Geometrie - seznam vět a definic - LS 2016/17

- za základní pro potřeby prvního bodu písemné části zkoušky jsou považovány všechny definice KROMĚ 1.16, 1.24, 1.30, 2.1, 2.4, 4.6, 4.7, 4.9, 4.16, 4.18, 4.21
- za základní věty JSOU považovány 1.15, 1.20, 1.31, 1.33, 2.2, 3.18, 3.20, 3.27, 3.29, 3.33, 3.35, 4.4, 4.15, 4.22, 4.25
- Budou se zkoušet důkazy všech vět KROMĚ: 1.10, 1.31, 3.13 (pouze postačující podmínka), 4.8, 4.13, 4.15, 4.17, 4.19

1 Teorie křivek

Definice 1.1. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0,0,0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikci na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována trojicí funkcí definovaných na I, tedy $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t), c_z(t))^T$. Pro rovinné křivky často uvádíme jen první dvě složky a předpokládáme, že $c_z(t)$ je nulová funkce.

Definice 1.2. Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I, je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Definice (a lemma) 1.3. Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

Poznámka. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme právě takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.

Poznámka. Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrizovanou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Dále budeme psát například $t(s)$ namísto $t = \phi(s)$ a v důsledku i $s(t)$ namísto $s = \varphi^{-1}(t)$. Konečně kvůli zjenodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 1.4. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ téže křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \\ \dddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{t} & 0 & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 & 0 \\ \dddot{t} & 3\dot{t}\,\ddot{t} & \dot{t}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'' \\ \mathbf{c}''' \end{pmatrix}.$$

Definice (a lemma) 1.5. Délku křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t), t \in I = (\alpha, \beta)$ definujeme jako určitý integrál

$$\int_\alpha^\beta ||\mathbf{c}'(t)||dt,$$

který nezávisí na parametrizaci.

Definice (a lemma) 1.6. V každém bodě křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její *křivost*

$$\kappa = \frac{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||}{||\mathbf{c}'||^3}.$$

Tento výraz nezávisí na parametrizaci. Bod, ve které je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*.

Definice (a lemma) 1.7. V každém neinflexním bodě křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její *torzi*

$$\tau = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||^2}.$$

Tento výraz nezávisí na parametrizaci.

Poznámka. Křivost a torze jsou tedy definovány jako výrazy invariantní vůči parametrizaci. Jejich geometrický význam brzy pochopíme při studiu takzvané parametrizace křivky obloukem.

Definice (a lemma) 1.8. V každém bodě orientované křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její *jednotkový tečný vektor* výrazem

$$\vec{\mathbf{t}}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}.$$

Tento vektor se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tečný vektor mění na vektor opačný, tedy na $-\vec{\mathbf{t}}(t)$.

Definice (a lemma) 1.9. V každém neinflexním bodě orientované křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její *jednotkový binormálový vektor*

$$\vec{\mathbf{b}}(t) = \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||}$$

a *jednotkový normálový vektor*

$$\vec{\mathbf{n}}(t) = \vec{\mathbf{b}}(t) \times \vec{\mathbf{t}}(t).$$

Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci zůstává normálový vektor beze změny a binormálový vektor se mění na vektor opačný.

Poznámka. Vektory $\{\vec{\mathbf{t}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ tvoří v každém neinflexním bodě ON bázi $\mathbb{R}^3$. Vektor $\vec{\mathbf{n}}(t)$ je jediný jednotkový vektor, pro který zároveň platí

$$\langle \vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t) \rangle = \langle \mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t) \rangle \quad \wedge \quad \mathbf{c}'(t) \cdot \vec{\mathbf{n}}(t) = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{c}''(t) \cdot \vec{\mathbf{n}}(t) > 0.$$

Jinými slovy, vektory $\{\vec{\mathbf{t}}, \vec{\mathbf{n}}\}$ získáme Gram–Schmidtovým orthonormalizačním procesem z vektorů $\{\mathbf{c}', \mathbf{c}''\}$.

Věta 1.10. Křivost, torze, tečný, normálový i binorálový vektor jsou invariantní vůči přímým shodnostem $\mathbb{R}^3$. Přesněji mějme přímou shodnost ve tvaru $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Máme-li křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném (neinflexním) bodě κ, τ, $\vec{\mathbf{t}}$, $\vec{\mathbf{n}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, pak křivka daná parametrizací $A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ má v odpovídajícím bodě křivost κ, torzi τ, tečný vektor $A\vec{\mathbf{t}}$, normálový vektor $A\vec{\mathbf{n}}$ a binormálový vektor $A\vec{\mathbf{b}}$.

Definice 1.11. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- ortonormální *Frenetův repér* jako uspořádanou trojici $\{\vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t)\}$,
- její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$,
- její *střed křivosti* jako bod $\mathbf{c}(t) + R(t)\ \vec{\mathbf{n}}(t)$,
- její *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t) \rangle$,
- její *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t) \rangle$,

- její *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \vec{\mathbf{n}}(t), \vec{\mathbf{b}}(t) \rangle$.

Definice 1.12. O parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizací obloukem* příslušné křivky, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$.

Věta 1.13. Každou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny reparametrizace $\mathbf{c}(s)$ obloukem z ní získáme změnou parametru ve tvaru $t = \pm\tilde{s} + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Lemma 1.14. Pro křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\vec{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a v každém neinflexním bodě navíc platí $\vec{\mathbf{n}}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}''(t)||}$ a $\kappa(t) = ||\mathbf{c}''(t)||$.

Věta 1.15 (Frenetovy vzorce)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ parametrizace křivky obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\vec{\mathbf{t}}' = \kappa\vec{\mathbf{n}}, \qquad \vec{\mathbf{n}}' = -\kappa\vec{\mathbf{t}} + \tau\vec{\mathbf{b}}, \qquad \vec{\mathbf{b}}' = -\tau\vec{\mathbf{n}},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{t}}' \\ \vec{\mathbf{n}}' \\ \vec{\mathbf{b}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{t}} \\ \vec{\mathbf{n}} \\ \vec{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\vec{\mathbf{d}} = \tau\vec{\mathbf{t}} + \kappa\vec{\mathbf{b}}$ jako

$$\vec{\mathbf{t}}' = \vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{t}}, \qquad \vec{\mathbf{n}}' = \vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{n}}, \qquad \vec{\mathbf{b}}' = \vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{b}}.$$

Poznámka. Vidíme tedy, že v parametrizaci obloukem (kdy se poloha bodu mění jednotkovou rychlostí) křivost vyjadřuje rychlost okamžité změny tečného vektoru (a tím i tečné přímky) a torze rychlost okamžité změny binormálového vektoru (a tím i oskulační roviny). Rovněž můžeme okamžitou změnu celého Frenetova repéru chápat jako rotaci kolem Darbouxova vektoru, jejíž rychlost je daná jeho délkou, tedy $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, které se někdy říká celková křivost.

