Geometrie - cvičení 1

1. Ukažte, že
$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$$
je regulární hladká parametrizace elipsy se středem v počátku souřadnic a poloosami 2, 3. Spočtěte funkci rychlosti a funkci znaménkové křivosti. V bodě $t = \pi/2$ spočtěte jednotkový tečný vektor, orientovaný jednotkový normálový vektor, tečnou přímku a oskulační kružnici.

2. Nalezněte přímou eukleidovskou shodnost, která zobrazí bod $\mathbf{c}(\pi/2)$ z předchozího příkladu do počátku souřadnic a tečný vektor v tomto bodě na vektor $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$.

3. V rovině mějme body $A = [2, 3]$, $B = [-2, -1]$.
   (a) Nalezněte regulární parametrizaci $\mathbf{c}(t)$ úsečky AB tak, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$.
   (b) Ukažte, že pro každou konstantu $\lambda > 0$ je zobrazení
   $$\phi(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}$$
   difeomorfismus intervalu $(0, 1)$ na sebe. Určete λ tak, aby reparametrizace $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ splňovala, že $\tilde{\mathbf{c}}(\frac{1}{3})$ je střed úsečky AB.
   (c) Nalezněte nějakou parametrizaci AB na intervalu , která v některém bodě není regulární.

4. Parametrizujte graf funkce $y = \sin x$ jako rovinnou křivku, spočtěte její znaménkovou křivost a určete inflexní body.

5. **Cykloida.** Uvažujme kolo o poloměru a, které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$. Vypočtěte znaménkovou křivost.

6. **Kubiky.** Máme tři implictině zadané křivky jako množiny těch bodů v rovině, které splňují rovnice
$$y^2 - x^3 = 0$$
$$y^2 - x^3 - x^2 = 0$$
$$x^3 - y^3 - 3xy = 0$$
Najděte nějaké parametrizace těchto křivek, určete zda-li jsou ve všech bodech regulární a zkuste křivky načrtnout. [Návod: podobně jako u racionální parametrizace kružnice z přednášky uvažujte svazek přímek procházejících bodem $(0, 0)$.]

7. **Kissoida.** Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $|A - P| = |Q - R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny.

8. ** **Tractrix** je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $[0, 1]$ a člověk v počátku, tj. v bodě $[0, 0]$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí v podél osy x a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix.