Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 1

Podmínky pro získání zápočtu: Celkem je třeba získat 30 bodů. Body je možno získat následujícími způsoby:

- (10 bodů) Účast na minimálně 10 cvičeních (tj. maximálně 3 absence). Nelze získat jen část bodů.
- (max. 4 body za cvičení) Za odevzdání řešení příkladů nespočítaných na cvičení a to do 2 týdnů od zadání.

Pro ty, kteří nenasbírají dostatečný počet bodů během semestru (počítáme, že nikdo takový nebude), bude ve zkouškovém období zorganizován 1 zápočtový test. Detaily doplníme nakonci semestru.

1. V prostoru mějme body $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, -2, -1]$.
   (a) Nalezněte regulární parametrizaci úsečky AB.
   (b) Nalezněte všechny parametrizace $\mathbf{c}(s)$ úsečky AB obloukem tak, aby bod $\mathbf{c}(0)$ ležel ve třetině AB, blíže k bodu A.
   (c) Nalezněte parametrizaci AB tak, aby obsahovala singulární bod. *(1 bod)*

2. Uvažujme v rovině kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Postupně ji parametrizujte
   (a) Obloukem pomocí goniometrických funkcí, uvažujte různé výchozí body a orientace.
   (b) Projekcí osy x na kružnici ze středu $[0, -1]$ (stereografická projekce).
   (c) Jako $y = f(x)$, přitom si připomeňte větu o implicitních funkcích.

   Pokuste se najít některé reparametrizace mezi těmito parametrizacemi. Při reparametrizaci mezi a) a b) si připomeňte známou substituci tangens polovičního úhlu. *(1,5 bodu)*

3. **Kubiky.** Máme tři implictině zadané křivky jako množiny těch bodů v rovině, které splňují rovnice
$$y^2 - x^3 = 0 \qquad \textit{(0,5 bodu)}$$
$$y^2 - x^3 - x^2 = 0 \qquad \textit{(0,5 bodu)}$$
$$x^3 - y^3 - 3xy = 0 \qquad \textit{(1 bod)}$$
   Najděte nějaké (nejlépe racionální) parametrizace těchto křivek zkuste je načrtnout.

4. **Cykloida.** Uvažujme kolo o poloměru a, které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$. *(1 bod)*

5. **Hypocykloida.** Uvažujme kružnici o poloměru r, která se valí po vnější straně kružnice o poloměru R. Parametricky popište trajektorii zvoleného bodu na pohyblivé kružnici. Načrtněte tuto křivku pro případ $R = r$, určete parametrický interval na němž se křivka uzavře a spočtěte její délku. *(1,5 bodu)*

6. **Lemniskata.** Uvažujme body $F_1 = [-1, 0], F_2 = [0, 1]$ v $\mathbb{R}^2$. Najděte parametrický popis množiny těch bodů $Z \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnici
$$|F_1 - Z|^2 |F_2 - Z|^2 = 1. \qquad \textit{(1,5 bodu)}$$

7. **Kissoida.** Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $|A - P| = |Q - R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny. *(1 bod)*

8. **Tractrix** je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $[0, 1]$ a člověk v počátku, tj. v bodě $[0, 0]$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí v podél osy x a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix. *(1,5 bodu)*

9. **Vivianiho křivka.** Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr. *(1 bod)*

10. Nalezněte hladkou parametrizaci množiny

$$\{[0, y], y \in \langle 0, 1)\} \cup \{[x, 0], x \in \langle 0, 1)\}$$

a nahédněte, že taková parametrizace musí mít singulární bod. *(1,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 1 - výsledky

1. (a) $\mathbf{c}(t) = [1-t, 2-4t, 3-4t],\ t \in [0,1]$

   (b) $\mathbf{c}(s) = \left[\frac{2}{3} - \frac{s}{\sqrt{33}}, \frac{2}{3} - \frac{4s}{\sqrt{33}}, \frac{5}{3} - \frac{4s}{\sqrt{33}}\right],\ s \in \left[-\frac{\sqrt{33}}{3}, \frac{2\sqrt{33}}{3}\right]$ nebo

   $\mathbf{c}(s) = \left[\frac{2}{3} + \frac{s}{\sqrt{33}}, \frac{2}{3} + \frac{4s}{\sqrt{33}}, \frac{5}{3} + \frac{4s}{\sqrt{33}}\right],\ s \in \left[-\frac{2\sqrt{33}}{3}, \frac{\sqrt{33}}{3}\right]$

   (c) $\mathbf{c}(t) = (1-t^2, 2-4t^2, 3-4t^2),\ t \in [0,1]$

2. (a) Pro výchozí bod $[\cos\alpha, \sin\alpha]$ je parametrizace proti směru hodinových ručiček

$$\mathbf{c}(s) = [\cos(s+\alpha), \sin(s+\alpha)],\ s \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

   A parametrizace po směru hodinových ručiček

$$\mathbf{c}(s) = [\cos(-s+\alpha), \sin(-s+\alpha)],\ s \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

   (b) $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2}\right],\ t \in \mathbb{R}.$

   (c) horní půlkružnice: $\mathbf{c}(t) = [t, \sqrt{1-t^2}],\ t \in [-1,1]$
   dolní půlkružnice: $\mathbf{c}(t) = [t, -\sqrt{1-t^2}],\ t \in [-1,1]$

   Například reparametrizace mezi (1) a (2) je $s_2 = -s_1$, mezi (a) a (b) je $t_b = \operatorname{tg}\left(\frac{s_a}{2}\right)$, mezi (a) a (c) je $t_c = \cos t_a$. Dolní index vždy odkazuje na parametrizaci.

Následující parametrizace jsou jen jedním z nekonečně mnoha správných řešení:

3. (a) $\mathbf{c}(t) = [t^2, t^3],\ t \in \mathbb{R}$

   (b) $\mathbf{c}(t) = [t^2 - 1, t(t^2-1)],\ t \in \mathbb{R}$

   (c) $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{-3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right],\ t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

4. $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1-\cos t)],\ t \in \mathbb{R}$

5. $\mathbf{c}(t) = \left[(R+r)\cos t - r\cos\left(t\frac{R+r}{r}\right), (R+r)\sin t - r\sin\left(t\frac{R+r}{r}\right)\right],\ t \in \mathbb{R}$

   Pro $R = r$ se křivka uzavře po uběhnutí intervalu $t \in [0, 2\pi)$, délka křivky je $16R$.

6. $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right],\ t \in (-\pi, \pi]$

7. $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\right],\ t \in \mathbb{R}$

8. $\mathbf{c}(t) = \left[t - \operatorname{tgh} t, \frac{1}{\cosh t}\right],\ t \in \mathbb{R}$

9. $\mathbf{c}(t) = \left[\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\right],\ t \in (-\pi, \pi]$

10.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} [e^{1-t^{-2}}, 0] & \text{pro } t \in (-1, 0) \\ [0, 0] & \text{pro } t = 0 \\ [0, e^{1-t^{-2}}] & \text{pro } t \in (0, 1) \end{cases}$$

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 2

Pro křivku $\mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem definujeme v každém jejím bodě $\mathbf{c}(s)$

- její *tečný vektor* $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s)$,
- její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s) \rangle$,
- její *křivost* jako $\kappa(s) = |\mathbf{c}''(s)| = |\mathbf{t}'(s)|$.

Body, ve kterých je křivost nulová nazýváme *inflexní*. V každém bodě, který není inflexní, dále pro křivku definujeme

- její *normálový* a *binormálový vektor*
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \frac{\mathbf{t}'}{\kappa}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$
- ortonormální *Frenetův repér* jako uspořádanou trojici $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$,
- její *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$,
- její *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$,
- její *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$
- a její *torzi* τ vztahem $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\, \mathbf{n}(s)$.

V obecné parametrizaci platí vzorce

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}})\cdot \dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

1. Parametrizujte následující křivky obloukem:
   (a) $\mathbf{c}(t) = \left[at, a\sqrt{2}\ln t, at^{-1}\right]$ pro $t \in (0, \infty)$, *(0,5 bodu)*
   (b) $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(\frac{t}{2})]$ pro $t \in \mathbb{R}$. *(0,5 bodu)*
2. Je dána prostorová křivka
$$\mathbf{c}(t) = \left[3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right], \quad t \in \mathbb{R}$$
   spočtěte její křivost a torzi v obecném bodě a určete Frenetův repér v bodě $\mathbf{c}(0)$. *(1 bod)*
3. Určete Frenetův repér křivky $\mathbf{c}(t) = \left[t, t^2, e^t\right]$, $t \in \mathbb{R}$ v bodě $t = 0$. *(0,5 bodu)*
4. Je dána parametrizovaná křivka
$$\mathbf{c}(t) = \left[\frac{1}{5}\,t^5 + t^2 - 2\,t, -\frac{1}{2}\,t^4 + \frac{2}{3}\,t^3 + t^2, \frac{4}{3}\,t^3 - t^2\right], \quad t \in (0, 2).$$
   V bodě $t = 1$ nalezněte její křivost, torzi a Frenetův repér. *(1 bod)*
5. Určete křivost a torzi v obecném bodě šroubovice $\mathbf{c}(t) = [R\cos(t), R\sin(t), at]$, $t \in \mathbb{R}$. *(0,5 bodu)*

6. Spočtěte rovnici oskulační roviny křivky:

$$\mathbf{c}(t) = \left[\cos^3 t, \sin^3 t, \cos(2t)\right], \qquad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(1 bod)

7. Určete průsečnici roviny $z = 0$
   (a) s normálovou rovinou
   (b) s oskulační rovinou

   šroubovice $\mathbf{c}(t) = [\cos t, \sin t, t]$, $t \in \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{c}(\frac{\pi}{2})$. *(1 bod)*

8. Zjistěte zda křivka $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right]$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ leží v rovině, případně v jaké. *(1 bod)*

9. Studujte křivost pro elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, určete její maxima a minima. *(1 bodu)*

10. Odvoďte vzorce pro křivost křivky dané jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ v kartézských souřadnicích a pro křivost křivky dané jako graf funkce v polárních souřadnicích $\mathbf{r} = g(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. *(1,5 bodu)*

11. Určete funkci $f(t)$, tak aby měla křivka $\mathbf{c}(t) = [r\cos t, r\sin t, f(t)]$, $t \in \mathbb{R}$ nulovou torzi. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 2 - výsledky

1. (a) $s = |a| \left(t - \frac{1}{t}\right)$
   (b) $s = 2t$
2. $\kappa(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$, $\tau(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$
   $\mathbf{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{n}(0) = (0,1,0), \mathbf{b}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
3. $\mathbf{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{n}(0) = \left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{b}(0) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
4. $\kappa(1) = \frac{2}{3}, \tau(1) = 0$
   $\mathbf{t}(1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \mathbf{n}(1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{b}(1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
5. $\kappa(t) = \frac{R}{a^2+R^2}, \tau(t) = \frac{a}{a^2+R^2}$
6. $4(x\cos t - y\sin t) - 3z = \cos 2t$
7. Oskulační rovina je $x+z = \frac{\pi}{2}$ průsečnice $x = \frac{\pi}{2}$, normálová rovina je $-x+z = \frac{\pi}{2}$, průsečnice $x = -\frac{\pi}{2}$.
8. Křivka leží v rovině, protože $\tau(t) = 0$. Jedná se o parabolu, která leží v rovině $x-3y+3z = 5$.
9. Pro parametrizaci $\mathbf{c}(t) = [a\cos t, b\sin t], t \in [0, 2\pi)$ je pro $a < b$ maximální křivost v bodech $t = \frac{\pi}{2}$ a $t = \frac{3\pi}{2}$ a minimální v $t = 0$ a $t = \pi$.
10. Pro křivku zadanou jako graf funkce v kartézských souřadnicích $\kappa = \frac{|\ddot{f}|}{\sqrt{1+\dot{f}^2}^3}$ a v polárních souřadnicích $\kappa = \frac{|2\dot{g}^2 - g\ddot{g} + g^2|}{\sqrt{\dot{g}^2+g^2}^3}$.
11. Funkce musí splňovat $\dot{f}(t) + \dddot{f}(t) = 0$, tedy $f(t) = a + b\cos t + c\sin t$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 3

Zobecněná šroubovice je křivka pro kterou existuje směr, se kterým tečny křivky svírají konstantní úhel.

