Geometrie pro počítačovou grafiku

Příklad 1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : x + 2y + 3 = 0$.

Definice 2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

Lemma 3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $||g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))|| = ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in Im(f)$, pak nalezneme $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

  $$||f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{P} - \mathbf{Q}|| = ||f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

  Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

$\square$

Věta 4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \ \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)^T = \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})|| = ||\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})|| &= \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} &= ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}|| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}+\mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0,0,\dots,0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ pro $i \in \{1,\dots n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$||\mathbf{f}_i|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{O}|| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j|| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = ||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j||^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)\cdot(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1|\cdots|\mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, které je podle prvním části důkazu shodné a pro jeho invers platí $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i. Definujme konečně $h = g^{-1}\circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))$. Pak platí

$$||h(\mathbf{Y}) - h(O)||^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{O}||^2,$$

$$\begin{aligned} ||h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)||^2 = ||h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i||^2 &= h_1^2(\mathbf{Y}) + \cdots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \cdots + (y_i - 1)^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i||^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že $\mathbb{R}^n$ je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. □

Důsledek 5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{p}), \quad (g\circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Věta 6. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří ortonormální podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin).

Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Věta 8. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
  - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
  - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1. V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
  - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí .
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastím číslem -1 a
  - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
  - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Důkaz. Dokážeme jen první tvrzení o přímých shodnostech. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & \mathbf{p} \end{array} \right)$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům $\mathbf{A}$. Jestliže je f, přímé, pak $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & \mathbf{p} \end{array} \right)$ nemá řešení).

- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos\alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné $\mathbf{p}$ a tey f má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. Lze psát

  $$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{AS} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

  takže jde o otočení kolem $\mathbf{S}$. Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě $\mathbf{A}$ nemá žádné vlastní vektory, tedy f nemá samodružné směry.

$\square$