Geometrie - cvičení 5

Bodové hodnocení nemá praktický význam, pouze naznačuje obtížnost příkladu.

1. V libovolném bodě sféry $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ určete normálovou křivost v obecném směru, hlavní křivosti, Gaussovu a střední křivost. *(0,5 bodu)*

2. V libovolném bodě plochy $x \sin z - y \cos z = 0$ vypočítejte normálovou křivost v obecném směru a hlavní křivosti. *(0,5 bodu)*

3. V obecném bodě určete hlavní křivosti na rozvinutelných plochách:

   (a) kuželové ploše, *(0,5 bodu)*

   (b) válcové ploše, *(0,5 bodu)*

   (c) ploše tečen prostorové křivky. *(0,5 bodu)*

4. Pro plochu danou mapou $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, u^2 - v^2]$ v bodě $p(0, 0)$ určete normálovou křivost v libovolném směru, hlavní křivosti a hlavní směry. *(0,5 bodu)*

5. Určete hlavní křivosti a hlavní směry v libovolném bodě toru s mapou

$$\mathbf{p}(u, v) = [(R + r \sin u) \cos v, (R + r \sin u) \sin v, r \cos u],\ \ u, v \in (0, 2\pi) \text{ a } R > r.$$

   (0,5 bodu)

6. Určete první a druhou základní formu plochy nějaké mapy elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Určete Gaussovu a střední křivost v bodě $[a, 0, 0]$. *(1 bod)*

7. Určete Gaussovu a střední křivost pro dvě různé mapy paraboloidu $z = a(x^2 + y^2)$ pro $a > 0$:

   - $\mathbf{p}_1(u, v) = [u, v, a(u^2 + v^2)],\ \ u, v \in \mathbb{R}$ a
   - pro mapu vzniklou rotací křivky $\mathbf{c}(t) = [t, 0, at^2],\ \ t \in \mathbb{R}$ okolo osy z.

   Výsledek interpretujte. *(1 bod)*

8. Určete hlavní křivosti na rotační ploše. Jaká je podmínka, aby Gaussova křivost byla konstantní? Vyjmenujte plochy s konstantní Gaussovou křivostí $K = -1, 0, 1$. *(1 bod)*

9. Určete Gaussovu křivost obecné přímkové plochy, ukažte, že nikdy není kladná. *(0,5 bodu)*

10. Vypočtěte Gaussovu křivost pseudosféry s mapou

$$\mathbf{p}(u, v) = [e^{-u} \cos v, e^{-u} \sin v, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt].$$

   (0,5 bodu)

11. Určete funkci $f(t)$ tak, aby byla plocha s mapou $\mathbf{p}(u, t) = [f(t) - 2u, tf(t) - 2tu, u + ut^2]$ rozvinutelnou. *(0,5 bodu)*

Výsledky

1. $\kappa_n = \frac{1}{r}$, všechny směry jsou hlavní, $K = \frac{1}{\kappa^2}$, $H = \frac{1}{\kappa}$ *(0,5 bodu)*

2. V parametrizacei $p(u,v) = [u\cos v, u\sin v, v]$ jsou hlavní směry $\kappa_{1,2} = \pm\frac{+}{u^2+1}$ a normálová křivost $\kappa_n(w) = \frac{-2w_1w_2}{\sqrt{u^2+1}(w_1^2(u^2+1)w_2^2)}$ *(0,5 bodu)*

3. (a) Pro $\mathbf{p}(s,v) = va(s)$, kde s je oblouk na $a(s)$, která leží na jednotkové sféře. Pak hlavní křivosti jsou $\kappa_{n_1} = \frac{\det[a,a',a'']}{v}$, $\kappa_{n_2} = 0$. *(0,5 bodu)*

   (b) Pro $\mathbf{p}(s,v) = a(s) + cv$, kde s je oblouk na $a(s)$ a c konstantní jednotkový vektor. Pak hlavní křivosti jsou $\kappa_{n_1} = \det[a'', a, c]$, $\kappa_{n_2} = 0$. *(0,5 bodu)*

   (c) Pro plochu tečen křivky $\mathbf{c}(s)$ parametrizované obloukem jsou hlavní křivosti $\kappa_{n_1} = \frac{\tau}{v\kappa}$, $\kappa_{n_2} = 0$. *(0,5 bodu)*

4. $\kappa_{n_1} = 2$ s hlavním směrem $(\pm1, 0)$, $\kappa_{n_2} = -2$ s hlavní směrem $(0, \pm1)$. Normálová křivost ve směru w_1, který svírá se směrem p_u odpovídajícím hlavnímu směru maximální křivosti úhel α platí $\kappa_n = 2\cos 2\alpha$. *(0,5 bodu)*

5. $\kappa_{n_1} = \frac{1}{r}$, $\kappa_{n_2} = \frac{\sin\alpha}{R + r\sin\alpha}$ *(0,5 bodu)*

6. Pro mapu $\mathbf{p}(u,t) = [a\cos t\cos u, a\sin t\cos u, c\sin u]$, $u, t \in (0, 2\pi)$ je

$$G = \begin{pmatrix} \sin^2 u(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t) + c^2\cos^2 u & \frac{1}{4}(a^2-b^2)\sin 2t\sin 2u \\ \frac{1}{4}(a^2-b^2)\sin 2t\sin 2u & \cos^2 u(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} -abc & 0 \\ 0 & -abc\cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \sqrt{b^2c^2\cos^4 u\cos^2 v + a^2c^2\cos^4 u\sin^2 v + a^2b^2\sin^2 u\cos^2 u}.$$

   $K = \frac{a^2}{b^2c^2}$ a $H = \frac{a(b^2+c^2)}{2b^2c^2}$. *(1 bod)*

7. $K = \frac{4a^2}{(1+4a^2(u^2+v^2))^2}$ a $H = \frac{2(a+2a^3(u^2+v^2))}{(1+4a^2(u^2+v^2))^{\frac{3}{2}}}$ resp. $K = \frac{4a^2}{(1+4a^2t^2)^2}$ a $H = \frac{2a+4a^3t^2}{(1+4a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$, $t^2 = u^2 + v^2$ *(1 bod)*

8. Rotujeme-li křivku $\mathbf{c}(s) = [x(s), 0, z(s)]$ podél osy z, dostáváme $\kappa_{n_1} = z'x'' - z''x'$ a $\kappa_{n_2} = -\frac{z'}{x}$. Řešením je například pro $K = 0$ rotační válcová plocha, rotační kuželová plocha, část roviny, pro $K = 1$ sféra, pro $K = -1$ pseudosféra. *(1 bod)*

9. Pro plochu $\mathbf{p}(s,v) = \mathbf{c}(s) + v\mathbf{a}(s)$ je $K = -\frac{h_{12}^2}{\det[G]}$. *(0,5 bodu)*

10. $K = -1$. *(0,5 bodu)*

11. $f(t) = \frac{c}{1+t^2}$, $c \in \mathbb{R}$ *(0,5 bodu)*