Definice 1.16. Mějme křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem na intervalu I. Řekneme, že zobrazení $\vec{\mathbf{v}} : I \to \mathbb{R}^3$ je *jednotkový vektor s minimální rotací*, jestliže pro každé $t \in I$ platí $\vec{\mathbf{v}}(t) \cdot \vec{\mathbf{t}}(t)$=0, $||\vec{\mathbf{v}}(t)|| = 1$ a $\vec{\mathbf{v}}(t)'$ je násobkem $\vec{\mathbf{t}}(t)$. Jedná se tedy o proměnný vektor, který je jednotkový, kolmý na křivku a jeho okamžitá změna je pouze v tečném směru.

Věta 1.17. Mějme křivku $\mathbf{c}(t)$ bez inflexních bodů parametrizovanou obloukem na intervalu I. $\vec{\mathbf{v}}(t)$ je jednotkový vektor s minimální rotací právě tehdy, když pro každé $t \in I$ platí

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\mathbf{n}}(t) - \sin(\alpha(t))\vec{\mathbf{b}}(t),$$

kde $\alpha(t)$ je nějaká primitivní funkce k $\tau(t)$.

Věta 1.18. V libovolném neinflexním bodě orientované $\mathbf{A}$ křivky $\mathbf{c}$ uvažujme parametrizaci obloukem $\mathbf{c}(t)$, pro kterou $\mathbf{c}(0) = \mathbf{A}$. V afinních souřadnicích daných počátkem $\mathbf{A}$ a Frenetovým repérem v bodě $\mathbf{A}$ má tato parametrizace takzvaný kanonický Taylorův rozvoj

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{\kappa(0)^2}{6}t^3 + \dots \\ \frac{\kappa(0)}{2}t^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}t^3 + \dots \\ \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}t^3 + \dots \end{pmatrix}$$

Důsledek 1.19. Ve svém každém neinflexním bodě křivka

1. protíná normálovou rovinu
2. máli v tomto bodě nenulovou torzi, pak protíná i oskulační rovinu
3. dotýká se rektifikační roviny, ale neprotíná ji (tedy v okolí tohoto bodu zůstává pouze v jednom z poloprostorů, na které rektifikační rovina rozděluje $\mathbb{R}^3$)

4. má ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou

5. má ze všech rovin nejvyšší kontakt s oskulační rovinou

Věta 1.20. Nechť $f > 0, g$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Věta 1.21. Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí

$$\tau(t) = 0, t \in I \iff \text{křivka leží v rovině.}$$

Poznámka. Na parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ můžeme nahlížet jako na křivku v prostoru, doplníme-li třetí souřadnici nulou. V neinflexních bodech máme Frenetův repér s tím, že vektor binormály bude identicky roven (až na znaménko) třetímu vektoru kanonické báze e_3. Báze $\{\vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t)\}$ může být kladně nebo záporně orientována vůči kanonické bázi.

Definice 1.22. Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ definujeme *znaménkovou křivost* v bodě t vztahem

$$\kappa_z(t) := \sigma(t)\kappa(t), \quad t \in I,$$

kde $\sigma(t) := \mathit{signum} \det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))$.

Věta 1.23. Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{||c'(t)||^3}, \quad t \in I.$$

Definice 1.24. Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ a $t \in I$ definujeme jednotkový vektor $\vec{\mathbf{n}}_*(t)$ tak, aby $\{\vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}_*(t)\}$ byla kladně orientovaná ortonormální báze $\mathbb{R}^2$.

Věta 1.25.

1. V neinflexních bodech křivky platí $\vec{\mathbf{n}}_*(t) = \sigma(t)\vec{\mathbf{n}}(t)$.

2. V každém bodě $t \in I$ regulární křivky parametrizované obloukem platí tato rovinná varianta Frenetových vzorců:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{t}}'(t) &= \kappa_z(t)\vec{\mathbf{n}}_*(t), \\ \vec{\mathbf{n}}_*'(t) &= -\kappa_z(t)\vec{\mathbf{t}}(t). \end{aligned}$$

3. $\kappa_z(t)$ určuje rovinnou křivku v parametrizaci obloukem až na přímou shodnost v rovině.

Věta 1.26. Buď $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ křivka parametrizovaná obloukem. Pak existuje hladká funkce $\theta : I \to \mathbb{R}$ splňující $\vec{\mathbf{t}}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \theta'(t), \quad t \in I.$$

Důsledek 1.27. Buď $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka. Pak platí:

1. $\kappa_z(t) = 0,\ t \in I$, právě když $\mathbf{c}(I)$ je část přímky,

2. $\kappa_z(t) = k \neq 0,\ t \in I$, právě když $\mathbf{c}(I)$ je část kružnice o poloměru k^{-1}.

Definice 1.28. Je-li t neinflexním bodem křivky $\mathbf{c}$ v $\mathbb{R}^2$, nazýváme číslo $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ *poloměrem křivosti* a kružnici se středem $\mathbf{c}(t) + R(t)\vec{\mathbf{n}}(t)$ a poloměrem $R(t)$ *oskulační kružnicí* křivky $\mathbf{c}$ v bodě t.

Věta 1.29. Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech kružnic kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

Definice 1.30. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je *uzavřená*, jestliže $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ a $\mathbf{c}^{(i)}(a) = \mathbf{c}^{(i)}(b)$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Uzavřená křivka je *jednoduchá*, je-li $\mathbf{c}$ prosté na $[a, b)$. *Jordanova křivka* je jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka.

