Geometrie - cvičení 4

Bodové hodnocení nemá praktický význam, pouze naznačuje obtížnost příkladu.

1. Určete obecný tvar první fundamentální formy rotační plochy
$$\mathbf{p}(u,v) = [f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)], u \in (0,2\pi), v \in I.$$ *(0,5 bodu)*

2. Rotací křivky $\mathbf{c}(u) = [a\cosh u, 0, au]$ kolem osy z vznikne katenoid. Určete první základní formu katenoidu a vypočtěte délku křivky $u = v$ pro $u \in (0, \ln(1+\sqrt{2}))$. *(1 bodu)*

3. Jsou dány dvě křivky $\mathbf{c}_1(t_1)$ a $\mathbf{c}_2(t_2)$. Uvažujme plochu, kterou vytvoří středy úseček, jejichž koncové body leží po řadě na křivkách $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$. Najděte atlas této plochy a první základní formu. *(0,5 bodu)*

4. Na ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 2u]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0,2\pi)$ jsou dány křivky
   (a) $k_1 : u(t) = 3-t, v(t) = t/2$ a $k_2 : u(t) = t, v(t) = t^2$, $t \in (0,\infty)$. *(0,5 bodu)*
   (b) $k_1 : u+v = 0$ a $k_2 : u-v = 0$. *(0,5 bodu)*

   Určete úhel křivek v jejich průsečíku.

5. Je dána mapa $\mathbf{p}(u,v)$ plochy s maticí první základní formy $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4+u^2 \end{pmatrix}$. Určete úhel křivek v dané mapě splňující $k_1 : u+v = 0$ a $k_2 : u-v = 0$. *(0,5 bodu)*

6. Na válcové ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [r\cos u, v, r\sin u]$, $r \in \mathbb{R}^+$ je poloměr, $v \in \mathbb{R}$, $u \in (0,2\pi)$ je dána třída šroubovic $\mathbf{c}(u) = \mathbf{p}(u, au+k)$, $a, k \in \mathbb{R}$. Najděte křivky ležící na této válcové ploše, které budou kolmé na všechny $\mathbf{c}(u)$. *(1 bod)*

7. Na toru s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [(R+r\sin u)\cos v, (R+r\sin u)\sin v, r\cos u]$, $u, v \in (0,2\pi)$ a $R > r$ pomocí první základní formy plochy vypočtěte délky parametrických křivek $k_1 : u =$ konst. a $k_2 : v =$ konst. procházejících bodem $[R+r, 0, 0]$. *(0,5 bodu)*

8. Na ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je dána křivka
$$k : u(v) = e^{\frac{v \operatorname{cotg} \beta}{\sqrt{2}}},\ \beta \in \mathbb{R}.$$
   Vypočtěte délku křivky k mezi body $v = 0$ a $v = \pi$. Dále ukažte, že konstanta β vyjadřuje velikost úhlu, který svírá k s parametrickými křivkami $v =$ konst. plochy. *(1 bod)*

9. Na sféře s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u]$, $u \in (0,\pi)$, $v \in (0,2\pi)$ určete délku křivky
$$k : v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{u} \frac{dx}{\sin x}$$
   mezi body $u_1 = \frac{\pi}{4}$ a $u_2 = \frac{\pi}{2}$. *(0,5 bodu)*

10. Pro nenulový reálný parametr a je dána plocha $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, av]$, $u \in (0,\infty)$, $v \in \mathbb{R}$. Na této ploše určete délku křivky dané v parametrech rovnicí $v = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$. Dále určete obsah části $\mathbf{p}(\Omega)$ této plochy, kde $\Omega : (u,v) \in (0,a) \times (0,1)$. *(1 bod)*

Výsledky

1. Pro mapu $\mathbf{p}(u,v) = [f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)]$, $u \in I$, $v \in (0, 2\pi)$ má první fundamentální forma tvar $\begin{pmatrix} f^2(u) & 0 \\ 0 & f'^2(u) + g'^2(u) \end{pmatrix}$. *(0,5 bodu)*

2. $\begin{pmatrix} a^2\cosh^2 u & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 u \end{pmatrix}$, délka $\sqrt{2}a$ *(1 bodu)*

3. Pokud budou křivky parametrizované obloukem, atlas je tvořen jedinou mapou $\mathbf{p}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1(t_1) + \mathbf{c}_2(t_2))$ a první základní forma má tvar $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 & 1 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{t}_1$ a $\mathbf{t}_2$ jsou po řadě tečné vektory křivek $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$. *(0,5 bodu)*

4. (a) Křivky v bodě $\mathbf{p}(1,1)$ svírají úhel $125°35'$. *(0,5 bodu)*

   (b) Křivky v bodě $\mathbf{p}(0,0)$ svírají úhel $0°$. *(0,5 bodu)*

5. Křivky v bodě $\mathbf{p}(0,0)$ svírají úhel $126°52'$. *(0,5 bodu)*

6. Hledanými křivkami je opět třída šroubovic $\mathbf{p}(u, -\frac{r^2u}{a}+c) = [r\cos u, -\frac{r^2u}{a}+c, r\sin u]$, $c \in \mathbb{R}$. *(1 bod)*

7. Délka křivky k_1 je $2r\pi$ a délka k_2 je $2(r+R)\pi$. *(0,5 bodu)*

8. Délka křivky je
$$\frac{\sqrt{2}}{\cos\beta}(e^{\frac{\pi \operatorname{cotg}\beta}{\sqrt{2}}} - 1).$$
Nechť křivky svírají úhel α, pak platí $\cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\beta}} = \cos\beta$. *(1 bod)*

9. Délka křivky je $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$. *(0,5 bodu)*

10. Délka křivky od u_1 k u_2 je $\sqrt{2}(u_2 - u_1)$. Obsah plochy je pro $a > 0$ roven $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$. *(1 bod)*