Pro regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ definujeme v každém jejím bodě $\mathbf{c}(t_0)$ s nenulovou křivostí

- její *poloměr křivosti* jako $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$,
- její *střed křivosti* jako bod $\mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{n}(t)$,

Pro regulární rovinnou křivku $\mathbf{c}(t)$ definujeme v každém jejím bodě $\mathbf{c}(t_0)$ s nenulovou křivostí *oskulační kružnici* jako kružnici se středem $\mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{n}(t)$ a poloměrem $\mathbf{R}(t)$.

Evoluta je křivka středů oskulačních kružnic.
Evolventou k regulární křivce $\mathbf{c}(t)$ nazveme křivku $\mathbf{e}(t)$ splňující v každém bodě $\mathbf{c}(t_0)$

- $\mathbf{e}(t_0)$ leží na přímce $\mathbf{c}(t_0) + \langle \mathbf{c}'(t_0) \rangle$
- $\dot{\mathbf{e}}(t_0) \perp \dot{\mathbf{c}}(t_0)$

Příklady

1. Dokažte, že pokud je $\mathbf{c}(t)$ regulární křivka a $\mathbf{c}(t_0)$ bod s nenulovou křivostí, má ze všech kružnic oskulační kružnice s křivkou $\mathbf{c}(t)$ v bodě $\mathbf{c}(t_0)$ dotyk nejvyššího řádu. *(1 bod)*
2. Ukažte, že $\mathbf{c}(t) = \left[3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right]$, $t \in \mathbb{R}$ (viz příklad 2 z druhého cvičení) je zobecněnou šroubovicí a určete směr, se kterým tečné vektory svírají konstantní úhel. *(0,5 bodu)*
3. Vypočtěte v obecném bodě křivost a torzi křivky
$$\mathbf{c}(t) = \left[3\,t - t^3, 2\,t^3 + 3\,t^2, 2\,t^3 - 3\,t^2\right], \quad t \in (0, 2).$$
Ukažte, že poměr křivosti a torze je konstantní.
Ukažte, že $\mathbf{c}(t)$ je zobecněnou šroubovicí a určete směr, se kterým tečné vektory svírají konstantní úhel. *(1,5 bodu)*
4. Dokažte, že křivka $\mathbf{c}(t)$ s nenulovou křivostí je zobecněnou šroubovicí právě tehdy když je poměr $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}$ konstantní. *(1,5 bod)*
5. Ukažte, že evoluta křivky s konstantní křivostí a nenulovou torzí má stejnou konstantní křivost. Jaká je torze evoluty? *(2 body)*
6. Dokažte, že pro evolventu $\mathbf{e}(s)$ křivky $\mathbf{c}(s)$ parametrizované obloukem platí
$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{c}(s) + (s_0 - s)\mathbf{t}(s),$$
kde s_0 je nějaký bod definičního oboru $\mathbf{c}(s)$. *(0,5 bodu)*
7. Ukažte, že křivka je envolutou své evolventy a naopak. *(1 bod)*
8. Najděte evolutu k elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *(1 bodu)*
9. **Řetězovka** je křivka, která odpovídá hmotnému elastickému lanu o hustotě ρ zavěšeného v bodech $[-b, a], [b, a]$. Parametrizujte ji.
Nápověda: Předpokládejme, že počátek soustavy souřadnic je nejnižším bodem lana. Nechť $T(x) = (T_1(x), T_2(x))$ je tahová síla působící na bod lana, tj. síla, která je reakcí na gravitační sílu části lana, která leží mezi daným bodem a vzdálenějším koncem lana. Nechť $0 < x_0 < x_1$. Pak máme z rovnosti sil $T_1(x_0) = -T_1(x_1)$. *(1,5 bodu)*

10. Ověřte, že tractrix je evolventou řetězovky. *(1,5 bodu)*

11. Ověřte, že evolventa šroubovice je rovinná křivka. *(1 bod)*

12. Ukažte, že evolventa cykloidy je opět cykloida. *(1 bod)*

13. Uvažujme křivku $\mathbf{c}(t) = [t, t^2, t^3]$ v $\mathbb{R}^3$ pro reálný parametr $t \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pro libovolnou čtveřici po dvou různých bodů ležících na $\mathbf{c}(t)$, neexistuje rovina, která by tyto body obsahovala. *(1,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 3 - výsledky

1. Porovnáním členů v Taylorově rozvoji podle oblouku.
2. $a = (0, 0, 1)$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$
3. $\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{3(3t^2+1)^2}$, $\tau = \frac{2}{3(3t^2+1)^2}$, $\frac{\kappa}{\tau} = \sqrt{2}$, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\alpha = 54°44'$
4. Derivací $a \cdot t = konst.$ dostaneme, že a leží v rektifikační rovnině, derivováním dostaneme $\frac{\kappa}{\tau} = \tan \alpha$.
5. $\tau = \frac{\kappa^2}{\tau_{\text{pův}}}$
6. Z definice, hledáme jaký násobek tečny leží na evolventě, dostáváme, že jeho derivace musí být -1.
7.
8. $(\frac{ax}{a^2-b^2})^{2/3} + (\frac{bx}{a^2-b^2})^{2/3} = 1$
9. $\mathbf{c}(t) = \left[t, C \cosh\left(\frac{t}{C}\right) + k\right]$, kde $C = \frac{T_1(0)}{g\rho}$ a k určíme dle počátečních podmínek.
10.
11. $\mathbf{e}(t) = [\cos t + t \sin t + \frac{t_0}{\sqrt{2}} \sin t, \sin t - t \cos t + \frac{t_0}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t_0}{\sqrt{2}}]$
12.
13.

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 4

Křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} h(x,y)\mathrm{d}s := \int_{\alpha}^{\beta} h(x(t),y(t))|\dot{\mathbf{c}}(t)|\mathrm{d}t$$

Křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y := \int_{\alpha}^{\beta} [f(x(t),y(t))\dot{x}(t) + g(x(t),y(t))\dot{y}(t)]\mathrm{d}t.$$

pro $\mathbf{c}(t) = [x(t),y(t)]$, $t \in (\alpha,\beta)$ rovinou parametrizovanou křivku a $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ spojité funkce definované v bodech křivky.

Greenova věta Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast (t.j. jednoduše souvislá omezená otevřená množina), jejíž hranice $\partial\Omega$ je kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) jednoduchá uzavřená rovinná křivka. Nechť $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou hladké funkce definované na nějakém okolí $\bar{\Omega}$. Pak

$$\int_{\partial\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Plocha A oblasti uzavřené křivkou

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\dot{y}(t)\mathrm{d}t = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

kde $\mathbf{c}(t) = [x(t),y(t)]$, $t \in (\alpha,\beta)$ je jednoduchá rovinná uzavřená křivka parametrizovaná libovolným parametrem proti směru hodinových ručiček.

Příklady

1. Spočtěte délku křivky $\mathbf{c}(t) = \left[t - \sin t, 1 - \cos t, 4\cos\frac{t}{2}\right]$ na intervalu $t \in (0,2\pi)$. *(0,5 bodu)*
2. Spočtěte délku asteroidy $\mathbf{c}(t) = \left[a\cos^3 t, a\sin^3 t\right]$ na intervalu $t \in (0,\frac{\pi}{2})$. *(0,5 bodu)*
3. Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu
$$\int_{\mathbf{c}} |x| ds,$$
kde $\mathbf{c}$ je parabola $y = x^2$, $x \in (0,1)$. *(0,5 bodu)*
4. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu
$$\int_{\mathbf{c}} (a-y)dx + xdy,$$
kde $\mathbf{c}(t)$ je cykloida $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in (0,2\pi)$. *(0,5 bodu)*
5. Spočtěte křivkový integrál 2. druhu
$$\int_{\mathbf{c}} \frac{-y^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}dx + \frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}dy$$
kde $\mathbf{c}$ je křivka $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ od $[0,1]$ do $[1,0]$. *(0,5 bodu)*

6. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{c}} (x+y)dx - (x-y)dy,$$

kde $\mathbf{c}$ je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$. *(0,5 bodu)*

7. Určete obsah plochy ohraničené křivkou $\mathbf{c}(t) = \left[\sin t, \frac{t^2}{2}\right]$, kde $t \in (-\pi, \pi)$. Tuto oblast načrtněte. *(0,5 bodu)*

8. Jaký obsah má plocha, kterou může spást koza přivázaná na provazu o délce L k mohutnému stromu, který má kmen o kruhovém průřezu s poloměrem a, $L < \pi a$. Místo, kde je provaz přivázaný ke stromu se nehýbe. *(1,5 bodu)*

9. Určete křivku s přirozenými rovnicemi $\kappa(s) = 5$ a $\tau(s) = -2$. *(0,5 bodu)*

10. Určete křivku s přirozenými rovnicemi $\kappa(s) = s^{-1}$, $\tau(s) = 0$, pro $s > 0$. *(1 bod)*

11. Nalezněte parametrizaci křivky (stačí integrální formule), která má nulovou torzi a jejíž křivost je $\kappa(s) = s$. Křivku načrtněte. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 4 výsledky

1. $8\sqrt{2}$
2. $\frac{3a}{2}$
3. $\frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}} - 1)$
4. $-4\pi a^2$
5. $-\frac{3\pi}{16}$ parametrizace $\mathbf{c}(t) = [\sin^3 t, \cos^3 t]$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6. $-2\pi ab$
7. 2π
8. $\frac{L^3}{3a} + \frac{\pi L^2}{2}$
9. $\mathbf{c}(s) = \left[\frac{5}{29}\cos(\pm\sqrt{29}s), \frac{5}{29}\sin(\pm\sqrt{29}s), \frac{-2s}{\pm\sqrt{29}}\right]$
10. $\mathbf{c}(s) = \left[\frac{s}{2}\big(\cos(\ln(s)+c) + \sin(\ln(s)+c)\big) + k_1, \frac{s}{2}\big(\sin(\ln(s)+c) - \cos(\ln(s)+c)\big) + k_2, 0\right]$
    Pro volbu integračních konstant $c, k_1, k_2 = 0$ se bude křivka asymptoticky blížit k počátku a bod odpovídající hodnotě parametru $s = 1$ bude ležet na přímce $y = -x$.
11. klotoida $\mathbf{c}(s) = \left[\int \cos \frac{s^2}{2} ds, \int \sin \frac{s^2}{2} ds\right]$.

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 5

Hlavní kružnice (neboli přímka ve sférické geometrii) je průnik sféry a roviny procházející středem sféry.

Loxodromou - nazveme křivku protínající všechy poledníky pod stejným úhlem.