Věta 1.31 (Umlaufsatz)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ Jordanova křivka s kladnou orientací (proti směru hodinových ručiček) parametrizovaná obloukem na intervalu $t \in [a, b]$, pak

$$\int_a^b \kappa_z(t)\, dt = 2\pi.$$

Poznámka. Uvažujmě kladně orientovaný (proti směru hodinových ručiček) mnohoúhelník $A_1, A_2, \ldots, A_n$ s vnitřními úhly α_i. V každém vrcholu A_i uvažujme vnější úhel $\bar{\alpha}_i \in (-\pi, \pi)$, jako orientovaný úhel změny tečného vektoru (měřený proti směru hodinových ručiček). Pak platí

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i = 2\pi.$$

Podobně pro křivočarý rovinný mnohoúhelník, jehož strany jsou hladké křivky $\mathbf{c}_i$, které v bodech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ navazují s vnějším úhlem $\bar{\alpha}_i$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbf{c}_i} \kappa_z + \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i = 2\pi.$$

Lemma 1.32. Buď $\mathbf{c} = (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ kladně orientovaná Jordanova křivka. Pak plošný obsah oblasti Int **c** je roven

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)dt. \tag{1}$$

Věta 1.33 (Isoperimetrická nerovnost)**.** Buď $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka délky l a buď A plošný obsah vnitřku $Int\ c$. Pak

$$\frac{l^2}{4\pi} \geqslant A,$$

přitom rovnost nastane, právě když **c** je kružnice.

Lemma 1.34 (Wirtinger)**.** Nechť $f(t) : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^\pi f'^2(t)dt \geqslant \int_0^\pi f^2(t)dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D\sin(t)$, kde D je konstanta.

2 Sférická geometrie

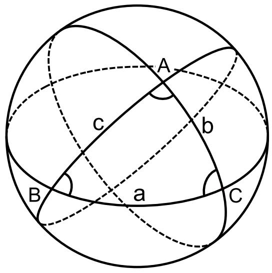
Definice 2.1 (Sférická geometrie)**.**

- Množinou bodů jsou body jednotkové sféry $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^2$.
- Množinou přímek jsou hlavní kružnice, tedy průsečíky sféry s libovolnou rovinou, která prochází jejím středem S.
- Délky křivek na sféře měříme běžným způsobem jako délky křivek v $\mathbb{R}^3$.
- Úsečky jsou úseky přímek, které mají délku nejvýše π.

- Lze ukázat, že úsečka je nejkratší spojnicí krajních bodů. Její délka je rovna příslušnému úhlu při středu sféry.
- Sférický trojúhelník je definován třemi body na sféře, které neleží na jedné přímce. Jeho hrany jsou tvořeny úsečkami, spojujícími příslušné tři body. Za vnitřek trojúhelníku považujeme menší z obou částí, na něž hrany trojúhelníka sféru rozdělí. Každý trojúhelník se zjevně vejde do nějaké polosféry ohraničené nějakou hlavní kružnicí.

Věta 2.2. Jestliže vnitřní úhly u vrcholů sférického trojúhelníka A, B, C postupně označíme α, β, γ, pak pro velikost $|ABC|$ plochy trojúhelníka ABC platí

$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



Poznámka. Jsou-li $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$, $\bar{\beta} = \pi - \beta$, $\bar{\gamma} = \pi - \gamma$ vnější úhly trojúhelníka, pak zjevně platí

$$|ABC| = 2\pi - (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}).$$

Obecněji uvažujme na sféře uzavřenou jednoduchou orientovanou lomenou čáru $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1$. V každém vrcholu A_i lomené čáry uvažujme úhel $\bar{\alpha}_i \in (-\pi, \pi)$, jako orientovaný úhel změny tečného vektoru (měřený proti směru hodinových ručiček). Lomená čára rozdělí sféru na dva sférické mnohoúhelníky. Pro velikost plochy mnohoúhelníka, který leží po levé straně všech orientovaných úseček pak platí

$$|A_1 A_2 \ldots A_n| = 2\pi - \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i.$$

Poznámka. Pro křivočarý, jednoduchý kladně orientovaný mnohoúhelník $\mathbf{c}$, jehož strany jsou hladké křivky $\mathbf{c}_i$, které v bodech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ navazují s vnějším úhlem $\bar{\alpha}_i$ platí

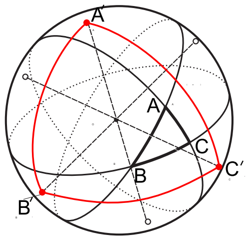
- v rovině
$$2\pi - \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbf{c}_i} \kappa_z - \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i = 0$$
- na jednotkové sféře
$$2\pi - \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbf{c}_i} \kappa_g - \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i = S_{\mathit{Int}\ \mathbf{c}}$$
- na obecné orientované ploše později dostaneme integrál z Gaussovy křivosti K
$$2\pi - \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbf{c}_i} \kappa_g - \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i = \int_{\mathit{Int}\ \mathbf{c}} K\, dS.$$

Definice 2.3 (Polarita)**.** Pro každý bod A na sféře definujeme jeho polární přímku (poláru) $p(A)$ jako průsečík sféry a roviny procházející jejím středem S a kolmé na AS. A nazýváme pólem $p(A)$. Každá přímka má právě dva póly. Pro každé dva body A, B zjevně platí

$$B \in p(A) \Leftrightarrow A \in p(B).$$

Rovněž platí, že A i B leží ve stejné polosféře vymezené přímkou $p(A)$ právě tehdy, když leží ve stejné polosféře vymezené přímkou $p(B)$.

Definice 2.4 (Polární trojúhelník)**.** Mějme trojúhelník A, B, C, s úhly α, β, γ a délkami stran postupně a, b, c. Nechť A' je pól přímky určené body B, C, který leží na stejné polosféře jako bod A. Analogicky získáme i body B', C'. Trojúhelník A', B', C' nazýváme polární k trojúhelníku ABC.



Zjevně je pak i ABC polární k A', B', C'. Pro úhly α', β', γ' a délky stran a', b', c' trojúhelníku A', B', C' platí

$$\alpha' = (\pi - a),\ \beta' = (\pi - b),\ \gamma' = (\pi - c),\ a' = (\pi - \alpha),\ b' = (\pi - \beta),\ c' = (\pi - \gamma).$$

Věta 2.5 (Sinová a cosinová věta)**.** Úhly při vrcholech sférického trojúhelníku A, B, C označíme postupně α, β, γ a délky stran protilehlých úhlům α, β, γ označíme postupně a, b, c. Pak platí

1. $$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

2. $$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

3. $$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Důsledek 2.6 (Pythagorova věta)**.** Jako důsledek pro pravoúhlý troúhelník ($\gamma = \pi/2$) dostaneme

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

3 Elementární teorie ploch

Definice 3.1. Nechť $\mathscr{O}$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$.

1. *Parametrická regulární plocha* v $\mathbb{R}^3$ je hladké regulární zobrazení $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^3$, tedy takové, že hodnost Jacobiho matice $\mathbf{p}$ je ve všech bodech rovna 2. Ekvivalentně, vektory parciálních derivací $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ musí být v každém bodě lineárně nezávislé.

