křivky splňující rovnice 2.30. Nejkratší spojnice jsou pak geodetiky v duchu věty 2.35.

**Definice 3.6.** Budeme uvažovat vektorový prostor  $\mathbb{M}^3 = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) | x_i \in \mathbb{R}\}$  s kvadratickou formou  $Q(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ . Definujeme plochu jako jeden list dvoudílného hyperboloidu

$$H_2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in M^3 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}.$$

V každém bodě definujeme Riemannovu metriku jako zúžení formy  $Q$  na tečný prostor (toto už je pozitivně definitní).

**Definice 3.7.** Množina  $U = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$  spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2)$$

se nazývá kruhový Poincarého model hyperbolické roviny.

**Věta 3.8.** Stereografická projekce mezi diskem  $U$  a hyperboloidem  $H_2$

$$\Phi(u, v) = \left( \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2} \right)$$

je isometrií vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám.

**Definice 3.9.** Pro uzavřený mnohostěn, označme  $S$  množinu stěn (mnohoúhelníků),  $V$  množinu všech vrcholů, a  $H$  množinu všech hran a definujme Eulerovu charakteristiku  $\chi = |V| - |H| + |S|$ . V každém vrcholu uzavřeného mnohostěnu definujeme diskrétní Gaussovu jako defekt součtu přilehlých úhlů.

$$K(v) = 2\pi - \sum_{\alpha_i \in \text{Star}(v)} \alpha_i$$

**Věta 3.10.** Pro uzavřený mnohostěn platí

$$\sum_{v_i \in V} K(v_i) = 2\pi\chi.$$

**Důkaz.**

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in V} K(v_i) &= 2\pi|V| - \sum_{v_i \in V} \sum_{\alpha_{ij} \in \text{Star}(v_i)} \alpha_{ij} \\ &= 2\pi|V| - \sum_{f_k \in F} \sum_{\alpha_{kl} \in f_k} \alpha_{kl} \\ &= 2\pi|V| - \sum_{f_k \in F} \pi(n_k - 2) = 2\pi \underbrace{(|V| - |E| + |F|)}_{\chi}. \end{aligned}$$

□

**Věta 3.11.** Pro každý bod  $s_0$  na ploše  $S$  existuje mapa  $\mathbf{p}(u, v)$  taková, že  $\mathbf{p}(0, 0) = s_0$  a matice první fundamentální formy plochy vůči mapě  $p$  má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(u, v) \end{pmatrix}.$$

**Věta 3.12** (Theorema egregium.). Gaussovu křivost  $K$  lze vypočítat pomocí koeficientů matice první fundamentální formy  $G$  a jejich derivací.

**Důkaz.** Důkaz provedeme v okolí libovolného bodu v souřadnicích z věty 3.11. Matice první formy tedy splňuje  $g_{11} = 1$  a  $g_{12} = 0$ . V takovém případě je  $\mathbf{p}_u$  jednotkový, definujeme  $\tilde{\mathbf{p}}_v = \frac{\mathbf{p}_v}{\sqrt{g_{22}}}$  a dostaneme ON bázi  $(\mathbf{p}_u, \tilde{\mathbf{p}}_v, \mathbf{N})$ . Pro ní platí analogie Frenetových vzorců:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{p}_u)_u \\ (\tilde{\mathbf{p}}_v)_u \\ \mathbf{N}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{11} \\ 0 & 0 & w_{21}\sqrt{g_{22}} \\ -w_{11} & -w_{21}\sqrt{g_{22}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \tilde{\mathbf{p}}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{p}_u)_v \\ (\tilde{\mathbf{p}}_v)_v \\ \mathbf{N}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\sqrt{g_{22}})_u & w_{12} \\ -(\sqrt{g_{22}})_u & 0 & w_{22}\sqrt{g_{22}} \\ -w_{12} & -w_{22}\sqrt{g_{22}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \tilde{\mathbf{p}}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix},$$

jejichž položky získáváme z (1) a z výpočtů

$$(\mathbf{p}_u)_u \cdot \tilde{\mathbf{p}}_v = \frac{\mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{p}_v}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)_u}{\sqrt{g_{22}}} - \frac{(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)_v}{2\sqrt{g_{22}}} = 0,$$