Úhly při vrcholech sférického trojúhelníku A, B, C označíme postupně α, β, γ a délky stran protilehlých úhlům α, β, γ označíme postupně a, b, c. Pak platí

obsah trojúhelníka	$\lvert ABC\rvert = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
cosiová věta	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$
	$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$
sinová věta	$\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta} = \dfrac{\sin c}{\sin \gamma}$
Pythagorova věta	pro pravoúhlý troúhelník ($\gamma = \pi/2$) dostaneme
	$\cos c = \cos a \cos b$

1. Parametrizujte sféru $S^3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   (a) pomocí goniometrických funkcí, jakou má tato parametrizace spojitost se zeměpisnými souřadnicemi?
   (b) pomocí stereografické projekce ze severního pólu,
   (c) pomocí věty o implicitních funkcích. *(1,5 bodu)*
2. (sss) Určete vnitřní úhly sférického trojúhelníku určeného stranami $a = 60°$, $b = 120°$ a $c = 135°$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*
3. (uuu) Určete délky stran sférického trojúhelníku určeného úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 115°10'$ a $\gamma = 75°33'$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*
4. (sus) Určete délku strany c a úhly α a β sférického trojúhelníku určeného stranami $a = 55°20'$, $b = 23°10'$ a úhlem $\gamma = 108°05'$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*
5. (usu) Určete délky stran a, b a úhel γ sférického trojúhelníku určeného úhly $\alpha = 60°17'$, $\beta = 80°08'$ a stranou $c = 120°27'$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*
6. Dopočtěte zbývající strany a úhly pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $a = 55°55'$, $b = 124°08'$. *(0,5 bodu)*
7. Rovnostranný sférický trojúhelník ABC má obsah $3\theta - 180°$. Nechť body L, M, N jsou po řadě středy stran BC, AB a AC. Ukažte, že úhel LNM je menší než θ. Kolik je obsah trojúhelníku AMN? *(1 bod)*
8. Vepišme do koule krychli tak, že střed krychle splývá se středem sféry. Zobrazme hrany krychle středovou projekcí se středu sféry na sféru. Vznikne 6 shodných sférických čtyřúhelníků. Každý z nich nazveme *čtvercem*. Zjistěte úhly a obsah těchto čtverců. Proč nelze definovat sférický čtverec jako čtyřúhelník se 4 pravými úhly? *(0,5 bodu)*
9. Parametrizujte loxodromy na sféře. *(1 bod)*

10. Vypočtěte vzdálenost z Prahy ($50°05'$ s.š., $14°25'$ v.d.) do New Yorku ($40°42'$ s.š., $74°0'$ z.d.)

    (a) po loxodromě

    (b) po hlavní kružnici

    a výsledky porovnejte. *(1,5 bodu)*

11. Ukažte, že hlavní kružnice má v každém bodě normálu shodnou s normálou sféry. *(0,5 bodu)*

12. Dokažte, že křivka je sférická, pokud se všechny její normálové roviny protínají v jednom bodě. *(1 bod)*

13. (Eulerova formule) Pro libovolný mnohostěn vepsaný do koule dokažte Eulerovu formuli

$$s - h + v = 2,$$

    kde s značí počet stěn, h počet hran a v počet vrcholů daného mnohostěnu. *(1 bod)*

14. Dokažte, že parametrická křivka

$$\mathbf{c}(t) = \left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos(t), e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin(t), e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

    leží na kuželové ploše $x^2 + y^2 = z^2$ a protíná její površky pod úhlem $45°$. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 5 - výsledky

1. (a) $S(\theta, \varphi) = [r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$
   (b) $S(x, y) = \left[\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
   (c) $S(x, y) = [x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}]$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňující $x^2 + y^2 \leq 1$
2. $\alpha = 76°9'$, $\beta = 103°50'$ a $\gamma = 127°33'$, $|ABC| = 127{,}53°$
3. $a = 63°17'$, $b = 110°59'$ a $c = 87°18'$, $|ABC| = 70{,}72°$
4. $\alpha = 59°36'$, $\beta = 24°22'$ a $c = 65°$, $|ABC| = 12{,}05°$
5. $a = 61°7'$, $b = 96°37'$ a $\gamma = 121°14'$, $|ABC| = 81{,}65°$
6. $\alpha = 60°44'$, $\beta = 119°18'$ a $c = 108°19'$
7. $180 + \theta - \angle LNM$
8. úhly $120°$, obsah $120°$
9. V parametrizaci 1a splňují $b\theta = \ln\tan\frac{\varphi}{2} + c$, kde $b, c \in \mathbb{R}$
10. (a) 6966,88 km
    (b) 6578,50 km
11.
12.
13. Úhel u každého vrcholu je 2π a plocha pláště koule je 4π, máme tedy $2\pi v = 4\pi + s\pi$. Každá hrana patří do dvou trojúhelníků: $3s = 2h$, což ve spojení s předchozí rovností dává výsledek.
14.

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 6

Hladká plocha je množina $S \subset \mathbb{R}^3$, pokud pro každý bod $s \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ (homeomorfismus) tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Soubor map, které pokrývají celou plochu S se nazývá atlas plochy S.

Přechodové zobrazení mezi dvěma mapami $\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}$ je zobrazení $\phi = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ \mathbf{p}$.

- Značení $\mathbf{p}_u = \frac{\partial p}{\partial u}$ a $\mathbf{p}_v = \frac{\partial p}{\partial v}$.

Tečný prostor $T_{s_0}S$ k ploše S v bodě s_0 je množina všech tečných vektorů v bodě $s_0 \in S$. Jestliže $\mathbf{p}$ je mapa na S a $s_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$, pak

$$T_{s_0}S = \langle \mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \rangle.$$

Jednotkový normálový vektor k ploše S s mapou $\mathbf{p}$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

První fundamentální forma plochy S s mapou $\mathbf{p}(u, v)$ je v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

Příklady

1. Nalezněte atlas roviny zadané třemi jejími body A, B a C. *(0,5 bodu)*
2. Nalezněte atlas sféry
   (a) pomocí sférických souřadnic, *(0,5 bodu)*
   (b) pomocí stereografické projekce, *(0,5 bodu)*
   (c) pomocí kolmé projekce kruhu do polosféry. *(0,5 bodu)*

   Diskutujte minimální počet map v atlase a ověřte hladkost přechodových funkcí.
3. Napište definici toru (pneumatiky) pomocí jedné rovnice v $\mathbb{R}^3$ a atlas pro torus. *(1 bod)*
4. Standardní kužel $K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z^2\}$ má vrchol v počátku. Zdůvodněte, proč není standardní kužel plocha ve smyslu naší definice a proč kužel bez vrcholu plochou je, a nalezněte jeho atlas. *(0,5 bodu)*
5. Nalezněte atlas s přechodovými funkcemi Möbiova pásku. *(1 bod)*
6. Nalezněte mapy regulárních kvadrik, $a, b, c > 0$, o jaké kvadriky se jedná?
   (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *(0,5 bodu)*
   (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *(0,5 bodu)*
   (c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ *(0,5 bodu)*
   (d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ *(0,5 bodu)*
7. Nalezněte mapu plochy vzniklé rotací křivky $\mathbf{c}(t) = [f(t), 0, g(t)]$, $t \in I$ kolem osy z, $f(t) \neq 0$ pro $t \in I$. *(0,5 bodu)*

8. Napište rovnici tečné roviny a určete jednotkový normálový vektor plochy

$$\mathbf{p}(u,v) = [u+v, u^2+v^2, u^3+v^3]$$

v jejím bodě $\mathbf{p}(-1,1)$. *(0,5 bodu)*

9. Napište rovnici tečné roviny a určete jednotkový normálový vektor plochy dané rovnicí $xyz = 6$ v jejím bodě $A = [-2, 1, -3]$. *(0,5 bodu)*

10. Napište rovnici tečné roviny a určete jednotkový normálový vektor plochy

$$\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 2v]$$

v jejím bodě $\mathbf{p}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. *(0,5 bodu)*

11. Nechť $f(x,y,z) = 0$ je implicitní rovnice určující regulární plochu $\mathbf{p}(u,v)$. Dokažte, že vektor

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

je normálovým vektorem roviny $\mathbf{p}$. *(1 bod)*

12. Určete matice první fundamentální formy
    (a) roviny $\mathbf{p}(u,v) = [u, v, 0]$, *(0,5 bodu)*
    (b) rotační válcové plochy $\mathbf{p}(u,v) = [R\sin u, R\cos u, v]$, *(0,5 bodu)*
    (c) sféry $\mathbf{p}(u,v) = [R\cos v \sin u, R\cos v\cos u, R\sin v]$, *(0,5 bodu)*
    (d) helikoidu $\mathbf{p}(u,v) = [v\cos u, v\sin u, ku]$. *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 6 - výsledky

1. $\mathbf{p}(u,v) = A + u(A-B) + v(A-C)$, $u, v \in \mathbb{R}$, celá rovina je pokryta jednou mapou.

2. (a) $\mathbf{p}_1(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$; $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in (0, 2\pi)$,
   $\mathbf{p}_2(\varphi,\theta) = (-\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi, \cos\varphi\sin\theta)$; $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in (0, 2\pi)$
   Přechodová funkce

   (b) Ze severního pólu $\mathbf{p}_S(u,v) = \left[\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, 1 - \frac{2}{1+u^2+v^2}\right], u, v \in \mathbb{R}$.
   Z jižního pólu $\mathbf{p}_J(u,v) = \left[\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, -1 + \frac{2}{1+u^2+v^2}\right], u, v \in \mathbb{R}$.
   Přechodová funkce $\mathbf{p}_S^{-1}\mathbf{p}_J : [u,v] \mapsto \left[\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right]$

   (c) $\mathbf{p}_{z+}(x,y) = \left[x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right]$, $\mathbf{p}_{z-}(x,y) = \left[x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}\right]$ pro $x^2+y^2 < 1$
   $\mathbf{p}_{y+}(x,z) = \left[x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z\right]$, $\mathbf{p}_{y-}(x,z) = \left[x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z\right]$ pro $x^2+z^2 < 1$
   $\mathbf{p}_{x+}(y,z) = \left[\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right]$, $\mathbf{p}_{x-}(y,z) = \left[-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right]$ pro $y^2+z^2 < 1$
   Přechodová zobrazení $\mathbf{p}_{z+}^{-1}\mathbf{p}_{y+} : [x,z] \mapsto [x, \sqrt{1-x^2-z^2}]$, atd.

3. $\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$
   $\mathbf{p}_1(u,v) = [(R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v]$ kde $u, v \in (0, 2\pi)$,
   $\mathbf{p}_2(u,v) = [(R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v]$ kde $u, v \in (a, 2\pi + a)$, $a \neq 2k\pi$,
   $\mathbf{p}_3(u,v) = [(R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v]$ kde $u, v \in (b, 2\pi + b)$, $b \neq 2k\pi$ a $b \neq a, k \in \mathbb{N}$.

4. Mapa, která pokrývá kužel bez jedné přímky: $\mathbf{p}_1(r,\theta) = [r\cos\theta, r\sin\theta, r], r \neq 0, \theta \in (0, 2\pi)$ a druhá (otočená) $\mathbf{p}_2(r,\theta) = [r\cos\theta, r\sin\theta, r], r \neq 0, \theta \in (0+a, 2\pi+a)$, $a \neq 0$ Ale neexistuje mapa, která by pokrývala okolí vrcholu. To je vidět z toho, že pro libovolně malé okolí U počátku 0 v $\mathbb{R}^3$ je množina $U \cap K - \{0\}$ nesouvislá, zatímco její vzor v libovolné mapě je nutně množina souvislá. Ty se ovšem na sebe nemohou žádným homeomorfismem zobrazit, proto kužel tedy není plocha ve smyslu naší definice a kužel bez vrcholu plochou je.

5. $\mathbf{p}(\phi,t) = \left[\cos\phi(1 + t\cos\frac{\phi}{2}), \sin\phi(1 + t\cos\frac{\phi}{2}), t\sin\frac{\phi}{2}\right]$ kde $t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $\phi_1 \in (0, 2\pi)$ pro první mapu a $\phi_1 \in (-\pi, \pi)$ pro druhou mapu. Přechodové zobrazení $[t,\phi] \mapsto [-t, -2\pi + \phi]$.

6. (a) Jednodílný eliptický hyperboloid $\mathbf{p}(u,v) = [a\cos u\cosh v, b\sin u\cosh v, c\sinh v], u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$

   (b) Dvojdílný eliptický hypernoloid $\mathbf{p}(u,v) = [a\cosh u\cosh v, b\sinh u\cosh v, c\sinh v], u, v \in \mathbb{R}$

   (c) Eliptický paraboloid $\mathbf{p}(u,v) = \left[u, v, \frac{1}{c}\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{u^2}{a^2}\right)\right], u, v \in \mathbb{R}$

   (d) Hyperbolický paraboloid $\mathbf{p}(u,v) = \left[u, v, \frac{1}{c}\left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{u^2}{a^2}\right)\right], u, v \in \mathbb{R}$

7. $\mathbf{p}(t,\phi) = [f(t)\cos\phi, f(t)\sin\phi, g(t)], \phi \in (0, 2\pi)$

8. Tečná rovina $3x - z = 0$, jednotkový normálový vektor $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

9. Tečná rovina $-3x + 6y - 2z = 18$ a $\mathbf{n} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$.

10. Tečná rovina $2x + z - \pi = 0$ a $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$.

11. Parametrizujeme plochu $\mathbf{p}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$ Derivováním

$$f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) = 0$$

podle u, v získáme $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{p}_u = 0$ a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{p}_v = 0$, z čehož je zřejmé, že vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ je kolmý na $\mathbf{p}_u$ a $\mathbf{p}_v$ a jedná se tedy o normálový vektor plochy.

12. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$

    (d) $\begin{pmatrix} v^2 + k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cviření 7

První fundamentální forma plochy S s mapou $\mathbf{p}(u,v)$ je v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

Délka křivky $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ na ploše s mapou $\mathbf{p}$ je

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{u}, \dot{v})^T} \,\mathrm{d}\, t,$$

Úhel křivek $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$ v jejich společném bodě na ploše s mapou $\mathbf{p}$ je

$$\cos\alpha = \frac{(\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})^T}{\sqrt{(\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{u}, \dot{v})^T} \sqrt{(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) G (\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})^T}}.$$

Plošný integrál prvního druhu z f přes plochu S, která je pokryta mapou $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$,

$$\int_S f \,\mathrm{d}S := \int_{\mathcal{O}} f |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \int_{\mathcal{O}} f \sqrt{\det G} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v.$$

Velikost plochy

$$\int_S 1 \,\mathrm{d}S = \iint \sqrt{detG} dudv.$$

Příklady

1. Určete obecný tvar první fundamentální formy rotační plochy

   $$\mathbf{p}(u,v) = [f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)], u \in (0, 2\pi), v \in I.$$ *(0,5 bodu)*

2. Rotací křivky $\mathbf{c}(u) = [a\cosh u, 0, au]$ kolem osy z vznikne katenoid. Určete první základní formu katenoidu a vypočtěte délku křivky $u = v$ pro $u \in (0, \ln(1+\sqrt{2}))$. *(1 bodu)*

3. Jsou dány dvě křivky $\mathbf{c}_1(t_1)$ a $\mathbf{c}_2(t_2)$. Uvažujme plochu, kterou vytvoří středy úseček, jejichž koncové body leží po řadě na křivkách $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$. Najděte atlas této plochy a první základní formu. *(0,5 bodu)*

4. Na ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 2u]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$ jsou dány křivky

   (a) $k_1 : u(t) = 3 - t, v(t) = t/2$ a $k_2 : u(t) = t, v(t) = t^2$, $t \in (0, \infty)$. *(0,5 bodu)*

   (b) $k_1 : u + v = 0$ a $k_2 : u - v = 0$. *(0,5 bodu)*

   Určete úhel křivek v jejich průsečíku.

5. Je dána mapa $\mathbf{p}(u,v)$ plochy s maticí první základní formy $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4+u^2 \end{pmatrix}$. Určete úhel křivek v dané mapě splňující $k_1 : u + v = 0$ a $k_2 : u - v = 0$. *(0,5 bodu)*

6. Na válcové ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [r\cos u, v, r\sin u]$, $r \in \mathbb{R}^+$ je poloměr, $v \in \mathbb{R}$, $u \in (0, 2\pi)$ je dána třída šroubovic $\mathbf{c}(u) = \mathbf{p}(u, au + k)$, $a, k \in \mathbb{R}$. Najděte křivky ležící na této válcové ploše, které budou kolmé na všechny $\mathbf{c}(u)$. *(1 bod)*

7. Na toru s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [(R + r\sin u)\cos v, (R + r\sin u)\sin v, r\cos u]$, $u, v \in (0, 2\pi)$ a $R > r$ pomocí první základní formy plochy vypočtěte délky parametrických křivek $k_1 : u =$ konst. a $k_2 : v =$ konst. procházejících bodem $[R + r, 0, 0]$. *(0,5 bodu)*

8. Na ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je dána křivka

$$k : u(v) = e^{\frac{v \operatorname{cotg} \beta}{\sqrt{2}}},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Vypočtěte délku křivky k mezi body $v = 0$ a $v = \pi$. Dále ukažte, že konstanta β vyjadřuje velikost úhlu, který svírá k s parametrickými křivkami $v =$ konst. plochy. *(1 bod)*

9. Na sféře s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u]$, $u \in (0,\pi)$, $v \in (0, 2\pi)$ určete délku křivky

$$k : v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{u} \frac{dx}{\sin x}$$

mezi body $u_1 = \frac{\pi}{4}$ a $u_2 = \frac{\pi}{2}$. *(0,5 bodu)*

10. Vypočítejte plošný integrál prvního druhu

   (a) $\int_S xz\, dS$ přes plochu $S = [\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u]$, $v,\ u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *(0,5 bodu)*

   (b) $\int_S \frac{x}{\sqrt{y^2+2z+2}}\, dS$ přes plochu $S = [u+v, u-v, uv]$, $v,\ u \in [0,1]$ *(0,5 bodu)*

11. Určete obsah plochy zadané rovnicí $x^2 + y^2 = z$, kde $z \leq 1$. *(0,5 bodu)*

12. Vypočtěte obsah

   (a) kulové plochy o poloměru r, *(0,5 bodu)*

   (b) válcové plochy o poloměru r a výšce v, *(0,5 bodu)*

   (c) toru o poloměrech R, r. *(0,5 bodu)*

13. Sférická kružnice se středem $s \in S^2$ a poloměrem R je množina bodů S^2 majících sférickou vzdálenost (po hlavní kružnici) R od s. Ukažte, že pokud $0 \leq R \leq \frac{\pi}{2}$, platí:

   (a) Sférická kružnice o poloměru R je kružnice o poloměru $\sin R$. *(0,5 bodu)*

   (b) Plocha ohraničená sférickým kruhem o poloměru R je $2\pi(1 - \cos R)$. *(0,5 bodu)*

14. Pro nenulový reálný parametr a je dána plocha $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, av]$, $u \in (0,\infty)$, $v \in \mathbb{R}$. Na této ploše určete délku křivky dané v parametrech rovnicí $v = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$. Dále určete obsah části $\mathbf{p}(\Omega)$ této plochy, kde $\Omega : (u,v) \in (0,a) \times (0,1)$. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cviření 7 - výsledky

1. Pro mapu $\mathbf{p}(u,v) = [f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)]$, $u \in I$, $v \in (0, 2\pi)$ má první fundamentální forma tvar $\begin{pmatrix} f^2(u) & 0 \\ 0 & f'^2(u) + g'^2(u) \end{pmatrix}$. *(0,5 bodu)*

2. $\begin{pmatrix} a^2\cosh^2 u & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 u \end{pmatrix}$, délka $\sqrt{2}a$ *(1 bodu)*

3. Pokud budou křivky parametrizované obloukem, atlas je tvořen jedinou mapou $\mathbf{p}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1(t_1) + \mathbf{c}_2(t_2))$ a první základní forma má tvar $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 & 1 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{t}_1$ a $\mathbf{t}_2$ jsou po řadě tečné vektory křivek $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$. *(0,5 bodu)*

4. (a) Křivky v bodě $\mathbf{p}(1,1)$ svírají úhel $125°35'$. *(0,5 bodu)*
   (b) Křivky v bodě $\mathbf{p}(0,0)$ svírají úhel $0°$. *(0,5 bodu)*

5. Křivky v bodě $\mathbf{p}(0,0)$ svírají úhel $126°52'$. *(0,5 bodu)*

6. Hledanými křivkami je opět třída šroubovic $\mathbf{p}(u, -\frac{r^2u}{a}+c) = [r\cos u, -\frac{r^2u}{a}+c, r\sin u]$, $c \in \mathbb{R}$. *(1 bod)*

7. Délka křivky k_1 je $2r\pi$ a délka k_2 je $2(r+R)\pi$. *(0,5 bodu)*

8. Délka křivky je
$$\frac{\sqrt{2}}{\cos\beta}(e^{\frac{\pi \mathrm{cotg}\beta}{\sqrt{2}}} - 1).$$
Nechť křivky svírají úhel α, pak platí $\cos\alpha = \frac{\mathrm{cotg}\beta}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\beta}} = \cos\beta$. *(1 bod)*

9. Délka křivky je $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$. *(0,5 bodu)*

10. Vypočítejte plošný integrál prvního druhu
    (a) $\frac{1}{3}$ *(0,5 bodu)*
    (b) $\sqrt{2}$ *(0,5 bodu)*

11. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$ *(0,5 bodu)*

12. Vypočtěte obsah
    (a) $4\pi r^2$ *(0,5 bodu)*
    (b) $2\pi rv$ *(0,5 bodu)*
    (c) $4\pi^2 ab$ *(0,5 bodu)*

13. (a) Na sféru můžeme aplikovat izometrii (zachovává délky i plochy) a tedy BÚNO můžeme předpokládat, že naše sférická kružnice má střed na severním pólu. Při parametrizaci sféry $[\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u]$ je vidět, že sférická kružnice vytvoří rovnoběžku o odpovídající $u = R$, neboli kružnici o poloměru $\sin R$. *(0,5 bodu)*
    (b) Ve stejné mapě jako výše dostaneme dosazením do vzorce plochu $2\pi(1 - \cos R)$ *(0,5 bodu)*

14. Délka křivky od u_1 k u_2 je $\sqrt{2}(u_2 - u_1)$. Obsah plochy je pro $a > 0$ roven $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 8

Hladké zobrazení $f : S_1 \to S_2$, pokud $\mathbf{p}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{p}_1$ je pro každé dvě mapy $\mathbf{p}_1 : \mathcal{O}_1 \to S_1$, $\mathbf{p}_2 : \mathcal{O}_2 \to S_2$ hladé zobrazením otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$.
Označme G matici první fundamentální formy $\mathbf{p}_1$ a $\tilde{G}$ matici první fundamentální formy $f \circ \mathbf{p}_1$

- **isometrické**
  - pokud zachovává délku křivek
  - délka $\mathbf{c}(t)$ je stejná jako délka $f(\mathbf{c}(t))$
  - $G = \tilde{G}$
- **konformní**
  - pokud zachovává úhly mezi křivkami
  - pro každé dvě křivky je úhel mezi $\mathbf{c}(t)$ a $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$ stejný jako úhel mezi $f(\mathbf{c}(t))$ a $f(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}))$
  - $G = \lambda \tilde{G}$, kde λ je kladná funkce na $\mathcal{O}$
- **zachovává velkosti ploch**
  - pokud je velikost každé plochy $\tilde{S} \subset S_1$ stejná jako velikost plochy $f(\tilde{S})$
  - $\det G = \det \tilde{G}$

Isometrické plochy - existuje isometrický difeomorfismus mezi nimi.
Přímková plocha - mějme dánu řídící křivku $\mathbf{c}(u)$ a řídící směr $\mathbf{a}(u)$, které jsou pro každé u lineárně nezávislé, přímková plocha je pak vyjádřena jako $\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{a}(u)$.

Příklady

1. Napište izometrii mezi kuželem $\mathbf{p}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u]$, $u \in \mathbb{R}^+$,$v \in (0, 2\pi)$ a rovinou.
   (0,5 bodu)
2. Uvažujme mapu helikoidu $\mathbf{p}_1(u, v) = [\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u]$ a katenoidu $\mathbf{p}_2(u, v) = [u \cos v, u \sin v, v]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$. Je zobrazení $\mathbf{p}_1(u, v)$ na $\mathbf{p}_2(\sinh u, v)$ izometrie?
   (0,5 bodu)
3. Ukažte, že stereografická projekce je konformní zobrazení. *(0,5 bodu)*
4. Ukažte, že kruhová inverze je konformní zobrazení. *(0,5 bodu)*
5. Mějme sféru s mapou $\mathbf{p}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a rovninu s mapou $\tilde{\mathbf{p}}(u, v) = [u, h(v), 0]$, kde $h'(v) \neq 0$. Jak je nutné zvolit $h(v)$, aby bylo zobrazení dané rovností parametrů ze sféry do roviny
   (a) konfromní? *(0,5 bodu)*
   (b) zachovávající velikost ploch? *(0,5 bodu)*
6. Mějme sféru s mapou $\mathbf{p}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$ a rovinu s mapou $\tilde{\mathbf{p}}(u, v) = [h(v) \cos u, h(v) \sin u, -1]$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tak, že $f \cdot f' \neq 0$. Jak je nutné zvolit $h(v)$, aby bylo zobrazení sféry do roviny
   (a) konfromní? *(0,5 bodu)*
   (b) zachovávající velikost ploch? *(0,5 bodu)*

7. Ukažte, že Mercatorova projekce ze sféry do roviny daná

$$f : \mathbf{p}(u,v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v] \to \left[u, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin v}{1-\sin v}\right)\right] = \tilde{\mathbf{p}}(u,v)$$

je konformní zobrazení. *(0,5 bodu)*

8. Dokažte, že Mercatorova projekce nezachovává velikosti ploch. Pro lepší zapamatování tohoto faktu můžete vyřešit „Mercator puzzle“

`http://gmaps-samples.googlecode.com/svn/trunk/poly/puzzledrag.html` *(0,5 bodu)*

9. Ukažte, že hyperbolický paraboloid $z = x^2 - y^2$ je přímkovou plochou generovanou dvěmi různými třídami přímek. Je hyperbolický paraboloid $z = xy$ přímková plocha? *(0,5 bodu)*

10. Najděte parametrizaci plochy tečen dané křivky $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, za jakých podmínek je plocha tečen regulární? Jaká je její první fundamentální forma? *(1 bod)*

11. Najděte plochu tečen a její atlas pro šroubovici $(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$. Načrtněte ji a nalezněte její 1. fundamentální formu. *(0,5 bodu)*

12. Pro plochu tečen s řídící křivkou $\mathbf{c}(t)$ ukažte, že v každém bodě površky $t =$ konst. má plocha stejnou normálu. *(0,5 bodu)*

13. Jsou plocha tečen šroubovice a rovina izometrické? Pokud ano, najděte hledanou izometrii. *(0,5 bodu)*

14. Přímkovou plochu tvořenou přímkami protínajícími dané dvě křivky $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ a rovnoběnými s danou rovinou ρ nazveme **konoid**. Najděte atlas plochy dané

    (a) osou z, šroubovicí $[\cos t, \sin t, t]$, $t \in (0, 2\pi)$ a rovinou xy, *(0,5 bodu)*

    (b) přímkou $[x, 0, 1]$, $x \in \mathbb{R}$, kružnicí $x^2 + y^2 = 1$ a rovinou yz. *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 8 - výsledky

1. $f: \mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u] \to [u\sqrt{2}\cos\frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2}\sin\frac{v}{\sqrt{2}}, 0] = \tilde{\mathbf{p}}(u,v)$.

   Ověříme, že je to izometrie: $G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} = G_{\tilde{\mathbf{p}}}$. *(0,5 bodu)*

2. Ano, obě mají první fundamentální formu rovnou $G = \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}$. *(0,5 bodu)*

3. Vezměme sterografickou projekci ze severního pólu a mapu sféry bez severního pólu

$$\mathbf{p}(x,y) = \left[\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right],\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Potom první fundamentální forma sféry je $G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(x^2+y^2+z^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix}$.

   Mapa roviny $\tilde{\mathbf{p}}(x,y) = [x,y,0]$ má první fundamentální formu $G_{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a tedy zobrazení je konformní. *(0,5 bodu)*

4. Mějme střed inverze v počátku a r poloměr kružnice. Kruhová inverze v rovině je popsána zobrazením $f: [x,y] \to \left[\frac{rx}{x^2+y^2}, \frac{ry}{x^2+y^2}\right]$.

   Rovina s mapou $\mathbf{p}(x,y) = \left[\frac{rx}{x^2+y^2}, \frac{ry}{x^2+y^2}\right],\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ má první základní formu $G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$.

   A rovina s mapou $\tilde{\mathbf{p}}(x,y) = [x,y]$ má první fundamentální formu $G_{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a tedy zobrazení je konformní. *(0,5 bodu)*

5. První fundamentální forma sféry a roviny jsou $G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_{\mathbf{v}}^2 \end{pmatrix}$

   (a) $h(v) = \pm\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin v}{1-\sin v}\right) + c$, kde c je libovolná reálná konstanta. *(0,5 bodu)*

   (b) $h(v) = \pm\sin v + c$, kde c je libovolná reálná konstanta. *(0,5 bodu)*

6. První fundamentální forma sféry a roviny jsou $G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & h_{\mathbf{v}}^2 \end{pmatrix}$

   (a) $h(v) = c\sqrt{\frac{1+\sin v}{1-\sin v}}$, kde c je libovolná kladná reálná konstanta. *(0,5 bodu)*

   (b) $h(v) = \pm\sqrt{2\sin v} + c$, kde c je libovolná reálná konstanta. *(0,5 bodu)*

7. První fundamentální forma sféry a roviny jsou $G_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v} \end{pmatrix}$ a zobrazení je zřejmě konformní. *(0,5 bodu)*

8. Je vidět z tvaru první fundamentální formy v předchozím příkladu. *(0,5 bodu)*

9. Hyperbolický paraboloid můžeme parametrizovat jako $\mathbf{p}(u,v) = [\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, uv],\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$. To lze vyjádřit dvěma způsoby $\mathbf{p}(u,v) = [\frac{u}{2}, \frac{u}{2}, 0] + v(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, u)$, neboli dostáváme řídící přímku $[\frac{u}{2}, \frac{u}{2}, 0]$, nebo druhým způsobem $\mathbf{p}(u,v) = [\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, 0] + u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, v)$ a pak dostáváme řídící přímku $[\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, 0]$.

Hyperbolický paraboloid $xy = z$ je také přímková ploch s řídícími křivkami $[u, 0, 0]$ a $[0, v, 0]$.

(0,5 bodu)

10. Máme křivku $\mathbf{c}(t)$ a její jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}(t)$. Plocha tečen je dána mapou $\mathbf{p}(t, u) = \mathbf{c}(t) + u\mathbf{t}(t),\ t \in I,\ u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Plocha je regulární, pokud $\mathbf{c}(t)$ neobsahuje inflexní body. Její první fundamentální forma má tvar $G = \begin{pmatrix} 1 + u^2\kappa^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

11. $\mathbf{p}_{1,2}(t, u) = [a\cos t - au\sin t, a\sin t + au\cos t, bt + bu],\ t \in (0, 2\pi),\ u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, resp. $t \in (-\pi, \pi),\ u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. První fundamentální forma má tvar $G = \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)(1 + \frac{a^2u^2}{a^2+b^2}) & a^2 + b^2 \\ a^2 + b^2 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$.

    (0,5 bodu)

12. Uvažujme obecné vyjádření plochy tečen $\mathbf{p}(t, u) = \mathbf{c}(t) + u\mathbf{t}(t)$, dostáváme tedy parciální derivace $\mathbf{p}_t = \mathbf{t} + u\mathbf{t}'$ a $\mathbf{p}_u = \mathbf{t}$ máme $\mathbf{p}_t \times \mathbf{p}_u = u(\mathbf{t}' \times \mathbf{t})$, tedy normálový vektor není závislý na parametru u a je pro konstantní t konstantní. *(0,5 bodu)*

13. Uvažujme atlas roviny bez kružnice $\mathbf{p}_{1,2}(t, u) = [h\cos t - hu\sin t, h\sin t + hu\cos t, 0],\ t \in (0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R}^+$ resp. $t \in (-\pi, \pi),\ v \in \mathbb{R}^+$ s první fundamentální formou $G = \begin{pmatrix} h^2(1 + u^2) & h^2 \\ h^2 & h^2 \end{pmatrix}$.

    Pak zobrazení splňující $h = \sqrt{a^2 + b^2}$, a $\tilde{u} = \frac{au}{\sqrt{a^2+b^2}}$ je zřejmě izometrie plochy tečen z příkladu 11 do roviny.

    (0,5 bodu)

14. (a) $\mathbf{p}(u, v) = [v\cos u, v\sin u, u]$, $u \in (0, 2\pi)$ a např. $v \in (0, 1)$ *(0,5 bodu)*

    (b) $\mathbf{p}(u, v) = [\cos u, v\sin u, 1 - v]$, $u \in (0, 2\pi)$ a např. $v \in (0, 1)$ *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 9

Druhá fundamentální forma II_s orientované plochy S v bodě s s jednotkovou normálou $\mathbf{N}_s$ je kvadratická forma definovaná na tečném prostoru T_sS následujícím způsobem: Nechť $\mathbf{w} \in T_sS$ a $\mathbf{c}(t)$ libovolná křivka na ploše S taková, že $\mathbf{c}(t_0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{w}$:

$$II_s(\mathbf{w}) := \ddot{\mathbf{c}}(t_0) \cdot \mathbf{N}_s.$$

Je-li $\mathbf{p}(u, v)$ mapa, pak je druhá fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Pokud je $\mathbf{c}$ obloukem parametrizovaný **normálový řez** (tedy průnik plochy S s rovinou $s + \langle \mathbf{N}_s, \mathbf{w} \rangle$), pak křivost $\mathbf{c}$ v bodě s je rovna $II_s(\mathbf{w})$.