2. Množinu $\mathbf{p}(\mathscr{O})$ nazveme obrazem regulární plochy, někdy ji budeme značit $\langle \mathbf{p} \rangle$.

3. Regulární param. plocha $\mathbf{p}$ se nazývá *mapa*, pokud je $\mathbf{p}$ navíc homeomorfismus $\mathscr{O}$ na $\langle \mathbf{p} \rangle$.

Lemma 3.2. Nechť $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^3$ je mapa a $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ hladké zobrazení, jehož obraz je podmnožinou $\langle \mathbf{p} \rangle$. Pak i zobrazení $\mathbf{p}^{-1} \circ f$ je hladké.

Věta 3.3. Je-li $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^3$ mapa a $\phi : \mathscr{O}' \to \mathscr{O}$ difeomeorfismus otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$, pak je také $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \phi$ mapou. Naopak, jsou-li $\mathbf{p}$ a $\tilde{\mathbf{p}}$ dvě mapy takové, že $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle$, pak existuje difeomorfismus ϕ takový, že $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \phi$.

Definice 3.4. Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^3$ je hladká plocha, pokud pro každý bod $s_0 \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to S$ tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathscr{O})$. Soubor map, které pokrývají celou plochu S se nazývá atlas plochy S. Jsou-li $\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}$ dvě mapy na S, pak budeme zobrazení $\phi = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ \mathbf{p}$ nazývat (tam kde je definované) přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.

Příklad 3.5.

1. Jednotková sféra se šesti mapami typu

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u,v) &= (u, v, \pm\sqrt{1-u_1^2-v_1^2}) \\ \mathscr{O} &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\} \end{aligned}$$

2. Válec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, |z| < 1)$ s mapami $\mathbf{p}_{1,2}(\phi,t) = (\cos\phi, \sin\phi, t)$, $\mathscr{O}_1 = (-\pi,\pi) \times (-1,1)$ a $\mathscr{O}_2 = (0,2\pi) \times (-1,1)$.

3. Graf hladké funkce $z = f(x,y)$ je hladká plocha s jedinou mapou

$$\mathbf{p}(u,v) = (u, v, f(u,v)).$$

4. Jestliže $F(x,y,z)$ je hladká funkce, pak definuji $S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$. Jestliže $\nabla F = (F_x, F_y, F_z) \neq 0$ na celé množině S, pak S je hladká plocha s mapami z věty o implicitních funkcích.

Poznámka. Připomeňme si, že zobrazení f je homeomorfismus, jestliže je to bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá.

Poznámka. Nechť $\mathbf{p}$ je prostá parametrizovaná plocha definovaná na omezené otevřené množině $\mathscr{O}$. Jestliže navíc lze $\mathbf{p}$ spojitě rozšířit na $\overline{\mathscr{O}}$ a i po rozšíření je toto zobrazení prosté, pak je $\mathbf{p}$ homeomorfismus a tedy i mapa.

Definice 3.6. Řekneme, že vektor $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ je tečný vektor k ploše S v bodě $s_0 \in S$, pokud existuje parametrizovaná křivka $\mathbf{c}(t)$ taková, že $\langle \mathbf{c} \rangle \subset S$, $\mathbf{c}(t_0) = s_0$ a $\mathbf{c}'(t_0) = \vec{\mathbf{w}}$. Množina všech tečných vektorů v bodě $s_0 \in S$ se nazývá tečný prostor k ploše S v bodě s_0 a značí se $T_{s_0}S$.

Věta 3.7. Tečný prostor $T_{s_0}S$ v libovolném bodě je vektorovým podprostorem $\mathbb{R}^3$. Jestliže $\mathbf{p}$ je mapa na S a $s_0 = \mathbf{p}(u_0,v_0)$, pak

$$T_{s_0}S = \langle \mathbf{p}_u(u_0,v_0), \mathbf{p}_v(u_0,v_0) \rangle.$$

Poznámka. Vektory $\mathbf{p}_u$, $\mathbf{p}_v$ parciálních derivací v bodě (u_0,v_0) tedy tvoří bázi tečného prostoru $T_{s_0}S$ a tento prostor je ztotožněn s $\mathbb{R}^2$ prostřednictvím derivace k $\mathbf{p}$ v bodě (u_0,v_0), která má tvar

$$\mathbf{p}' : (a,b)^T \to a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v.$$

Definice 3.8. Jednodimenzionální ortogonální doplněk tečného prostoru $T_{s_0}S$ v každém bodě se nazývá *normálnový prostor* a značí se $N_{s_0}S$. Řekneme, že plocha S je *orientovaná*, jestliže je v každém jejím bodě zvolena jednotková normála $\mathbf{N}$ takovým způsobem, že existuje takový atlas plochy S, že pro každou jeho mapu $\mathbf{p}$ platí

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{||\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v||}.$$

Poznámka. Později uvidíme, že zobrazení které každému bodu plochy přiřazuje takovouto jednotkovou normálu je hladké zobrazení z orientované plochy na jednotkovou sféru a budeme ho nazývat Gaussovo zobrazení.

Definice 3.9. Je-li S plocha a $s_0 \in S$ její bod, pak na $T_{s_0}S$ definujeme skalární součin jako restrikci kanonického Eukleidovského skalárního součinu na $\mathbb{R}^3$

$$I_{s_0}(\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) := \vec{\mathbf{w}}_1 \cdot \vec{\mathbf{w}}_2.$$

Tato symetrická bilineární forma se nazývá *první fundamentální forma* plochy S v bodě $s_0 \in S$.

Věta 3.10. Je-li $\mathbf{p}(u,v)$ mapa, pak je první fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$ symetrickou maticí

$$G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix} = [\mathbf{p}']^T \cdot [\mathbf{p}].$$

Poznámka. První fundamentální formu na ploše můžeme chápat rovněž jako kvadratickou formu, která se tradičně zapisuje jako $g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$. Někdy se pro koeficienty první fundamentální formy používá označení $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ a $g_{22} = G$.

Důsledek 3.11. Nechť $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa na ploše S a $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ parametrizovaná křivka na ploše. Pak $||\mathbf{c}'(t)|| = \sqrt{(u', v')G_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}$ a její délka je tedy $\int_\alpha^\beta \sqrt{(u', v')G_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}\,\mathrm{d}\,t$.