$$(\mathbf{p}_u)_v \cdot \tilde{\mathbf{p}}_v = \frac{\mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{p}_v}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v)_u}{2\sqrt{g_{22}}} = \frac{(g_{22})_u}{2\sqrt{g_{22}}} = (\sqrt{g_{22}})_u.$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} K = \det W &= w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} = \frac{(\mathbf{p}_u)_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_v - (\mathbf{p}_u)_v \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_u}{\sqrt{g_{22}}} = \\ &= \frac{(\mathbf{p}_u)_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_v + \mathbf{p}_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_{uv}}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{(\mathbf{p}_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_v)_u}{\sqrt{g_{22}}} = -\frac{(\sqrt{g_{22}})_{uu}}{\sqrt{g_{22}}}, \end{aligned}$$

kde v rovnosti mezi řádky využíváme vztah

$$(\mathbf{p}_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_u)_v = 0.$$

□

**Poznámka.** Vzorec pro  $K$  má při obecné mapě poměrně komplikovaný tvar

$$\frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(g_{11})_{vv} + (g_{12})_{uv} - \frac{1}{2}(g_{22})_{uu} & \frac{1}{2}(g_{11})_u & (g_{12})_u - \frac{1}{2}(g_{11})_v \\ (g_{12})_v - \frac{1}{2}(g_{22})_u & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_v & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(g_{11})_v & \frac{1}{2}(g_{22})_u \\ \frac{1}{2}(g_{11})_v & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_u & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}}{(\det G)^2}.$$

**Definice 3.13.** Řekneme, že křivka  $\mathbf{c}(t)$  na ploše orientované ploše je jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka, jestliže existuje mapa  $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow S$  taková, že  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{c}}(t))$ , kde  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = (u(t), v(t))$  je Jordanova jednoduchá, uzavřená křivka v rovině, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) a navíc  $\text{Int } \tilde{\mathbf{c}} \subset \mathcal{O}$ . Označme  $\text{Int } \mathbf{c} = \mathbf{p}(\text{Int } \tilde{\mathbf{c}})$ .

**Věta 3.14.** Necht'  $\mathbf{c}$  jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka na ploše  $S$ . Pak

$$\int_{\text{Int } \mathbf{c}} K dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} \kappa_g ds,$$

kde  $\kappa_g$  je geodetická křivost křivky  $\mathbf{c}$  a  $K$  je Gaussova křivost plochy  $S$ .

**Důkaz.** Provedeme opět pouze ve speciální mapě 3.11. BÚNO předpokládáme, že  $(\mathbf{p}_u, \tilde{\mathbf{p}}_v, \mathbf{N})$  je kladně orientovaná ON báze a  $\mathbf{c}(t)$  parametrizovaná obloukem, pak existuje hladká funkce  $\theta(t)$  tak, že

$$\mathbf{c}' = \cos \theta \mathbf{p}_u + \sin \theta \tilde{\mathbf{p}}_v.$$

Potom přímým výpočtem

$$\mathbf{N} \times \mathbf{c}' = -\sin \theta \mathbf{p}_u + \cos \theta \tilde{\mathbf{p}}_v,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}'' &= \cos \theta \mathbf{p}'_u + \sin \theta \tilde{\mathbf{p}}'_v + \theta'(-\sin \theta \mathbf{p}_u + \cos \theta \tilde{\mathbf{p}}_v) \\ \kappa_g &= \mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}') = \theta' - \mathbf{p}_u \cdot \tilde{\mathbf{p}}'_v.\end{aligned}$$

Dále dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \kappa_g ds &= \int_{\mathbf{c}} \theta' ds - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{p}_u \cdot \tilde{\mathbf{p}}'_v ds = 2\pi - \int_a^b \mathbf{p}_u \cdot \tilde{\mathbf{p}}'_v dt \\ &= 2\pi - \int_a^b \mathbf{p}_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_u u' dt - \int_a^b \mathbf{p}_u \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_v)_v v' dt = 2\pi - 0 + \int_{\tilde{\mathbf{c}}} (\sqrt{g_{22}})_u dv \\ &= 2\pi + \int_{\text{Int } \tilde{\mathbf{c}}} (\sqrt{g_{22}})_{uu} dudv = 2\pi - \int_{\text{Int } \mathbf{c}} K \sqrt{g_{22}} dudv = 2\pi - \int_{\text{Int } \mathbf{c}} K dS.\end{aligned}$$

