Geometrie - cvičení 3

1. Označme $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$ a $N = (0, 0, 1)$ "severní pól". *Stereografická projekce* je zobrazení ϕ, které přiřazuje bodu A z roviny $\{z = 0\}$ bod v $S^2 \setminus \{N\}$, který leží na polopřímce vycházející z N a procházející bodem A.

   (a) Najděte předpis pro ϕ a ϕ^{-1} a odvoďte, že ϕ je mapa.

   (b) Označme $\bar{\phi}$ podobnou projekci z jižního pólu $S = (0, 0, -1)$ do téže roviny. Vyjádřete zobrazení $\phi \circ \bar{\phi}^{-1}$ a $\phi^{-1} \circ \bar{\phi}$. Jaký je jejich geometrický význam?

   (c) Spočtěte pro ϕ první fundamentální formu plochy a ukažte, že je konformní.

2. Nalezněte mapy na sféře $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, ,\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

   (a) pomocí goniometrických funkcí (sférických souřadnic), jakou má tato parametrizace spojitost se zeměpisnými souřadnicemi?

   (b) pomocí horizontální projekce na válec $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, ,\, x^2 + y^2 = 1\}$ a jeho následujícího rozvinutí.

   (c) pomocí věty o implicitních funkcích (bylo na přednášce).

3. Nalezněte atlas roviny zadané třemi jejími body A, B a C.

4. Napište definici toru (pneumatiky) pomocí jedné implicitní rovnice v $\mathbb{R}^3$ a atlas pro torus.

5. Standardní kužel $K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z^2\}$ má vrchol v počátku. Zdůvodněte, proč není standardní kužel plocha ve smyslu naší definice a proč kužel bez vrcholu plochou je, a nalezněte jeho atlas.

6. Nalezněte atlas s přechodovými funkcemi válce (bylo na přednášce) a Möbiova pásku.