Jestliže navíc $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$ je další křivka na ploše S, která má s $\mathbf{c}(t)$ společný bod, pak úhel křivek $\mathbf{c}(t), \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$ v jejich společném bodě definujeme jako úhel jejich tečných vektorů v tomto bodě a jeho cosinus vypočítáme jako

$$\frac{(u', v')G_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{pmatrix}}{\sqrt{(u', v')G_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}\sqrt{(\tilde{u}', \tilde{v}')G_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{pmatrix}}}.$$

Poznámka. Připomeňmě (MA), že je-li f hladká funkce na ploše S, pak definujeme integrál prvního druhu vzorcem

$$\int_{\mathbf{p}(\mathscr{O})} f\,\mathrm{d}S := \int_{\mathscr{O}} f \circ \mathbf{p}\sqrt{\det G}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\mathscr{O}} f \circ \mathbf{p}||\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

který se nemění při reparametrizaci.

Poznámka. Velikost plochy dostaneme speciálně pro $f \equiv 1$.

Definice 3.12. Mapa $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to S$ se nazývá

1. *isometrická*, pokud zachovává délku křivek, tedy délka každé $(u(t), v(t))$ je stejná jako délka $\mathbf{p}(u(t), v(t))$
2. *konformní*, (též úhlojevná) jestliže zachovává úhly mezi křivkami, tedy pro každé dvě křivky je úhel mezi $(u(t), v(t))$ a $(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$ stejný jako úhel mezi $\mathbf{p}(u(t), v(t))$ a $\mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$.
3. *plochojevná*, jestliže je velikost každé otevřené podmnožiny $\tilde{\mathscr{O}} \subset \mathscr{O}$ stejná jako velikost plochy $\mathbf{p}(\tilde{\mathscr{O}})$.

Věta 3.13. Mějme mapu $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to S$ s maticí první fundamentální formy $G_{\mathbf{p}}$. Pak

1. $\mathbf{p}$ je isometrická mapa, právě tehdy, když $G_{\mathbf{p}} = I_2$.
2. $\mathbf{p}$ je konformní mapa, právě tehdy, když $G_{\mathbf{p}} = \lambda I_2$, kde $\lambda > 0$ je hladká funkce u, v.
3. $\mathbf{p}$ plochojevná mapa, právě tehdy, když $\det G_{\mathbf{p}} = 1$.

Příklad 3.14. 1. Mapy válce z příkladu 3.5 (2) jsou isometrické.

2. Mapa stereografické projekce je úhlojevná.
3. Mapy sféry získané z válce složením se zobrazením

$$f([x, y, z]) = \left(\frac{x\sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y\sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z\right)$$

jsou plochojevné.

Definice 3.15. Nechť S je orientovaná plocha, $s_0 \in S$ a $\mathbf{N}_{s_0}$ jednotková normála v bodě s_0. *Druhá fundamentální forma* II_{s_0} plochy S v bodě s_0 je kvadratická forma definovaná na tečném prostoru $T_{s_0}S$ následujícím způsobem. Nechť $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0}S$ a $\mathbf{c}(t)$ libovolná parametrizovaná křivka na ploše S taková, že $\mathbf{c}(t_0) = s_0$ a $\mathbf{c}'(t_0) = \vec{\mathbf{w}}$. Pak definujeme

$$II_{s_0}(\vec{\mathbf{w}}) := \mathbf{c}''(t_0) \cdot \mathbf{N}_{s_0}.$$

Důsledek 3.16. Je-li $\mathbf{p}(u,v)$ mapa, pak je druhá fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$ symetrickou maticí

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Druhá fundamentální forma se tradičně zapisuje jako $h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$. Někdy se pro koeficienty první fundamentální formy používá označení $h_{11} = L$, $h_{12} = g_{21} = M$ a $h_{22} = N$.

Poznámka. Poznámka. Nechť $s_0 \in S$, $\mathbf{N}_s$ orientovaná normála, $\vec{\mathbf{w}} \in T_sS$ jednotkový tečný vektor a křivka $\mathbf{c}$ je parametrizovaná obloukem a má oskulační rovinu $s_0 + \langle \mathbf{N}_{s_0}, \vec{\mathbf{w}} \rangle$ (například je přímo řezem plochy a roviny obsahující $\mathbf{N}_{s_0}$). Pak křivost $\mathbf{c}$ v bodě s je rovna $\pm II_{s_0}(\vec{\mathbf{w}})$.

Definice 3.17. Mějme orientovanou plochu S, bod na ploše s_0 a nenulový tečný vektor $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0}S$. Pak definujeme normálovou křivost plochy S v bodě s_0 ve směru $\vec{\mathbf{w}}$ jako

$$\kappa_n(\vec{\mathbf{w}}) := \frac{II(\vec{\mathbf{w}})}{I(\vec{\mathbf{w}})}.$$

Důsledek 3.18 (Meusnierova věta)**.** Nechť $\mathbf{c}(t)$ je křivka na orientované ploše a κ její křivost. Pak v každém jejím bodě platí

$$\kappa \cos\beta = \kappa_n(\mathbf{c}'),$$

kde β je úhel, který svírají vektory $\vec{\mathbf{n}}$ a $\mathbf{N}$.

Definice 3.19. Minimum κ_1 a maximum κ_2 normálové křivosti v daném bodě s_0 orientované plochy S se nazývají *hlavní křivosti* a odpovídající směry se nazývají *hlavní směry*.

Poznámka. Při změně orientaca mění druhá forma plochy, normálové křivosti a hlavní křivosti znaménko. Hlavní směry zůstávají stejné.

Věta 3.20 (Eulerova formule)**.** V každém bodě s_0 orientované plochy S existují dva navzájem kolmé hlavní směry $\langle \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle$ (s minimální normálovou křivostí κ_1) a $\langle \vec{\mathbf{w}}_2 \rangle$ (s maximální normálovou křivostí). Pro normálovou křivost v libovolném jiném směru $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0}S$ platí

$$\kappa_n(\vec{\mathbf{w}}) = \cos^2(\alpha)\kappa_1 + \sin^2(\alpha)\kappa_2,$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\vec{\mathbf{w}}$ a $\vec{\mathbf{w}}_1$.

Definice 3.21. V každém bodě orientovatelné plochy definujeme Gaussovu křivost K a střední křivost H jako

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Poznámka. Gaussova křivost nezáleží na volbě orientace. Bohužel se používá stejné písmeno H pro střední křivost i pro matici druhé fundamentální formy. Nenechejme se tím zmást!

Definice 3.22. Bod orientovatelné plochy se nazývá

1. *eliptický*, jestliže v něm platí $K > 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2$ nazývá se *kruhový*.