□

**Definice 3.15** (Křivočarý mnohoúhelník na ploše). Řekneme, že  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{c}}(t))$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$  je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka na ploše pokud splňuje všechny podmínky definice 3.13 kromě hladkosti  $\mathbf{c}(t)$  v konečně mnoha bodech  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ , ve kterých je pouze spojitá a existují jednostranné nenulové derivace  $\mathbf{c}'_-(t_i)$  a  $\mathbf{c}'_+(t_i)$  pro všechna  $i = 0, \dots, n$ .

Množinu  $\mathcal{M} = \mathbf{c} \cup \text{Int}(\mathbf{c})$  budeme nazývat křivočarý mnohoúhelník, body  $\mathbf{c}(t_i)$  se nazývají vrcholy tohoto mnohoúhelníka a křivka  $\mathbf{c}$  zúžená na dílčí intervaly dělení se nazývá hranou mnohoúhelníka. Křivka  $\mathbf{c}$  se nazývá obvod mnohoúhelníka. Orientovaný (proti směru hodinových ručiček) úhel  $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$  mezi vektory  $\mathbf{c}'_-(t_i)$  a  $\mathbf{c}'_+(t_i)$  se nazývá vnější úhel mnohoúhelníka u vrcholu  $\mathbf{c}(t_i)$ .

**Věta 3.16.** Necht'  $\mathbf{c}(t)$  je obvod křivočarého mnohoúhelníka na ploše  $S$  s vnějšími orientovanými úhly  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  u svých vrcholů. Pak

$$\int_{\text{Int } \mathbf{c}} K dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} \kappa_g ds - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

**Důsledek 3.17.** Předpokládejme, že  $\mathbf{c}$  je křivočarý trojúhelník s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  u svých vrcholů a že jeho hrany jsou geodetiky. Pak

$$\int_{\text{Int } \mathbf{c}} K dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

**Definice 3.18** (Triangulace a Eulerova charakteristika plochy). Necht'  $S$  je kompaktní plocha. Její triangulace je soubor křivočarých mnohoúhelníků  $\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, k$  na  $S$  s následujícími vlastnostmi:

- (1) existuje atlas na  $S$  takový, že každý mnohoúhelník  $\mathcal{M}_i$  se vejde i se svým obvodem do některé mapy tohoto atlasu;
- (2)  $S = \cup_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ ;
- (3) pro  $i \neq j$  je  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$  buď prázdná množina, nebo společná hrana, nebo společný vrchol;
- (4) Každá hrana triangulace je hrana právě dvou mnohoúhelníků.

Eulerova charakteristika plochy  $S$  je číslo, určené následujícím způsobem: zvolme triangulaci, která má množinu stěn (mnohoúhelníků)  $S$ , označme  $V$  množinu všech vrcholů,  $H$  množinu všech hran. Pak Eulerova charakteristika  $\chi$  se definuje vztahem

$$\chi = |V| - |H| + |S|.$$

**Věta 3.19.** Necht'  $S$  je kompaktní plocha, pak

$$\int_S K dS = 2\pi\chi,$$

kde  $K$  je Gaussova křivost a  $\chi$  je Eulerova charakteristika  $S$ .

**Důkaz.**  $\mathcal{M}_j$  jsou mnohoúhelníky tvořící triangulaci plochy  $S$ ,  $\alpha_i^j$  jejich vnější úhly a  $\beta_i^j = \pi - \alpha_i^j$  jejich vnitřní úhly. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \int_S K dS &= \sum_j \int_{\text{Int } \mathcal{M}_j} K dS = \sum_j (2\pi - \int_{\mathcal{M}_j} \kappa_g ds - \sum_i \alpha_i^j) = S2\pi - \sum_{i,j} \alpha_i^j \\ &= S2\pi - \sum_{i,j} \pi + \sum_{i,j} \alpha_i^j = S2\pi - 2H\pi + V2\pi = 2\pi\chi \end{aligned}$$

□

**Důsledek 3.20.** Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace.  $\int_S K dS$  se nemění při hladké deformaci kompaktní plochy.