Normálová křivost plochy S v bodě s ve směru $\mathbf{w}$

$$\kappa_n(\mathbf{w}) := \frac{II(\mathbf{w})}{I(\mathbf{w})}.$$

Hlavní křivosti Minimum κ_1 a maximum κ_2 normálové křivosti a odpovídající směry se nazývají **hlavní směry**. Hlavní křivosti a hlavní směry vyjádřené v souřadnicích vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ nalezneme jako řešení rovnice s neznámými λ a $(a, b)^T$

$$(H - \lambda G) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

Eulerova formule V každém bodě $s \in S$ existují dva navzájem kolmé hlavní směry $\langle \mathbf{w}_1 \rangle$ (s minimální normálovou křivostí κ_1) a $\langle \mathbf{w}_2 \rangle$ (s maximální normálovou křivostí). Pro α úhel, který svírají vektory $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}_1$:

$$\kappa_n(\mathbf{w}) = \cos^2(\alpha)\kappa_1 + \sin^2(\alpha)\kappa_2,$$

Gaussova křivost

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G}$$

Střední křivost

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

Rozvinutelná plocha má nulovou Gaussovu křivost.

Příklady

1. V libovolném bodě sféry $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ určete normálovou křivost v obecném směru, hlavní křivosti, Gaussovu a střední křivost. *(0,5 bodu)*
2. V libovolném bodě plochy $x \sin z - y \cos z = 0$ vypočítejte normálovou křivost v obecném směru a hlavní křivosti. *(0,5 bodu)*
3. V obecném bodě určete hlavní křivosti na rozvinutelných plochách:
   (a) kuželové ploše, *(0,5 bodu)*
   (b) válcové ploše, *(0,5 bodu)*
   (c) ploše tečen prostorové křivky. *(0,5 bodu)*
4. Pro plochu danou mapou $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, u^2 - v^2]$ v bodě $p(0, 0)$ určete normálovou křivost v libovolném směru, hlavní křivosti a hlavní směry. *(0,5 bodu)*

5. Určete hlavní křivosti a hlavní směry v libovolném bodě toru s mapou

$$\mathbf{p}(u,v) = [(R + r\sin u)\cos v, (R + r\sin u)\sin v, r\cos u], \ u, v \in (0, 2\pi) \text{ a } R > r.$$

(0,5 bodu)

6. Určete první a druhou základní formu plochy nějaké mapy elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Určete Gaussovu a střední křivost v bodě $[a, 0, 0]$. *(1 bod)*

7. Určete Gaussovu a střední křivost pro dvě různé mapy paraboloidu $z = a(x^2 + y^2)$ pro $a > 0$:

   - $\mathbf{p}_1(u,v) = [u, v, a(u^2 + v^2)], \ u, v \in \mathbb{R}$ a
   - pro mapu vzniklou rotací křivky $\mathbf{c}(t) = [t, 0, at^2], \ t \in \mathbb{R}$ okolo osy z.

   Výsledek interpretujte. *(1 bod)*

8. Určete hlavní křivosti na rotační ploše. Jaká je podmínka, aby Gaussova křivost byla konstantní? Vyjmenujte plochy s konstantní Gaussovou křivostí $K = -1, 0, 1$. *(1 bod)*

9. Určete Gaussovu křivost obecné přímkové plochy, ukažte, že nikdy není kladná. *(0,5 bodu)*

10. Vypočtěte Gaussovu křivost pseudosféry s mapou

$$\mathbf{p}(u,v) = [e^{-u}\cos v, e^{-u}\sin v, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}dt].$$

(0,5 bodu)

11. Určete funkci $f(t)$ tak, aby byla plocha s mapou $\mathbf{p}(u,t) = [f(t) - 2u, tf(t) - 2tu, u + ut^2]$ rozvinutelnou. *(0,5 bodu)*

12. Je dána plocha S_1 a $S_2 = S_1 + a\mathbf{N}$, kde $a \in \mathbb{R}^+$ a $\mathbf{N}$ je jednotkový vektor normály plochy S_1. Kdy je zobrazení plochy S_1 na S_2 dané rovností parametrů konformní? *(1 bod)*

13. Ukažte, že přímkovou plochou s nulovou střední křivostí je kromě roviny pouze plocha hlavních normál šroubovice. *(1 bod)*

14. Ukažte, že rotační plochou s nulovou střední křivostí je kromě roviny pouze katenoid (plocha vzniklá rotací řetězovky). *(1 bod)*

15. (Bonus) Na rotačním paraboloidu $2z = x^2 + y^2$ najděte zobecněnou šroubovici, jejíž tečny svírají s osou z úhel $45°$ a prochází bodem $[1, 0, \frac{1}{2}]$. Spočítejte její délku (oblouk), křivost a torzi. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 9 - výsledky

1. $\kappa_n = \frac{1}{r}$, všechny směry jsou hlavní, $K = \frac{1}{\kappa^2}$, $H = \frac{1}{\kappa}$ *(0,5 bodu)*

2. V parametrizacei $p(u,v) = [u\cos v, u\sin v, v]$ jsou hlavní směry $\kappa_{1,2} = \pm\frac{\pm}{u^2+1}$ a normálová křivost $\kappa_n(w) = \frac{-2w_1w_2}{\sqrt{u^2+1}(w_1^2(u^2+1)w_2^2)}$ *(0,5 bodu)*

3. (a) Pro $\mathbf{p}(s,v) = va(s)$, kde s je oblouk na $a(s)$, která leží na jednotkové sféře. Pak hlavní křivosti jsou $\kappa_{n_1} = \frac{\det[a,a',a'']}{v}$, $\kappa_{n_2} = 0$. *(0,5 bodu)*
   (b) Pro $\mathbf{p}(s,v) = a(s) + cv$, kde s je oblouk na $a(s)$ a c konstantní jednotkový vektor. Pak hlavní křivosti jsou $\kappa_{n_1} = \det[a'', a, c]$, $\kappa_{n_2} = 0$. *(0,5 bodu)*
   (c) Pro plochu tečen křivky $\mathbf{c}(s)$ parametrizované obloukem jsou hlavní křivosti $\kappa_{n_1} = \frac{\tau}{v\kappa}$, $\kappa_{n_2} = 0$. *(0,5 bodu)*

4. $\kappa_{n_1} = 2$ s hlavním směrem $(\pm 1, 0)$, $\kappa_{n_2} = -2$ s hlavní směrem $(0, \pm 1)$. Normálová křivost ve směru w_1, který svírá se směrem p_u odpovídajícím hlavnímu směru maximální křivosti úhel α platí $\kappa_n = 2\cos 2\alpha$. *(0,5 bodu)*

5. $\kappa_{n_1} = \frac{1}{r}$, $\kappa_{n_2} = \frac{\sin\alpha}{R + r\sin\alpha}$ *(0,5 bodu)*

6. Pro mapu $\mathbf{p}(u,t) = [a\cos t\cos u, a\sin t\cos u, c\sin u]$, $u, t \in (0, 2\pi)$ je
$$G = \begin{pmatrix} \sin^2 u(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t) + c^2\cos^2 u & \frac{1}{4}(a^2-b^2)\sin 2t\sin 2u \\ \frac{1}{4}(a^2-b^2)\sin 2t\sin 2u & \cos^2 u(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) \end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix} -abc & 0 \\ 0 & -abc\cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \sqrt{b^2c^2\cos^4 u\cos^2 v + a^2c^2\cos^4 u\sin^2 v + a^2b^2\sin^2 u\cos^2 u}.$$
$K = \frac{a^2}{b^2c^2}$ a $H = \frac{a(b^2+c^2)}{2b^2c^2}$. *(1 bod)*

7. $K = \frac{4a^2}{(1+4a^2(u^2+v^2))^2}$ a $H = \frac{2(a+2a^3(u^2+v^2))}{(1+4a^2(u^2+v^2))^{\frac{3}{2}}}$ resp. $K = \frac{4a^2}{(1+4a^2t^2)^2}$ a $H = \frac{2a+4a^3t^2}{(1+4a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$, $t^2 = u^2 + v^2$ *(1 bod)*

8. Rotujeme-li křivku $\mathbf{c}(s) = [x(s), 0, z(s)]$ podél osy z, dostáváme $\kappa_{n_1} = z'x'' - z''x'$ a $\kappa_{n_2} = -\frac{z'}{x}$. Řešením je například pro $K = 0$ rotační válcová plocha, rotační kuželová plocha, část roviny, pro $K = 1$ sféra, pro $K = -1$ pseudosféra. *(1 bod)*

9. Pro plochu $\mathbf{p}(s,v) = \mathbf{c}(s) + v\mathbf{a}(s)$ je $K = -\frac{h_{12}^2}{\det[G]}$. *(0,5 bodu)*

10. $K = -1$. *(0,5 bodu)*

11. $f(t) = \frac{c}{1+t^2}$, $c \in \mathbb{R}$ *(0,5 bodu)*

12. Pokud je plocha sféra a nebo je to plocha s nenulovou střední křivostí H a $a = \frac{2}{H}$ *(1 bod)*

13. Pro plochu $\mathbf{p}(s,v) = \mathbf{c}(s) + v\mathbf{a}(s)$, můžeme předpokládat, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná obloukem, $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s)$ je kolmý na $\mathbf{a}(s)$ a že $\mathbf{a}(s)$ je jednotkový. Protože g_{12} a h_{22} jsou nulová, bude střední křivost nulová právě tehdy když je $h_{11} = 0$. Neboli $h_{11} = (\kappa\mathbf{n} + v\mathbf{a}'')\cdot(\mathbf{t}\times\mathbf{a} + v\mathbf{a}'\times\mathbf{a}) = \kappa\det[\mathbf{n},\mathbf{t},\mathbf{a}] + v\det[\mathbf{a}'',\mathbf{t},\mathbf{a}] + v\det[\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{a}] + v^2\det[a'',a',a]$. To musí platit pro všechna v, tedy $\det[\mathbf{n},\mathbf{t},\mathbf{a}] = 0$, neboli $\mathbf{a} = \pm\mathbf{n}$ aplocha je plochou hlavních normál nějaké křivky. Navíc musí platit $\det[\mathbf{n}, -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, -\kappa'\mathbf{t} + \tau'\mathbf{b}] = 0$, tedy $-\kappa\tau' + \kappa'\tau = 0$. Křivka je tedy rovinná nebo zobecněná šrobovice, ale protože je $\tau' = 0$, je šroubovice. *(1 bod)*

14. TODO *(1 bod)*

15. $\mathbf{c}(t) = [\sqrt{1+t^2}\cos(t - \mathrm{arctg}t), \sqrt{1+t^2}\sin(t - \mathrm{arctg}t), \frac{1+t^2}{2}]$, $t \in (1,\infty)$, oblouk $s = \frac{t^2}{\sqrt{2}}$, křivost $\frac{1}{2t}$ a torze $\frac{1}{2t}$. *(1 bod)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 10

Bod plochy se nazývá

- **eliptický**, jestliže v něm platí $K > 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2$ nazývá se **kruhový**.
- **parabolický**, jestliže v něm platí $K = 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ nazývá se **planární**.
- **hyperbolický**, jestliže v něm platí $K < 0$.

Hlavní křivka $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ pro každé t je $\dot{\mathbf{c}}(t)$ hlavním směrem.
Splňuje diferenciální rovnici

$$\det \begin{pmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Asymptotická křivka $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$: pro každé t je $\kappa_n(\dot{\mathbf{c}}(t)) = 0$.
Splňuje diferenciální rovnici

$$h_{11}(\dot{u})^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}(\dot{v})^2 = 0.$$

Geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ na orientované ploše S, kdy $\mathbf{c}(s)$ je její parametrizace obloukem, je

$$\kappa_g = \mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}') = \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{N}),$$

kde $\mathbf{N}$ je normála plochy v příslušném bodě.
Geodetika je křivka na orientované ploše, která má v každém svém bodě nulovou geodetickou křivost.
Křivka na orientované ploše je geodetika právě tehdy když v každém svém neinflexním bodě je normála křivky $\mathbf{n}$ kolmá na plochu, tedy $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$.