2. *parabolický*, jestliže v něm platí $K = 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ nazývá se *planární*.

3. *hyperbolický*, jestliže v něm platí $K < 0$.

Věta 3.23 (Výpočty v mapě.)**.** Jeslože $\mathbf{p}(u,v)$ je mapa na orientované oploše a G, H příslušné matice první a druhé fundamentální formy, pak

1. hlavní křivosti a hlavní směry vyjádřené v souřadnicích vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ nalezneme jako řešení rovnice
$$(H - \lambda G)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$
s neznámými λ a $(a,b)^T$.

2. Pro Gaussovu křivost platí $K = \frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G}$.

3. Pro střední křivost platí $H = \frac{h_{11}g_{22}-2h_{12}g_{12}+h_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}$.

Definice 3.24. Parametrizovanou křivku $\mathbf{c}(t)$ na ploše nazveme *hlavní*, jestliže pro každé t je $\mathbf{c}'(t)$ hlavním směrem. Křivku nazveme *asymptotickou*, jestliže pro každé t je $\kappa_n(\mathbf{c}'(t)) = 0$.

Věta 3.25. Pro křivku vyjádřenou v mapě jako $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ platí, že je

1. hlavní, právě když splňuje diferenciální rovnici

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

2. asymptotická, právě když splňuje diferenciální rovnici

$$h_{11}(u')^2 + 2h_{12}u'v' + h_{22}(v')^2 = 0.$$

Definice 3.26. Nechť $\mathbf{c}(t)$ je regulární parametrizovaná křivka na orientované ploše S. *Geodetickou křivost* křivky $\mathbf{c}$ definujeme jako

$$\kappa_g = \frac{\mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}')}{||\mathbf{c}'||^3} = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{N})}{||\mathbf{c}'||^3},$$

kde $\mathbf{N}$ je normála plochy v příslušném bodě.

Poznámka. Geodetická křivost se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci křivky a mění znaménko při změně orientace křivky.

Věta 3.27. Pro každou regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c}$ na orientované ploše S platí

$$\kappa^2 = \kappa_n(\vec{\mathbf{t}})^2 + \kappa_g^2$$

a v jejích neinflexních bodech navíc platí

$$\kappa\vec{\mathbf{n}} = \kappa_n(\vec{\mathbf{t}})\mathbf{N} + \kappa_g(\mathbf{N} \times \vec{\mathbf{t}}).$$

Definice 3.28. Řekneme, že parametrizovaná křivka $\mathbf{c}(t)$ na ploše S je *geodetika*, jestliže v každém jejím bodě platí

$$\mathbf{c}''(t) \perp T_{\mathbf{c}(t)}S.$$

Věta 3.29. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c}(t)$ je geodetika na ploše S právě tehdy, když má v každém bodě nulovou geodetickou křivost a parametrizace parametrem t má konstatní rychlost $||\mathbf{c}'(t)||$.

Věta 3.30 (Soustava rovnic pro geodetiky)**.** Křivka v mapě $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když jsou splněny rovnice

$$\frac{d}{dt}(g_{11}u' + g_{12}v') = \frac{1}{2}\left([g_{11}]_u(u')^2 + 2[g_{12}]_u u'v' + [g_{22}]_u(v')^2\right),$$
$$\frac{d}{dt}(g_{12}u' + g_{22}v') = \frac{1}{2}\left([g_{11}]_v(u')^2 + 2[g_{12}]_v u'v' + [g_{22}]_v(v')^2\right),$$

kde $G = \{g_{ij}\}$ je matice první fundamentální formy plochy.

Lemma 3.31. Pro každou mapu $\mathbf{p}(u, v)$ existují hladké funkce $\Gamma_{ij}^k(u, v)$ tak, že

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\mathbf{p}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{p}_v + h_{11}\mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vu} &= \Gamma_{12}^1\mathbf{p}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{p}_v + h_{12}\mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\mathbf{p}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{p}_v + h_{22}\mathbf{N}, \end{aligned}$$

kde h_{ij} jsou koeficienty druhé fundamentální formy plochy. Tyto funkce $\Gamma_{ij}^k(u, v)$ se nazývají *Christoffelovy symboly* a lze je vyjádřit pomocí koeficientů g_{ij} první formy plochy a jejich derivací.

Věta 3.32. Soustavu rovnic pro geodetiky lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\begin{array}{rcl} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 & = & 0 \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 & = & 0 \end{array}.$$

Důsledek 3.33. Pro daný bod $s_0 \in S$ a nenulový vektor $\vec{\mathbf{w}} \in T_{s_0}$ existuje $\epsilon > 0$ a právě jedna parametrizovaná geodetika $\mathbf{c} : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ taková, že $\mathbf{c}(0) = s_0$ a $\mathbf{c}'(0) = \vec{\mathbf{w}}$.

Lemma 3.34 (Euler-Lagrangeovy rovnice). Nechť $F(t, u_1, v_1, u_2, v_2)$ je hladká funkce na $\langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}^4$. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^2$ jsou dva pevně zvolené body. Pro libovolnou křivku

$$\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t)) : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^2$$

takovou, že $\mathbf{c}(\alpha) = A$, $\mathbf{c}(\beta) = B$ definujeme funkcionál

$$\Phi(\mathbf{c}) = \int_\alpha^\beta F(t, u, v, u', v')dt.$$

Jestliže křivka $\mathbf{c}$ je globálním minimem funkcionálu Φ pak pro $\mathbf{c}$ platí pro každou hodnotu t následující rovnice

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_2}(t, u, v, u', v')\right) & = & \dfrac{\partial F}{\partial u_1}(t, u, v, u', v'), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial v_2}(t, u, v, u', v')\right) & = & \dfrac{\partial F}{\partial v_1}(t, u, v, u', v'). \end{array}$$

Věta 3.35. Jestliže křivka parametrizovaná na ploše konstantní rychlostí je nejkratší spojnicí svých krajních bodů, pak je geodetikou.

4 Hlubší výsledky o plochách.

Definice 4.1. Zobrazení $f : S \to \tilde{S}$ mezi dvěma plochami se nazývá hladké, jestliže pro každé dvě mapy $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to S$, $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{\mathscr{O}} \to \tilde{S}$ je zobrazení

$$\tilde{\mathbf{p}}^{-1} \circ f \circ \mathbf{p}$$

hladkým zobrazením otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$.

