

## Geometrie - cvičení 2

1. Určete křivost a torzi v obecném bodě šroubovice  $\mathbf{c}(t) = [\cos(t), \sin(t), t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Určete průsečnici roviny  $\{z = 0\}$  s oskulační a normálovou rovinou šroubovice v bodě  $c(\frac{\pi}{2})$ .
2. Je dána prostorová křivka

$$\mathbf{c}(t) = [3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3], \quad t \in \mathbb{R}$$

spočtete její křivost a torzi v obecném bodě a určete Frenetův repér v bodě  $\mathbf{c}(0)$ .

3. Parametrizujte následující křivky obloukem:
  - (a)  $\mathbf{c}(t) = [at, a\sqrt{2} \ln t, at^{-1}]$  pro  $t \in (0, \infty)$ ,
  - (b)  $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin(\frac{t}{2})]$  pro  $t \in \mathbb{R}$ .
4. **Vivianiho křivka.** Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr.
5. Je dána parametrizovaná křivka

$$\mathbf{c}(t) = \left[ \frac{1}{5} t^5 + t^2 - 2t, -\frac{1}{2} t^4 + \frac{2}{3} t^3 + t^2, \frac{4}{3} t^3 - t^2 \right], \quad t \in (0, 2).$$

V bodě  $t = 1$  naleznete její křivost, torzi a Frenetův repér.

6. Spočtete rovnici oskulační roviny křivky:

$$\mathbf{c}(t) = [\cos^3 t, \sin^3 t, \cos(2t)], \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

7. Zjistěte zda křivka  $\mathbf{c}(t) = \left[ \frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2 \right]$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  leží v rovině, případně v jaké.
8. Určete funkci  $f(t)$ , tak aby měla křivka  $\mathbf{c}(t) = [r \cos t, r \sin t, f(t)]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  nulovou torzi. O jakou křivku se jedná?
9. *Zobecněná šroubovice* je křivka v prostoru, pro kterou existuje směr, se kterým tečny křivky svírají konstantní úhel. Dokažte, že křivka  $\mathbf{c}(t)$  s nenulovou křivostí a torzí je zobecněnou šroubovicí právě tehdy když je poměr  $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}$  konstantní.
10. Spočtete křivost v bodě  $(1, 1)$  rovinné křivky zadané implicitně

$$x^4 - 2xy^3 + y^4 = 0.$$