Příklady

1. Popište eliptické, parabolické a hyperbolické body na anuloidu

$$\mathbf{p}(\alpha, \beta) = [(R + r\sin\alpha)\cos\beta, (R + r\sin\alpha)\sin\beta, r\cos\alpha],$$

kde $R, r \in \mathbb{R}^+, R > r$, $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. *(1 bod)*

2. Zjistěte zda na ploše $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, u^2 + v^2]$ je nějaký kruhový bod. *(0,5 bodu)*

3. Určete typy bodů na ploše $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, u^2 + v^3]$. *(1 bod)*

4. Dokažte, že přímka na ploše je asymptotická křivka. *(0,5 bodu)*

5. Určete asymptotické křivky na ploše $z = axy$. *(0,5 bodu)*

6. Určete asymptotické křivky na ploše

$$\mathbf{p}(u, t) = [u\sin t, u\cos t, t(1 + u)].$$

(1 bod)

7. Parametrické křivky plochy jsou asymptotické, právě když pro všechny body plochy platí $h_{11} = h_{22} = 0$. Dokažte. *(1 bod)*

8. Nalezněte hlavní a asymptotické křivky na Enneperově ploše

$$\mathbf{p}(u, v) = \left[u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2\right], (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(1,5 bodu)

9. Ověřte, že je Ennapova plocha z minulého příkladu minimální plocha, tj. její střední křivost je v každém bodě nulová. *(0,5 bodu)*

10. Nalezněte hlavní křivky rotačního paraboloidu

$$\mathbf{p}(u,v) = \left[u, v, u^2 + v^2\right].$$

(1 bod)

11. Vypočítejte hlavní křivky na obecné rotační ploše

$$\mathbf{p}(t,\phi) = [x(t)\cos\phi, x(t)\sin\phi, z(t)].$$

(1 bod)

12. Ověřte, že křivka

$$\mathbf{c}(t) = [r\cos t + tr\sin t, r\sin t - tr\cos t, 0]$$

je hlavní křivka plochy tečen šroubovice

$$\check{\mathbf{s}}(t) = [r\cos t, r\sin t, ct], c \neq 0.$$

(1 bod)

13. Je dána rotační kuželová plocha $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, qu]$.

- Ukažte, že křivka $u(t) = t, v(t) = v_0 \in \mathbb{R}$ je geodetikou plochy $\mathbf{p}$.
- Ukažte, že křivka $u(t) = u_0 \in \mathbb{R}$, $v(t) = t$ není geodetikou plochy $\mathbf{p}$.

(0,5 bodu)

14. Ověřte zda platí $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ pro poledníky a obecné rovnoběžky rotační plochy

$$\mathbf{p}(u,v) = [x(u)\cos v, x(u)\sin v, u]$$

kde $u \in I, v \in (0, 2\pi)$ a $x(u) \neq 0$ pro $u \in I$. A rozhodněte, kdy se jedná o geodetiky v závislosti na vlastnostech funkce $x(u)$. *(0,5 bodu)*

15. Ověřte zda šroubovice $\check{\mathbf{s}}_c(t) = [r\cos t, r\sin t, ct]$ pro $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ležící na válcové ploše

$$\mathbf{p}(u,v) = [r\cos u, r\sin u, v]$$

mají normálu kolnou na plochu $\mathbf{p}$ a jsou geodetikami válcové plochy. *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 10 - výsledky

1. Hlavní křivosti jsou $\kappa_1 = \frac{1}{r}$ a $\kappa_2 = \frac{\sin\alpha}{R + r\sin\alpha}$.
   (a) Eliptické body $\alpha \in (0, \pi)$ pak je κ_2 kladná a $K > 0$.
   (b) Parabolické body $\alpha \in \{0, \pi\}$ a $\kappa_2 = 0$ a $K = 0$.
   (c) Hyperbolické body $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ a $K < 0$.

   (1 bod)

2. Kruhový bod je pro $u = v = 0$. *(0,5 bodu)*

3. Gaussova krivost $K = \frac{12v}{(4u^2+9v^2+1)^2}$. Body s $v > 0$ jsou eliptické, body pro než je $v = 0$ jsou parabolické a body, které mají $v < 0$ jsou hyperbolické. *(1 bod)*

4. TODO *(0,5 bodu)*

5. Plochu parametrizujeme $\mathbf{p}(x, y) = [x, y, axy]$. Asymptotické křivky jsou řešením diferenciální rovnice $\frac{2a\dot{x}(t)\dot{y}(t)}{\sqrt{a^2(x^2(t)+y^2(t))+1}} = 0$. Dostaneme $\dot{x}(t)\dot{y}(t) = 0$ a asymptotické křivky jsou parametrické křivky $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}, y(t) = t$ a $x(t) = t, y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$.

   (0,5 bodu)

6. Asymptotické křivku jsou jistě přímky $t = kostanta$. Dále hledáme křivku ve tvaru $\mathbf{p}(u(t), t)$, tato křivka bude asymptotickou právě tehdy, je-li $\left[\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial t}, 2\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right] = 0$. Dostáváme $\frac{du}{dt} = \frac{u^2 t}{2}$ z čehož máme $u = 0$ nebo $u = \frac{-4}{t^2+c}$, pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ dostaneme asymptotickou křivku a pro $u = 0$ dostaneme přímku $\mathbf{p}(0, t) = [0, 0, t]$ *(1 bod)*

7. Parametrické křivky jsou asymptotické $\Rightarrow h_{11} = h_{22} = 0$ pro všechny $u, v \in I$:

   BÚNO $u(t) = t, v(t) = cost$, pak $\dot{u} = 1, \dot{v} = 0$, dosadíme do rovnice pro asymptotické křivky $h_{11}(\dot{u})^2 = 0$, z toho dostaneme, že $h_{11} = 0$, stejně pro h_{22}.

   $h_{11} = h_{22} = 0$ pro všechny $u, v \in I \Rightarrow$ parametrické křivky jsou asymptotické:

   Dosadíme do diferenciální rovnice pro asymptotické křivky $2h_{12}\dot{u}\dot{v} = 0$, z toho dostavame možnosti $h_{12} = 0, \dot{u} = 0$ nebo $\dot{v} = 0$. *(1 bod)*

8. Hlavní křivky jsou řešením rovnice $u'v' = 0$. Dostaneme že hlavní křivky jsou tvaru $\mathbf{p}(C, v)$ nebo $\mathbf{p}(u, C)$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta. Asymptotické křivky jsou řešením rovnice $(u')^2 - (v')^2 = 0$, dostaneme $u = \pm v + C$, C konstanta a všechny asymptotické křivky můžeme parametrizovat $\mathbf{p}(t, \pm t + C)$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta. *(1,5 bodu)*

9. Ano, $H = 0$. *(0,5 bodu)*

10. Hlavními křivkami rotačního paraboloidu jsou kružnice $z = konst.$ a paraboly $\mathbf{p}(u, cu)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. *(1 bod)*

11. Hlavními křivkami na rotační ploše $\mathbf{p}(t, \phi) = [x(t)\cos\phi, x(t)\sin\phi, z(t)]$ jsou parametrické křivky. *(1 bod)*

12. Plocha tečen šroubovice je popsána mapou $\mathbf{p}(u, v) = [r\cos u - vr\sin u, r\sin u + vr\cos u, c(u + v)]$. Zadaná křivka je v této mapě popsána $u = t, v = t$. Rovnice, kterou musí splňovat hlavní křivka po úpravách má tvar $\dot{u}(\dot{u} + \dot{v}) = 0$, což je jistě splněno pro $u = t, v = t$. *(1 bod)*

13. Druhá derivace křivky $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(t, v_0)$ je nulový vektor proto je geodetická křivost nulová a jedná o geodetiku.

    Normála plochy je $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{q^2+1}}(-q\cos v, -q\sin v, 1)$. Křivka $u(t) = u_0 \in \mathbb{R}$, $v(t) = t$ má neodpovídající normálový směr $(-u_0\cos t, -u_0\sin t, 0)$ v odpovídajících si bodech, proto se o geodetiku nejedná. *(0,5 bodu)*

14. Pro poledníky $\mathbf{p}(u) = [x(u)\cos v_0, x(u)\sin v_0, u]$ je podmínka $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ splněna, poledníky jsou geodetikami rotační plochy. Pro rovnoběžky je podmínka $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ splněna jen pro body kdy je $\dot{x}(u) = 0$, to nastává například pro extrémy funkce $x(u)$ nebo pro části, kde je funkce $x(u)$ konstantní. *(0,5 bodu)*

15. Normála plochy je $\mathbf{N} = (\cos u, \sin u, 0)$ normála šroubovice je $\mathbf{n} = (-\cos t, -\sin t, 0)$, směry si odpovídají. *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 11

Definice 4.1 Předpokládejme, že S je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Riemannova metrika* na ploše S přiřazuje každému bodu $s \in S$ skalární součin g_s na tečném prostoru T_sS takový, že pro každou mapu $\mathbf{p}(u_1, u_2)$ na S jsou funkce

$$g_{ij}(u_1, u_2) := g_{\mathbf{p}(u_1,u_2)}\left(\mathbf{p}_{u_i}, \mathbf{p}_{u_j}\right), \quad i, j \in 1, 2$$

hladké. Symbolicky tuto Riemannovu metriku (ve zvolených souřadnicích) zapisujeme jako výraz

$$ds^2 := g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2.$$

Definice 4.2 Budeme uvažovat vektorový prostor $M^3 = \{\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2] | x_i \in \mathbb{R}\}$ s kvadratickou formou $Q(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ s Minkowského signaturou $(1, 2)$. Kvadratická forma Q zadává dvoulistý hyperboloid $\{\mathbf{x} \in M^3 | Q(\mathbf{x}) = -1\}$. Jeho horní list označíme H_2, tedy

$$H_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in M^3 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}.$$

V každém bodě definujeme Riemannovu metriku jako zúžení formy Q na tečný prostor.

Definice 4.3 Přímky na H_2 definujeme jako průniky rovin procházejících počátkem s H_2. Úsečky definujeme jako souvislé omezené úseky přímek.

Věta 4.4 Grupa $SO(2, 1)$, kterou definujeme jako podgrupu všech regulárních matic generovanou maticemi tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \quad a \quad \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří grupu přímých izometrií plochy H_2 s Riemannovou metrikou.

Definice 4.5 Množina $U = \{\zeta = u + iv \in \mathbb{C} | |\zeta| < 1\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2)$$

se nazývá Poincarého model hyperbolické roviny.

Věta 4.6 Zobrazení

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2},\right)$$

je stereografickou projekcí mezi diskem U a hyperboloidem H_2 a je isometrií vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám.

Definice 4.7 Množina $H_+ = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

se nazývá polorovinový Poincarého model hyperbolické roviny.

Věta 4.8 Zobrazení, které bodu $z = x + iy \in H_+$ přiřazuje bod $\zeta = u + iv \in U$, pro který platí

$$\zeta = \frac{z - i}{z + i}$$

je isometrií mezi H_+ a U vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám a jeho inverze má tvar

$$z = \frac{i(1 + \zeta)}{1 - \zeta}.$$

Věta 4.9 Zobrazení tvaru

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc=1$$

tvoří grupu přímých isometrií H_+ (grupa se nazývá Möbiova grupa).

Definice 4.10 Množinu v rovině nazveme zobecněná kružnice, pokud je to buď kružnice, nebo přímka. Každou zobecněnou kružnici v komplexní rovině lze popsat rovnicí

$$az\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + c = 0,\ |w|^2 > ac,\ a,c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}.$$

Příslušná množina řešení je přímka právě když $a = 0$.