Definice 4.2. Nechť $f : S \to \tilde{S}$ je hladké zobrazení mezi dvěma plochami. Pak pro každé $s_0 \in S$ se lineární zobrazení

$$df(s_0) : T_{s_0}S \to T_{f(s_0)}\tilde{S},$$

které vektoru $\mathbf{c}'(0)$ přiřazuje vektor $(f \circ \mathbf{c})'(0)$ nazývá *tečným zobrazením* k f v bodě s_0.

Definice 4.3. Mějme orientovanou plochu S s jednotkovou normálou $\mathbf{N}$ a $\mathbb{S}^2$ je jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$. Zobrazení,

$$\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2,$$

které každému bodu přiřazuje příslušnou normálu se nazývá *Gaussovo zobrazení*. Dále pro každý bod $s_0 \in S$ definujeme Weingartenovo zobrazení jako

$$w(s_0) = -d\mathbf{N}(s_0) : T_{s_0}S \to T_{\vec{\mathbf{n}}(s_0)}\mathbb{S}^2 = T_{s_0}S.$$

Věta 4.4. Weingartenovo zobrazení je vyjádřeno vůči bázi $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$ maticí

$$W = G^{-1}H,$$

a tedy hlavní směry a hlavní křivosti jsou vlastními směry a vlastními čísly Weingartenova zobrazení.

Důkaz.$(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{N})$ je báze $\mathbb{R}^3$ Parciální derivací vztahu $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ dostáváme, že $\mathbf{N}_u$ a $\mathbf{N}_v$ jsou kolmé na $\mathbf{N}$ a tedy můžeme psát

$$\mathbf{N}_u = d\mathbf{N}(\mathbf{p}_u) = -w_{11}\mathbf{p}_u - w_{21}\mathbf{p}_v, \qquad \mathbf{N}_v = -w_{12}\mathbf{p}_u - w_{22}\mathbf{p}_v. \tag{2}$$

Parciálním derivováním vztahů $\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N} = 0$ dostáváme alternativní vzorce pro koeficienty druhé formy

$$\begin{aligned} h_{11} &= \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N}_u = w_{11}g_{11} + w_{21}g_{12} \\ h_{12} &= \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{N}_u = w_{12}g_{11} + w_{22}g_{12} = w_{11}g_{21} + w_{21}g_{22} \\ h_{22} &= \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{N}_v = w_{12}g_{21} + w_{22}g_{22}, \end{aligned}$$

což dohromady dává $H = W^T \cdot G = G \cdot W$. Tvrzení o hlavních křivostech a směrech plyne z 3.23. Vztah zapsaný bez souřadnic je

$$II(\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) = -I(\vec{\mathbf{w}}_1, d\mathbf{N}(\vec{\mathbf{w}}_2))$$

. □

Poznámka. Mějme zobrazení $f : S \to \tilde{S}$, mapu $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to S$ s maticí první fundamentální formy G a mapu $\tilde{\mathbf{p}} = f \circ \mathbf{p}$ na $\tilde{S}$ s maticí první fundamentální formy $\tilde{G}$. Pro zobrazení mezi plochami definujme vlastnosti stejně jako v 3.12. Pak platí podobně jako v 3.13

1. f je isometrické, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí $G = \tilde{G}$,
2. f je konformní, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí $G = \lambda\tilde{G}$, kde λ je kladná funkce na $\mathscr{O}$,
3. f zachovává velikosti ploch, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí $\det G = \det \tilde{G}$.

Definice 4.5. Předpokládejme, že S je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Riemannova metrika* na S přiřazuje každému bodu $s_0 \in S$ skalární součin I_{s_0} na tečném prostoru $T_{s_0}S$ hladkým způsobem. Přesněji pro každou mapu $\mathbf{p}(u, v)$ na S jsou položky matice

$$[I]_{(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)} = G(u, v) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

hladké. Symbolicky tuto Riemannovu metriku (ve zvolených souřadnicích) zapisujeme jako výraz

$$ds^2 := g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2.$$

Poznámka. Na ploše s Riemannovou metrikou můžeme studovat délku, úhly, plochy, isometrická, konformní a plochojevná zobrazení. Jsou-li S $\tilde{S}$ dvě plochy s R. metrikami s maticemi G a $\tilde{G}$, pak vlastnosti zobrazení $f : S \to \tilde{S}$ studujeme porovnáním matic G a $D^T\tilde{G}D$, kde D je matice df vyjádřená vůči příslušným bazím. Geodetiky definujeme jako křivky splňující rovnice 3.30. Nejkratší spojnice jsou pak geodetiky v duchu věty 3.35.

Definice 4.6. Budeme uvažovat vektorový prostor $\mathbb{M}^3 = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) | x_i \in \mathbb{R}\}$ s kvadratickou formou $Q(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Definujeme plochu jako jeden list dvoudílného hyperboloidu

$$H_2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in M^3 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}.$$

V každém bodě definujeme Riemannovu metriku jako zúžení formy Q na tečný prostor (toto už je pozitivně definitní).

Definice 4.7. Přímky na H_2 definujeme jako průniky rovin procházejících počátkem s H_2. Úsečky definujeme jako souvislé omezené úseky přímek.

Věta 4.8. Grupa $SO(2,1)$, kterou definujeme jako podgrupu všech regulárních matic generovanou maticemi tvaru

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad a \quad M_2 \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří grupu přímých izometrií plochy H_2 s Riemannovou metrikou.

Definice 4.9. Množina $U = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2)$$

se nazývá kruhový Poincarého model hyperbolické roviny.

Věta 4.10. Stereografická projekce mezi diskem U a hyperboloidem H_2

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \right)$$

je isometrií vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám.

Definice 4.11. Množina $H_+ = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

se nazývá polorovinový Poincarého model hyperbolické roviny.

Věta 4.12. Zobrazení, které bodu $z = x + iy \in H_+$ přiřazuje bod $\zeta = u + iv \in U$, pro který platí

$$\zeta = \frac{z - i}{z + i}$$

je isometrií mezi H_+ a U vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám a jeho inverze má tvar

$$z = \frac{i(1 + \zeta)}{1 - \zeta}.$$

Věta 4.13. Zobrazení tvaru

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

tvoří grupu přímých isometrií H_+. Přímky a úsečky v U a H_+ definujeme jako obrazy přímek a úseček v H_2. Přímky jsou v těchto modelech běžné úsečky a kruhové oblouky kolmé na hranici modelu. Přímky splňují geodetické rovnice a úsečky jsou nejkratšími spojnicemi svých bodů.

Věta 4.14. V polorovinovém modelu hyperbolické geometrie je plocha hyperbolického trojúhelníka s úhly α, β, γ rovna

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Věta 4.15 (Theorema egregium.)**.** Gaussovu křivost K lze vypočítat pomocí koeficientů matice první fundamentální formy G a jejich derivací.

Poznámka. *Vzorec pro K má při obecné mapě poměrně komplikovaný tvar*

$$\frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(g_{11})_{vv} + (g_{12})_{uv} - \frac{1}{2}(g_{22})_{uu} & \frac{1}{2}(g_{11})_u & (g_{12})_u - \frac{1}{2}(g_{11})_v \\ (g_{12})_v - \frac{1}{2}(g_{22})_u & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_v & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(g_{11})_v & \frac{1}{2}(g_{22})_u \\ \frac{1}{2}(g_{11})_v & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_u & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}}{(\det G)^2}.$$

Definice 4.16. Řekneme, že křivka $\mathbf{c}(t)$ na ploše orientované ploše je jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka, jestliže existuje mapa $\mathbf{p} : \mathscr{O} \to S$ taková, že $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{c}}(t))$, kde $\tilde{\mathbf{c}}(t) = (u(t), v(t))$ je Jordanova jednoduchá, uzavřená křivka v rovině, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) a navíc $Int\, \tilde{\mathbf{c}} \subset \mathscr{O}$. Označme $Int\, \mathbf{c} = \mathbf{p}(Int\, \tilde{\mathbf{c}})$.

Věta 4.17. Nechť $\mathbf{c}$ jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka na ploše S. Pak

$$\int_{Int\, \mathbf{c}} K\, dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} \kappa_g\, ds,$$

kde κ_g je geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ a K je Gaussova křivost plochy S.

Definice 4.18 (Křivočarý mnohoúhelník na ploše)**.** Řekneme, že $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{c}}(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka na ploše pokud splňuje všechny podmínky definice 4.16 kromě hladkosti $\mathbf{c}(t)$ v konečně mnoha bodech $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, ve kterých je pouze spojitá a existují jednostranné nenulové derivace $\mathbf{c}'_-(t_i)$ a $\mathbf{c}'_+(t_i)$ pro všechna $i = 0, \ldots, n,$.

Množinu $\mathscr{M} = \mathbf{c} \cup Int(\mathbf{c})$ budeme nazývat křivočarý mnohoúhleník, body $\mathbf{c}(t_i)$ se nazývají vrcholy tohoto mnohoúhleníka a křivka $\mathbf{c}$ zúžená na dílčí intervaly dělení se nazývá hranou mnohoúhelníka. Křivka $\mathbf{c}$ se nazývá obvod mnohoúhleníka. Orientovaný (proti směru hodinových ručiček) úhel $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$ mezi vektrory $\mathbf{c}'_-(t_i)$ a $\mathbf{c}'_+(t_i)$ se nazývá vnější úhel mnohoúhelníka u vrcholu $\mathbf{c}(t_i)$.

Věta 4.19. Nechť $\mathbf{c}(t)$ je obvod křivočarého mnohoúhelníka na ploše S s vnějšími orientovanými úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ u svých vrcholů. Pak

$$\int_{Int\mathbf{c}} K\, dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} \kappa_g\, ds - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Důsledek 4.20. Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ je křivočarý trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ u svých vrcholů a že jeho hrany jsou jsou geodetiky. Pak

$$\int_{Int\, \mathbf{c}} K\, dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Definice 4.21 (Triangulace a Eulerova charakteristika plochy)**.** Nechť S je kompaktní plocha. Její triangulace je soubor křivočarých mnohoúhelníků $\mathscr{M}_i, i = 1, \ldots, k$ na S s následujícími vlastnostmi:
(1) existuje atlas na S takový, že každý mnohoúhelník $\mathscr{M}_i$ se vejde i se svým obvodem do některé mapy tohoto atlasu;
(2) $S = \cup_{i=1}^{k} \mathscr{M}_i$;
(3) pro $i \neq j$ je $\mathscr{M}_i \cap \mathscr{M}_j$ buď prázdná množina, nebo společná hrana, nebo společný vrchol;
(4) Každá hrana triangulace je hrana právě dvou mnohoúhelníků.

Eulerova charakteristika plochy S je číslo, určené následujícím způsobem: zvolme trinagulaci, která má množinu stěn (mnohoúhelníků) S, označme V množinu všech vrcholů, H množinu všech hran. Pak Eulerova charakteristika χ se definuje vztahem

$$\chi = |V| - |H| + |S|.$$

Věta 4.22. Nechť S je kompaktní plocha, pak

$$\int_S K\, dS = 2\pi\chi,$$

kde K je Gaussova křivost a χ je Eulerova charakteristika S.

Důkaz.$\mathscr{M}_j$ jsou mnohoúhelníky tvořící triangulaci plochy S, α_i^j jejich vnější úhly a $\beta_i^j = \pi - \alpha_i^j$ jejich vnitřní úhly. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\int_S KdS &= \sum_j \int_{\text{Int } \mathscr{M}_j} KdS = \sum_j (2\pi - \int_{\mathscr{M}_j} \kappa_g ds - \sum_i \alpha_i^j) = S2\pi - \sum_{i,j} \alpha_i^j \\ &= S2\pi - \sum_{i,j} \pi + \sum_{i,j} \alpha_i^j = S2\pi - 2H\pi + V2\pi = 2\pi\chi\end{aligned}$$

□

Důsledek 4.23. Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace. $\int_S K\, dS$ se nemění při hladké deformaci kompaktní plochy.

Definice 4.24. V každém vrcholu uzavřeného mnohostěnu definujeme diskrétní Gaussovu jako defekt součtu přilehlých úhlů.

$$K(v) = 2\pi - \sum_{\alpha_i \in \text{Star}(v)} \alpha_i$$

Věta 4.25. Pro uzavřený mnohostěn s množinou vrcholů V a Eulerovou charakteristikou χ platí

$$\sum_{v_i \in V} K(v_i) = 2\pi\chi.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\sum_{v_i \in V} K(v_i) &= 2\pi|V| - \sum_{v_i \in V} \sum_{\alpha_{ij} \in \text{Star}(v_i)} \alpha_{ij} \\ &= 2\pi|V| - \sum_{f_k \in F} \sum_{\alpha_{kl} \in f_k} \alpha_{kl} \\ &= 2\pi|V| - \sum_{f_k \in F} \pi(n_k - 2) = 2\pi \underbrace{(|V| - |E| + |F|)}_{\chi}.\end{aligned}$$

□