Věta 4.11 Jsou-li $P = [0,a], Q = [0,b]$, $a < b$ dva body v hyperbolické rovině a $c(t) = (0,t), t \in \langle a,b\rangle$ úsečka, která je spojuje, pak má křivka c nejkratší délku mezi všemi regulárními křivkami v H, které začínají v bodě P a končí v bodě Q.

Věta 4.12 V libovolném modelu hyperbolické geometrie je plocha hyperbolického trojúhelníka s úhly α,β,γ rovna

$$\pi - (\alpha+\beta+\gamma).$$

Příklady

1. Dokažte, že Riemannova metrika z definice **4.2** je pozitivně definitní. *(0,5 bodu)*
2. Spočtěte stabilizátor bodu $i \in H_+$ v grupě přímých izometrií H_+. *(0,5 bodu)*
3. Ukažte, že $g(\zeta) = e^{i\theta}\frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}$ je izometrie Poincarého modelu hyperbolické roviny, pro $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$. *(1 bod)*
4. Ukažte pro zobrazení $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \varphi'(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ z **4.9**, že $\varphi \circ \varphi'$ má koeficienty, které odpovídají koeficientům
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$
(0,5 bodu)
5. Ukažte, že zobratení $\varphi_\alpha = z+\alpha$ a $\varphi_\beta = \beta z$, kde $\beta > 0$, jsou izometrie H_+. *(0,5 bodu)*
6. Prvky Möbiovy grupy převádí zobecněné kružnice na zobecněné kružnice. *(1 bod)*
7. Jaký je obsah trojúhelníku ABC pokud všechny jeho vrcholy leží v nekonečnu, t.j. všechny jeho strany jsou rovnoběžné. Načrtněte takový trojúhelník v Poinkarého disku a všechny možnosti takového trojúhelníku v polorovinovém modelu hyperbolické geometrie.
(0,5 bodu)
8. Jaký obsah má čtyřúhelník $ABCD$ v H_+, jehož strany jsou tvořeny přímkami - polokružnicemi se středy v bodech $-2r, -r, r$ a $2r$ s poloměry ve stejném pořadí $4r, r, r$ a $4r$, pro $r \in \mathbb{R}$. *(0,5 bodu)*
9. Jaká je vzdálenost bodů $A = [0,2]$ a $B = [\sqrt{3},1]$ v H_+? *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 11 - výsledky

1. *(0,5 bodu)*
2. Stabilizátor tvoří prvky $\varphi(z) = \frac{az+b}{-bz+a}$, kdy $a^2 + b^2 = 1$. *(0,5 bodu)*
3. *(1 bod)*
4. Výsledek dostaneme dosazením $\varphi(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}) = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d}$ a roznásobením matic. *(0,5 bodu)*
5. Identická mapa $\mathbf{p}(x,y) = [x,y]$ na H_+ má $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$. Pro $\varphi_\alpha \circ \mathbf{p}(x,y) = [x+\alpha, y]$ i pro $\varphi_\beta \circ \mathbf{p}(x,y) = [\beta x, \beta y]$ dostaneme stejné první fundamentální formy. (Nesmíme zapomenout na Riemannovu metriku.) *(0,5 bodu)*
6. Obecná kružnice v rovině má rovnici
$$(x-A)^2 + (y-B)^2 = R^2,$$
t.j.
$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + (A^2 + b^2 - R^2) = 0.$$
To nyní stačí upravit do komplexního tvaru ($a = 1$). Případ $a = 0$ zřejmě odpovídá obecné rovnici přímky. Tvrzení se pak snadno ověří pro jednotlivé generátory. *(1 bod)*
7. Obsah je π. *(0,5 bodu)*
8. $2\pi - \frac{\pi}{3}$ *(0,5 bodu)*
9. Přímka která v polorovinovém modelu spojuje body A, B je kružnice se středem v bodě $[0,0]$ a poloměrem 2, $A = [0,2] = [2\cos\pi, 2\sin\pi]$ a $B = [\sqrt{3}, 1] = [2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}, 2]]$. Vzdálenost bodů je $\ln(\tan\frac{\pi}{2}) - \ln(\tan\frac{\pi}{6})$. *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 12

Rovnice pro geodetiky Křivka v mapě $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ je parametrizovaná geodetika, právě tehdy když jsou splněny rovnice

$$\frac{d}{dt}(g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v}) = \frac{1}{2}([g_{11}]_u\dot{u}^2 + 2[g_{12}]_u\dot{u}\dot{v} + [g_{22}]_u\dot{v}^2),$$

$$\frac{d}{dt}(g_{12}\dot{u} + g_{22}\dot{v}) = \frac{1}{2}([g_{11}]_v\dot{u}^2 + 2[g_{12}]_v\dot{u}\dot{v} + [g_{22}]_v\dot{v}^2),$$

kde $G = \{g_{i,j}\}$ je matice první fundamentální formy plochy.

Gauss-Bonnet pro hladké křivky Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{O}$ je kladně orientovaná, hladká jednoduchá uzavřená křivka taková, že $Int\varphi \subset \mathcal{O}$ a $\varphi'(b_-) = \varphi'(a_+)$. Definujme nyní křivku $\mathbf{c}$ na ploše S předpisem $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \varphi$ a označme $Int\mathbf{c} = \mathbf{p}(Int\varphi)$.

Pak

$$\int_{Int\mathbf{c}} K\, dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} k_g\, ds,$$

kde k_g je geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ a K je Gaussova křivost plochy $\mathbf{p}$.

Gauss-Bonnet pro křivočaré mnohoúhelníky Předpokládejme, že $\mathbf{c}(t)$ $t \in \langle 0, a\rangle$ je obvod křivočarého mnohoúhelníka na ploše $\mathbf{p}$ s vnitřními úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ u svých vrcholů. Pak

$$\int_{Int\mathbf{c}} K\, dS = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi - \int_{\mathbf{c}} k_g\, ds.$$

Eulerova charakteristika plochy S je číslo, určené následujícím způsobem: zvolme trinagulaci S a označme V počet všech vrcholů, H počet všech hran, a S počet všech mnohoůhelníků (stěn). Pak Eulerova charakteristika χ se definuje vztahem

$$\chi = V - H + S.$$

Gauss-Bonnetova věta Nechť S je kompaktní plocha, pak

$$\int_S K\, dS = 2\pi\chi,$$

kde K je Gaussova křivost a χ je Eulerova charakteristika S.

Příklady

1. Jaká je geodetická křivost šroubovice

$$\mathbf{c}(t) = [a\cos t, a\sin t, bt], a > 0$$

   (a) jako křivky na ploše

$$\mathbf{p}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, bv],$$

   (0,5 bodu)

   (b) jako křivky na válcové ploše. *(0,5 bodu)*

2. Ověřte zda parametrické křivky na kuželi $\mathbf{p}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, u]$ splňují soustavu diferenciálních rovnic pro geodetiky. *(0,5 bodu)*

3. Ověřte zda křivky

   (a) $u(t) = t, v(t) = 0$ *(0,5 bodu)*

(b) $u(t) = t, v(t) = t$ *(0,5 bodu)*

(c) $u^2 + v^2 = 1$ *(0,5 bodu)*

splňují soustavu diferenciálních rovnic pro geodetiky na sféře dané stereografickou projekcí

$$\mathbf{p}(u,v) = \left[\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, 1 - \frac{2}{1+u^2+v^2}\right], u, v \in \mathbb{R}.$$

4. Spočtete Eulerocu charakteristiku pro sféru pomocí triangulace. *(0,5 bodu)*

5. Spočtete Eulerovu charakteristiku pro torus pomocí triangulace. *(0,5 bodu)*

6. Ověřte výpočtem Gauss-Bonetovu větu

$$\int_S K\, dS = 2\pi\chi,$$

(a) na sféře, *(0,5 bodu)*

(b) na toru. *(0,5 bodu)*

7. Ověřte výpočtem Gauss-Bonetovu větu pro kružnici $\mathbf{c}(t) = [\cos t, \sin t, 1]$ na sféře

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

(0,5 bodu)

8. Pomocí jedné z Gauss-Bonetových vět ukažte, že na ploše s konstantní zápornou Gaussovou křivostí neexistuje jednoduchá uzavřená geodetika. *(0,5 bodu)*

9. Pomocí Gauss-Bonetovy věty ověřte vzorce pro obsah trojúhelníku na jednotkové sféře a v hyperbolické geometrii (K=-1). *(0,5 bodu)*

Několik příkladů na zopakování

10. Nalezněte parametrizaci obloukem křivky $\mathbf{c}(t) = [e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t], t > 0$. *(0,5 bodu)*

11. Nechť $\mathbf{c}(s)$ je křivka parametrizovaná obloukem ležící na sféře. Ukažte, že pak platí

$$\frac{1}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0$$

pokud má výraz na levé straně smysl a kde κ a τ jsou křivost a torze křivky $\mathbf{c}(s)$. A naopak pokud křivka $\mathbf{c}(s)$ splňuje zadaný vztah, pak leží na nějaké kulové ploše. *(1 bod)*

12. Parametrizujte křivku v prostoru splňující rovnice

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x = \cos e^z$$

a napište rovnici její oskulační roviny procházející bodem $[0, 1, ln\frac{\pi}{2}]$. *(0,5 bodu)*

Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 12 - výsledky

1. (a) $\kappa_g = \frac{a}{a^2+b^2}$ *(0,5 bodu)*
   (b) $\kappa_g = 0$, jedná se o geodetiku na válcové ploše. *(0,5 bodu)*
2. Soustava rovnic je $2\ddot{u} = u\dot{v}^2, u\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{v} = 0$. Křivka $\mathbf{p}(t, const)$ splňuje rovnice, jedná se tedy o geodetiku. Křivka $\mathbf{p}(const, t)$ soustavu rovnic nesplňuje, o geodetiku se nejedná. *(0,5 bodu)*
3. (a) TODO *(0,5 bodu)*
   (b) TODO *(0,5 bodu)*
   (c) TODO *(0,5 bodu)*
4. Eulerova charakteristika sféry je $\chi = 2$. *(0,5 bodu)*
5. Eulerova charakteristika toru je $\chi = 0$. *(0,5 bodu)*
6. (a) TODO *(0,5 bodu)*
   (b) TODO *(0,5 bodu)*
7. Kružnice je parametrizována obloukem, geodetická křivost je $\kappa_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$, sféra má $K = \frac{1}{2}$, obě strany rovnosti vyjdou $\pi(2-\sqrt{2})$ *(0,5 bodu)*
8. Sporem nechť je γ jednoduchá uzavřená geodetika potom posle Gauss-Bonetovy věty platí $0 = \int \kappa_g ds = 2\pi - \int_{Int\mathbf{c}} K dS \geq 2\pi$. *(0,5 bodu)*
9. Trojúhelníky na sféře i v hyperbolické geometrii mají strany geodetiky, proto geodetická křivost bude nulová. Dál už stačí cosadit do vzorce. *(0,5 bodu)*

   Několik příkladů na zopakování

10. $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{s^2+4}+s), \frac{1}{2}(\sqrt{s^2+4}-s), \sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{2}(\sqrt{s^2+4}+s)\right)\right]$ *(0,5 bodu)*
11. TODO *(1 bod)*
12. $\mathbf{c}(z) = [\cos e^z, \sin e^z, z]$, oskulační rovina $\frac{\pi}{2}x - y - \frac{\pi^2}{4}z + 1 + \frac{\pi^2}{4}ln\frac{\pi}{2} = 0$. *(0,5 bodu)*